И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

Четырёхмерная геометрия

Элективный курс

для учащихся 10—11 классов общеобразовательных учреждений

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК514.11
ББК22.151.0
С50

Смирнов В. А., Смирнова И. М.

С50 Четырёхмерная геометрия. Элективный курс для учащихся 10—11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: МЦНМО, 2010. — 184 с.

ISBN 978-5-94057-676-1

Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация. Аннотация.

ББК 22.151.0

ISBN 978-5-94057-676-1

Оглавление

Введение

Многомерные пространства возникают естественным образом в различных задачах математики, физики и др. наук.

Современная геометрия изучает многомерные пространства и свойства фигур, расположенных в этих пространствах.

Мы живем в четырехмерном пространстве, в котором роль четвертого измерения играет время.

Настоящая книга посвящена геометрии четырехмерного пространства. Изложение ведется по аналогии с изложением геометрии трехмерного пространства, которое обычно дается в учебниках по геометрии для 10—11 классов.

Знакомство с основными понятиями четырехмерной геометрии, выяснение взаимного расположения прямых, плоскостей в четырехмерном пространстве, позволяет не только узнать, как устроено четырехмерное пространство, но и лучше понять строение обычного трехмерного пространства, сформировать необходимые пространственные представления.

Многие формулировки определений, свойств и теорем четырехмерной геометрии, могут быть установлены по аналогии с соответствующими формулировками планиметрии и стереометрии. Поиск таких аналогий, нахождение аналогичных формулировок, проведение доказательств по аналогии, позволяет освоить один из основных методов математики — метод аналогий.

Решение задач и доказательство теорем четырехмерной геометрии в гораздо большей степени, чем решение задач и доказательстве теорем обычной геометрии, способствует развитию логического мышления, поскольку опирается на логические рассуждения, в то время, как наглядные представления, связанные с трехмерным пространством, не всегда помогают, а в некоторых случаях и мешают найти правильные решения.

Переход от трехмерной к четырехмерной геометрии является наиболее важным шагом при изучении многомерной геометрии. Дальнейшее увеличение размерности не создает каких-либо принципиально новых эффектов. Основные свойства, теоремы и задачи n-мерной геометрии, при $n > 4$, формулируются, доказываются и решаются по аналогии со свойствами, теоремами и задачами четырехмерной геометрии.

Настоящая книга предназначена для тех, кто хочет более глубоко понять геометрию, развить свои пространственные представления, овладеть методом аналогий, познакомиться с современными направлениями развития геометрии, подготовиться к продолжению своего математического образования в университете.

Ее можно использовать для проведения элективного курса, а также для самостоятельного углубленного изучения геометрии.

В качестве основного учебника по геометрии для 10—11 классов рекомендуем использовать учебник:

Смирнова И. М., *Смирнов В.А.* Геометрия 10—11 кл.: Учебник по геометрии для общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). М.: Мнемозина, 2009.

Глава 1

Начала четырехмерной геометрии

§1. Основные понятия и аксиомы

Основными понятиями четырехмерной геометрии являются *точка*, *прямая*, *плоскость*, *пространство* и *гиперпространство*.

Точки будем изображать, как показано на рисунке 1.1, и обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, …

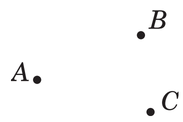


Рис. 1.1

Прямые будем изображать, как показано на рисунке 1.2, и обозначать строчными латинскими буквами a, b, c, …

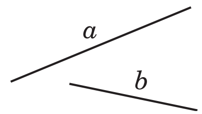


Рис. 1.2

Плоскости будем изображать, как показано на рисунке 1.3, и обозначать греческими буквами α, β, γ, …

Рис. 1.3

Пространства будем изображать, как показано на рисунке 1.4, и обозначать прописными греческими буквами Ω, Σ, Ψ, …

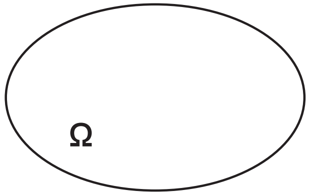


Рис. 1.4

Напомним аксиомы стереометрии (трехмерной геометрии), перечисленные, например, в учебнике [1].

1. Через любые две точки пространства проходит единственная прямая.

2. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

4. Существуют, по крайней мере, четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

5. Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются аксиомы планиметрии.

По аналогии с аксиомами стереометрии сформулируем аксиомы четырехмерной геометрии.

Первые две из них повторяют первые две аксиомы стереометрии.

1. *Через любые две точки гиперпространства проходит единственная прямая.*

2. *Через любые три точки гиперпространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.*

Третья аксиома дополняет первые две аксиомы.

3. *Через любые четыре точки гиперпространства, не принадлежащие одной плоскости, проходит единственное пространство.*

Четвертая аксиома аналогична третьей аксиоме стереометрии, в которой прямая заменяется на плоскость, а плоскость — на пространство.

4. *Если два пространства в гиперпространстве имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости.*

Пятая и шестая аксиомы аналогичны четвертой и пятой аксиомам стереометрии.

5. *В гиперпространстве существуют, по крайней мере, пять точек, не принадлежащих одному пространству.*

6. *Для прямых, плоскостей и пространств гиперпространства выполняются аксиомы геометрии.*

Так же как и для пространства, для гиперпространства определяются понятия движения, равенства и подобия. А именно, *движением* называется преобразование гиперпространства, сохраняющее расстояния между точками, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = AB$. Две фигуры F и F' в гиперпространстве называются *равными*, если существует движение, переводящее одну из них в другую.

Подобием называется преобразование гиперпространства, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = kAB$, где k — некоторое положительное число, называемое коэффициентом подобия. Две фигуры F и F' в гиперпространстве называются *подобными*, если существует подобие, переводящее одну из них в другую.

Упражнения

1. Сколько прямых проходит через различные пары из: а) трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек; г) n точек гиперпространства, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

2. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из: а) четырех точек; б) пяти точек; в) шести точек; г) n точек гиперпространства, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

3. Сколько пространств проходит через различные четверки из: а) пяти точек; б) шести точек; в) n точек гиперпространства, никакие пять из которых не принадлежат одному пространству?

4. Могут ли два пространства иметь: а) только одну общую точку; б) только три общие точки; в) только одну общую прямую; г) только одну общую плоскость; д) две общие плоскости?

§ 2. Следствия из аксиом

Используя аксиомы стереометрии, с помощью логических рассуждений, устанавливают справедливость других свойств. Рассмотрим некоторые из них.

В курсе стереометрии доказывалось следующее свойство.

Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости.

Используя аналогию, при которой плоскость заменяется на пространство, а прямая — на плоскость, получаем следующие свойства.

Свойство 1. Если прямая имеет с пространством две общие точки, то она лежит в этом пространстве.

Доказательство. Пусть прямая a имеет с пространством Ω две общие точки A_1 и A_2 (рис. 2.1). Так как в пространстве Ω выполняются аксиомы геометрии, то в этом пространстве через точки A_1,

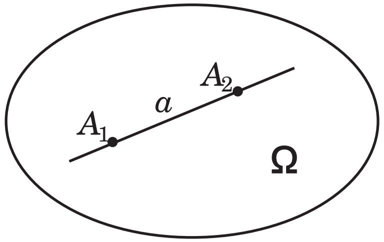


Рис. 2.1

A_2 проходит единственная прямая. Если бы она не совпадала с прямой a, то мы получили бы две прямые в гиперпространстве, проходящие через две данные точки, а это противоречит аксиоме 1. Следовательно, эти прямые совпадают, и, значит, прямая a лежит в пространстве Ω. □

Свойство 2. Если плоскость имеет с пространством три общие точки, не принадлежащие одной прямой, то она лежит в этом пространстве.

Доказательство. Пусть плоскость α имеет с пространством Ω три общие точки A_1, A_2, A_3, не принадлежащие одной прямой (рис. 2.2). Так как в пространстве Ω выполняются аксиомы геометрии, то в этом пространстве через точки A_1, A_2, A_3 проходит единственная плоскость. Если бы она не совпадала с плоскостью α, то мы получили бы две плоскости в гиперпространстве, проходящие через три данные точки, а это противоречит аксиоме 2. Следовательно, эти плоскости совпадают, и, значит, плоскость α лежит в простран-

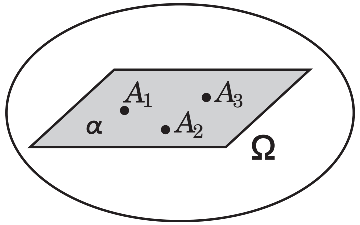


Рис. 2.2

стве Ω. В курсе стереометрии доказывалось, что через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость. □

Используя аналогию, при которой прямая заменяется на плоскость, получаем следующее свойство.

Свойство 3. Через плоскость и не принадлежащую ей точку проходит единственное пространство.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит плоскости α (рис. 2.3). Так как на плоскости α выполняются аксиомы планиметрии, то на ней найдутся точки B, C, D, не принадлежащие одной прямой. В силу аксиомы 3, через точки A, B, C, D проходит единственная пространство Ω. По Свойству 2, плоскость α лежит в этом пространстве. Значит, пространство Ω проходит через плоскость α и точку A.

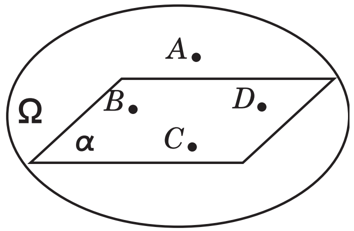


Рис. 2.3

Покажем, что эта пространство единственно. Действительно, всякое пространство, проходящая через плоскость α и точку A, будет проходить также через точки A, B, C, D. По аксиоме 3, оно должно совпадать с пространством Ω. □

Упражнения

1. Даны пять точек, не принадлежащих одному пространству. Могут ли четыре из них принадлежать одной плоскости?

2. Докажите, что через две плоскости, имеющих общую прямую, проходит единственное пространство.

3. Докажите, что в гиперпространстве существуют две плоскости, имеющие только одну общую точку.

4. Докажите, что через плоскость и пересекающую ее прямую проходит единственное пространство.

5. Докажите, что для любого пространства существуют точки, ему не принадлежащие.

6. Даны плоскость и не принадлежащая ей точка. Докажите, что все прямые, пересекающие данную плоскость и проходящие через данную точку, лежат в одном пространстве.

7. Докажите, что если плоскость не лежит в пространстве и имеет с этим пространством общую точку, то она пересекает данное пространство по прямой.

8. Докажите, что любое пространство разбивает гиперпространство на две части (полугиперпространства) так, что отрезок, соединяющий две точки из разных частей, пересекает данное пространство, а отрезок, соединяющий две точки из одной части, нет.

§ 3. Фигуры в гиперпространстве

Среди гиперпространственных фигур выделяются гипермногогранники.

Напомним, что многогранником в пространстве называется фигура, ограниченная конечным числом многоугольников, называемых гранями этого многогранника.

Определение гипермногогранника дадим по аналогии с определением многогранника.

Гипермногогранником называется фигура в гиперпространстве, ограниченная конечным числом многогранников, называемых *гипергранями*. Грани, ребра и вершины этих многогранников называются соответственно *гранями, ребрами* и *вершинами* гипермногогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной гиперграни, называются *диагоналями* многогранника.

Приведем примеры гипермногогранников и дадим их определения по аналогии с определениями соответствующих многогранников [1].

Гиперкуб — гипермногогранник, гипергранями которого являются восемь кубов. На рисунках 3.1 и 3.2 даны различные изображения гиперкуба.

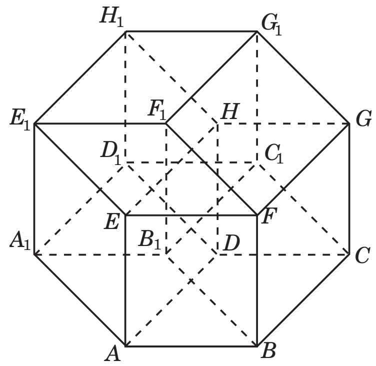


Рис. 1

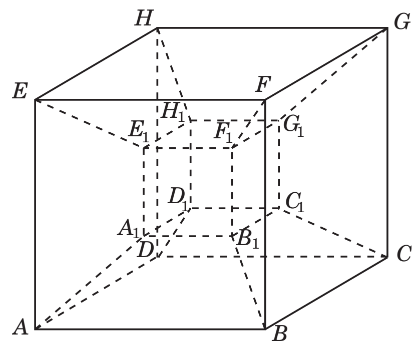


Рис. 2

Гиперпараллелепипед — гипермногогранник, гипергранями которого являются восемь параллелепипедов (рис. 3.3).

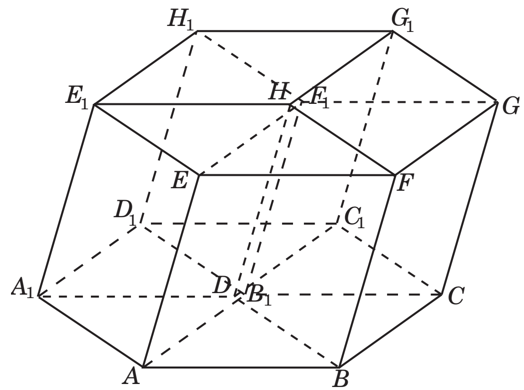


Рис. 3.3

Гиперпараллелепипед, у которого все гиперграни — прямоугольные параллелепипеды, называется *прямоугольным*.

Гиперпризма — гипермногогранник, гипергранями которого являются два равных многогранника, называемых *основаниями* гиперпризмы, и параллелепипедов, имеющих общие грани с каждым из оснований и называемых *боковыми гипергранями*.

На рисунке 3.4 изображена гиперпризма, в основании которой тетраэдр. Такую гиперпризму будем называть *тетраэдральной*.

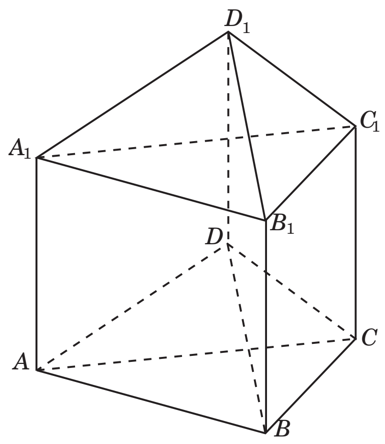


Рис. 3.4

На рисунке 3.5 изображена гиперпризма, в основании которой октаэдр.

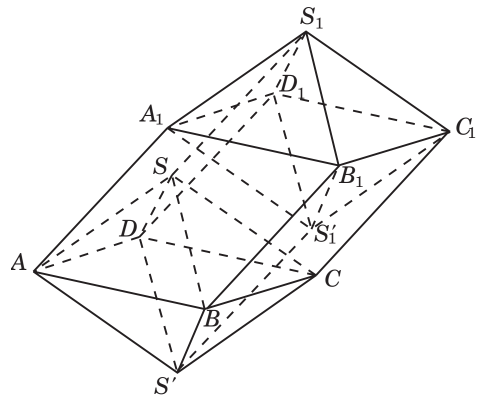


Рис. 3.5

Гиперпризма, боковыми гипергранями которой являются прямоугольные параллелепипеды, называется *прямой*. В противном случае гиперпризма называется *наклонной*.

Прямая гиперпризма, основаниями которой являются правильные многогранники, называется *правильной*.

Гиперпирамида — гипермногогранник, гипергранями которого являются многогранник, называемый *основанием* гиперпирамиды, и пирамид, имеющих общую вершину, называемых *боковыми гипергранями*. Общая вершина боковых гиперграней называется *вершиной* гиперпирамиды.

На рисунке 3.6 изображен гипертетраэдр — гипирпирамида, гипергранями которой являются пять тетраэдров.

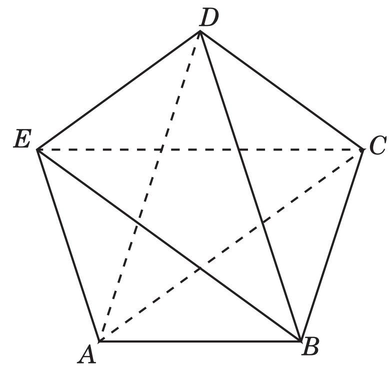


Рис. 3.6

Гиперпирамида, в основании которой правильный многогранник, и все боковые гиперграни — правильные пирамиды, называется *правильной*.

Гипертетраэдр, гранями которого являются правильные тетраэдры, называется *правильным*.

Упражнения

1. Изобразите:

а) гиперпараллелепипед;

б) гиперпризму, в основании которой четырехугольная пирамида;

в) гиперпирамиду, в основании которой куб.

2. Сколько вершин имеют: а) гиперкуб; б) гипертетраэдр; в) тетраэдральная гиперпризма?

3. Сколько ребер имеют: а) гиперкуб; б) гипертетраэдр; в) тетраэдральная гиперпризма?

4. Сколько граней имеют: а) гиперкуб; б) гипертетраэдр; в) тетраэдральная гиперпризма?

5. Сколько гиперграней имеют: а) гипертетраэдр; б) тетраэдральная гиперпризма?

6. Сколько диагоналей имеет: а) гиперкуб; б) гипертетраэдр; в) тетраэдральная гиперпризма?

7. Какое наименьшее число вершин может иметь гипермногогранник?

8. Приведите пример гипермногогранника, у которого шесть вершин.

9. Какое наименьшее число ребер может иметь гипермногогранник?

10. Приведите пример гипермногогранника, у которого 14 ребер.

Глава 2

Взаимное расположение прямых, плоскостей и пространств

§ 4. Взаимное расположение прямых

Напомним, что две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Аналогичным образом дается определение параллельности прямых в гиперпространстве.

Определение. Две прямые в гиперпространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$ (рис. 4.1).

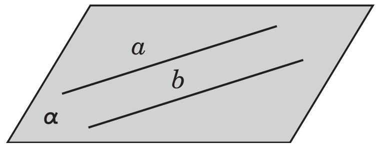


Рис. 4.1

Два отрезка будем называть параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

Теорема. *Через точку в гиперпространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.*

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой b (рис. 4.2). Проведем через эту прямую и точку A плоскость α. Эта плос-

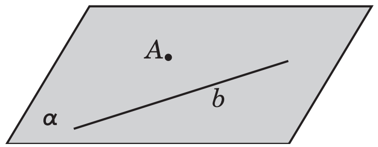
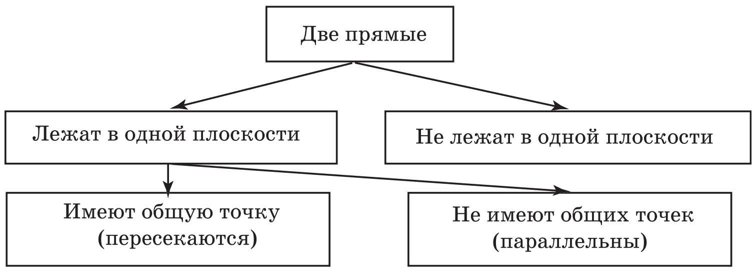


Рис. 4.2

кость единственна. В плоскости α через точку A проходит единственная прямая, назовем ее a, параллельная прямой b. Она и будет искомой прямой, параллельной данной. □

Определение. Две прямые в гиперпространстве называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Представим случаи взаимного расположения двух прямых в гиперпространстве в виде следующей схемы.



Упражнения

1. Запишите ребра гиперкуба $A\ldots H_1$, параллельные ребру AB.
2. Имеются ли параллельные ребра у: а) гипертетраэдра; б) тетраэдральной гиперпризмы?
3. Сколько пар параллельных ребер имеет: а) гиперкуб; б) гипертетраэдр; в) тетраэдральная гиперпризма?
4. Сколько прямых, скрещивающихся с данной прямой, проходит через точку в гиперпространстве, не принадлежащую этой прямой?
5. Запишите ребра гиперкуба $A\ldots H_1$, скрещивающиеся с ребром AB.
6. Запишите ребра гипертетраэдра $ABCDE$, скрещивающиеся с ребром AB.
7. Запишите ребра гиперпризмы $A\ldots D_1$, скрещивающиеся с ребром AB.
8. Сколько пар скрещивающихся ребер имеет: а) гиперкуб; б) гипертетраэдр?
9. Могут ли две прямые не лежать в одном пространстве?
10. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые проходит единственное пространство.

§ 5. Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим вопрос о том, как в гиперпространстве могут располагаться прямая и плоскость.

Прямая может лежать в плоскости, т. е. все точки прямой принадлежат плоскости. Прямая может пересекать плоскость, т. е. иметь с плоскостью только одну общую точку. Наконец, прямая может не иметь с плоскостью ни одной общей точки. В последнем случае прямая и плоскость могут лежать в одном пространстве или не лежать в одном пространстве.

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они лежат в одном пространстве и не имеют ни одной общей точки.

Параллельность прямой a и плоскости β обозначается $a \parallel \beta$ (рис. 5.1).

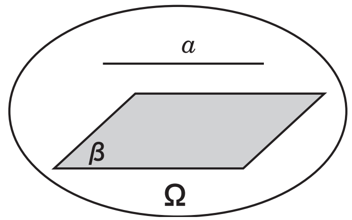
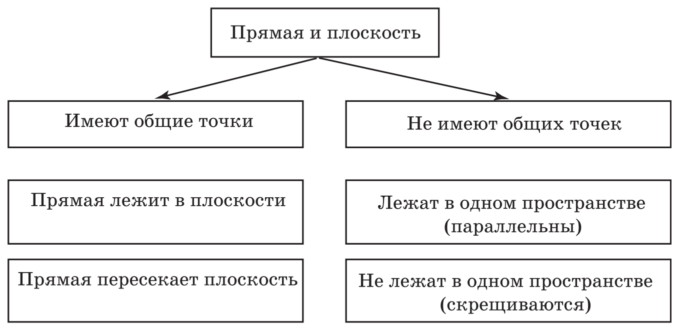


Рис. 5.1

Определение. Прямая и плоскость называются скрещивающимися, если они не лежат в одном пространстве.

Представим случаи взаимного расположения прямой и плоскости в гиперпространстве в виде следующей схемы.



Следующая теорема дает достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

Теорема (Признак параллельности прямой и плоскости). *Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.*

Доказательство. Пусть прямая a не лежит в плоскости β и параллельна прямой b, лежащей в этой плоскости (рис. 5.2). Докажем, что прямая a и плоскость β лежат в одном пространстве. Для этого через прямые a и b проведем плоскость α ($a \parallel b$, по условию), и вос-

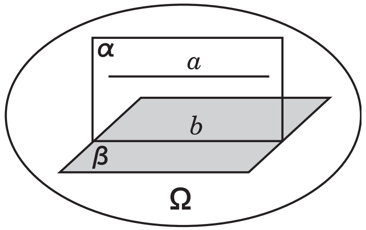


Рис. 5.2

пользуемся тем, что через две плоскости, имеющие общую прямую, проходит единственное пространство Ω (см. упражнение 2 параграфа 2). В пространстве Ω справедливы все теоремы стереометрии и, в частности, признак параллельности прямой и плоскости. Следовательно, $a \parallel \beta$. □

Теорема (Признак скрещивающихся прямой и плоскости). *Если данная плоскость лежит в пространстве, а данная прямая пересе-*

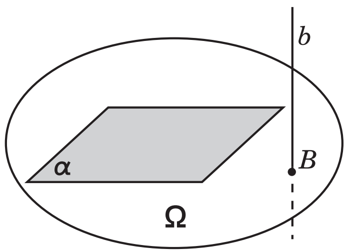


Рис. 5.3

кает это пространство в точке, не принадлежащей данной плоскости, то данные прямая и плоскость скрещиваются.

Доказательство. Пусть плоскость α лежит в пространстве Ω, а прямая b пересекает это пространство в точке B, не принадлежащей плоскости α (рис. 5.3). Если бы эта плоскость и прямая b лежали бы в одном пространстве, то этим пространством должно было быть пространство Ω, так как через плоскость и не принадлежащую ему точку проходит единственное пространство. Но, по условию, прямая b не лежит в пространстве Ω. Следовательно, плоскость α и прямая b не лежат в одном пространстве, т. е. скрещиваются. □

Упражнения

1. В гиперкубе $A\ldots H_1$ укажите какие-нибудь параллельные ребра и грани.
2. Имеются ли параллельные ребра и грани у гипертетраэдра $ABCDE$?
3. В гиперпризме $A\ldots D_1$ укажите какие-нибудь параллельные ребра и грани.
4. В гиперкубе $A\ldots H_1$ укажите какие-нибудь скрещивающиеся ребра и грани.
5. Имеются ли скрещивающиеся ребра и грани у гипертетраэдра $ABCDE$?
6. В гиперпризме $A\ldots D_1$ укажите какие-нибудь скрещивающиеся ребра и грани.
7. Докажите, что через любую точку гиперпространства, не принадлежащую данной плоскости, можно провести прямые, параллельные этой плоскости. Сколько таких прямых?
8. Докажите, что через любую точку гиперпространства, не принадлежащую данной прямой, можно провести плоскость, параллельную этой прямой. Сколько таких плоскостей?
9. Докажите, что через любую точку гиперпространства, не принадлежащую данной плоскости, можно провести прямые, скрещивающиеся с этой плоскостью. Сколько таких прямых?
10. Докажите, что через любую точку гиперпространства, не принадлежащую данной прямой, можно провести плоскость, скрещивающуюся с этой прямой. Сколько таких плоскостей?
11. Верно ли, что если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость?

§ 6. Взаимное расположение прямой и пространства

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении прямой и пространства в гиперпространстве.

Прямая может лежать в пространстве, т. е. все точки прямой принадлежат пространству. Прямая может пересекать пространство, т. е. иметь с пространством только одну общую точку. Наконец, прямая может не иметь с пространством ни одной общей точки.

Определение. Прямая и пространство называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки.

Параллельность прямой a и пространства Ω обозначается $a \parallel \Omega$ (рис. 6.1).

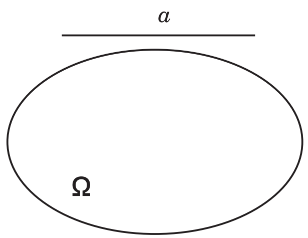
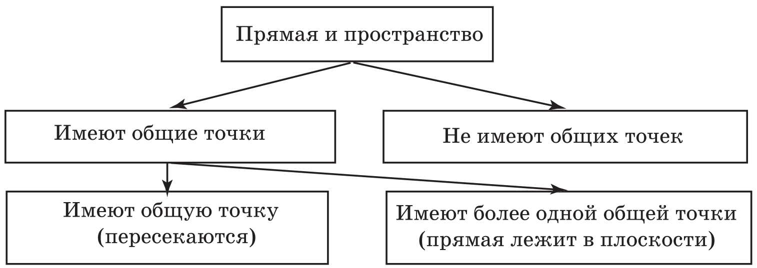


Рис. 6.1

Представим различные случаи взаимного расположения прямой и пространства в виде схемы.



Теорема (Признак параллельности прямой и пространства). *Если прямая, не лежащая в пространстве, параллельна некоторой прямой, лежащей в этом пространстве, то она параллельна самому пространству.*

Доказательство. Пусть прямая a не лежит в пространстве Ω и параллельна прямой b, лежащей в этом пространстве (рис. 6.2). Докажем, что прямая a параллельна пространству Ω. Предположим противное, т. е., что прямая a пересекает пространство Ω в неко-

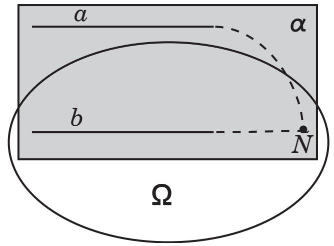


Рис. 6.2

торой точке C. Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямые a и b. Точка C принадлежит как пространству Ω, так и плоскости α, т. е. принадлежит линии их пересечения — прямой b. Следовательно, прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, $a \parallel \Omega$. □

Упражнения

1. В гиперкубе $A \dots H_1$ укажите какие-нибудь параллельные ребра и гиперграни.

2. Имеются ли параллельные ребра и гиперграни у гипертетраэдра $ABCDE$?

3. В гиперпризме $A \dots D_1$ укажите какие-нибудь параллельные ребра и гиперграни.

4. Докажите, что через точку, не принадлежащую данному пространству, можно провести прямые, параллельные этому пространству. Сколько таких прямых?

5. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести пространство, параллельное этой прямой. Сколько таких пространств?

6. Докажите, что если одна из двух параллельных прямых пересекает пространство, то и другая прямая пересекает это пространство.

7. Даны две параллельные прямые. Можно ли через одну из них провести пространство, параллельное другой прямой?

8. Даны две скрещивающиеся прямые. Можно ли через одну из них провести пространство, параллельное другой прямой?

9. Даны параллельные прямая и плоскость. Можно ли через данную плоскость провести пространство, параллельное данной прямой?

10. Даны скрещивающиеся прямая и плоскость. Можно ли через данную плоскость провести пространство, параллельное данной прямой прямой?

§ 7. Взаимное расположение двух плоскостей

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух плоскостей. Две плоскости могут либо лежать в одном пространстве, либо лежать в разных пространствах. В первом случае они могут не иметь ни одной общей точки, или иметь общую прямую. Во втором случае плоскости могут не иметь ни одной общей точки, или иметь одну общую точку.

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они лежат в одном пространстве и не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей α и β обозначается $\alpha \parallel \beta$ (рис. 7.1).

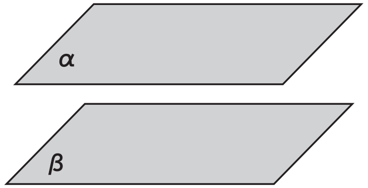
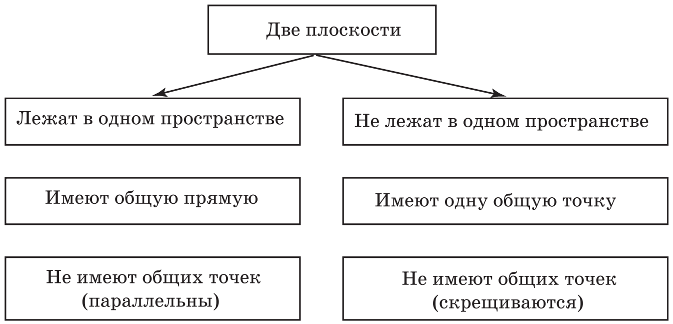


Рис. 7.1

Определение. Две плоскости называются скрещивающимися, если они не лежат в одном пространстве и не имеют общих точек.

Представим различные случаи взаимного расположения двух плоскостей в виде схемы.



Следующая теорема дает достаточное условие параллельности двух плоскостей.

Теорема (Признак параллельности двух плоскостей). *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 плоскости α соответственно параллельны прямым b_1, b_2 плоскости β (рис. 7.2). Покажем, что плоскости α и β лежат в одном пространстве. Действительно, рассмотрим пространство Ω, содержащее прямые a_1 и b_2. В этом пространстве будут лежать прямые a_2, b_1 и, следовательно, в нем будут лежать данные плоскости α и β. В про-

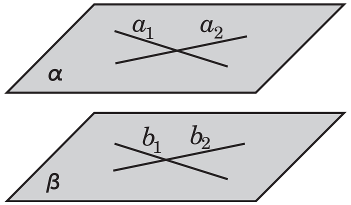


Рис. 7.2

странстве Ω справедливы все теоремы стереометрии и, в частности, признак параллельности двух плоскостей. Следовательно, плоскости α и β параллельны. □

Теорема (Признак скрещивающихся плоскостей). *Если одна плоскость лежит в данном пространстве, а другая плоскость пересекает это пространство по прямой, не имеющей общих точек с первой плоскостью, то эти плоскости скрещиваются.*

Доказательство. Пусть плоскость α лежит в пространстве Ω, а плоскость β пересекает пространство Ω по прямой b, не имеющей

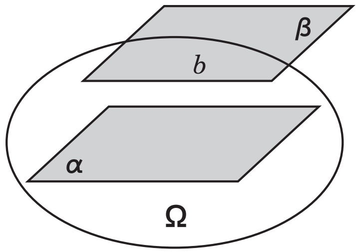


Рис. 7.3

общих точек с плоскостью α (рис. 7.3). Ясно, что плоскости α и β не имеют общих точек. Если бы они лежали в одном пространстве, то этим пространством должно было быть пространство Ω, так как через плоскость и параллельную ему прямую проходит одно пространство. Но, по условию, плоскость β не лежит в пространстве Ω. Следовательно, плоскости α и β скрещиваются. □

Упражнения

1. Укажите какие-нибудь параллельные грани: а) гиперпараллелепипеда $A \ldots H_1$; б) гиперпризмы $A \ldots D_1$.

2. Сколько пар параллельных граней имеется у: а) гиперпараллелепипеда $A \ldots H_1$; б) гиперпризмы $A \ldots D_1$.

3. Имеются ли параллельные грани у гипертетраэдра $ABCDE$?

4. Укажите какие-нибудь скрещивающиеся грани: а) гиперкуба $A \ldots H_1$, б) гиперпризмы $A \ldots D_1$.

5. Сколько пар скрещивающихся граней имеется у: а) гиперкуба $A \ldots H_1$, б) гиперпризмы $A \ldots D_1$.

6. Имеются ли скрещивающиеся грани у гипертетраэдра $ABCDE$?

7. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная исходной плоскости.

8. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости можно провести плоскость, скрещивающуюся с данной. Сколько таких плоскостей?

9. Докажите, что если одна из двух параллельных плоскостей имеет с данной плоскостью только одну общую точку, то и другая плоскость имеет с этой плоскостью только одну общую точку.

§ 8. Взаимное расположение плоскости и пространства

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении плоскости и пространства в гиперпространстве.

Плоскость может лежать в пространстве, т. е. все точки плоскости принадлежат пространству. Плоскость может не иметь с пространством общих точек, или иметь общую прямую.

Определение. Плоскость и пространство называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки.

Параллельность плоскости α и пространства Ω обозначается $\alpha \parallel \Omega$ (рис. 8.1).

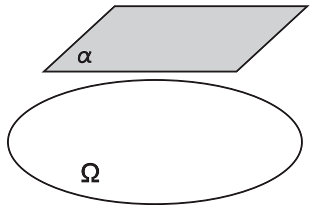


Рис. 8.1

Теорема. *Если плоскость не лежит в пространстве и имеет с этим пространством общую точку, то она пересекает пространство по прямой.*

Доказательство. Пусть плоскость α имеет с пространством Ω общую точку C, и существует точка A этой плоскости, не принадлежащая пространству Ω (рис. 8.2). Через плоскость α проведем какое-нибудь другое пространство Σ. Это пространство имеет общую точку с пространством Ω и, следовательно, имеет с ним общую плоскость γ. Плоскости α и γ лежат в пространстве Ω, имеют общую точку и не совпадают. Следовательно, они пересекаются по прямой c. Эта прямая лежит как в плоскости α так и в пространстве Ω.

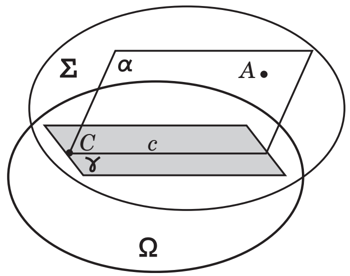
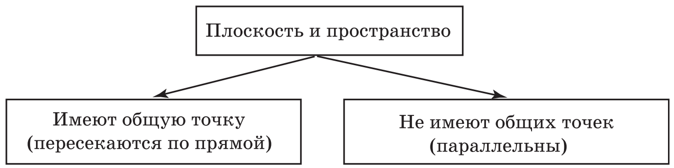


Рис. 8.2

Представим различные случаи взаимного расположения плоскости и пространства в виде схемы.



□

Теорема (Признак параллельности плоскости и пространства). *Если плоскость, не лежащая в пространстве, параллельна какой-нибудь плоскости, лежащей в этом пространстве, то она параллельна и самому пространству.*

Доказательство. Пусть плоскость α не лежит в пространстве Ω и параллельна плоскости β, лежащей в этом пространстве (рис. 8.3). Докажем, что плоскость α параллельна пространству Ω. Предположим противное, т. е., что плоскость α пересекает пространство Ω по некоторой прямой c. Рассмотрим пространство Σ, проходящее через

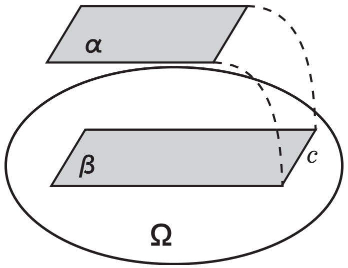


Рис. 8.3

плоскости α и β (они параллельны по условию). Прямая c лежит как в пространстве Ω, так и в пространстве Σ. Следовательно, она лежит в их пересечении — плоскости β. Таким образом, плоскости α и β пересекаются, что противоречит условию. □

Упражнения

1. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) укажите какие-нибудь параллельные грани и гиперграни.
2. В гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4) укажите какие-нибудь параллельные грани и гиперграни.
3. Верно ли утверждение о том, что две плоскости, параллельные одному и тому же пространству, параллельны между собой?
4. Одна из двух параллельных плоскостей параллельна пространству. Верно ли утверждение, что и вторая плоскость параллельна этому пространству?
5. Даны две параллельные плоскости. Через каждую из них проведено пространство. Эти два пространства пересекаются. Как расположена их плоскость пересечения относительно данных плоскостей?

6. Даны два пересекающихся пространства. Существует ли пространство, пересекающее два данных пространства по параллельным плоскостям?
7. Дан гиперпараллелепипед $A\ldots D_1$ (рис. 3.3). Через грань $ABCD$ проведено пространство Ω, не совпадающее с пространством параллелепипеда. Докажите, что грань $A_1B_1C_1D_1$ параллельна Ω.
8. Докажите, что через точку, не принадлежащую данному пространству, проходит плоскость, параллельная этому пространству. Сколько таких плоскостей?
9. Докажите, что если две плоскости параллельны, то через одну из них можно провести пространство, параллельное другой. Сколько таких пространств?
10. Докажите, что если плоскость проходит через прямую, параллельную пространству, и пересекает это пространство, то линия пересечения параллельна данной прямой.
11. Докажите, что если плоскость параллельна плоскости, пересекающей данное пространство, то она также пересекает это пространство по прямой, параллельной линии пересечения первой плоскости с этим пространством.

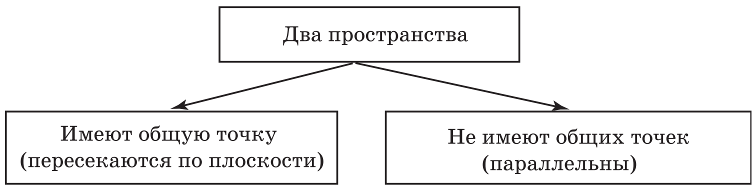
§ 9. Взаимное расположение двух пространств

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух пространств. Согласно аксиоме 5, если два пространства имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости. Отсюда следует, что два пространства либо не имеют общих точек, либо пересекаются по плоскости.

Определение. Два пространства называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Параллельность пространств Φ и Ψ обозначается $\Phi \parallel \Psi$ (рис. 9.1).

Представим различные случаи взаимного расположения двух плоскостей в виде схемы.



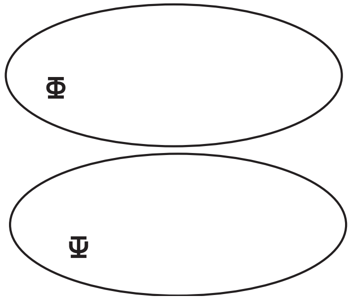


Рис. 9.1

Следующая теорема, связывает понятие параллельности двух пространств с понятием параллельности двух плоскостей.

Теорема. *Если два параллельных пространства пересечены третьим, то плоскости их пересечения параллельны.*

Доказательство. Пусть пространство Ω пересекает параллельные пространства Φ и Ψ по плоскостям α и β, соответственно (рис. 9.2). Докажем, что плоскости α и β параллельны. Действительно, они лежат в одном пространстве — пространстве Ω. Кроме это-

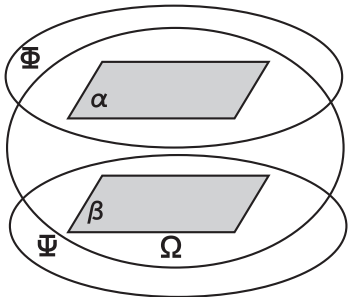


Рис. 9.2

го, они лежат в непересекающихся пространствах, следовательно, и подавно, не пересекаются. Значит, они параллельны. □

Следующая теорема дает достаточное условие параллельности двух пространств.

Теорема (Признак параллельности двух пространств). *Если две пересекающиеся плоскости одного пространства соответственно

параллельны двум плоскостям другого пространства, то эти пространства параллельны.*

Доказательство. Пусть пересекающиеся плоскости α_1, α_2 пространства Φ соответственно параллельны плоскостям β_1, β_2 пространства Ψ (рис. 9.3). Покажем, что пространства Φ и Ψ параллель-

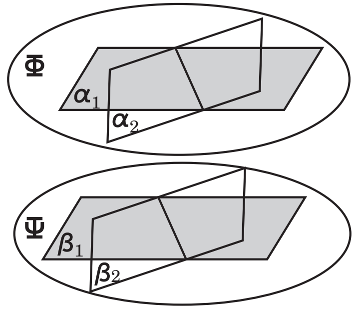


Рис. 9.3

ны. Предположим противное, т. е., что пространства Φ и Ψ пересекаются, и пусть γ — плоскость их пересечения. По признаку параллельности плоскости и пространства, плоскость α_1 параллельна пространству Ψ, а по свойству параллельности плоскости и пространства, она параллельна плоскости γ. Аналогично, плоскость α_2 также параллельна плоскости γ. Таким образом, в пространстве Φ мы имеем две пересекающиеся плоскости, параллельные одной плоскости, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше предположение о том, что пространства Φ и Ψ пересекаются, и, следовательно, они параллельны. □

Упражнения

1. Укажите параллельные пространства, содержащие гиперграни: а) гиперпараллелепипеда $A \dots H_1$ (рис. 3.1); б) гиперпризмы $A \dots D_1$ (рис. 3.4).

2. Имеются ли параллельные пространства (если имеются, то сколько пар), содержащие гиперграни: а) гипертетраэдра $ABCDE$ (рис. 3.6); б) гиперкуба $A \dots H_1$ (рис. 3.1)?

3. Верно ли утверждение: «Если плоскость, лежащая в одном пространстве, параллельна плоскости, лежащей в другом пространстве, то эти пространства параллельны"?

4. Верно ли утверждение: «Если две плоскости, лежащие в одном пространстве, параллельны двум плоскостям, лежащим в другом пространстве, то эти пространства параллельны»?

5. Могут ли быть параллельными два пространства, проходящие через непараллельные плоскости?

6. Могут ли пересекаться пространства, параллельные одной и той же плоскости?

7. Через всякую ли плоскость можно провести пространство, параллельное данному пространству?

8. Докажите, что через точку, не принадлежащую данному пространству, проходит единственное пространство, параллельное исходному пространству.

9. Пространство Ω пересекает пространства Φ и Ψ по параллельным плоскостям, соответственно α и β. Будут ли пространства Φ и Ψ параллельны?

10. Докажите, что если два пространства параллельны третьему, то они параллельны между собой.

Глава 3

Изображение гиперпространственных фигур

§10. Параллельное проектирование. Изображение фигур в параллельной проекции

В стереометрии рассматривалось параллельное проектирование пространства на плоскость, позволяющее изображать на плоскости пространственные фигуры. Здесь мы рассмотрим параллельное проектирование гиперпространства на пространство и параллельное проектирование гиперпространства на плоскость, докажем некоторые их свойства и приведем примеры изображений гиперпространственных фигур.

Пусть Ω — некоторое пространство в гиперпространстве, l — пересекающая его прямая (рис. 10.1). Через произвольную точку A, не принадлежащую прямой l, проведем прямую a, параллельную прямой l. Она пересечет пространство Ω в некоторой точке A', которая называется *параллельной проекцией* точки A на пространство Ω в направлении прямой l. Если точка A принадлежит прямой l, то параллельной проекцией A на пространство Ω считается точка пересечения прямой l с пространством Ω.

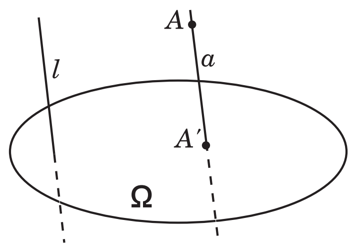


Рис. 10.1

Таким образом, каждой точке A гиперпространства сопоставляется ее проекция A' на пространство Ω. Это соответствие называется *параллельным проектированием* гиперпространства на пространство Ω в направлении прямой l.

Пусть Ф — некоторая фигура в гиперпространстве. Параллельные проекции ее точек на пространство Ω образуют фигуру Ф′, которая называется *параллельной проекцией* фигуры Ф на пространство Ω в направлении прямой l (рис. 10.2). Говорят также, что фигура Ф′ получена из фигуры Ф параллельным проектированием.

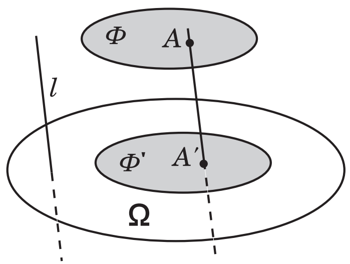


Рис. 10.2

Рассмотрим свойства параллельного проектирования гиперпространства на плоскость, аналогичные свойствам параллельного проектирования пространства на плоскость.

Свойство 1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой l, то ее проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой l, то ее проекцией является прямая.

Доказательство. Пусть прямая k не параллельна и не совпадает с прямой l (рис. 10.3). Возьмем какую-нибудь точку A на прямой k и проведем через нее прямую a, параллельную l. Ее пересечение с пространством Ω даст точку A', являющуюся проекцией точки A. Через прямые a и k проведем плоскость α. Ее пересечением с про-

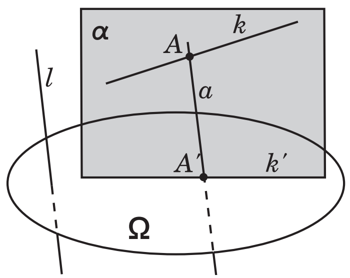


Рис. 10.3

странством Ω будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k. □

Свойство 2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок, в зависимости от того лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой l, или нет. Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, сохраняется. В частности, середина отрезка при параллельном проектировании переходит в середину соответствующего отрезка.

Доказательство. Пусть k' является проекцией прямой k на пространство Ω в направлении прямой l. A, B, C — точки прямой k; A', B', C' — их проекции; a, b, c — соответствующие прямые, проходящие через эти точки и параллельные прямой l (рис. 10.4). Поскольку

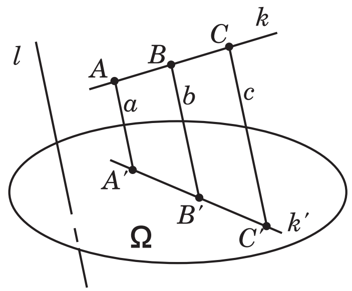


Рис. 10.4

прямые k и k' лежат в одной плоскости, то из теоремы Фалеса планиметрии следует равенство отношений $AB : BC = A'B' : B'C'$. В частности, если точка B — середина отрезка AC, то B' — середина отрезка $A'C'$. □

Свойство 3. Если две параллельные прямые не параллельны прямой l, то их проекции в направлении l могут быть или параллельными прямыми, или одной прямой.

Доказательство. Пусть k_1, k_2 — параллельные прямые, не параллельные прямой l. Так же как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с пространством Ω дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 10.5). Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой, по признаку параллельности плос-

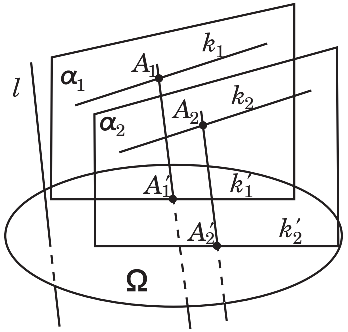


Рис. 10.5

костей (прямая k_1 параллельна прямой k_2, прямая A_1A_1' параллельна прямой A_2A_2'). В силу свойства параллельных плоскостей, линии пересечения этих плоскостей с пространством Ω параллельны. □

Свойство 4. Если фигура F лежит в пространстве, параллельном пространству проектирования Ω, то ее проекция F' на это пространство будет равна фигуре F.

Доказательство. Пусть A,B — точки фигуры F и A',B' — их параллельные проекции на пространство Ω (рис. 10.6). Тогда $ABB'A'$ — параллелограмм. Поэтому параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$ переводит точку B в B'. Поскольку точку B фигуры F можно выбирать произвольно, то этот параллельный перенос переводит фигуру F в фигуру F'. Значит, фигуры F и F' равны.

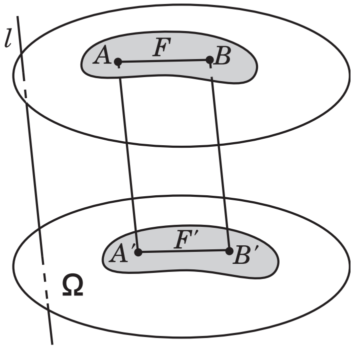


Рис. 10.6

Рассмотрим теперь параллельное проектирование гиперпространства на плоскость в направлении некоторой плоскости.

Пусть в гиперпространстве заданы плоскости π и γ, имеющие только одну общую точку O (рис. 10.7). Определим параллельное проектирование гиперпространства на плоскость π в направлении плоскости γ.

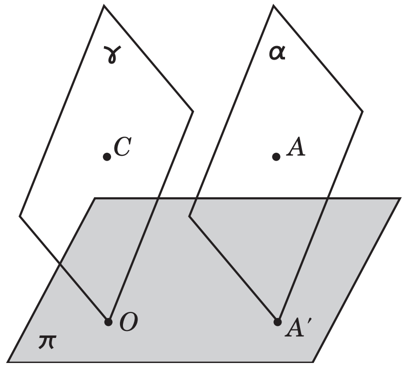


Рис. 10.7

Для произвольной точки A гиперпространства, не принадлежащей плоскости γ, рассмотрим плоскость α, проходящую через эту точку и параллельную плоскости γ. Она пересечет плоскость π в некоторой точке A', которую будем называть *параллельной проекцией* точки A. Если точка A принадлежит плоскости γ, то ее параллельной проекцией будем считать точку O.

Таким образом, каждой точке гиперпространства сопоставляется ее параллельная проекция на плоскость π в направлении плоскости γ. Это соответствие называется *параллельным проектированием* на плоскость π в направлении плоскости γ.

Докажем, что параллельное проектирование гиперпространства на плоскость π в направлении плоскости γ можно представить как композицию параллельного проектирования гиперпространства на некоторое пространство Ω в направлении некоторой прямойl и параллельного проектирования пространства Ω на плоскость π в направлении некоторой прямой k.

Действительно, в плоскости γ возьмем две прямые, пересекающиеся в точке O — точке пересечения плоскостей π и γ. Обозначим Ω пространство, содержащее плоскость π и прямую k (рис. 10.8). Если точка C принадлежит плоскости γ, то ее параллельной проекцией на пространство Ω в направлении прямой l будет некоторая точка K, принадлежащая прямой k, а параллельной проекцией точки K на плоскость π в направлении прямой k будет точка O.

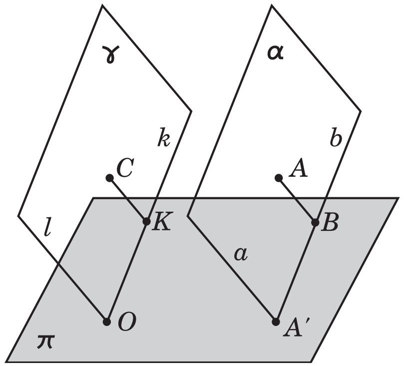


Рис. 10.8

Пусть теперь точка A не принадлежит плоскости γ. Проведем через эту точку плоскость α, параллельную плоскости γ. Заметим, что она будет лежать в пространстве Ω. Пусть A' — точка пересечения плоскостей α и π. В плоскости α проведем прямые a и b, соответственно параллельные прямым l и k и пересекающиеся в точке A'. Тогда параллельной проекцией на пространство Ω в направлении прямой a будет некоторая точка B, принадлежащая прямой b, а параллельной проекцией точки B на плоскость π в направлении прямой a будет точка A'.

Таким образом, указанная композиция параллельных проектирований, примененная к точке гиперпространства, дает ту же самую точку, что и параллельное проектирование гиперпространства на плоскость π в направлении плоскости γ.

Пусть Φ — фигура в гиперпространстве. Ее параллельную проекцию на плоскость π в направлении плоскости γ будем называть *изображением фигуры* Φ на плоскости.

Приведем примеры изображений гиперпространственных фигур на плоскости.

Напомним, как изображается куб. Плоскость проектирования обычно выбирается параллельной одной из граней куба. Эта грань изображается квадратом $ABCD$ (рис. 10.9, а). Затем этот квадрат параллельно переносится на некоторый вектор $\overrightarrow{AA_1}$. В результате получается квадрат $A_1B_1C_1D_1$, изображающий вторую грань куба, параллельную первой (рис. 10.9, б). Соединяя отрезками соответствующие точки A и A_1, B и B_1, C и C_1, D и D_1, и, делая невидимые ребра пунктирными, получаем изображение куба (рис. 10.9, в).

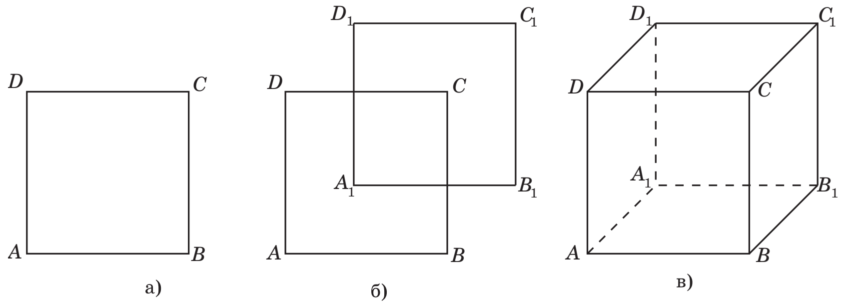


Рис. 10.9

Аналогичным образом строится изображение гиперкуба. Сначала изобразим куб $ABCDEFGH$ (рис. 10.10, а). Затем этот куб параллельно перенесем на некоторый вектор $\overrightarrow{AA_1}$. В результате получим куб $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$. Соединяя отрезками соответствующие точки и, делая невидимые ребра пунктирными, получим изображение куба (рис. 10.10, б).

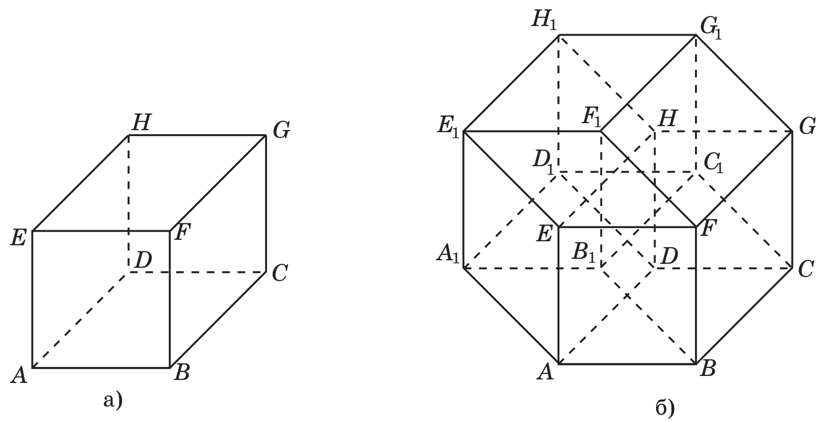


Рис. 10.10

Изображение гиперпараллелепипеда строится аналогичным образом, исходя из того, что все его грани параллелограммы и, следовательно, изображаются параллелограммами (рис. 3.3).

Для того чтобы построить изображение гиперпризмы, достаточно построить изобажение ее основания. Затем параллельно перенести это основание на некоторый вектор и соединить отрезками соответствующие точки. В результате получим изображение гиперпризмы (рис. 3.4, 3.5).

Для того чтобы построить изображение гиперпирамиды, достаточно построить изображение ее основания. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину гиперпирамиды, и соединить ее с вершинами изображения основания (рис. 3.6). Полученные отрезки будут изображать боковые ребра гиперпирамиды, а все вместе будет изображением гиперпирамиды. □

Упражнения

1. В каком случае параллельной проекцией прямой на пространство будет точка?

2. Сколько точек может получиться при параллельном проектировании на пространство трех различных точек гиперпространства?

3. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями на пространство двух пересекающихся прямых?

4. В каком случае параллельной проекцией на пространство двух параллельных прямых является одна прямая?

5. В каком случае параллельной проекцией на пространство двух параллельных прямых являются две точки?

6. Какие фигуры могут быть параллельными проекциями на пространство двух скрещивающихся прямых?

7. Как должны быть расположены прямая и точка в гиперпространстве, чтобы они проектировались на пространство в прямую и точку, принадлежащую этой прямой?

8. Как должны быть расположены две прямые в гиперпространстве, чтобы они проектировались на пространство в прямую и точку, принадлежащую этой прямой?

9. Как должны быть расположены две прямые в гиперпространстве, чтобы они проектировались на пространство в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой?

10. Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?

11. Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?

12. Может ли параллельная проекции отрезка быть больше (меньше) самого отрезка?

13. Верно ли, что если длина отрезка равна длине его параллельной проекции, то отрезок параллелен пространству проектирования?

14. Докажите, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

15. Может ли параллельной проекцией плоскости на пространство быть: а) точка; б) прямая; в) плоскость.

16. Почему для изображения гиперпространственных фигур на плоскости не используется параллельное проектирование на плоскость в направлении прямой?

17. Изобразите прямой и наклонный гиперпараллелепипед.

18. Изобразите гиперпризму, в основании которой лежит правильная четырехугольная пирамида.

19. Изобразите гиперпирамиду, в основании которой лежит правильная треугольная призма.

§ 11. Центральное проектирование. Изображение фигур в центральной проекции

В стереометрии [1], наряду с параллельным проектированием, для изображения пространственных фигур используется центральное проектирование.

По аналогии с центральным проектированием пространства на плоскость, определим центральное проектирование гиперпространства на пространство.

Пусть Ω — некоторое пространство, S — не принадлежащая ему точка, *центр проектирования* (рис. 11.1). Для точки A гиперпространства проведем прямую a, соединяющую эту точку с точкой S. Точка пересечения этой прямой с пространством Ω называется *центральной проекцией* точки A на пространство Ω. Обозначим ее A'. Соответствие, при котором точкам A гиперпространства сопоставляются их центральные проекции A', называется *центральным проектированием*.

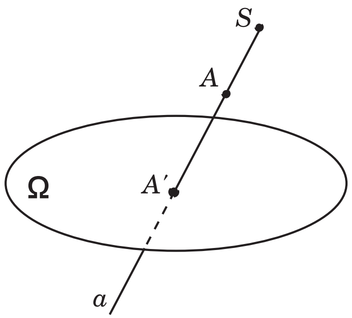


Рис. 11.1

Заметим, что не для каждой точки гиперпространства определена ее центральная проекция. В случае, если прямая a параллельна пространству Ω, точка A не имеет проекции на это пространство.

Если Φ — фигура в гиперпространстве, то проекции ее точек на пространство Ω образуют фигуру Φ', которая называется *центральной проекцией* фигуры Φ на пространство.

Теорема. *Если фигура F расположена в пространстве Σ, параллельном пространству Ω и не проходящим через точку S, то ее центральной проекцией на пространство Ω с центром проектирования S будет фигура F', подобная F.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь прямую c, проходящую через центр проектирования S, пересекающую пространство Ω (рис. 11.2).

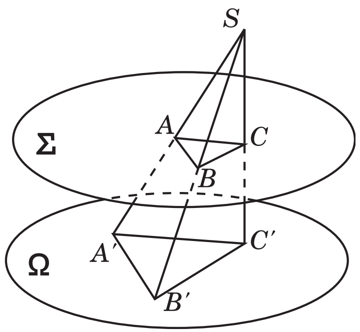


Рис. 11.2

Так как пространства Ω и Σ параллельны, то эта прямая будет пересекать и пространство Σ. Точки пересечения этой прямой с пространствами Ω и Σ обозначим C и C' соответственно. Для точек A и B фигуры F рассмотрим их проекции A', B' и треугольники ABS, $A'B'S$ и ACS, $A'C'S$. Они подобны, и коэффициент подобия k равен отношению $SC : SC'$. Таким образом, определенное преобразование фигуры F в фигуру F' изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры F и F' подобны.

Для изображения гиперпространственных фигуры F на плоскости сначала эту фигуру с помощью центрального проектирования проектируют на пространство Ω и получают фигуру F', а затем, с помощью центрального или параллельного проектирования, фигуру F' проектируют на плоскость π и получают фигуру F'', которую и считают изображением фигуры F.

Именно таким образом получено изображение куба на рисунке 3.2.

Вместо того, чтобы брать композицию двух центральных проектирований, можно использовать одно центральное проектирование гиперпространства на плоскость. А именно, пусть задана плоскость π и скрещивающаяся с ней прямая s. Определим центральное проектирование с центром s на плоскость π.

Для точки A гиперпространства, не принадлежащей прямой s, проведем плоскость α, проходящую через эту точку и прямую s (рис. 11.3). Эта плоскость не может пересекать плоскость π по прямой, так как в этом случае плоскость π и прямая s лежали бы в одном пространстве, а это не так. Значит, плоскость α или не имеет

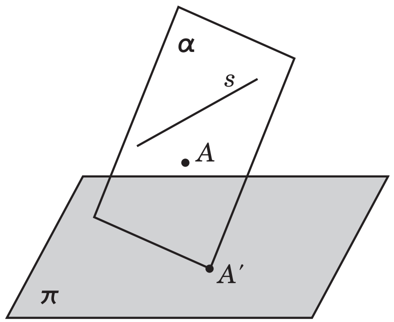


Рис. 11.3

с плоскостью π общих точек, или имеет ровно одну общую точку. Обозначим ее A'. Она называется *центральной проекцией* точки A на плоскость π с центром s.

Соответствие, при котором точкам A гиперпространства сопоставляются их центральные проекции A', называется *центральным проектированием*на плоскость π с центром s.

Заметим, что не для каждой точки гиперпространства определена ее центральная проекция на плоскость.

Докажем, что центральное проектирование гиперпространства на плоскость π с центром проектирования s может быть представлено как композиция центрального проектирования гиперпространства на некоторое пространство Ω с центром проектирования в некоторой точке S и центрального проектирования пространства Ω на плоскость π с центром проектирования в некоторой точке T.

На прямой s, скрещивающейся с плоскостью π, выберем две точки S и T. Обозначим Ω пространство, содержащее плоскость π и точку T (рис. 11.4). Пусть A — точка гиперпространства, не принадлежащая s, α — плоскость, проходящая через эту точку и прямую s, A' — точка пересечения плоскостей α и π. Тогда центральной проекцией этой точки на пространство Ω с центром в точке S будет некоторая точка B на прямой TA', а центральной проекцией точки B на плоскость π с центром проектирования T будет точка A'.

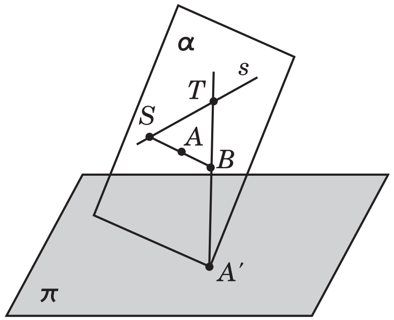


Рис. 11.4

Таким образом, указанная композиция центральных проектирований, примененная к точке A гиперпространства, дает ту же самую точку A', что и центральное проектирование гиперпространства на плоскость π с центром s. □

Упражнения

1. Для всех ли точек гиперпространства существует центральная проекция на пространство? Для каких точек она не существует?

2. В каком случае центральной проекцией двух прямых на пространство будут две параллельные прямые?

3. Могут ли при центральном проектировании на пространство параллельные прямые перейти в пересекающиеся?

4. Для всех ли точек гиперпространства существует центральная проекция на плоскость? Для каких точек она не существует?

5. Почему для изображения гиперпространственных фигур не используется центральное проектирование на плоскость с центром в некоторой точке?

6. Как расположен гиперкуб (рис. 3.2) относительно пространства проектирования и плоскости проектирования?

7. По аналогии с изображением гиперкуба (рис. 3.2), изобразите: а) тетраэдральную гиперпризму; б) гиперпризму, основаниями которой являются треугольные призмы; в) октаэдральную гиперпризму.

§12. Построение сечений гипермногогранников

Рассмотрим вопрос о построении сечений гипермногогранников пространствами.

Выясним сначала, как строится точка пересечения прямой и пространства.

Пусть на плоскости даны изображения точек A_1 и A_2 некоторой прямой a и изображения их параллельных проекций A_1' и A_2' на пространство Ω (рис. 12.1). Тогда точка A пересечения прямых A_1A_2 и

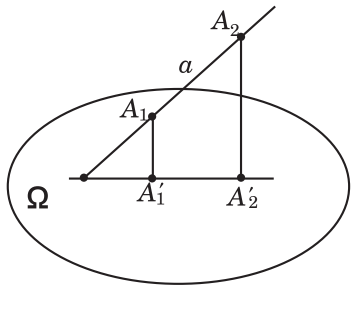


Рис. 12.1

$A_1'A_2'$ будет искомым изображением точки пересечения данной прямой и пространства Ω.

Аналогичным образом стоится линия пересечения плоскости и пространства. А именно, пусть даны изображения точек A_1, A_2 и A_3 плоскости α и изображения их параллельных проекций A_1', A_2' и A_3' на пространство Ω (рис. 12.2). Обозначим C_1, C_2 точки пересечения прямых прямых A_1A_3 и $A_1'A_3'$, A_2A_3 и $A_2'A_3'$, соответственно. Тогда прямая C_1C_2 будет искомым изображением линии пересечения плоскости α и пространства Ω.

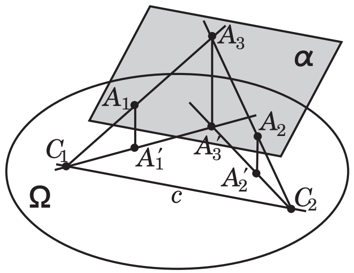


Рис. 12.2

Если пространство Ω параллельно прямой a, лежащей в плоскости α, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения b параллельна прямой a (рис. 12.3).

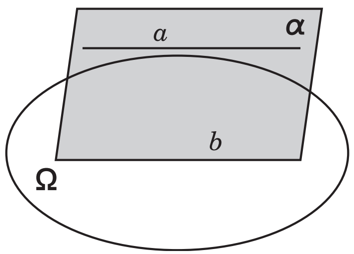


Рис. 12.3

В качестве примера построим сечение правильного гипертетраэдра $ABCDE$ пространством Ω, проходящим через середины P, Q, R, S ребер AB, BC, CD, DE, соответственно (рис. 12.4).

Обозначим U середину ребра AD. Пространство Ω пересекает тетраэдр $ABCD$ по плоскости, содержащей точки P, Q, R. Следователь-

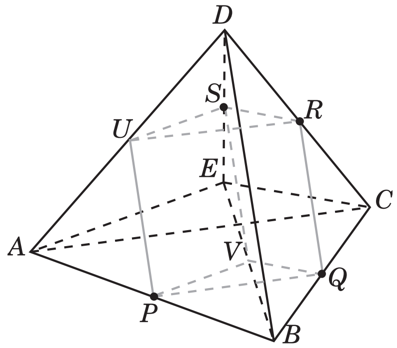


Рис. 12.4

но, их пересечением будет квадрат $PQRT$. Обозначим V середину ребра BE. Пространство Ω пересекает тетраэдр $BCDE$ по плоскости, содержащей точки Q, R, S. Следовательно, их пересечением будет квадрат $QRSV$. Искомым сечением гипертетраэдра $ABCDE$ пространством Ω будет правильная треугольная призма $PQVURS$, все ребра которой равны половине ребра гипертетраэдра.

Построим сечение тетраэдральной гиперпризмы $A\ldots D_1$ пространством Ω, параллельным ребру AA_1 и проходящим через середины P, Q, R ребер AB, BC, CD, соответственно (рис. 12.5). Обозначим S середину ребра AD. Пространство Ω пересекает тетраэдр $ABCD$ по плоскости, содержащей точки P, Q, R. Следовательно, их пересе-

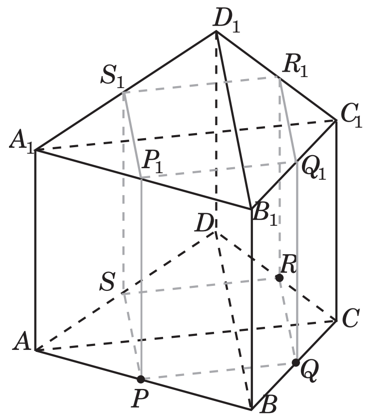


Рис. 12.5

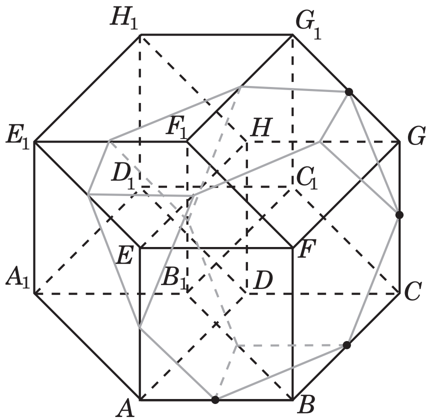


Рис. 12.6

чением будет квадрат $PQRT$. Так как пространство Ω параллельно ребру AA_1, то его линии пересечения PP_1, QQ_1, RR_1, SS_1 с гранями гиперпризмы будут параллельны AA_1. Искомым сечением будет четырехугольная призма $P\ldots S_1$, в основании которой квадрат.

На рисунке 12.6 показано сечение гиперкуба пространством, проходящим через середины P, Q, R, S ребер AB, BC, CG, GG_1, соответственно, являющееся усеченным тетраэдром. Гранями этого многогранника служат четыре правильных шестиугольника и четыре правильных треугольника.

Упражнения

1. Постройте сечение гипертетраэдра $ABCDE$ пространством, проходящим через точки P, C, D, E (рис. 12.7). Какой многогранник является сечением?

2. Постройте сечение гипертетраэдра $ABCDE$ пространством, проходящим через точки P, Q, D, E (рис. 12.8). Какой многогранник является сечением?

3. Постройте сечение гипертетраэдра $ABCDE$ пространством, проходящим через середины ребер AB, AE, DE, параллельно ребру CD (рис. 12.9). Какой многогранник является сечением?

4. Какой многогранник является сечением гипертетраэдра пространством, проходящим через середины четырех ребер, выходящих из одной вершины?

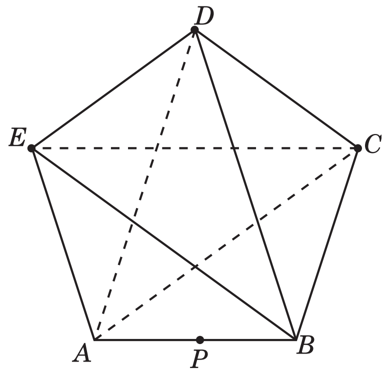


Рис. 7

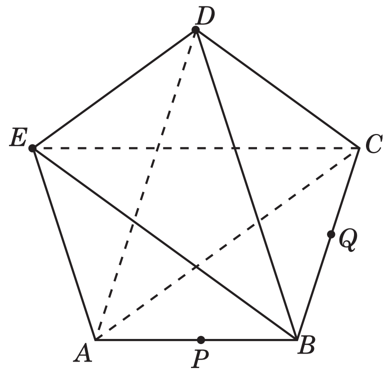


Рис. 8

5. Может ли в сечении гипертетраэдра пространством получиться параллелепипед?

6. Может ли в сечении тетраэдральной гиперпризмы получиться треугольная призма?

7. Постройте сечение тетраэдральной гиперпризмы $A\ldots D_1$ пространством, проходящим через середины P, Q, R, S ребер AB, BC, CC_1, C_1D_1 (рис. 12.10).

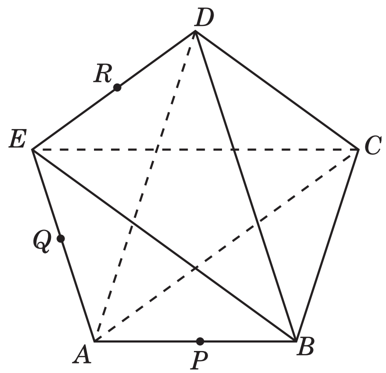


Рис. 9

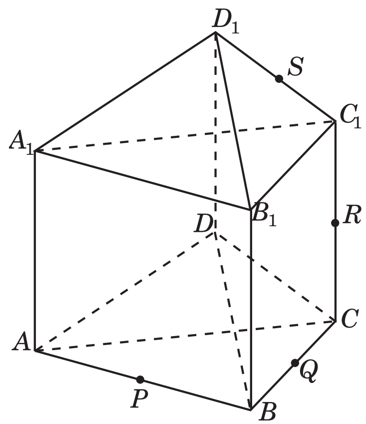


Рис. 10

8. Постройте сечение гиперкуба пространством, проходящим через середины P, Q, R, S ребер AB, AA_1, A_1E_1, E_1H_1 (рис. 12.11). Какой многогранник является сечением?

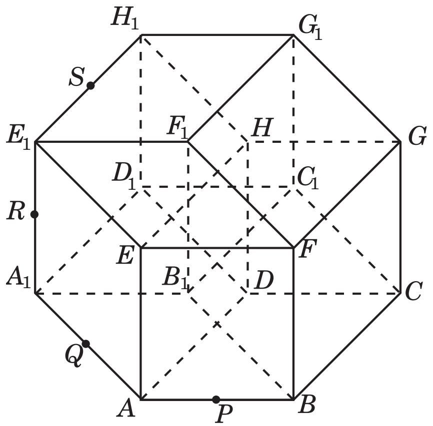


Рис. 12.11

9. Постройте сечение гиперкуба пространством, проходящим через середину P ребра AA_1, параллельно пространству $A_1B_1C_1G_1$ (рис. 12.12). Какой многогранник является сечением?

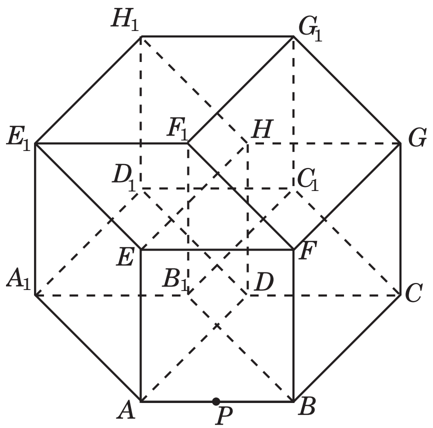


Рис. 12.12

10. Каким многогранником является сечение гиперкуба $A\ldots H_1$ пространством, проходящим через вершины B, D, E, C_1 (рис. 12.12)? Постройте это сечение.

11. Постройте сечение гиперкуба (рис. 12.13) пространством, проходящим через середины P, Q, R, S ребер AB, BC, CG, CG_1, соответственно.

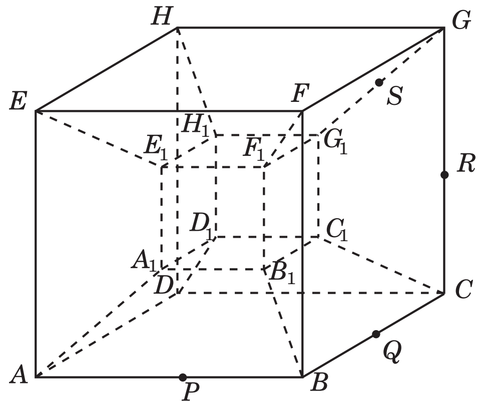


Рис. 12.13

Глава 4

Углы между прямыми, плоскостями и пространствами

§ 13. Угол между прямыми

Определение угла между двумя прямыми в гиперпространстве аналогично определению угла между двумя прямыми в пространстве [1], а именно.

Определение. Углом в гиперпространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости (в которой лежат лучи), ограниченной этими лучами (рис. 13.1).

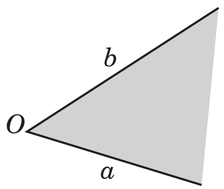


Рис. 13.1

Определение. Углом между двумя пересекающимися прямыми в гиперпространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения (рис. 13.2).

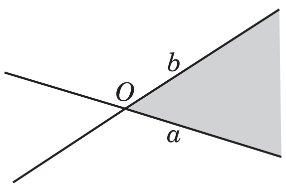


Рис. 13.2

Определение. Две пересекающиеся прямые в гиперпространстве называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Будем также говорить, что два пересекающихся отрезка в гиперпространстве перпендикулярны, если они лежат на перпендикулярных прямых. Углом между двумя пересекающимися отрезками в гиперпространстве будем называть угол между соответствующими прямыми.

Например, в гиперкубе пересекающиеся ребра перпендикулярны.

Определим теперь понятие угла между непересекающимися прямыми в гиперпространстве.

Пусть a и b — прямые (рис. 13.3). Рассмотрим какую-нибудь точку C и проведем через нее прямые a', b', параллельные прямым a и b соответственно.

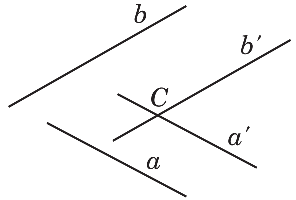


Рис. 13.3

Углом между непересекающимися прямыми в гиперпространстве называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Поскольку углы с параллельными сторонами равны, то это определение не зависит от выбора точки C. В частности, точка C может принадлежать прямой a или b. В этом случае в качестве прямой a' или b' следует взять саму прямую a или b соответственно.

Две непересекающиеся прямые в гиперпространстве называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

Два отрезка в гиперпространстве будем называть перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Углом между двумя отрезками в гиперпространстве будем называть угол между прямыми, на которых лежат эти отрезки.

Упражнения

1. Дана прямая и на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

2. Даны прямая и точка вне ее. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

3. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) укажите какие-нибудь пары перпендикулярных ребер.

4. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ (рис. 3.6) укажите какие-нибудь пары перпендикулярных ребер.

5. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4) укажите какие-нибудь пары перпендикулярных ребер.

6. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) BC; 2) BD; 3) BE; 4) BF; 5) BG; 6) BH; 7) BA_1; 8)BB_1; 9) BC_1; 10) BD_1; 11) BE_1; 12) BF_1; 13) BG_1; 14) BH_1.

7. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) CD; 2) CE; 3) CF; 4) CG; 5) CH; 6) CA_1; 7) CB_1; 8) CC_1; 9) CD_1; 10) CE_1; 11) CF_1; 12) CG_1; 13) CH_1.

8. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) DE; 2) DF; 3) DG; 4) DH; 5) DA_1; 6) DB_1; 7) DC_1; 8) DD_1; 9) DE_1; 10) DF_1; 11) DG_1; 12) DH_1.

9. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) FG; 2) FH; 3) FA_1; 4) FB_1; 5) FC_1; 6) FD_1; 7) FE_1; 8) FF_1; 9) FG_1; 10) FH_1.

10. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) GH; 2) GA_1; 3) GB_1; 4) GC_1; 5) GD_1; 6) GE_1; 7) GF_1; 8) GG_1; 9) GH_1.

11. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) HA_1; 2) HB_1; 3) HC_1; 4) HD_1; 5) HE_1; 6) HF_1; 7) HG_1; 8) HH_1.

12. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) A_1B_1; 2) A_1C_1; 3) A_1D_1; 4) A_1E_1; 5) A_1F_1; 6) A_1G_1; 7) A_1H_1.

13. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) B_1C_1; 2) B_1D_1; 3) B_1E_1; 4) B_1F_1; 5) B_1G_1; 6) B_1H_1.

14. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) C_1D_1; 2) C_1E_1; 3) C_1F_1; 4) C_1G_1; 5) C_1H_1.

15. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) D_1E_1; 2) D_1F_1; 3) D_1G_1; 4) D_1H_1.

16. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) E_1F_1; 2) E_1G_1; 3) E_1H_1.

17. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и: 1) F_1G_1; 2) F_1H_1.

18. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AE и G_1H_1.

19. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) BD; 2) BE; 4) BG; 5) BH; 6) BA_1; 7) BC_1; 8) BD_1; 9) BE_1; 10) BF_1; 11) BG_1; 12) BH_1.

20. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) CE; 2) CF; 3) CH; 4) CA_1; 5) CB_1; 6) CD_1; 7) CE_1; 8) CF_1; 9) CG_1; 10) CH_1.

21. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) DE; 2) DF; 3) DG; 4) DA_1; 5) DB_1; 6) DC_1; 7) DE_1; 8) DF_1; 9) DG_1; 10) DH_1.

22. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) FH; 2) FA_1; 3) FB_1; 4) FC_1; 5) FD_1; 6) FE_1; 7) FG_1; 8) FH_1.

23. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) GA_1; 2) GB_1; 3) GC_1; 4) GD_1; 5) GE_1; 6) GF_1; 7) GH_1.

24. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) HA_1; 2) HB_1; 3) HC_1; 4) HD_1; 5) HE_1; 6) HF_1; 7) HG_1.

25. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) A_1C_1; 2) A_1F_1; 3) A_1G_1; 4) A_1H_1.

26. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) B_1D_1; 2) B_1E_1; 3) B_1G_1; 4) B_1H_1.

27. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) C_1E_1; 2) C_1F_1; 3) C_1H_1.

28. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и: 1) D_1E_1; 2) D_1F_1; 3) D_1G_1.

29. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и E_1G_1.

30. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AF и F_1H_1.

31. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и: 1) BH; 2) BD_1; 3) BE_1; 4) BG_1; 5) BH_1.

32. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и: 1) CE; 2) CA_1; 3) CE_1; 4) CF_1; 5) CH_1.

33. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и: 1) DF; 2) DB_1; 3) DE_1; 4) DF_1; 5) DG_1.

34. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и: 1) FA_1; 2) FC_1; 3) FD_1; 4) FH_1.

35. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и: 1) GA_1; 2) GB_1; 3) GD_1; 4) GE_1.

36. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и: 1) HA_1; 2) HB_1; 3) HC_1; 4) HF_1.

37. В гиперкубе $A \dots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и A_1G_1.

38. В гиперкубе $A \dots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и B_1H_1.

39. В гиперкубе $A \dots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и C_1E_1.

40. В гиперкубе $A \dots H_1$ (рис. 3.1) найдите углы между прямыми AG и D_1F_1.

§ 14. Угол между прямой и плоскостью

Определим сначала понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Отрезок будем называть перпендикулярным плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Следующая теорема дает достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема (Признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.*

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство соответствующего признака стереометрии. А именно, пусть прямая a перпендикулярна прямым b_1, b_2 плоскости β, пересекающимся в точке O (рис. 14.1). Рассмотрим произвольную прямую b плоскости β. Проведем через точку O прямые a', b', соответственно параллельные прямым a, b. Для доказательства перпендикулярности прямых a, b достаточно доказать перпендикулярность прямых a', b'. Для этого в плоскости β проведем прямую, пересекающую прямые b_1, b_2, b' в точках B_1, B_2, B соответственно. Отложим на прямой a' от точки O равные отрезки OC, OD и соединим точки C, D с точками B_1, B_2, B. Прямоугольные треугольники OB_1C и OB_1D равны (по катетам). Следовательно, $B_1C = B_1D$. Аналогично, из равенства треугольников OB_2C и OB_2D следует, что $B_2C = B_2D$. Треугольники B_1B_2C и B_1B_2D равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$. Треугольники B_1BC и B_1BD равны (по двум сторонам и углу между ни-

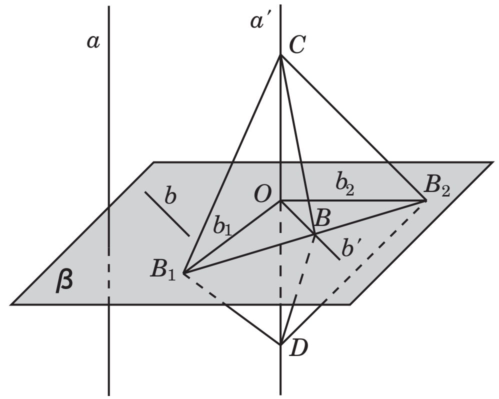


Рис. 14.1

ми). Таким образом, $BC = BD$. Треугольники OBC и OBD равны (по трем сторонам), следовательно, $\angle BOC = \angle BOD = 90^\circ$, т. е. прямые a' и b' перпендикулярны. Значит, прямая a перпендикулярна плоскости β.

Определим ортогональное проектирование гиперпространства на плоскость.

Пусть дана плоскость π. Докажем, что для произвольной точки A гиперпространства, не принадлежащей плоскости π, существует единственная прямая a, проходящая через точку A, которая перпендикулярна плоскости π и пересекает эту плоскость в некоторой точке A'.

Действительно, проведем через плоскость π и точку A пространство Ω (рис. 14.2). В этом пространстве существует единственный перпендикуляр AA', опущенный из точки A на плоскость π. Если бы в гиперпространстве существовал еще один перпендикуляр AA'', опущенный из точки A на плоскость π, то в плоскости $AA'A''$ было

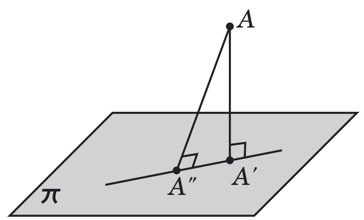


Рис. 14.2

бы два перпендикуляра, опущенных из точки A на прямую $A'A''$, что неверно.

Точку A' будем называть *ортогональной проекцией* точки A на плоскость π. Ортогональными проекциями точек плоскости π будем считать сами эти точки.

Соответствие, при котором точкам гиперпространства сопоставляются их ортогональные проекции на плоскость π, будем называть *ортогональным проектированием* гиперпространства на плоскость π.

Определим теперь понятие угла между прямой и плоскостью. Рассмотрим случай, когда прямая пересекает плоскость. В этом случае прямая и плоскость лежат в одном пространстве, и определение угла между прямой и плоскостью повторяет определение угла между прямой и плоскостью в пространстве. А именно, если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между этой прямой и плоскостью считается прямым. В противном случае *углом между прямой и плоскостью* называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.

Определим теперь понятие угла между скрещивающимися прямой и плоскостью.

Пусть a — прямая, α — плоскость (рис. 14.3). Рассмотрим какую-нибудь точку C и проведем через нее прямую a' и плоскость α', параллельные прямой a и плоскости α, соответственно.

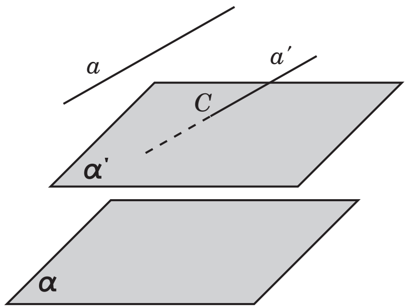


Рис. 14.3

Углом между скрещивающимися прямой и плоскостью называется угол между пересекающимися прямой и плоскостью, соответственно параллельными данным.

Углом между отрезком и плоскостью будем называть угол между прямой, содержащей отрезок, и этой плоскостью. □

Упражнения

1. Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

2. Верно ли, что если прямая перпендикулярна плоскости, то она пересекает эту плоскость?

3. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) назовите какие-нибудь перпендикулярные ребра и грани.

4. В прямой гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4) назовите какие-нибудь перпендикулярные ребра и грани.

5. При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

6. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α, и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также перпендикулярна плоскости α.

7. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и плоскость β параллельна α, то прямая a перпендикулярна плоскости β.

8. Верно ли, что через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

9. Верно ли, что через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

10. Докажите, что ортогональное проектирование гиперпространства на плоскость является частным случаем параллельного проектирования гиперпространства на плоскость в направлении плоскости, перпендикулярной данной.

11. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите угол между плоскостью $ABFE$ и прямой: 1) BC; 2) BD; 3) BE; 4) BF; 5) BG; 6) BH; 7) BA_1; 8) BB_1; 9) BC_1; 10) BD_1; 11) BE_1; 12) BF_1; 13) BG_1; 14) BH_1.

12. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ (рис. 3.6) найдите угол между прямой AB и плоскостью: 1) BCD; 2) CDE.

§ 15. Угол между прямой и пространством

Определим сначала понятие перпендикулярности прямой и пространства.

Определение. Прямая называется перпендикулярной пространству, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этом пространстве.

Отрезок будем называть перпендикулярным пространству, если он лежит на прямой, перпендикулярной этому пространству.

Следующая теорема дает достаточное условие перпендикулярности прямой и пространства.

Теорема (Признак перпендикулярности прямой и пространства). *Если прямая перпендикулярна трем пересекающимся прямым пространства, не лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна и самому пространству.*

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна прямым b_1, b_2, b_3 пространства Ω, пересекающимся в точке O (рис. 15.1). Рассмотрим произвольную прямую b пространства Ω. Проведем через точку O прямые a', b', соответственно параллельные прямым a, b.

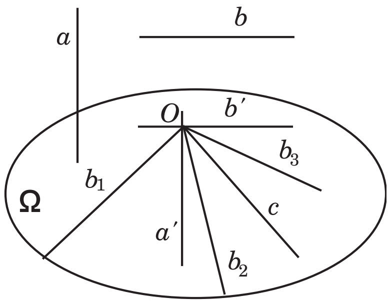


Рис. 15.1

Для доказательства перпендикулярности прямых a, b достаточно доказать перпендикулярность прямых a', b'. Для этого в пространстве Ω через прямые b_1, b' проведем плоскость. Пусть она пересекает плоскость прямых b_2, b_3 по прямой c. Так как прямая a' перпендикулярна прямым b_2, b_3, то она перпендикулярна и прямой c. Так как прямая a' перпендикулярна прямым b_1 и c, то она перпендикулярна и прямой b', лежащей в этой плоскости. Что и требовалось доказать. □

Теорема. *Через любую точку гиперпространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данному пространству.*

Доказательство. Пусть дано пространство Ω и точка A. Рассмотрим случай, когда точка A не принадлежит пространству Ω (рис. 15.2). В пространстве Ω проведем какую-нибудь прямую b, и из точки A опустим на нее перпендикуляр AB. В пространстве Ω через точку B

проведем плоскость γ, перпендикулярную прямой b, и из точки A опустим на нее перпендикуляр AC. Прямая AC будет перпендикулярна как плоскости γ, так и прямой b. Следовательно, она будет перпендикулярной пространству Ω.

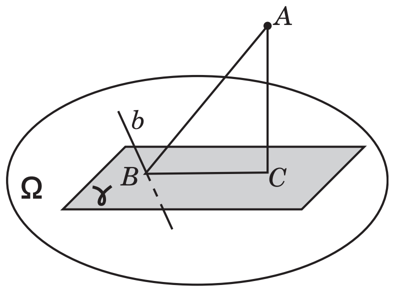


Рис. 15.2

Единственность такой прямой, а также случай, когда точка A принадлежит пространству Ω, рассмотрите самостоятельно. □

Определим понятие ортогонального проектирования на пространство.

Пусть в гиперпространстве задано пространство Ω. Для любой точки A гиперпространства рассмотрим прямую a, проходящую через точку A и перпендикулярную пространству Ω (рис. 15.3). Точка A' пересечения этой прямой с пространством Ω называется *ортогональной проекцией* точки A на пространство Ω.

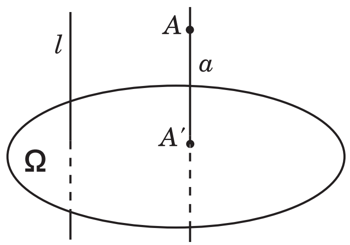


Рис. 15.3

Если Φ — фигура в гиперпространстве, то фигура Φ′, образованная ортогональными проекциями точек фигуры Φ на пространство Ω, называется ортогональной проекцией фигуры Φ на пространство Ω.

Соответствие, при котором точкам A гиперпространства сопоставляются их ортогональные проекции A' на пространство Ω, называется *ортогональным проектированием*.

Так как ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, то для него выполняются свойства параллельного проектирования.

Определим понятие угла между прямой и пространством.

Если прямая перпендикулярна пространству, то угол между этой прямой и пространством считается прямым. В противном случае *углом между прямой и пространством* называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на данное пространство.

Углом между отрезком и пространством будем называть угол между прямой, содержащей отрезок, и этим пространством.

Теорема. *Угол между прямой a, пересекающей пространство Ω в точке C, является наименьшим из углов, образованных прямой a и прямыми, лежащими в пространстве Ω, проходящими через точку C.*

Доказательство. Если прямая a перпендикулярна пространству Ω, то все углы, образованные этой прямой и прямыми пространства Ω, проходящими через точку C, прямые. Пусть прямая a не перпендикулярна пространству Ω и пересекает его в точке C (рис. 15.4). Рассмотрим какую-нибудь точку A прямой a, отличную от C, и пусть

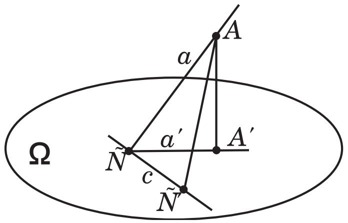


Рис. 15.4

A' — ее ортогональная проекция на пространство Ω. Возьмем какую-нибудь прямую c пространства Ω, проходящую через точку C, и покажем, что угол между прямой a и ее ортогональной проекцией a' меньше угла между прямыми a и c. На прямой c отложим отрезок OC' равный отрезку CA'. В треугольниках ACA' и ACC' сторона AC общая, $CA' = CC'$, $AA' < AB$. Следовательно, $\angle ACA' < \angle ACC'$. □

Упражнения

1. Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь трем прямым пространства, то она перпендикулярна этому пространству?

2. Верно ли, что если прямая перпендикулярна пространству, то она пересекает это пространство?

3. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) назовите какие-нибудь перпендикулярные ребра и гиперграни.

4. В прямой гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4) назовите перпендикулярные ребра и гиперграни.

5. При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести пространство, перпендикулярное другой?

6. Докажите, что если прямая a перпендикулярна пространству, и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также перпендикулярна этому пространству.

7. Докажите, что две прямые, перпендикулярные одному пространству, параллельны.

8. Докажите, что если прямая a перпендикулярна пространству Ω и пространство Σ параллельно Ω, то прямая a перпендикулярна пространству Σ.

9. Докажите, что через любую точку данной прямой проходит единственное пространство, перпендикулярное этой прямой.

10. Докажите, что два пространства, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

11. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите ортогональную проекцию точки A на пространство: 1) $BCGG_1$; 2) $A_1B_1C_1G_1$; 3) $CDHH_1$; 4) $EFGG_1$.

12. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите угол между пространством $ABFF_1$ и прямой: 1) BC; 2) BD; 3) BE; 4) BF; 5) BG; 6) BH; 7) BA_1; 8) BB_1; 9) BC_1; 10) BD_1; 11) BE_1; 12) BF_1; 13) BG_1; 14) BH_1.

13. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите угол между пространством $ABFF_1$ и прямой: 1) CD; 2) CE; 3) CF; 4) CG; 5) CH; 6) CA_1; 7) CB_1; 8) CC_1; 9) CD_1; 10) CE_1; 11) CF_1; 12) CG_1; 13) CH_1.

14. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ (рис. 3.6) найдите ортогональную проекцию точки A на пространство $BCDE$.

15. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ (рис. 3.6) найдите угол между пространством $BCDE$ и прямой AB.

16. В прямой гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите ортогональную проекцию точки A на пространство $BCDD_1$.

17. В прямой гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите угол между пространством $ABCC_1$ и прямой AD_1.

18. Сформулируйте и докажите гиперпространственный аналог теоремы о трех перпендикулярах.

§ 16. Угол между двумя плоскостями

Так же, как и в пространстве, в гиперпространстве определяется понятие двугранного угла. А именно.

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой, и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями (рис. 16.1). Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая — ребром двугранного угла.

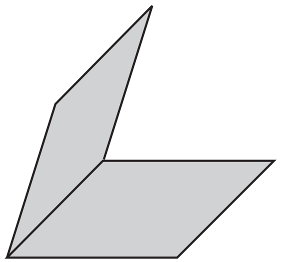


Рис. 16.1

Пусть α и β — полуплоскости с общей граничной прямой c (рис. 16.2). Они лежат в некотором пространстве Ω. Рассмотрим в этом пространстве плоскость γ, перпендикулярную прямой c, и обозначим линии ее пересечения с полуплоскостями α и β через a и b соответственно. Угол между этими лучами называется *линейным углом* данного двугранного угла.

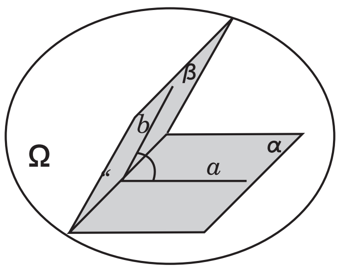


Рис. 16.2

В курсе стереометрии доказывается, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости γ.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла. Двугранный угол называется *прямым*, если его линейный угол — прямой.

Определение. Углом между двумя плоскостями, имеющими общую прямую, называется наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями.

Две плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

Углом между двумя соседними гранями многогранника будем называть двугранный угол между соответствующими полуплоскостями.

Определение. Две плоскости называются гиперперпендикулярными, если каждая прямая одной плоскости перпендикулярна каждой прямой другой плоскости.

Теорема (Признак гиперперпендикулярности двух плоскостей). *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости перпендикулярны другой плоскости, то такие плоскости гиперперпендикулярны.*

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 плоскости α перпендикулярны плоскости β (рис. 16.3). Рассмотрим произвольную прямую a плоскости α и произвольную прямую b плоскости β. Прямая b перпендикулярна двум пересекающимся прямым a_1, a_2 плоскости α. Следовательно, она перпендикулярна и прямой a. Таким образом, прямые a и b перпендикулярны. □

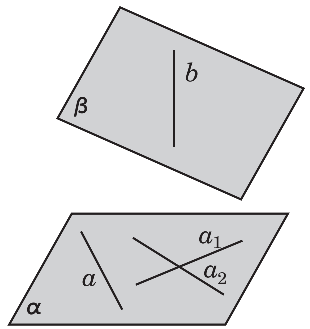


Рис. 16.3

Пример. Используя признак гиперперпендикулярности, докажем, что в гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.3) плоскости ABC и AEE_1 гиперперпендикулярны.

Действительно, прямые AE и AA_1 перпендикулярны плоскости ABC и, следовательно, данные плоскости гиперперпендикулярны.

Определим теперь понятие угла между двумя плоскостями, не лежащими в одном пространстве.

Пусть плоскости α и β имеют только одну общую точку C (рис. 16.4). Рассмотрим плоскость γ, проходящую через эту точку и перпендикулярную плоскостям α и β. (Существование такой плоскости будет показано в следующем параграфе.) Обозначим a и b прямые, по которым плоскость γ пересекает плоскости α и β. Угол между этими прямыми называется *углом между плоскостями* α и β.

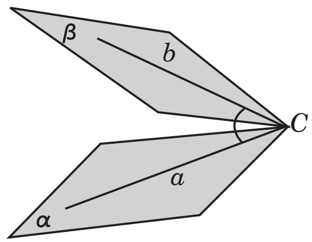


Рис. 16.4

В случае если плоскости α и β скрещиваются, рассмотрим какую-нибудь точку C и проведем через нее плоскости α' и β', соответственно параллельные данным. Эти плоскости будут иметь только одну общую точку — точку C. Углом между скрещивающимися плоскостями α и β будем называть угол между плоскостями α' и β'.

Упражнения

1. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) укажите какие-нибудь: а) перпендикулярные грани; б) гиперперпендикулярные грани.

2. В прямой тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4) укажите какие-нибудь: а) перпендикулярные грани; б) гиперперпендикулярные грани.

3. Найдите углы между гранью $ABCD$ гиперкуба $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) и гранью: 1) $ABFE$; 2) $ABGH$; 3) ABC_1D_1; 4) ABG_1H_1; 5) BB_1C_1C; 6) BB_1F_1F; 7) CC_1G_1G; 8) FGG_1F_1.

4. Найдите углы между гранью ABC правильного гипертетраэдра $ABCDE$ (рис. 3.6) и гранью: 1) ABD; 2) ABE; 3) ADE.

5. Найдите углы между боковыми гранями прямой тетраэдральной гиперпризмы $A\ldots D_1$ (рис. 3.4).

6. Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

7. Верно ли, что две плоскости, гиперперпендикулярные третьей, параллельны?

8. Плоскость α перпендикулярна плоскости β. Будет ли всякая прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β?

9. Плоскость α гиперперпендикулярна плоскости β. Будет ли всякая прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β?

10. Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна и данной прямой?

11. Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, гиперперпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна и данной прямой?

12. Плоскость и прямая параллельны. Будет ли верно утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная прямой, перпендикулярна и данной плоскости?

13. Докажите, что через любую точку гиперпространства проходит плоскость, перпендикулярная данной плоскости. Сколько таких плоскостей?

14. Докажите, что через любую точку гиперпространства проходит плоскость, гиперперпендикулярная данной плоскости. Сколько таких плоскостей?

15. Докажите, что угол между двумя плоскостями, имеющими только одну общую точку, является наименьшим из углов, образованных прямыми, проходящими через эту точку и лежащими в данных плоскостях.

§ 17. Угол между плоскостью и пространством

Определим сначала понятие перпендикулярности плоскости и пространства.

Определение. Плоскость α, пересекающая пространство Ω по прямой c, называется перпендикулярной пространству Ω, если она перпендикулярна любой плоскости, лежащей в этом пространстве и проходящей через прямую c.

Теорема (Признак перпендикулярности плоскости и пространства). *Если плоскость α, пересекающая пространство Ω по прямой c, перпендикулярна двум плоскостям пространства Ω, проходящим через прямую c, то она перпендикулярна и самому пространству.*

Доказательство. Пусть плоскость α перпендикулярна плоскостям β_1 и β_2 пространства Ω, проходящим через прямую c (рис. 17.1). Рассмотрим какую-нибудь плоскость β, пространства Ω, проходящую через прямую c, и докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. Через какую-нибудь точку C прямой c проведем пространство Σ, перпендикулярное прямой c. Оно пересечет плоскость α по некоторой прямой a, пространство Σ по некоторой плоскости γ, а плоскости β_1, β_2, β по прямым b_1, b_2, b, соответственно, лежащими в плоскости γ. Из перпендикулярности плоскости α с плоскостями β_1 и β_2 следует перпендикулярность прямой a с прямыми b_1, b_2. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая a будет перпендикулярна прямой b. Прямые a и b образуют линейный угол между плоскостями α и β. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны. □

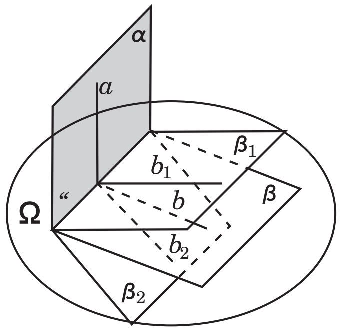


Рис. 17.1

Теорема (Признак перпендикулярности плоскости и пространства). *Если плоскость, пересекающая пространство, проходит через прямую, перпендикулярную пространству, то она перпендикулярна этому пространству.*

Доказательство. Пусть плоскость α, пересекающая пространство Ω по прямой c (рис. 17.2), проходит через прямую a, перпендикулярную этому пространству. Это значит, что прямая a перпендикулярна любой прямой пространства Ω. В пространстве Ω проведем какие-нибудь две прямые b_1, b_2, перпендикулярные прямой c, и через них и прямую c проведем плоскости β_1, β_2. Эти плоскости будут перпендикулярны плоскости α и, следовательно, плоскость α будет перпендикулярна пространству Ω. □

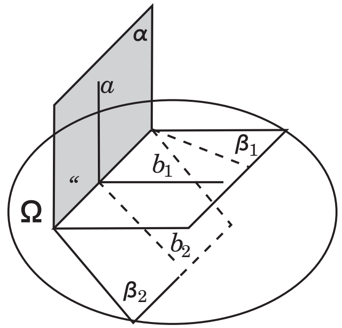


Рис. 17.2

Определим теперь понятие угла между плоскостью и пространством.

Определение. Если плоскость перпендикулярна пространству, то угол между ними считается прямым. В противном случае углом между плоскостью и пространством называется угол между этой плоскостью и ее ортогональной проекцией на данное пространство.

Упражнения

1. Докажите, что через любую точку гиперпространства проходит плоскость, перпендикулярная данному пространству.

2. Сколько плоскостей проходит через данную точку, перпендикулярных данному пространству?

3. Докажите, что через любую точку гиперпространства проходит пространство, перпендикулярное данной плоскости.

4. Сколько пространств проходит через данную точку, перпендикулярных данной плоскости?

5. В каком случае через данную прямую можно провести плоскость, перпендикулярную данному пространству? Сколько таких плоскостей?

6. Укажите какие-нибудь перпендикулярные плоскости и пространства, содержащие вершины гиперкуба $A\ldots H_1$ (рис. 3.1).

7. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите угол между плоскостью ABC и пространством: 1) $ABFF_1$; 2) $BCGG_1$; 3) $CGHH_1$.

8. В гипертетраэдре $ABCDE$ (рис. 3.6) найдите угол между плоскостью ABC и пространством $BCDE$.

9. Докажите, что если плоскости α и β имеют только одну общую точку C, то существует плоскость γ, проходящая через эту точку и перпендикулярная плоскостям α и β.

10. Докажите, что угол между плоскостью и пространством является наименьшим из углов, образованных данной плоскостью и плоскостями, лежащими в данном пространстве и проходящими через линию пересечения данной плоскости и данного пространства.

§ 18. Угол между двумя пространствами

По аналогии с определением двугранного угла в пространстве [1], сформулируем определение гипергранного угла в гиперпространстве.

Определение. Гипергранным углом в гиперпространстве называется фигура, образованная двумя полупространствами с общей граничной плоскостью и одной из частей гиперпространства, ограниченного этими полупространствами.

Пусть даны два полупространства Ω и Σ с общей граничной плоскостью γ. Через какую-нибудь точку C этой плоскости в данных по-

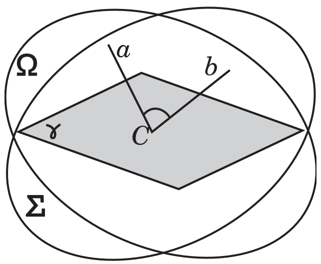


Рис. 18.1

лупространствах проведем лучи a и b, перпендикулярные плоскости γ. Угол, образованный лучами a и b называется *линейным углом* данного гипергранного угла (рис. 18.1).

Величиной гипергранного угла называется величина его линейного угла.

Определение. Углом между пересекающимися плоскостями называется наименьший из гипергранных углов, образованных соответствующими полупространствами.

Два пространства называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

Теорема (Признак перпендикулярности двух пространств). *Если одно пространство содержит прямую, перпендикулярную другому пространству, то эти два пространства перпендикулярны.*

Доказательство. Пусть пространство Ω проходит через прямую a, перпендикулярную пространству Σ (рис. 18.2). Обозначим γ

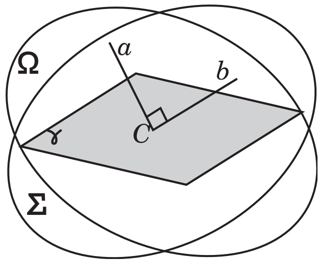


Рис. 18.2

плоскость, по которой пересекаются пространства Ω и Σ. Пусть C — точка пересечения прямой a и плоскости γ. Прямая a перпендикулярна любой прямой пространства Σ и, следовательно, перпендикулярна прямой b, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости γ. Значит пространства Ω и Σ перпендикулярны. ☐

Упражнения

1. Укажите какие-нибудь перпендикулярные пространства, содержащие вершины гиперкуба $A\ldots H_1$ (рис. 3.1).

2. Укажите какие-нибудь перпендикулярные пространства, содержащие вершины правильной тетраэдральной гиперпризмы $A\ldots D_1$ (рис. 3.4).

3. В гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите угол между пространствами: 1) $ABCG$ и ABB_1F_1; 2) $ABCG$ и BCC_1D_1.

4. В правильной гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4) найдите угол между пространствами: 1) $ABCD$ и $ABDD_1$; 2) $ABDD_1$ и $BCDD_1$.

5. Найдите угол между двумя гипергранями правильного гипертетраэдра $ABCDE$ (рис. 3.6).

6. Докажите, что через любую данную точку гиперпостранства можно провести пространство, перпендикулярное данному пространству. Сколько таких пространств?

7. Верно ли, что два пространства, перпендикулярные третьему, параллельны?

8. Верно ли, что если одно из двух параллельных пространств перпендикулярно третьему пространству, то и другое пространство перпендикулярно третьему пространству?

Глава 5

Расстояния между точками, прямыми, плоскостями и пространствами

§ 19. Расстояния от точки до прямой, плоскости и пространства

Напомним, что в стереометрии расстоянием от точки до прямой, не проходящей через эту точку, называлась длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. Расстоянием от точки до не проходящей через нее плоскости называлась длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость [1].

Поскольку в гиперпространстве прямая и точка, ей не принадлежащая, а также точка и плоскость, не проходящая через эту точку, лежат в одном пространстве, то данные определения расстояний от точки до прямой и от точки до плоскости можно использовать и для гиперпространства.

Определим понятия расстояния между точкой и пространством.

Определение. Отрезок, соединяющий точку A, не принадлежащую пространству Ω, и ее ортогональную проекцию A' на это пространство, называется перпендикуляром, опущенным из точки A на пространство Ω.

Определение. Отрезок, соединяющий точку A, не принадлежащую пространству Ω, и какую-нибудь точку B этого пространства, отличную от ортогональной проекции A' точки A на это пространство, называется наклонной, проведенной из точки A к пространству Ω.

Теорема. *Перпендикуляр, опущенный из точки на пространство, короче любой наклонной, проведенной из той же точки к тому же пространству.*

Доказательство. Пусть AA' — перпендикуляр, опущенный из точки A на пространство Ω, AB — наклонная, проведенная к этому

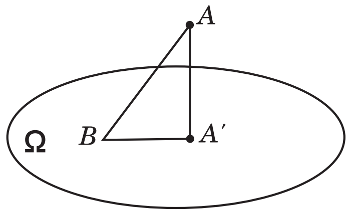


Рис. 19.1

пространству (рис. 19.1). Соединим отрезком точки A' и B. Треугольник ABA' прямоугольный, AA' — катет, AB — гипотенуза. Следовательно, $AA' < AB$. □

Определение. Расстоянием между точкой и не проходящим через нее пространством называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данное пространство.

Из доказанной теоремы следует, что расстояние от точки до пространства является наименьшим из всевозможных расстояний от этой точки до точек пространства.

Определение. Перпендикуляр, опущенный из вершины гиперпирамиды, на пространство, содержащее ее основание, называется высотой гиперпирамиды.

Упражнения

1. В единичном гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние от вершины A до прямой: 1) BC; 2) BD; 3) BE; 4) BF; 5) BG; 6) BH; 7) BA_1; 8)BB_1; 9) BC_1; 10) BD_1; 11) BE_1; 12) BF_1; 13) BG_1; 14) BH_1.

2. В единичном гиперкубе $A\ldots H_1$ найдите расстояние от вершины A до прямой: 1) CD; 2) CE; 3) CF; 4) CG; 5) CH; 6) CA_1; 7) CB_1; 8) CC_1; 9) CD_1; 10) CE_1; 11) CF_1; 12) CG_1; 13) CH_1.

3. В единичном гиперкубе $A\ldots H_1$ найдите расстояние от вершины A до прямой: 1) GH; 2) GC_1; 3) GF_1; 4) GG_1; 5) GH_1.

4. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ с ребром 1 найдите расстояние от вершины A до прямой: 1) BC; 2) BD; 3) CD.

5. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до прямой: 1) BC; 2) A_1B_1; 3) B_1C_1; 4) B_1D_1; 5) DD_1.

6. В единичном гиперкубе $A\ldots H_1$ найдите расстояние от вершины A до плоскости: 1) BCG; 2) BCC_1; 3) BB_1F_1; 4) BDH; 5) BC_1G_1; 6) BA_1E_1; 7) BD_1H_1; 8) CC_1G_1; 9) CD_1H_1; 10) FGG_1.

7. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ с ребром 1 найдите расстояние от вершины A до плоскости BCD.

8. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до плоскости: 1) BCD; 2) BCC_1; 3) $A_1B_1C_1$; 4) $A_1B_1D_1$; 5) $B_1C_1D_1$.

9. В единичном гиперкубе $A\ldots H_1$ найдите расстояние от вершины A до пространства: 1) $BCGG_1$; 2) $CC_1G_1H_1$; 3) $A_1B_1C_1G_1$; 4) $EFGG_1$.

10. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до пространства: 1) $A_1B_1C_1D_1$; 2) $BCDD_1$.

§ 20. Расстояния между параллельными прямыми, плоскостями и пространствами

Напомним, что в стереометрии расстоянием между параллельными прямыми называлось расстояние от какой-нибудь точки одной данной прямой до другой данной прямой. Расстоянием между параллельными прямой и плоскостью называлось расстояние от какой-нибудь точки данной прямой до данной плоскости. Расстоянием между параллельными плоскостями называлось расстояние от какой-нибудь точки одной данной плоскости до другой данной плоскости [1].

Поскольку в гиперпространстве две параллельные прямые, параллельные прямая и плоскость, две параллельные плоскости лежат в одном пространстве, то данные определения расстояний между двумя параллельными прямыми, параллельными прямой и плоскостью, а также двумя параллельными плоскостями можно использовать и для гиперпространства.

Определим понятие расстояние между параллельными прямой и пространством.

Определение. Расстоянием между параллельными прямой и пространством называется расстояние от какой-нибудь точки данной прямой до данного пространства.

Докажем, что расстояние между параллельными прямой и пространством не зависит от выбора точки.

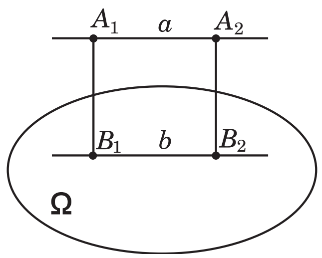


Рис. 20.1

Пусть даны параллельные прямая a и пространство Ω, точки A_1, A_2 прямой a и их ортогональные проекции B_1, B_2 на пространство Ω (рис. 20.1). Расстояние от точки A_1 до пространства Ω равно A_1B_1, а расстояние от точки A_2 до пространства Ω равно A_2B_2. Воспользуемся тем, что две прямые, перпендикулярные одному пространству, параллельны. Тогда четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — прямоугольник. Следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$.

Определение. Расстоянием между параллельными плоскостью и пространством называется расстояние от какой-нибудь точки данной плоскости до данного пространства.

Докажем, что расстояние между параллельными плоскостью и пространством не зависит от выбора точки.

Пусть даны параллельные плоскость α и пространство Ω, точки A_1, A_2 плоскости α и их ортогональные проекции B_1, B_2 на пространство Ω (рис. 20.2). Расстояние от точки A_1 до пространства Ω равно A_1B_1, а расстояние от точки A_2 до пространства Ω равно A_2B_2. Воспользуемся тем, что две прямые, перпендикулярные одному пространству, параллельны. Тогда четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — прямоугольник. Следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$.

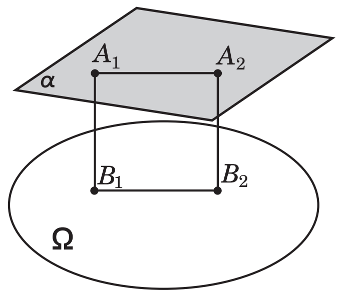


Рис. 20.2

Определение. Расстоянием между двумя параллельными пространствами называется расстояние от какой-нибудь точки одного данного пространства до другого данного пространства.

Докажем, что расстояние между двумя параллельными пространствами не зависит от выбора точки.

Пусть даны два параллельных пространства Ω и Σ, точки A_1, A_2 принадлежат пространству Σ и B_1, B_2 их ортогональные проекции на пространство Ω (рис. 20.3). Расстояние от точки A_1 до пространства Ω равно A_1B_1, а расстояние от точки A_2 до пространства Ω равно A_2B_2. Воспользуемся тем, что две прямые, перпендикулярные одному пространству, параллельны. Тогда четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — прямоугольник. Следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$.

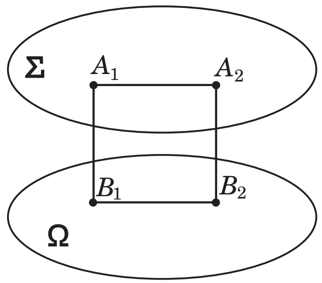


Рис. 20.3

Определение. Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания гиперпризмы, на пространство, содержащее другое ее основание, называется высотой гиперпризмы.

Упражнения

1. В единичном гиперкубе $A \ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между прямыми AB и: 1) CD; 2) EF; 3) A_1B_1; 4) C_1D_1; 5) GH; 6) E_1F_1; 7) G_1H_1.

2. В единичном гиперкубе $A \ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между прямыми AF и: 1) DG; 2) A_1F_1; 3) D_1G_1.

3. В единичном гиперкубе $A \ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между прямыми AG и A_1G_1.

4. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\dots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми: 1) AB и A_1B_1; 2) AA_1 и BB_1; 3) AA_1 и CC_1.

5. В единичном гиперкубе $A\dots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между прямой AB и плоскостью: 1) CDH; 2) CDD_1 3) EFF_1; 4) EFG; 5) $A_1B_1F_1$; 6) $A_1B_1C_1$; 7) $C_1D_1H_1$; 8) GHH_1; 9) $E_1F_1G_1$.

6. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\dots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между: 1) прямой AB и плоскостью $A_1B_1C_1$; 2) прямой AB и плоскостью $A_1B_1D_1$; 3) прямой AA_1 и плоскостью BCC_1; 4) прямой AA_1 и плоскостью BDD_1.

7. В единичном гиперкубе $A\dots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между прямой AB и пространством: 1) $A_1B_1C_1G_1$; 2) CDD_1H_1; 3) $EFGG_1$.

8. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\dots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между: 1) прямой AB и пространством $A_1B_1C_1D_1$; 2) прямой AA_1 и пространством $BCDD_1$.

9. В единичном гиперкубе $A\dots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между плоскостями ABC и: 1) EFG; 2) $A_1B_1C_1$; 3) $E_1F_1G_1$.

10. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\dots D_1$ (рис. 3.1), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между плоскостями: 1) ABC и $A_1B_1C_1$; 2) ABC и $A_1B_1D_1$.

11. В единичном гиперкубе $A\dots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между пространствами $ABCG$ и $A_1B_1C_1G_1$.

12. Найдите высоту тетраэдральной гиперпризмы, ребра основания которой равны 1, а боковое ребро равно 2 и наклонено к пространству основания под углом 60°.

§ 21. Расстояния между скрещивающимися прямыми и плоскостями

Напомним, что расстоянием между скрещивающимися прямыми в пространстве называлась длина общего перпендикуляра к данным прямым.

Поскольку две скрещивающиеся прямые гиперпространства лежат в одном пространстве, то это определение расстояния можно использовать для скрещивающихся прямых в гиперпространстве.

Определим понятие расстояния между скрещивающимися прямой и плоскостью в гиперпространстве.

Определение. Отрезок, соединяющий точки на скрещивающихся прямой и плоскости, перпендикулярный этой прямой и этой плоскости, называется их общим перпендикуляром. Длина общего перпендикуляра называется расстоянием между скрещивающимися прямой и плоскостью.

Теорема. *Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямой и плоскости существует и единственен.*

Доказательство. Пусть a, β — скрещивающиеся прямая и плоскость (рис. 21.1). Через прямую a, проведем пространство Ω, параллельное плоскости β. Это можно сделать, проведя через какую-нибудь точку прямой a плоскость β', параллельную плоскости β, а затем через прямую a и плоскость β' провести пространство Ω. Ортогонально спроектируем плоскость β на пространство Ω. Получим некоторую плоскость α, пересекающую прямую a в некоторой точке A. Обозначим B точку плоскости β, проектирующуюся в точку A. Отрезок AB будет искомым общим перпендикуляром прямой a и плоскости β.

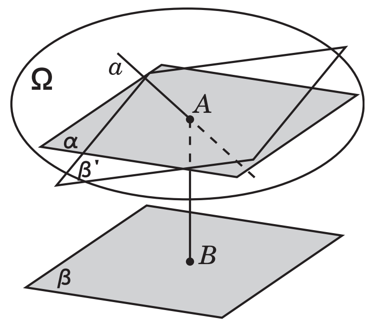


Рис. 21.1

Докажем единственность. Пусть дан общий перпендикуляр к скрещивающимся прямой a и плоскости β. Тогда его ортогональная проекция на пространство Ω должна совпадать с точкой A, а точка плоскости β, проектирующаяся в точку A, должна совпадать с точкой B. $\square$

Из доказанной теоремы, в частности следует, что расстояние между скрещивающимися прямой и плоскостью равно расстоянию между данной плоскостью и параллельным ей пространством, проходящим через данную прямую.

Определим понятие расстояния между двумя скрещивающимися плоскостями.

Определение. Отрезок, соединяющий точки на скрещивающихся плоскостях, перпендикулярный этим плоскостям, называется их общим перпендикуляром. Длина общего перпендикуляра называется расстоянием между двумя скрещивающимися плоскостями.

Пусть α, β — скрещивающиеся плоскости. Через плоскость α проведем пространство Ω, параллельное плоскости β (рис. 21.2). Это можно сделать, проведя через точку A плоскости прямую a, параллельную плоскости β и не лежащую в плоскости α, а затем через прямую a и плоскость α провести пространство Ω. Аналогичным образом, через плоскость β можно провести пространство Σ, параллельное плоскости α.

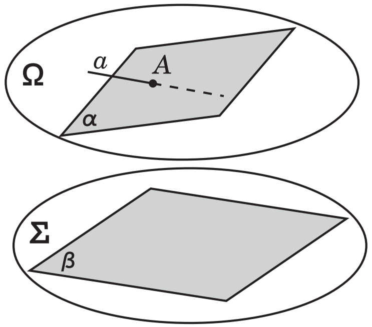


Рис. 21.2

Расстоянием между плоскостями α и β является расстояние между пространством Ω, содержащим плоскость α и параллельной ему плоскостью β. Это расстояние равно расстоянию между параллельными пространствами Ω и Σ, содержащими данные скрещивающиеся плоскости α и β.

Упражнения

1. В единичном гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между прямыми AB и: 1) CG; 2) FG; 3) CC_1; 4) GG_1; 5) F_1G_1)6) HH_1.

2. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ (рис. 3.6) с ребром 1 найдите расстояние между прямыми AB и: 1) CD; 2) DE; 3) CE.

3. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и: 1) CD; 2) B_1C_1; 3) B_1D_1; 4) CC_1; 5) C_1D_1.

4. В единичном гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между прямой AB и плоскостью: 1) $A_1D_1H_1$; 2) $B_1C_1G_1$; 3) CC_1G_1; 4) DD_1H_1.

5. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ (рис. 3.6) с ребром 1 найдите расстояние между прямой AB и плоскостью CDE.

6. В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямой AB и плоскостью: 1) $B_1C_1D_1$; 2) CDD_1.

7. В единичном гиперкубе $A\ldots H_1$ (рис. 3.1) найдите расстояние между плоскостями ABC и: 1) $A_1D_1H_1$; 2) $B_1C_1G_1$.

8) В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между плоскостями ABC и: 1) $A_1B_1D_1$; 2) $B_1C_1D_1$.

9) В правильной тетраэдральной гиперпризме $A\ldots D_1$ (рис. 3.4), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между плоскостями ABB_1 и CDD_1.

10. Найдите геометрическое место точек гиперпространства, равноудаленных от двух данных точек.

11. Найдите геометрическое место точек гиперпространства, равноудаленных от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой.

12. Найдите геометрическое место точек гиперпространства, равноудаленных от четырех данных точек, не принадлежащих одной плоскости.

Глава 6

Гипермногогранники

§ 22. Выпуклые гипермногогранники

Определение. Гипермногогранником называется фигура в гиперпространстве, ограниченная конечным числом многогранников.

Примерами гипермногогранников являются: гиперкуб, гиперпараллелепипед, гиперпризма, гипертетраэдр, гиперпирамида и др.

Так же как и в пространстве, определяется понятие выпуклой фигуры.

Определение. Фигура в гиперпространстве называется выпуклой, если вместе с любыми двумя своими точками она целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Гипермногогранник называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой.

Выпуклыми гипермногогранниками являются: гиперкуб, гиперпараллелепипед, гипертетраэдр и др.

В случае, если основаниями гиперпризмы и гиперпирамиды являются выпуклые многогранники, то эти гиперпризмы и гиперпирамиды также будут выпуклыми многогранниками.

Примерами невыпуклых гипермногогранников являются гиперпризмы и гиперпирамиды, в основаниях которых лежат невыпуклые многогранники.

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых фигур и гипермногогранников.

Свойство 1. Пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Действительно, пусть Φ_1 и Φ_2 выпуклые фигуры $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$ — их пересечение (рис. 22.1). Если точки A и B принадлежат фигуре Φ, то они принадлежат фигурам Φ_1 и Φ_2. В силу выпуклости этих фигур, отрезок AB будет содержаться в фигурах Φ_1 и Φ_2. Следовательно, отрезок AB будет содержаться в их пересечении — фигуре Φ.

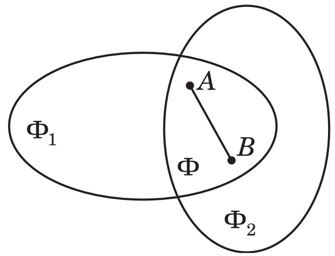


Рис. 22.1

Свойство 2. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Действительно, гипергрань выпуклого гипермногогранника можно представить как пересечение данного гипермногогранника и пространства, содержащего эту грань. Из выпуклости гипермногогранника и пространства следует выпуклость их пересечения — данной гиперграни.

Свойство 3. Всякий выпуклый гипермногогранник может быть составлен из гиперпирамид с общей вершиной, основаниями которых являются многогранники, образующие поверхность гипермногогранника.

Действительно, пусть M — выпуклый гипермногогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S гипермногогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной гиперграни гипермногогранника M. Соединим точку S с вершинами гипермногогранника M отрезками. Заметим, что в силу выпуклости гипермногогранника M, все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим гиперпирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани гипермногогранника M. Эти гиперпирамиды целиком содержатся в M, и все вместе составляют гипермногогранник M.

Упражнения

1. Какое наименьшее число ребер может сходиться в вершине гипермногогранника?
2. Какое наименьшее число граней может иметь общее ребро гипермногогранника?
3. Сколько гиперграней гипермногогранника могут иметь общую грань?

4. Существуют ли гипермногогранники, вершины и ребра которых изображены на рисунке 22.2?

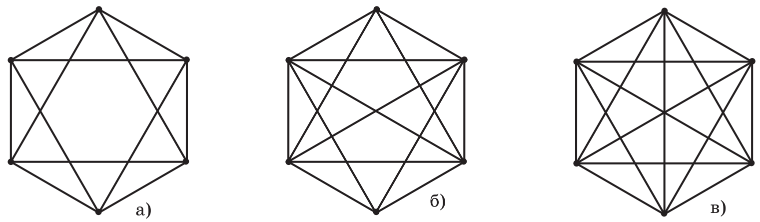


Рис. 22.2

5. Верно ли, что пересечение любого числа выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

6. Верно ли, что объединение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

7. Может ли невыпуклый многогранник быть гипергранью выпуклого гипермногогранника?

8. Приведите пример невыпуклого гипермногогранника, у которого все гиперграни являются выпуклыми многогранниками.

9. Докажите, что в сечении выпуклого гипермногогранника пространством всегда получается выпуклая фигура.

10. Докажите, что гиперпирамида является выпуклым гипермногогранником тогда и только тогда, когда ее основание является выпуклым многогранником.

11. Докажите, что гиперпризма является выпуклым гипермногогранником тогда и только тогда, когда ее основаниями являются выпуклые многогранники.

12. Докажите, что любой выпуклый гипермногогранник можно разбить на конечное число тетраэдральных гиперпирамид.

§ 23. Теорема Эйлера

Напомним, что в курсе стереометрии доказывалось, что для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2,$$

где В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней данного многогранника.

Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 г. и получило название теоремы Эйлера.

Здесь мы приведем аналог теоремы Эйлера для выпуклых гипермногогранников.

Рассмотрим известные нам гипермногогранники и заполним следующую таблицу, в которой Γ_0 — число вершин, Γ_1 — число ребер, Γ_2 — число граней, Γ_3 — число гиперграней гипермногогранника.

Индекс у буквы Г указывает размерность фигуры. Вершины — нульмерные, ребра — одномерные, грани — двумерные, гиперграни — трехмерные.

Название гипермногогранника	Γ_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3
Гипертетраэдр	5	10	10	5
Гиперкуб	16	32	24	8
Тетраэдральная гиперпризма	8	16	14	6

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных гипермногогранников имеет место равенство $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого гипермногогранника.

Теорема (Эйлера). *Для любого выпуклого гипермногогранника имеет место равенство*

$$\mathit{\Gamma}_0 - \mathit{\Gamma}_1 + \mathit{\Gamma}_2 - \mathit{\Gamma}_3 = 0,$$

где $\mathit{\Gamma}_0$ — число вершин, $\mathit{\Gamma}_1$ — число ребер и $\mathit{\Gamma}_2$ — число граней, $\mathit{\Gamma}_3$ — число гиперграней данного многогранника.

Доказательство проводится аналогично тому, как это делалось для выпуклых многогранников в пространстве [1]. А именно, рассмотрим выпуклый гипермногогранник M и пространство Ω, параллельное какой-нибудь гиперграни L этого гипермногогранника. Удалим эту гипергрань, а оставшиеся гиперграни спроектируем на пространство Ω с помощью центрального проектирования с центром в некоторой точке S, расположенной над этой гипергранью (рис. 23.1). При этом проектировании выпуклый многогранник L перейдет в некоторый выпуклый многогранник L', а остальные гиперграни гипермногогранника M перейдут в выпуклые многогранники, составляющие разбиение многогранника L' на более мелкие многогранники. Числа вершин, ребер и граней в этом разбиении

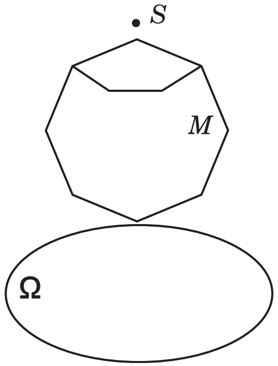


Рис. 23.1

равны соответственно числам вершин, ребер и граней гипермногогранника M, а число многогранников, входящих в разбиение равно числу гиперграней гипермногогранника M минус единица. Таким образом, если мы докажем, что для разбиения произвольного выпуклого многогранника на более мелкие выпуклые многогранники выполняется равенство: $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 = 1$, где Γ_0 — число вершин, Γ_1 — число ребер, Γ_2 — число граней, Γ_3 — число многогранников разбиения, то для гипермногогранника M будет выполняться требуемое равенство: $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$.

Заметим, что если один из выпуклых многогранников разбиения подразделить на пирамиды (рис. 23.2), основаниями которых являются грани этого многогранника, а ее вершиной — произвольная внутренняя точка многогранника, то $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$ не изменится. Действительно для числа вершин (Γ'_0), ребер (Γ'_1), граней (Γ'_2), многогранников (Γ'_3) нового разбиения будем иметь: $\Gamma'_0 = \Gamma_0 + 1$, $\Gamma'_1 = \Gamma_1 + \Gamma_0$, $\Gamma'_2 = \Gamma_2 + \Gamma_1$, $\Gamma'_3 = \Gamma_3 + \Gamma_2 - 1$. Следовательно, $\Gamma'_0 - \Gamma'_1 + \Gamma'_2 - \Gamma'_3 = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$.

Проведем такие подразделения для всех многогранников, входящих в разбиение. Получим разбиение многогранника, состоящее из пирамид, для которого $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$ такое же, как для исходного разбиения.

Докажем, что если одну из n-угольных пирамид разбиения, проведением диагональных сечений, подразделить на треугольные пирамиды, то $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$ не изменится (рис. 23.3). Действительно, для числа вершин (Γ'_0), ребер (Γ'_1), граней (Γ'_2), многогранников

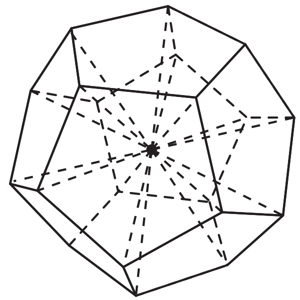


Рис. 2

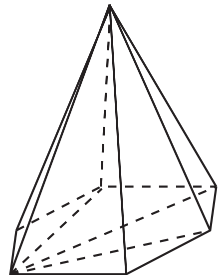


Рис. 3

(Γ'_3) нового разбиения будем иметь: $\Gamma'_0 = \Gamma_0$, $\Gamma'_1 = \Gamma_1 + n - 3$, $\Gamma'_2 = \Gamma_2 + 2(n-3)$, $\Gamma'_3 = \Gamma_3 + n - 3$. Следовательно, $\Gamma'_0 - \Gamma'_1 + \Gamma'_2 - \Gamma'_3 = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$.

Проведем такие подразделения для всех пирамид, входящих в разбиение. Получим разбиение многогранника, состоящее из треугольных пирамид (тетраэдров), для которого $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$ такое же, как для исходного разбиения.

Докажем, что удаление из разбиения одного граничного тетраэдра не изменяет $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$. Действительно, для удаляемого тетраэдра имеются следующие возможности:

1. Тетраэдр имеет одну общую грань с одним из остальных тетраэдров разбиения. В этом случае имеем: $\Gamma'_0 = \Gamma_0 - 1$, $\Gamma'_1 = \Gamma_1 - 3$, $\Gamma'_2 = \Gamma_2 - 3$, $\Gamma'_3 = \Gamma_3 - 1$. Следовательно, $\Gamma'_0 - \Gamma'_1 + \Gamma'_2 - \Gamma'_3 = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$.

2. Тетраэдр имеет две общие грани с одними из остальных тетраэров разбиения. В этом случае имеем: $\Gamma'_0 = \Gamma_0$, $\Gamma'_1 = \Gamma_1 - 1$, $\Gamma'_2 = \Gamma_2 - 2$, $\Gamma'_3 = \Gamma_3 - 1$. Следовательно, $\Gamma'_0 - \Gamma'_1 + \Gamma'_2 - \Gamma'_3 = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$.

3. Тетраэдр имеет три общие грани с одними из остальных тетраэров разбиения. В этом случае имеем: $\Gamma'_0 = \Gamma_0$, $\Gamma'_1 = \Gamma_1$, $\Gamma'_2 = \Gamma_2 - 1$, $\Gamma'_3 = \Gamma_3 - 1$. Следовательно, $\Gamma'_0 - \Gamma'_1 + \Gamma'_2 - \Gamma'_3 = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$.

Таким образом, во всех случаях удаление граничного тетраэдра не изменяет $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$. Будет удалять граничные тетраэдры, пока не останется один тетраэдр. Для него имеем: $\Gamma_0 = 4$, $\Gamma_1 = 6$, $\Gamma_2 = 4$, $\Gamma_3 = 1$. Следовательно, $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 = 1$ и, значит, это же равенство будет справедливо для исходного разбиения. Что и завершает доказательство.

Упражнения

1. Может ли у гипермногогранника быть семь векршин, в каждой из которых сходится пять ребер?

2. Для многогранников в пространстве число граней с нечетным числом сторон четно. Сформулируйте и докажите соответствующее свойство для гипермногогранников.

3. Проверьте выполнимость равенства Эйлера для гиперпризмы, в основании которой: а) четырехугольная пирамида; б) октаэдр.

4. Проверьте выполнимость равенства Эйлера для гиперпирамиды, в основании которой: а) треугольная призма; б) октаэдр.

5. В выпуклом гипермногограннике 8 вершин, 24 ребра и 32 грани. Сколько у него гиперграней?

6. В выпуклом гипермногограннике 24 вершины, 96 ребер и 24 гиперграни. Сколько у него граней?

7. Докажите, что число ребер гипермногогранника больше или равно его удвоенного числа вершин. Приведите примеры, когда выполняется: а) равенство; б) строгое неравенство.

8. Докажите, что для любого выпуклого гипермногогранника выполняется неравенство $\Gamma_2 \geqslant \Gamma_0 + \Gamma_3$. Приведите примеры, когда выполняется: а) равенство; б) строгое неравенство.

9. Докажите, что число граней гипермногогранника больше или равно его удвоенного числа гиперграней. Приведите примеры, когда выполняется: а) равенство; б) строгое неравенство.

10. Докажите, что для любого выпуклого гипермногогранника выполняется неравенство $\Gamma_1 \geqslant \Gamma_0 + \Gamma_3$. Приведите примеры, когда выполняется: а) равенство; б) строгое неравенство.

11. Приведите пример гипермногогранника, для которого не выполняется равенство Эйлера.

12. Приведите пример невыпуклого гипермногогранника, для которого выполняется равенство Эйлера.

§ 24. Правильные гипермногогранники

Напомним, что выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней [1].

Правильными многогранниками в пространстве являются: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр (рис. 24.1).

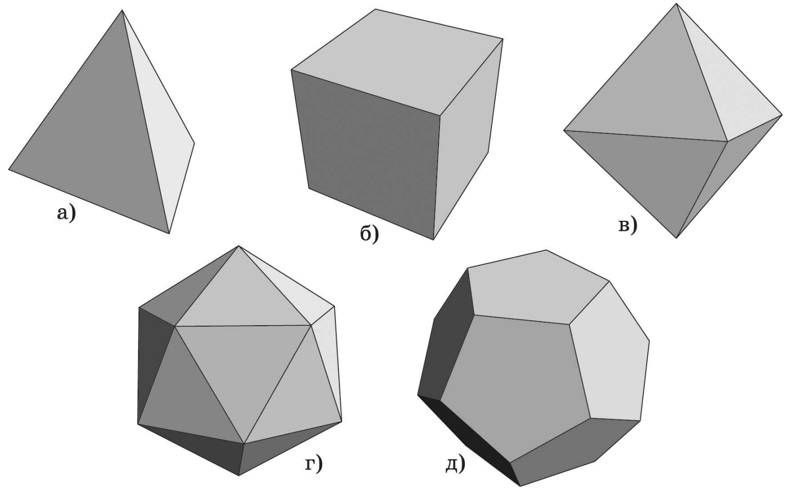


Рис. 24.1

Используя аналогию, увеличивающую размерность, и заменяя многогранник на гипермногогранник, грань на гипергрань, многоугольник на многогранник, вершину на ребро, сформулируем определение правильного гипермногогранника.

Определение. Выпуклый гипермногогранник называется правильным, если его гипергранями являются равные правильные многогранники и при каждом ребре сходится одинаковое число гиперграней.

Следуя Л. Шлефли будем обозначать правильный многогранник, гранями которого являются правильные p-угольники и в каждой вершине сходится q граней, символом $\{p, q\}$.

Так, например, правильный тетраэдр имеет треугольные грани и в каждой его вершине сходится три грани. Следовательно, его символ Шлефли — $\{3, 3\}$. Аналогично, символ Шлефли куба — $\{4, 3\}$, октаэдра — $\{3, 4\}$, икосаэдра — $\{3, 5\}$, додекаэдра — $\{5, 3\}$.

Правильный гипермногогранник, гипергранями которого являются правильные многогранники с символами $\{p, q\}$, и при каждом ребре сходится r граней, будем обозначать символом $\{p, q, r\}$.

Рассмотренный выше гиперкуб (рис. 3.1) является правильным гипермногогранником. Гипергранями гиперкуба являются кубы, и при каждом ребре сходится три куба. Таким образом, его символ

Шлефли {4, 3, 3}. Гипертетраэдр (рис. 3.6), у которого все ребра равны, является правильным гипермногогранником. Гипергранями гипертетраэдра являются тетраэдры, и при каждом ребре сходится три тетраэдра. Таким образом, его символ Шлефли {3, 3, 3}.

Выясним, имеются ли в гиперпространстве другие правильные гипермногогранники.

Для этого напомним, что для обоснования существования не более пяти типов правильных многогранников в пространстве [1] использовалась теорема о том, что сумма плоских углов, сходящихся в одной вершине выпуклого многогранника, меньше 360°. Из нее следовало, что в каждой вершине выпуклого многогранника может сходиться от трех до пяти правильных треугольников, или четыре квадрата, или три правильных пятиугольника.

Воспользуемся аналогией, при которой выпуклый многогранник заменяется на выпуклый гипермногогранник, плоский угол заменяется на двугранный угол, а вершина заменяется на ребро. Тогда аналогом указанной теоремы о плоских углах выпуклого многогранника будет следующая теорем.

Теорема. *Сумма двугранных углов, образованных гранями выпуклого гипермногогранника, имеющими общее ребро, меньше* 360°.

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь ребро выпуклого гипермногогранника, и обозначим $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — полуплоскости, в которых лежат грани этого гипермногогранника, имеющими данное ребро (рис. 24.2). Покажем, что сумма двугранных углов, образованных полуплоскотями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, меньше 360°. Для этого через какую-нибудь точку A рассмотренного ребра проведем пространство Ω, перпендикулярное этому ребру. Оно пересечет данный вы-

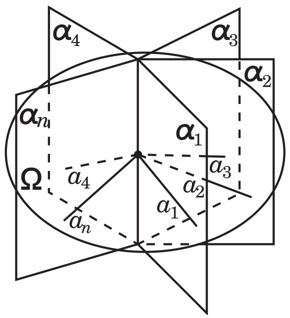


Рис. 24.2

пуклый гипермногогранник по выпуклому многограннику с вершиной A, а двугранные углы, образованные полуплоскотями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, по плоским углам с вершиной A и сторонами $a_1, \ldots, a_n$. Поскольку эти плоские углы являются линейными углами соответствующих двугранных углов, то их сумма равна сумме двугранных углов. Остается воспользоваться тем, что сумма плоских углов при вершине выпуклого многогранника меньше 360°. □

С помощью этой теоремы выясним, сколько и каких правильных многогранников может сходиться при одном ребре выпуклого гипермногогранника. Так как двугранные углы правильного тетраэдра немного меньше 71°, то при одном ребре выпуклого гипермногогранника может сходиться от трех до пяти правильных тетраэдров. Так как двугранные углы куба равны 90°, то при одном ребре может сходиться только три куба. Так как двугранные углы октаэдра и додекаэдра заключены между 90° и 120°, то при одном ребре может сходиться или три октаэдра, или три додекаэдра. Так как двугранный угол икосаэдра больше 120°, то при одном ребре не может сходиться никакое число икосаэдров.

Таким образом, возможными вариантами расположения гиперграней правильного гипермногогранника являются следующие.

1. Гипергранями правильного гипермногогранника являются правильные тетраэдры, и при каждом ребре сходится три тетраэдра. Этим гипермногогранником является гипертетраэдр. Его символ Шлефли {3, 3, 3}.

2. Гипергранями правильного гипермногогранника являются правильные тетраэдры, и при каждом ребре сходится четыре тетраэдра. Его символ Шлефли {3, 3, 4}.

3. Гипергранями правильного гипермногогранника являются правильные тетраэдры, и при каждом ребре сходится пять тетраэдров. Его символ Шлефли {3, 3, 5}.

4. Гипергранями правильного гипермногогранника являются кубы, и при каждом ребре сходится три куба. Этим гипермногогранником является гиперкуб. Его символ Шлефли {4, 3, 3}.

5. Гипергранями правильного гипермногогранника являются правильные октаэдры, и при каждом ребре сходится три октаэдра. Его символ Шлефли {3, 4, 3}.

6. Гипергранями правильного гипермногогранника являются правильные додекаэдры, и при каждом ребре сходится три додекаэдра. Его символ Шлефли {5, 3, 3}.

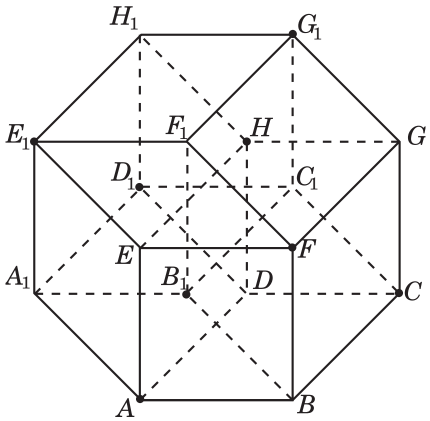


Рис. 24.3

Построим правильный гипермногогранник с символом Шлефли $\{3, 3, 4\}$, гипергранями которого являются правильные тетраэдры, и при каждом ребре сходится четыре тетраэдра.

Рассмотрим выпуклый гипермногогранник, вершинами которого являются вершины A, C, B_1, F, D_1, H, E_1, G_1 гиперкуба $A\ldots H_1$ (рис. 24.3), а ребрами — диагонали граней кубов. При каждом ребре этого гипермногогранника сходится четыре тетраэдра и, следовательно, он является искомым правильным гипермногогранником. На рисунке 24.4 дано изображение этого гипермногогранника.

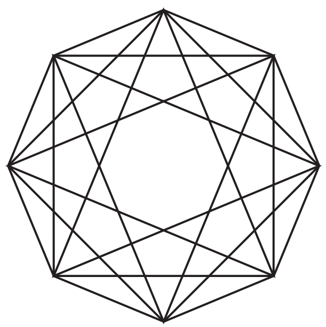


Рис. 24.4

Заметим, что такой же гипермногогранник можно получить, если в качестве вершин взять центры кубов, являющихся гранями ис-

ходного гиперкуба. Такие правильные гипермногогранники называются двойственными.

Правильным гипермногогранником с символом Шлефли $\{3, 4, 3\}$ является выпуклый гипермногогранник, вершинами которого являются центры граней гиперкуба $A\ldots H_1$. Его гипергранями являются правильные октаэдры, и при каждом ребре сходится три октаэдра.

Правильный гипермногогранник с символом Шлефли $\{3, 3, 5\}$ также можно получить из гиперкуба, однако он имеет более сложное строение. Его описание можно найти, например, в книге [2]. Мы только скажем, что этот правильный гипермногогранник имеет 120 вершин. Его гипергранями являются 600 тетраэдров.

Правильный гипермногогранник с символом Шлефли $\{5, 3, 3\}$ двойственен правильному гипермногограннику с символом Шлефли $\{3, 3, 5\}$. У него 600 вершин, являющихся центрами граней тетраэдров, и 120 гиперграней, являющихся додекаэдрами. Его описание также имеется в книге [2].

Таким образом, имеется шесть типов правильных гипермногогранников.

Упражнения

1. Сколько вершин, ребер, граней и гиперграней имеет правильный гипермногогранник с символом Шлефли $\{3, 3, 4\}$?
2. Сколько вершин, ребер, граней и гиперграней имеет правильный гипермногогранник с символом Шлефли $\{3, 4, 3\}$?
3. Сколько ребер и граней имеет правильный гипермногогранник с символом Шлефли $\{3, 3, 5\}$?
4. Сколько ребер и граней имеет правильный гипермногогранник с символом Шлефли $\{5, 3, 3\}$?
5. Представьте гипермногогранник — бигиперпирамиду, сложенную из двух равных правильных гипертетраэдров совмещением каких-нибудь их гиперграней. Будет ли он правильным гипермногогранником? Почему?
6. Какой гипермногогранник является двойственным гипертетраэдру?
7. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей единичного гиперкуба до его гиперграней.
8. Найдите расстояние от точки пересечения высот единичного гипертетраэдра до его гиперграней.

9. Ребро гиперкуба равно 1. Найдите длину ребра вписанного в него правильного гипермногогранника с символом Шлефли $\{3, 3, 4\}$.

10. Ребро гиперкуба равно 1. Найдите длину ребра вписанного в него правильного гипермногогранника с символом Шлефли $\{3, 4, 3\}$.

11. Через середины ребер гипертетраэдра, выходящих из одной вершины проведены сечения пространствами, отсекающими от гипертетраэдра тетраэдральные гиперпирамиды. Опишите гипермногогранник, который останется от гипертетраэдра после отсечений от его углов всех таких гиперпирамид. Сколько у него вершин? Сколько и какие у него гиперграни?

12. Через середины ребер гиперкуба, выходящих из одной вершины проведены сечения пространствами, отсекающими от гиперкуба тетраэдральные гиперпирамиды. Опишите гипермногогранник, который останется от гиперкуба после отсечений от его углов всех таких гиперпирамид. Сколько у него вершин? Сколько и какие у него гиперграни?

13. Какой многогранник является сечением гиперкуба пространством, проходящим через центр этого гиперкуба и перпендикулярным его диагонали?

14. В каком отношении делится диагональ AH_1 гиперкуба $A\ldots H_1$ пространством, проходящим через вершины A_1, B, D, E этого гиперкуба (рис. 3.1)?

Глава 7

Круглые фигуры в гиперпространстве

§ 25. Гиперсфера и гипершар

Гиперсфера и гипершар являются гиперпространственными аналогами, соответственно, сферы и шара в пространстве.

Определение. Гиперсферой называется фигура, состоящая из всех точек гиперпространства, удаленных от данной точки, называемой центром, на данное расстояние, называемое радиусом. Радиусом гиперсферы называется также отрезок, соединяющий центр сферы и какую-нибудь ее точку.

Определение. Гипершаром называется фигура, состоящая из всех точек гиперпространства, удаленных от данной точки, называемой центром, на расстояние, не превосходящее данное, называемое радиусом.

Гиперсфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный гипершар, называется гиперповерхностью гипершара.

Для изображения гиперсферы и гипершара на плоскости используют ортогональную проекцию на плоскость. А именно, пусть в гиперпространстве задана плоскость π. Для произвольной точки A гиперпространства проведем прямую a, перпендикулярную плоскости π (рис. 25.1). Точка A' пересечения этой прямой с плоскостью π называется *ортогональной проекцией* точки A на плоскость π. Соот-

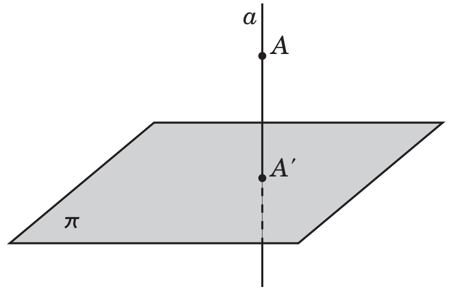


Рис. 25.1

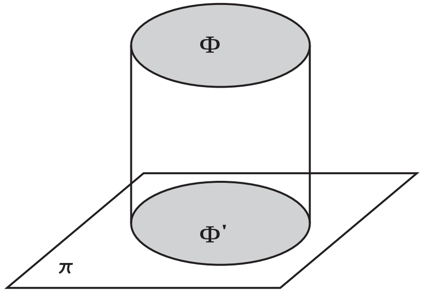


Рис. 25.2

ветствие, при котором точкам A сопоставляются их ортогональные проекции A', называется *ортогональным проектированием* на плоскость π.

Пусть Φ — некоторая фигура в гиперпространстве. Ортогональные проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется ортогональной проекцией фигуры Φ на плоскость π (рис. 25.2).

Отметим, что ортогональное проектирование на плоскость не является частным случаем параллельного проектирования. Действительно, ортогональная проекция на плоскость π определена для всех точек гиперпространства, в то время как параллельная проекция в направлении прямой l определена только для точек пространства, содержащего плоскость π и прямую l.

Теорема. *Ортогональной проекцией гиперсферы на плоскость является круг, радиус которого равен радиусу гиперсферы.*

Доказательство. Проведем плоскость α, проходящую через центр сферы O. Сечением гиперсферы этой плоскостью является окруж-

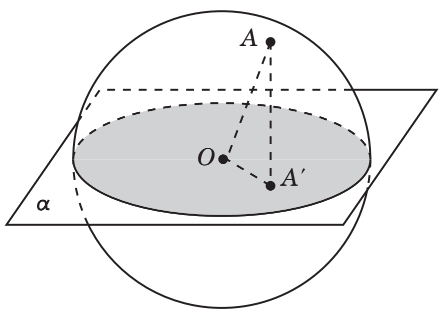


Рис. 25.3

ность радиуса R, равного радиусу гиперсферы (рис. 25.3). Если A точка гиперсферы, не принадлежит этой окружности, и A' ее ортогональная проекция на плоскость α, то $OA' \leqslant OA \leqslant R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость α точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки гиперсферы проектируются в точки соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией гиперсферы является круг того же радиуса. □

Для большей наглядности изображения гиперсферы в ней выделяют *большую сферу* — сечение гиперсферы пространством Ω, проходящим через плоскость α, а в большой сфере — *большую окружность*.

Пусть пространство Ω образует угол φ с плоскостью α. Выберем большую окружность так, чтобы ее плоскость также составляла угол φ с плоскостью α. Большая сфера называется экватором. Диаметр, перпендикулярный пространству экватора называется осью. Точки диаметра, принадлежащие гиперсфере, называются полюсами.

Проекцией выделенной большой сферы будет эллипс. Проекцией выделенной большой окружности будет еще один эллипс, находящийся внутри первого эллипса (рис. 25.4).

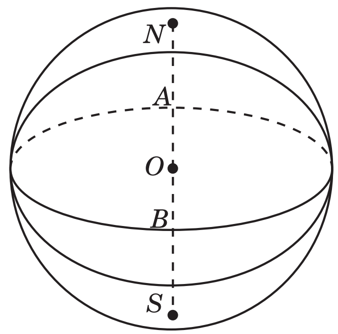


Рис. 4

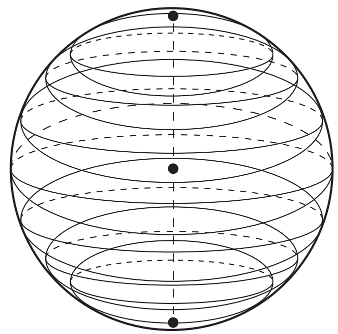


Рис. 5

Сферы, являющиеся сечениями гиперсферы пространствами, параллельными пространству экватора называются параллелями. Большие сферы, проходящие через полюсы, называются меридианами. На рисунке 25.5 показано изображение гиперсферы с несколькими параллелями.

По аналогии с определениями касательной прямой и касательной плоскости к сфере в пространстве, дадим определения касательной прямой, касательной плоскости и касательного пространства к гиперсфере.

Определение. Прямая, имеющая с гиперсферой только одну общую точку, называется касательной прямой. Плоскость, имеющая с гиперсферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью. Пространство, имеющее с гиперсферой только одну общую точку, называется касательным пространством.

Рассмотрим случаи взаимного расположения гиперсферы и пространства.

Пусть в гиперпространстве заданы гиперсфера с центром в точке O и радиусом R и пространство Ω.

В случае, если это пространство проходит через центр гиперсферы, то в сечении получается фигура, состоящая из всех точек пространства Ω, удаленных от точки O на расстояние R, т. е. сфера радиуса R (рис. 25.6).

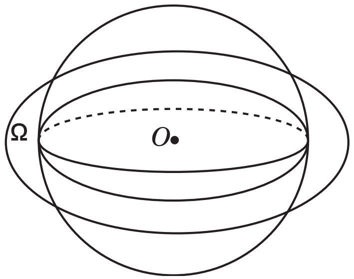


Рис. 25.6

В случае, если пространство не проходит через центр O гиперсферы, то опустим из него на пространство Ω перпендикуляр OO_1. При этом имеются следующие возможности.

1. Длина этого перпендикуляра больше R. В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки A пространства Ω и подавно больше R. Следовательно, в этом случае гиперсфера и пространство Ω не имеют общих точек (рис. 25.7).

2. Расстояние от точки O до пространства Ω равно R. В этом случае гиперсфера и пространство имеют единственную общую точку — O_1, т. е. Ω является касательным пространством (рис. 25.8).

3. Расстояние d от точки O до пространства Ω меньше R. Докажем, что в этом случае пересечением гиперсферы и пространства является сфера с центром в точке O_1 и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Действительно, для произвольной точки A, принадлежащей пересечению гиперсферы и пространства Ω, из прямоугольного тре-

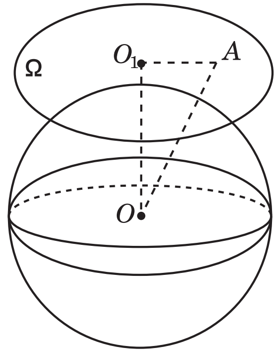


Рис. 7

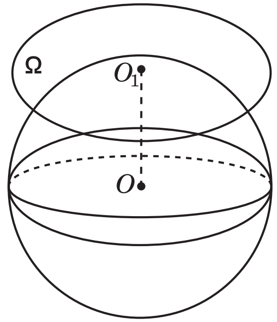


Рис. 8

угольника OO_1A, в котором $OO_1 = d$, $OA = R$, следует равенство $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 25.9). Обратно, если для точки A пространства Ω выполняется это равенство, то расстояние от точки O до точки A равно R, т. е. точка A принадлежит гиперсфере.

Из рассмотренных возможностей следует, что если пространство проходит через точку гиперсферы и перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, то расстояние от центра гиперсферы до этого пространства будет равно радиусу и, следовательно, данное пространство является касательным пространством к гиперсфере. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Касательным пространством к гиперсфере является пространство, проходящее через точку гиперсферы и перпендикулярное радиусу, проведенному в эту точку.*

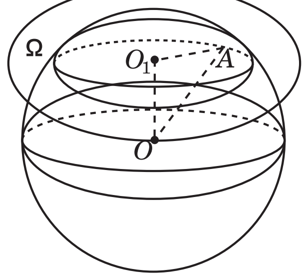


Рис. 25.9

Упражнения

1. Гипершар радиуса 5 см пересечен пространством, отстоящим от центра гипершара на 3 см. Вычислите радиус гипершара, получившегося в сечении.

2. Через середину радиуса гипершара проведено пространство перпендикулярное радиусу. Какую часть радиуса гипершара составляет радиус шара, получившегося в сечении?

3. Радиус гипершара R. Через конец радиуса проведено пространство под углом 60° к нему. Найдите радиус шара, получившегося в сечении.

4. Пространство проходит через точку A и касается гиперсферы с центром O и радиусом 3 см. Определите расстояние от этой точки до точки касания, если $OA = 5$ см.

5. Исследуйте случаи взаимного расположения гиперсферы и плоскости. Когда они: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

6. Докажите, что касательная плоскость к гиперсфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

7. Исследуйте случаи взаимного расположения гиперсферы и прямой. Когда они: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

8. Докажите, что касательная прямая к гиперсфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

9. Сколько касательных пространств можно провести к данной гиперсфере через точку, принадлежащую этой гиперсфере?

10. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной гиперсфере через точку, принадлежащую этой гиперсфере?

11. Сколько касательных прямых можно провести к данной гиперсфере через точку, принадлежащую этой гиперсфере?

12. Сколько касательных прямых можно провести к данной гиперсфере через точку, лежащую вне этой гиперсферы?

13. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной гиперсфере через точку, лежащую вне этой гиперсферы?

14. Сколько касательных пространств можно провести к данной гиперсфере через точку, лежащую вне этой гиперсферы?

15. Докажите, что все отрезки касательных, проведенных из одной точки к данной гиперсфере, равны между собой.

16. Сколько касательных пространств можно провести к данной гиперсфере через прямую, касающуюся этой гиперсферы?

17. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной гиперсфере через прямую, касающуюся этой гиперсферы?

18. Сколько касательных пространств можно провести к данной гиперсфере через прямую, не имеющую с этой гиперсферой общих точек?

19. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной гиперсфере через прямую, не имеющую с гиперсферой общих точек?

20. Сколько касательных пространств можно провести к данной гиперсфере через плоскость, не имеющую с гиперсферой общих точек?

21. Исследуйте случаи взаимного расположения двух гиперсфер. В каком случае две гиперсферы: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

22. Как должны быть расположены две сферы, чтобы через них могла пройти гиперсфера?

23. Как должны быть расположены две равные сферы, чтобы через них могла пройти гиперсфера того же радиуса?

24. Сколько точек пересечения со сферой может иметь прямая, проходящая через центр этой сферы?

25. Исследуйте случаи взаимного расположения сферы и прямой в гиперпространстве.

26. Какое пересечение со сферой может иметь плоскость, проходящая через центр этой сферы?

27. Какое пересечение со сферой может иметь пространство, проходящее через центр этой сферы?

§ 26. Гипермногогранники, вписанные в гиперсферу

Эта тема аналогична соответствующей теме курса стереометрии, где, в частности, давалось определение многогранника, вписанного в сферу, и доказывалось, что около каждой треугольной пирамиды можно описать сферу и притом только одну [1].

По аналогии с этим, дадим определение гипермногогранника, вписанного в гиперсферу.

Определение. Гипермногогранник называется вписанным в гиперсферу, если все его вершины принадлежат этой гиперсфере. Сама гиперсфера при этом называется описанной около гипермногогранника.

Покажем, что около единичного гиперкуба можно описать гиперсферу, найдем ее центр и радиус.

В качестве центра гиперсферы возьмем точку O пересечения диагоналей гиперкуба. Расстояния от нее до вершин гиперкуба будут равны 1. Следовательно, все вершины гиперкуба будут принадлежать сфере с центром O и радиусом 1, т. е. гиперкуб будет вписан в эту сферу.

Теорема. *Около любой тетраэдральной гиперпирамиды можно описать гиперсферу и притом только одну.*

Доказательство. Рассмотрим тетраэдральную гиперпирамиду $ABCDE$ с основанием $ABCD$ и вершиной E (рис. 26.1) Обозначим O центр сферы описанной около тетраэдра $ABCD$. Проведем через O прямую a, перпендикулярную пространству этого тетраэдра. Данная прямая будет геометрическим местом точек гиперпространства, равноудаленных от вершин этого тетраэдра. Через середину ребра AE проведем пространство Ω, перпендикулярное этому ребру. Данное пространство будет геометрическим местом точек гиперпространства, равноудаленных от вершин A и D. Докажем, что прямая a и пространство Ω пересекаются в некоторой точке P. Действительно, если бы они были параллельны, то прямая AD была бы перпендикулярна прямой a и, следовательно, лежала бы в пространстве тетраэдра $ABCD$, что невозможно. Точка P равноудалена от всех вершин тетраэдральной гиперпирамиды и, значит, является искомым центром описанной гиперферы.

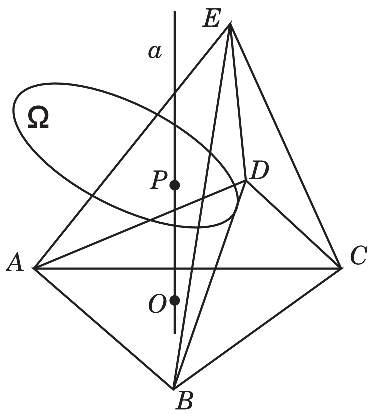


Рис. 26.1

Докажем единственность. Действительно, центр описанной гиперсферы должен принадлежать как прямой a так и пространству Ω. Следовательно, он должен совпадать с точкой P. □

Выясним, в каком случае около гиперпризмы можно описать сферу.

Теорема. *Около прямой гиперпризмы можно описать гиперсферу тогда и только тогда, когда около основания этой гиперпризмы можно описать сферу.*

Доказательство. Если около прямой гиперпризмы описана гиперсфера, то все вершины основания гиперпризмы принадлежат гиперсфере и, следовательно, сфере, являющейся пересечением гиперсферы и пространства основания (рис. 26.2). Обратно, пусть около основания прямой гиперпризмы описана сфера с центром в точке O_1 и радиусом r. Тогда и около второго основания призмы можно описать сферу с центром в точке O_2 и тем же радиусом. Пусть $O_1O_2 = d$, O — середина отрезка O_1O_2. Тогда гиперсфера с центром O и радиусом

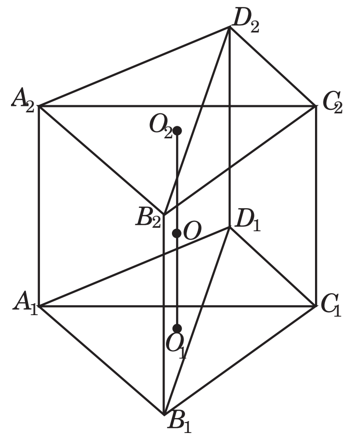


Рис. 26.2

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}$$

будет искомой описанной гиперсферой. □

Упражнения

1. Можно ли описать гиперсферу около прямоугольного гиперпараллелепипеда?

2. Около прямоугольного гиперпараллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм, 3 дм и 4 дм, описана гиперсфера. Найдите ее радиус.

3. Можно ли описать гиперсферу около наклонного гиперпараллелепипеда?

4. Может ли центр гиперсферы, описанной около тетраэдральной гиперпирамиды, находиться вне этой гиперпирамиды?

5. Приведите пример гиперпирамиды, около которой нельзя описать сферу.

6. Каким свойством должен обладать многогранник, лежащий в основании гиперпирамиды, чтобы около нее можно было описать гиперсферу?

7. Приведите пример прямой гиперпризмы, около которой нельзя описать гиперсферу.

8. Можно ли описать гиперсферу около наклонной гиперпризмы?

9. Ребро правильного гипертетраэдра равно 1. Найдите радиус описанной около него гиперсферы.

10. Найдите радиус гиперсферы, описанной около гиперпирамиды, в основании которой единичный куб и боковые ребра равны 1.

11. Найдите радиус гиперсферы, описанной около прямой гиперпризмы, в основании которой единичный тетраэдр и боковые ребра равны 1.

12. Докажите, что около правильного гипермногогранника $\{3, 3, 4\}$, гипергранями которого являются правильные тетраэдры и при каждом ребре сходится четыре тетраэдра, можно описать гиперсферу. Найдите ее радиус, если ребро гипермногогранника равно 1.

§ 27. Гипермногогранники, описанные около гиперсферы

Здесь мы рассмотрим гипермногогранники, описанные около гиперсферы, но сначала напомним соответствующие понятия для многогранников и сфер в пространстве.

Многогранник называется описанным около сферы, если все его грани касаются сферы. Сама сфера называется вписанной в многогранник.

По аналогии с этим, дадим определение гипермногогранника, описанного около гиперсферы.

Определение. Гипермногогранник называется описанным около гиперсферы, если все его гиперграни касаются гиперсферы. Сама гиперсфера называется вписанной в гипермногогранник.

Пример. В гиперкуб можно вписать гиперсферу. Ее центром является центр гиперкуба, а радиус равен половине ребра гиперкуба.

В курсе стереометрии доказывалось, что в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну.

Прежде чем формулировать и доказывать аналогичную теорему для гиперпространства, выясним, где будут располагаться центры гиперсфер, касающихся гиперграней гиперграннного угла.

Рассмотрим гипергранный угол, образованный полупространствами Ω_1 и Ω_2 с общей граничной плоскостью α (рис. 27.1). Через плоскость α проведем биссектральное полупространство Ω. Заметим, что это полупространство является геометрическим местом внутренних точек гипергранного угла, равноудаленных от его гиперграней. Если гиперсфера касается гиперграней этого гипергранного угла, то ее центр равноудален от его гиперграней и, следовательно, принадлежит биссектральному полупространству. Обратно, если точка A принадлежит биссектральному полупространству, то она равноудалена от гиперграней гипергранного угла и, следовательно, сфера с центром в этой точке и радиусом, равным расстоянию от этой точки до гиперграней, будет касаться гиперграней ги-

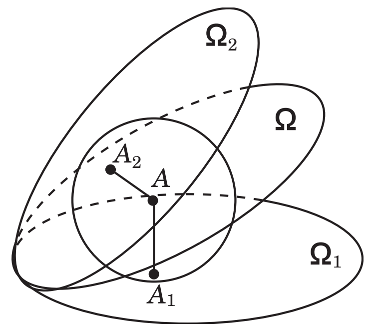


Рис. 27.1

перграного угла. Таким образом, геометрическим местом центров гиперсфер, касающихся гиперграней гиперграного угла, будет биссектральное полупространство.

Теорема. *В любую тетраэдральную гиперпирамиду можно вписать гиперсферу, и притом только одну.*

Доказательство. Пусть $ABCDE$ — тетраэдральная гиперпирамида с основанием $ABCD$ и вершиной E. Ясно, что центром вписанной гиперсферы будет точка, одинаково удаленная от всех ее гиперграней. Рассмотрим четыре биссектральных полупространства гиперграных углов, образованных боковыми гипергранями гиперпирамиды и основанием. Биссектральные полупространства, содержащие грани ABD, BCD и ACD имеют общую точку D и, следовательно, пересекаются по полупрямой d. Четвертое биссектральное полупространство, содержащее грань ABC, пересекает эту полупрямую в некоторой точке O, которая будет одинаково удалена как от боковых гиперграней, так и от основания, т. е. будет искомым центром вписанной сферы.

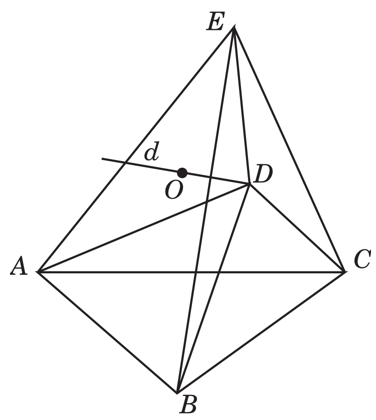


Рис. 27.2

Докажем единственность. Центр вписанной гиперсферы равноудален от ее гиперграней и, значит, должен принадлежать всем четырем биссектральным полупространствам. Следовательно, он совпадает с их точкой пересечения. □

Выясним, в каком случае в прямую гиперпризму можно вписать гиперсферу.

Теорема. *В прямую гиперпризму можно вписать гиперсферу тогда и только тогда, когда в основание этой гиперпризмы можно вписать сферу, и высота гиперпризмы равна диаметру этой сферы.*

Доказательство. Пусть в прямую гиперпризму вписана гиперсфера с центром в точке O и радиусом R. Тогда высота гиперпризмы равна $2R$. Ортогональная проекция гиперсферы на пространство основания гиперпризмы даст сферу, вписанную в это основание. Обратно, предположим, что в основание прямой гиперпризмы можно вписать сферу радиуса R, а высота гиперпризмы равна $2R$. Обозначим O середину отрезка, соединяющего центры сфер, вписанных в основания. Тогда гиперсфера с центром O и радиусом R будет искомой гиперсферой, вписанной в гиперпризму. □

Упражнения

1. Можно ли вписать гиперсферу в прямоугольный гиперпараллелепипед?
2. Можно ли вписать гиперсферу в наклонную гиперпризму, в основании которой единичный тетраэдр?
3. Существует ли наклонная гиперпризма, в которую можно вписать гиперсферу?
4. Приведите пример гиперпирамиды, в которую нельзя вписать сферу.
5. Найдите радиус гиперсферы, вписанной в правильный гипертетраэдр с ребром 1.
6. Найдите радиус гиперсферы, вписанной в правильную гиперпирамиду, в основании которой куб с ребром 1 и боковые ребра равны 1.
7. Какой должна быть высота правильной гиперпризмы, в основании которой правильный тетраэдр с ребром 1, чтобы в нее можно было вписать гиперсферу?
8. Какой должна быть высота правильной гиперпризмы, в основании которой октаэдр с ребром 1, чтобы в нее можно было вписать гиперсферу?
9. Существует ли гиперсфера, касающаяся всех ребер гиперкуба? Если существует, найдите ее радиус для единичного гиперкуба.
10. Существует ли гиперсфера, касающаяся всех граней гиперкуба? Если существует, найдите ее радиус для единичного гиперкуба.

11. Существует ли гиперсфера, касающаяся всех ребер гипертетраэдра? Если существует, найдите ее радиус для единичного гипертетраэдра.

12. Существует ли гиперсфера, касающаяся всех граней гипертетраэдра? Если существует, найдите ее радиус для единичного гипертетраэдра.

§ 28. Гиперцилиндр и гиперконус

По аналогии с определениями цилиндра и конуса в пространстве [1] дадим определения гиперцилиндра и гиперконуса в гиперпространстве.

Пусть в гиперпространстве заданы два параллельных пространства Ω и Ω'. Φ — шар в одном из этих пространств, например Ω (рис. 28.1). Рассмотрим ортогональное проектирование на пространство Ω'. Проекцией шара Φ будет шар Φ'.

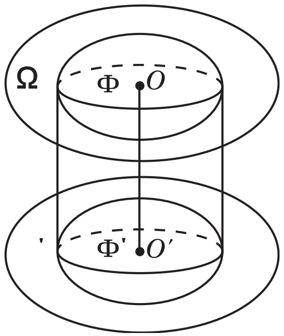


Рис. 28.1

Определение. Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки шара Φ с их ортогональными проекциями, называется прямым гиперцилиндром, или просто гиперцилиндром.

Шары Φ и Φ' называются *основаниями* гиперцилиндра.

Расстояние между пространствами оснований называется *высотой* гиперцилиндра.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки сферы одного основания гиперцилиндра с их ортогональными проекциями, называется *боковой поверхностью* гиперцилиндра. Сами отрезки называются *образующими* гиперцилиндра.

Прямая, проходящая через центры оснований гиперцилиндра, называется *осью* этого гиперцилиндра.

Сечение гиперцилиндра пространством, проходящим через ось гиперцилиндра, называется *осевым сечением*.

В случае, если вместо ортогонального проектирования берется параллельное проектирование в направлении наклонной к пространству Ω', то фигура, образованная отрезками, соединяющими точки шара Φ с их параллельными проекциями, называется *наклонным гиперцилиндром* (рис. 28.2).

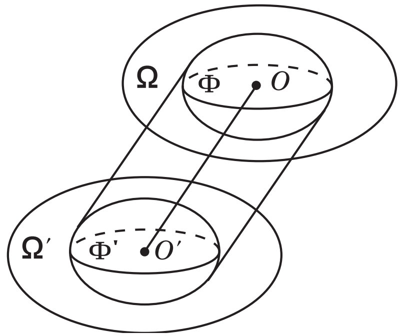


Рис. 28.2

Определение. Гиперсфера называется вписанной в гиперцилиндр, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом гиперцилиндр называется описанным около сферы (рис. 28.3).

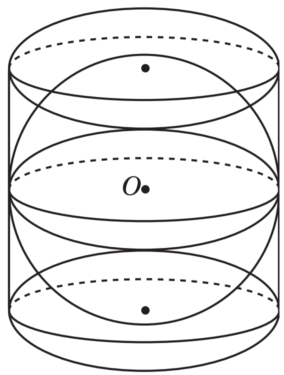


Рис. 28.3

Определение. Гиперцилиндр называется вписанным в гиперсферу, если сферы оснований гиперцилиндра лежат на гиперсфере. При этом гиперсфера называется описанной около гиперцилиндра (рис. 28.4).

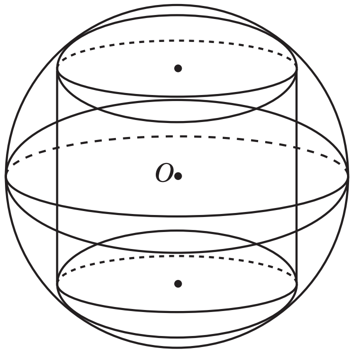


Рис. 28.4

Пусть теперь в пространстве задана пространство Ω и точка S, ему не принадлежащая. Φ — шар в пространстве Ω (рис. 28.5).

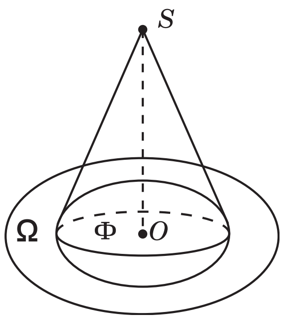


Рис. 28.5

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точку Sс точками шара Φ, называется *гиперконусом*.

Шар Φ называется *основанием* гиперконуса, а точка S — *вершиной* гиперконуса.

Расстояние между вершиной гиперконуса и пространством основания называется *высотой* гиперконуса.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими вершину гиперконуса с точками сферы его основания, называется *боковой поверхностью* гиперконуса. Сами отрезки называются *образующими* гиперконуса.

Если гиперконус пересечен пространством, параллельным основанию, то его часть, заключенная между этим пространством и основанием, называется *усеченным гиперконусом* (рис. 28.6). Само сечение гиперконуса пространством, параллельной основанию, также называется *основанием* усеченного гиперконуса.

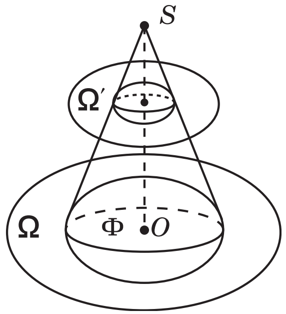


Рис. 28.6

Высотой усеченного гиперконуса называется расстояние между пространствами его оснований.

В случае, если отрезок, соединяющий вершину гиперконуса с центром основания, перпендикулярен плоскости основания, гиперконус называется *прямым* (рис. 28.5). В противном случае он называется *наклонным* (рис. 28.7).

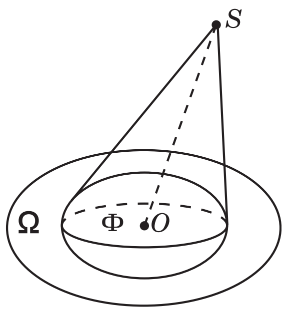


Рис. 28.7

В дальнейшем прямые гиперконусы мы будем называть просто гиперконусами.

Прямая, проходящая через вершину и центр основания гиперконуса, называется *осью* этого гиперконуса.

Сечение гиперконуса пространством, проходящим через ось гиперконуса, называется *осевым сечением*.

Определение. Гиперсфера называется вписанной в гиперконус, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом гиперконус называется описанным около сферы (рис. 28.8).

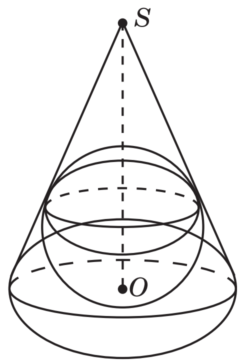


Рис. 28.8

Определение. Гиперконус называется вписанным в гиперсферу, если его вершина и сфера основания лежат на гиперсфере. При этом гиперсфера называется описанной около гиперконуса (рис. 28.9).

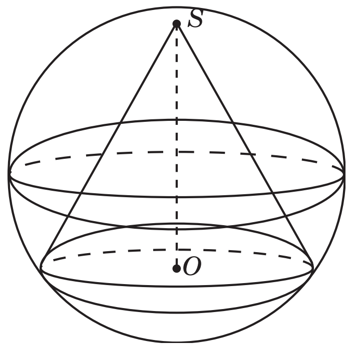


Рис. 28.9

Упражнения

1. Сколько образующих имеет гиперцилиндр?
2. Какой фигурой является сечение гиперцилиндра пространством, параллельным основаниям?
3. Какой фигурой является осевое сечение гиперцилиндра?
4. Какой фигурой является сечение гиперцилиндра пространством, параллельным оси гиперцилиндра?
5. Радиус основания гиперцилиндра равен 2 м, высота — 3 м. Найдите объем осевого сечения.
6. Радиус основания гиперцилиндра равен 1, высота 20, объем сечения, параллельного оси, равен 10π. На каком расстоянии от оси находится пространство сечения?
7. В гиперцилиндр, радиус основания которого равен 1, вписана гиперсфера. Чему равна высота этого гиперцилиндра?
8. Можно ли вписать гиперсферу в наклонный гиперцилиндр?
9. Радиус основания и высота гиперцилиндра равны 1. Найдите радиус описанной гиперсферы.
10. Можно ли описать гиперсферу около наклонного гиперцилиндра?
11. Высота гиперконуса равна 8 м, радиус основания — 6 м. Найдите образующую гиперконуса.
12. Какой фигурой является сечение гиперконуса пространством, параллельным основанию?
13. Какой фигурой является осевое сечение гиперконуса?
14. Образующая гиперконуса равна 6 м и наклонена к пространству основания под углом 60°. Найдите объем основания гиперконуса.
15. Высота гиперконуса равна 1. На каком расстоянии от вершины надо провести пространство параллельное основанию, чтобы объем сечения был равен половине объема основания?
16. Высота гиперконуса равна 8 м, радиус основания — 6 м. Найдите радиус вписанной гиперсферы.
17. Высота гиперконуса равна 8 м, радиус основания — 6 м. Найдите радиус описанной гиперсферы.
18. В гиперсферу вписан гиперконус, радиус основания которого равен 4 см. Найдите высоту гиперконуса, если радиус гиперсферы равен 5 см.
19. Можно ли вписать гиперсферу в наклонный гиперконус?
20. Можно ли описать сферу около наклонного гиперконуса?

§ 29. Симметрия гиперпространственных фигур

Напомним, что элементами симметрии пространственных фигур являются: центр симметрии, ось симметрии, ось симметрии n-го порядка; плоскость симметрии.

По аналогии с определениями симметрии в пространстве [1], дадим соответствующие определения симметрии в гиперпространстве.

Определение. Точки A и A' гиперпространства называются симметричными относительно точки O, называемой центром симметрии, если O является серединой отрезка AA' (рис. 29.1). Точка O считается симметричной сама себе.

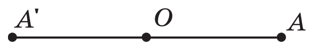


Рис. 29.1

Фигура Ф в гиперпространстве называется *центрально-симметричной* относительно точки O, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно точки O некоторой точке A' фигуры Ф.

Пример 1. Гиперкуб имеет центр симметрии, являющийся точкой пересечения его диагоналей.

Докажем сначала, что диагонали гиперкуба $A \dots H_1$ (рис. 29.2) пересекаются в одной точке — их серединах. Действительно, рассмотрим четырехугольник ABG_1H_1. Стороны AB и G_1H_1 равны и параллельны. Следовательно, ABG_1H_1 — параллелограмм. Прямая AB перпендикулярна пространству BCG и, следовательно, перпендикулярна BG_1. Значит, угол ABG_1 прямой и, следовательно, ABG_1H_1 — прямоугольник. Диагонали AG_1 и BH_1 этого прямоугольника в точке O их пересечения делятся пополам. Аналогично, диагонали BH_1 и CE_1 пересекаются в точке, являющейся серединой BH_1, т. е. в точке O и т. д.

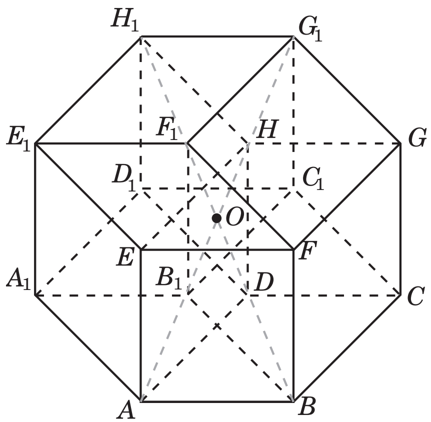


Рис. 29.2

Центральная симметрия относительно точки O переводит вершины гиперкуба в противоположные вершины. Следовательно, точка O — центр симметрии.

Определение. Точки A и A' гиперпространства называются симметричными относительно прямой a, называемой осью симметрии, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку (рис. 29.3). Точки прямой a считаются симметричными сами себе.

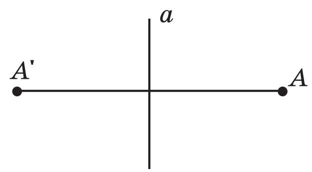


Рис. 29.3

Фигура Ф в гиперпространстве называется *симметричной относительно оси* a, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно этой оси некоторой точке A' фигуры Ф.

Пример 2. Прямая, соединяющая центры противоположных граней гиперкуба, является его осью симметрии.

Рассмотрим гиперкуб $A \dots H_1$ (рис. 29.4). Докажем, что прямая, проходящая через центры O_1, O_2 граней $ABFE$ и $D_1C_1G_1H_1$ является осью симметрии. Действительно, так как $ABFED_1C_1G_1H_1$ — прямоугольный параллелепипед, то эта прямая является осью симметрии этого параллелепипеда. Докажем симметричность вершин гиперкуба, не входящих в этот параллелепипед. Рассмотрим вершины A_1 и G, и докажем, что прямая A_1G перпендикулярна O_1O_2. Имеем, $OO_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $A_1O = 1$. Из прямоугольного треугольника A_1AO_1 находим $A_1O_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Следовательно, треугольник A_1OO_1 прямоугольный. Значит, прямая A_1G перпендикулярна прямой O_1O_2. Из этого получаем, что точки A_1 и G симметричны относительно прямой O_1O_2. Аналогичным образом показывается симметричность точек E_1 и C, B_1 и H, F_1 и D.

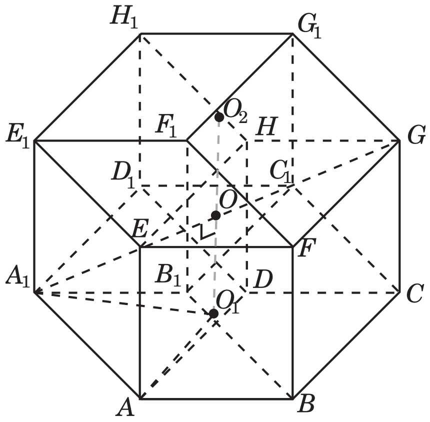


Рис. 29.4

Определение. Точки A и A' в гиперпространстве называются симметричными относительно плоскости α, называемой плоскостью симметрии, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Точки плоскости α считаются симметричными сами себе (рис. 29.5).

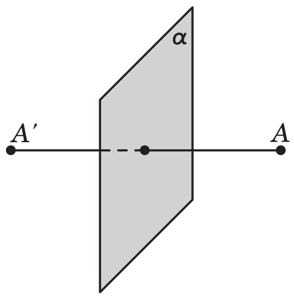


Рис. 29.5

Фигура Ф в гиперпространстве называется *симметричной относительно плоскости*, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно этой плоскости некоторой точке A' фигуры Ф.

Пример 3. Гиперкуб $A \ldots H_1$ симметричен относительно плоскости ACG_1E_1 (рис. 29.6).

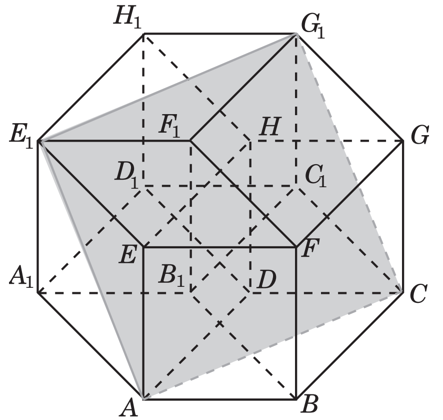


Рис. 29.6

Действительно, эта плоскость является диагональной в параллелепипеде $AA_1E_1ECC_1G_1G$. Следовательно, вершины A_1 и C_1 симметричны, соответственно, вершинам E и G. Аналогичным образом показывается симметричность других вершин гиперкуба.

Кроме перечисленных выше видов симметрии в гиперпространстве имеются и другие симметрии.

Определение. Точки A и A' в гиперпространстве называются симметричными относительно пространства Ω, называемым пространством симметрии, если эта пространство проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярно к нему. Точки пространства Ω считаются симметричными сами себе (рис. 29.7).

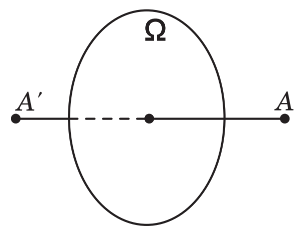


Рис. 29.7

Фигура Ф в гиперпространстве называется *симметричной относительно пространства*, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно этого пространства некоторой точке A' фигуры Ф.

Пример 4. Гиперкуб симметричен относительно пространства, содержащего две его противоположные грани.

Действительно, перпендикулярами, опущенными из вершин A_1 и G на это пространство, являются отрезки A_1O и GO, где O — центр симметрии гиперкуба (рис. 29.8). Следовательно, вершины A_1 и G симметричны относительно данного пространства. Аналогичным образом показывается симметричность других вершин гиперкуба.

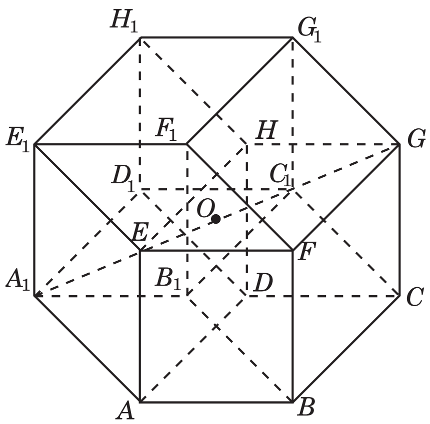


Рис. 29.8

Прежде чем дать определение плоскости симметрии n-го порядка, определим понятие понятие поворота в гиперпространстве.

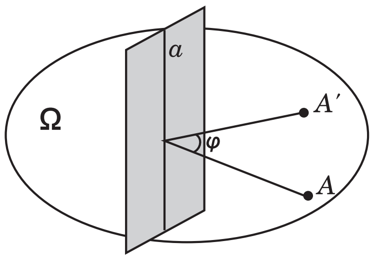


Рис. 29.9

Напомним, что на плоскости поворот определялся вокруг точки, а в пространстве поворот определялся вокруг прямой. Продолжая аналогию, получаем, что поворот в гиперпространстве нужно определять вокруг плоскости. А именно, пусть в гиперпространстве задана плоскость α и точка A, ей не принадлежащая (рис. 29.9). Через точку A проведем пространство Ω, перпендикулярную плоскости α, и прямую пересечения α и Ω обозначим a. Будем говорить, что точка A' гиперпространства получается из точки A поворотом вокруг плоскости α на угол φ, если в пространстве Ω точка A' получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ.

Определение. Преобразование гиперпространства, при котором точки плоскости α остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой плоскости (в одном и том же направлении) на угол φ называется поворотом, или вращением. Плоскость α при этом называется плоскостью вращения.

Говорят, что фигура Ф в гиперпространстве получена *вращением* фигуры F вокруг плоскости α, если точки фигуры Ф получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг плоскости α. Фигура Ф при этом называется *фигурой вращения*.

Например, гиперфера получается вращением сферы вокруг плоскости ее экватора. Гиперцилиндр получается вращением цилиндра вокруг плоскости, проходящей через ось цилиндра.

Определение. Плоскость α называется плоскостью симметрии n-го порядка фигуры Ф в гиперпространстве, если при повороте фигуры Ф на угол $\dfrac{360^\circ}{n}$ вокруг плоскости α фигура Ф совмещается сама с собой.

Ясно, что плоскость симметрии 2-го порядка является просто плоскостью симметрии.

Пример 5. Плоскость, проходящая через противоположные ребра гиперкуба, является плоскостью симметрии 3-го порядка.

Пусть $A \dots H_1$ — гиперкуб (рис. 29.8). Рассмотрим плоскость ABG_1H_1. Она перпендикулярна пространству гиперграни $BC \dots G_1H_1$. Прямая BG_1, являющаяся линией пересечения этих плоскости и пространства, будет осью симметрии 3-го порядка куба $BG \dots G_1H_1$. Аналогично, прямая AH_1, являющаяся линией пересечения плоскости ABG_1H_1 и пространства $AA_1 \dots E_1H_1$, будет осью симметрии 3-го порядка куба $AA_1 \ldots E_1H_1$. Из этого следует, что плоскость ABG_1H_1 будет плоскостью симметрии 3-го порядка гиперкуба $A \ldots H_1$.

Упражнения

1. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур в гиперпространстве.
2. Докажите, что если фигура имеет один центр симметрии, то оси симметрии, плоскости симметрии, пространства симметрии этой фигуры проходят через центр симметрии.
3. Имеет ли центр симметрии: а) гиперсфера; б) гипершар; в) гиперцилиндр; гиперконус?
4. Имеет ли центр симметрии правильный гипертетраэдр?
5. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?
6. Докажите, что прямоугольный гиперпараллелепипед имеет центр симметрии.
7. Является ли осью симметри гиперкуба прямая, проходящая через: а) середины противоположных ребер; б) центры противоположных гиперграней?
8. Сколько осей симметрии имеет гиперкуб?
9. Имеет гипертетраэдр оси симметрии?
10. Сколько осей симметрии имеет гипершар?
11. Имеет ли гиперсфера плоскости симметрии?
12. Какие плоскости симметрии имеет гиперцилиндр?
13. Какие плоскости симметрии имеет гиперкуб?
14. Имеет ли гипертетраэдр плоскости симметрии?
15. Какие пространства симметрии имеет: а) гипершар; б) гиперцилиндр?
16. Имеет ли пространства симметрии гиперконус?
17. Какие пространства симметрии имеет гиперкуб?
18. Имеет ли правильный гипертетраэдр пространства симметрии?
19. Какими элементами симметрии обладает правильная тетраэдральная гиперпризма?
20. Какими элементами симметрии обладает правильная гиперпирамида, в основании которой куб?

Глава 8

Гиперобъем и гиперповерхность гиперпространственных фигур

§ 30. Гиперобъем и его свойства. Гиперобъем обобщенного гиперцилиндра

Напомним, что объем — величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Аналогичным образом, гиперобъем — величина, сопоставляющая фигурам в гиперпространстве неотрицательные действительные числа. За единицу измерения гиперобъема принимается гиперкуб, ребро которого равно 1.

На практике, после численного значения гиперобъема указывают единицу измерения. Например, W мм^4, W см^4, W м^4.

Гиперобъем фигуры показывает, сколько раз единица измерения объема и ее части укладываются в данной фигуре.

Для гиперобъема гиперпространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам объемов пространственных фигур.

1. Гиперобъем $W(\Phi)$ фигуры Φ в гиперпространстве является неотрицательным числом.
2. Равные фигуры имеют равные гиперобъемы.
3. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, то гиперобъем фигуры Φ равен сумме гиперобъемов фигур Φ_1 и Φ_2, т. е.

$$W(\Phi) = W(\Phi_1) + W(\Phi_2).$$

Две фигуры, имеющие равные гиперобъемы, называются *равновеликими*.

Для нахождения гиперобъемов фигур удобно объединить некоторые фигуры в один класс. С этой целью, по аналогии с определением обобщенного цилиндра [1], дадим общее определение обобщенного гиперцилиндра.

Пусть Ω и Ω' — два параллельных пространства, l — пересекающая эти пространства прямая; F — фигура в одном из этих пространств, F' — ее параллельная проекция на другое пространство в направлении прямой l (рис. 30.1). Отрезки, соединяющие точки фигуры F с их параллельными проекциями, образуют фигуру в гиперпространстве, которую мы будем называть *обобщенным гиперцилиндром*. Фигуры F и F' называются *основаниями* обобщенного гиперцилиндра. Расстояние между пространствами оснований называют *высотой* обобщенного гиперцилиндра.

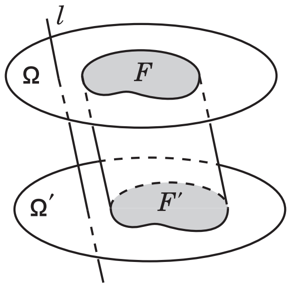


Рис. 30.1

В случае, если в определении обобщенного гиперцилиндра вместо параллельной проекции берется ортогональная, т. е. прямая l перпендикулярна пространствам Ω и Ω', то обобщенный гиперцилиндр называется *прямым* (рис. 30.2). В противном случае обобщенный гиперцилиндр называется *наклонным*.

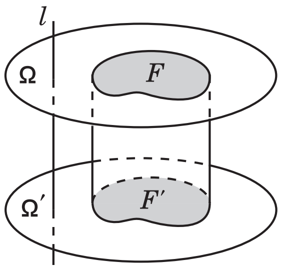


Рис. 30.2

Заметим, что частным случаем обобщенного гиперцилиндра является гиперпризма.

В случае, если основание F обобщенного гиперцилиндра является шаром, то обобщенный гиперцилиндр называется *шаровым*.

Ранее мы рассматривали только шаровые гиперцилиндры и называли их просто гиперцилиндрами.

Так же, как и для пространства доказывается следующая теорема.

Теорема. *Гиперобъем W обобщенного гиперцилиндра равен произведению объема V его основания на высоту h, т. е.*

$$W = V \cdot h.$$

Поскольку частным случаем обобщенного гиперцилиндра является гиперпараллелепипед, гиперпризма и шаровой гиперцилиндр, то имеем.

Следствие 1. Гиперобъем прямоугольного гиперпараллелепипеда равен произведению всех его измерений, т. е. имеет место формула

$$W = a \cdot b \cdot c \cdot d,$$

где a, b, c, d — ребра гиперпараллелепипеда, выходящие из одной вершины.

Следствие 2. Гиперобъем гиперпризмы равен произведению объема ее основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$W = V \cdot h,$$

где V — побъем основания, h — высота гиперпризмы.

Следствие 3. Гиперобъем шарового гиперцилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$W = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot h.$$

Упражнения

1. Диагональ гиперкуба равна 2 см. Найдите его гиперобъем.

2. Как относятся гиперобъемы двух гиперкубов: данного и его модели, увеличенной в масштабе: а) $1:2$; б) $1:3$; в) $1:n$?

3. Если каждое ребро гиперкуба увеличить на 1 см, то его гиперобъем увеличится на 15 см^4. Определите ребро куба.

4. Докажите, что любое пространство, проходящее через центр гиперпараллелепипеда, делит его на две равновеликие части.

5. Найдите гиперобъем гиперпараллелепипеда, гранями которого являются ромбы со сторонами 1 и острыми углами 60°.

6. Осевым сечением прямого шарового гиперцилиндра является круговой цилиндр, осевое сечение которого — квадрат со стороной 1. Найдите гиперобъем этого гиперцилиндра.

7. Основанием прямой тетраэдральной гиперпризмы служит правильный тетраэдр с ребром 1, высота гиперпризмы равна 2. Найдите гиперобъем данной гиперпризмы.

8. Найдите гиперобъем правильной гиперпирамиды, основание которой — куб с ребром 1, боковое ребро равно 1.

9. Найдите гиперобъем фигуры, которая получается при вращении единичного куба вокруг его грани.

10. Найдите гиперобъем фигуры, которая получается вращением прямого кругового цилиндра с образующей 1 и радиусом основания 1 вокруг его осевого сечения.

§ 31. Выражение гиперобъема через интеграл

Гиперобъем обобщенного гиперконуса

Напомним, как выражается объем пространственной фигуры через интеграл.

Пусть пространственная фигура Φ заключена между плоскостями α и β, расстояние между которыми равно h (рис. 31.1). Рассмотрим плоскость γ, параллельную этим плоскостям и отстоящую от плоскости α на расстояние x, $0 \leqslant x \leqslant h$. Обозначим $S(x)$ площадь сечения фигуры Φ плоскостью γ. Тогда объем $V(\Phi)$ фигуры Φ вычисляется по формуле

$$V(\Phi) = \int_0^h S(x)\,dx.$$

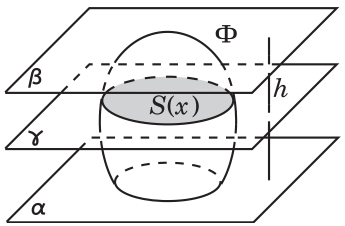


Рис. 31.1

Аналогичным образом вычисляется гиперобъем фигур в гиперпространстве. А именно, пусть гиперпространственная фигура Φ заключена между пространствами Ω и Σ, расстояние между которыми равно h (рис. 31.2). Рассмотрим пространство Λ, параллельное этим пространствам и отстоящее от пространства Ω на расстояние x, $0 \leqslant x \leqslant h$. Обозначим $V(x)$ объем сечения фигуры Φ пространством Λ. Тогда гиперобъем $W(\Phi)$ фигуры Φ вычисляется по формуле

$$W(\Phi) = \int_0^h V(x)\,dx.$$

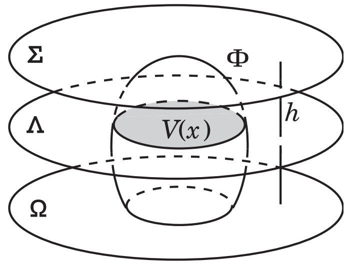


Рис. 31.2

Дадим определение обобщенного гиперконуса, позволяющее объединить в один класс рассмотренные ранее гиперконусы и гиперпирамиды.

Пусть F — фигура в пространстве Ω, и S — точка вне этого пространства. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S, об-

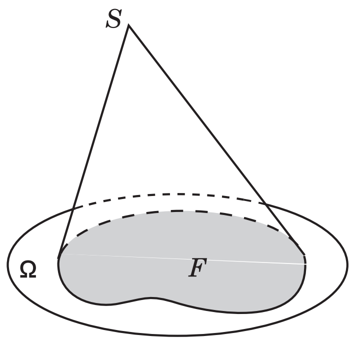


Рис. 31.3

разуют фигуру в гиперпространстве, которую мы будем называть *обобщенным гиперконусом* (рис. 31.3). Фигура F называется *основанием* обобщенного гиперконуса, точка S — *вершиной* обобщенного гиперконуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины обобщенного гиперконуса на пространство основания, называется *высотой* обобщенного гиперконуса.

В случае, если F является шаром, обобщенный гиперконус называется *шаровым гиперконусом*. Если высота шарового гиперконуса проходит через центр основания, то такой гиперконус называется *прямым шаровым*. Раньше мы рассматривали прямые шаровые гиперконусы и называли их просто гиперконусами. Заметим, что частным случаем обобщенного гиперконуса является также гиперпирамида.

Для данного обобщенного гиперконуса рассмотрим пространство, параллельное основанию и пересекающее гиперконус. Часть гиперконуса, заключенная между этим пространством и основанием, называется *усеченным гиперконусом*.

Используя формулу, выражающую гиперобъем через интеграл, докажем следующую теорему.

Теорема. *Гиперобъем W обобщенного гиперконуса равен одной четвертой произведения объема V его основания на высоту h, т. е.*

$$W = \frac{1}{4}V \cdot h.$$

Доказательство. Рассмотрим обобщенный гиперконус с основанием F, лежащий в пространстве Ω и вершиной S (рис. 31.4). Пусть объем основания этого гиперконуса равен V, а высота — h. Проведем на расстоянии x от Ω пространство Ω' параллельное Ω, $0 \leqslant x \leqslant h$. В сечении гиперконуса этим пространством получится фигура F' подобная F с коэффициентом подобия $k = x/h$. Ее объем будет равен k^3V и, следовательно, гиперобъем гиперконуса будет равен

$$\int\limits_0^h \frac{x^3}{h^3}Vdx = \frac{V}{h^3}\int\limits_0^h x^3dx = \frac{V}{h^3}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^h = \frac{1}{4}V \cdot h. \qquad \square$$

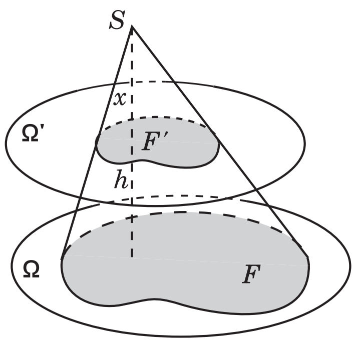


Рис. 31.4

Следствие. Гиперобъем шарового гиперконуса, радиус основания которого равен R, а высота h, вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{3}\pi R^3 h.$$

Упражнения

1. Найдите гиперобъем правильной гиперпирамиды, основание которой единичный куб, а боковое ребро равно 2.

2. Найдите гиперобъем правильного гипертетраэдра с ребром 1.

3. Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри гиперкуба, до всех его гиперграней, не зависит от выбора этой точки.

4. Во сколько раз увеличится гиперобъем шарового гиперконуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?

5. Изменится ли гиперобъем шарового гиперконуса, если радиус основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза?

6. Гиперцилиндр и гиперконус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем гиперконуса, если объем гиперцилиндра равен 40π см^4.

7. Гиперобъем гиперконуса равен V. Параллельно основанию гиперконуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся гиперобъемы полученных частей гиперконуса?

8. Напишите формулу гиперобъема прямого шарового гиперконуса с радиусом основания R и образующей b.

9. Высота шарового гиперконуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его гиперобъем.

10. Радиусы оснований усеченного шарового гиперконуса 2 и 1. Образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите его гиперобъем.

11. Объем гиперконуса равен V. Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите гиперобъем средней части гиперконуса.

§ 32. Гиперобъем гипершара

Напомним, что объем шара радиуса R выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Рассмотрим вопрос о нахождении гиперобъема гипершара.

Теорема. *Гиперобъем гипершара радиуса R выражается формулой*

$$W = \frac{1}{2}\pi^2 R^4.$$

Доказательство. Пусть дан полугипершар радиуса R, основание которого расположено в пространстве Ω (рис. 32.1). Рассмотрим пространство Σ, параллельное Ω и отстоящее от него на расстояние $x (0 \leqslant x \leqslant R)$. В сечении гипершара этим пространством получается шар радиуса $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Его объем $V(x)$ равен $\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^3$. Следовательно, гиперобъем полугипершара равен

$$\int_0^R \frac{4}{3}\pi(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

$$\int_0^R \frac{4}{3}\pi R^2\sqrt{R^2 - x^2}dx \quad \text{и} \int_0^R \frac{4}{3}\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

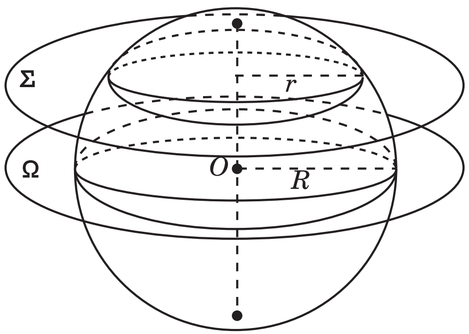


Рис. 32.1

Первый из них равен $\frac{1}{3}\pi^2 R^4$, а второй $\frac{1}{12}\pi^2 R^4$. Следовательно, гиперобъем полугипершара равен $\frac{1}{4}\pi^2 R^4$, а гиперобъем всего гипершара равен $\frac{1}{2}\pi^2 R^4$. □

Упражнения

1. Найдите гиперобъем гипершара, диаметр которого равен 4 см.

2. Во сколько раз увеличится гиперобъем гипершара, если его радиус увеличить: а) в 3 раза; б) в 4 раза?

3. Радиусы трех гипершаров 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус гипершара, гиперобъем которого равен сумме их гиперобъемов.

4. Сколько нужно взять гипершаров радиуса 2 см, чтобы сумма их гиперобъемов равнялась гиперобъему гипершара радиуса 6 см?

5. Найдите гиперобъем гипершара, описанного около единичного гиперкуба.

6. Найдите объем гипершара, вписанного в гиперкуб, с ребром, равным единице.

7. Сечение гипершара пространством, отстоящим от центра гипершара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите гиперобъем гипершара.

8. Найдите гиперобъем гипершара, описанного около правильного гипертетраэдра с ребром a.

9. Найдите объем гипершара, вписанного в паравильный гипертетраэдр, с ребром a.

10. Дана правильная гиперпирамида, в основании которой единичный куб, и все боковые ребра равны 1. Шар с центром в вершине этой гиперпирамиды касается ее основания. Найдите объем части шара, заключенной внутри гиперпирамиды.

§ 33. Гиперповерхность гиперпространственных фигур

Объемом гиперповерхности гипермногогранника по определению считается сумма объемов, входящих в эту гиперповерхность многогранников.

Гиперповерхность гиперпризмы состоит из оснований и боковой гиперповерхности. При этом объем боковой гиперповерхности равен площади поверхности основания умноженной на высоту гиперпризмы.

Гиперповерхность гиперпирамиды состоит из основания и боковой гиперповерхности. При этом объем боковой гиперповерхности равен одной третьей площади поверхности основания умноженной на высоту гиперпирамиды.

Гиперповерхность гиперцилиндра состоит из двух оснований и боковой гиперповерхности. При этом объем боковой гиперповерхности равен площади поверхности основания умноженной на высоту гиперцилиндра.

В частности, объем V гиперповерхности шарового цилиндра, радиус основания которого равен R, а высота h, выражается формулой

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 + 4\pi R^2 h.$$

Гиперповерхность гиперконуса состоит из основания и боковой гиперповерхности. При этом объем боковой гиперповерхности равен одной третьей площади поверхности основания умноженной на высоту гиперконуса.

В частности, объем V гиперповерхности шарового конуса, радиус основания которого равен R, а высота h, выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{4}{3}\pi R^2 h.$$

Рассмотрим вопрос о нахождении объема гиперповерхности гипершара. Опишем около гипершара радиуса R какой-нибудь гипермногогранник. Представим этот гипермногогранник составленным из гиперпирамид, вершины которых совпадают с центром гипершара, а основаниями являются гиперграни гипермногогранника. Ясно, что высоты этих гиперпирамид равны радиусу гипершара. Отсюда гиперобъем гипермногогранника вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{4} V \cdot R,$$

где V — объем гиперповерхности многогранника.

Будем проводить касательные пространства к гипершару, отсекая вершины гипермногогранника. Получающиеся при этом гипермногогранники будут все больше и больше приближаться к гипершару, а их гиперповерхности будут приближаться к гиперповерхности шара. Учитывая, что при этом все время сохраняется приведенная выше формула гиперобъема, получаем, что для гиперобъема шара W и его объема гиперповерхности V также будет выполняться формула $W = \frac{1}{4} V \cdot R$. С другой стороны, гиперобъем гипершара выражается формулой $W = \frac{1}{2}\pi^2 R^4$. Следовательно, имеет место равенство $\frac{1}{2}\pi^2 R^4 = \frac{1}{4} V \cdot R$, из которого получаем формулу объема гиперповерхности гипершара $V = 2\pi^2 R^3$.

Упражнения

1. Чему равен объем гиперповерхности гиперкуба с ребром 1?
2. Чему равен объем гиперповерхности гипертетраэдра с ребром 1?
3. Гиперобъем гиперкуба равен 16 м^4. Найдите объем его гиперповерхности.
4. Радиус основания гиперцилиндра равен 2 м, высота — 3 м. Найдите объем его боковой гиперповерхности.
5. Объем осевого сечения гиперцилиндра равен 8 м^3. Найдите объем его боковой гиперповерхности.
6. Радиус основания гиперконуса равен 3 м, высота — 4 м. Найдите объем его гиперповерхности.
7. Найдите объем гиперповерхности прямой гиперпризмы, в основании которой правильный тетраэдр с ребром a, боковое ребро равно b.
8. Объем боковой гиперповерхности и гиперобъем гиперцилиндра выражаются одним и тем же числом. Найдите диаметр основания гиперцилиндра.
9. Объем большого шара гипершара равен 4 см^3. Найдите объем гиперповерхности гипершара.
10. Как изменится объем гиперповерхности гипершара, если увеличить радиус гипершара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?
11. Сечение гипершара пространством, отстоящим от центра гипершара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объем гиперповерхности шара.
12. Объем гиперповерхности гипершара равен $250\pi^2$ м^3. Найдите его радиус.
13. Объемы гиперповерхностей двух гипершаров относятся как 8 : 27. Найдите отношение их диаметров.
14. Во сколько раз объем гиперповерхности гипершара, описанного около гиперкуба, больше объема гиперповерхности гипершара, вписанного в этот же гиперкуб?
15. Около гипершара описан гиперцилиндр. Найдите отношение их: а) объемов гиперповерхностей; б) гиперобъемов.

Глава 9

Аналитическое задание гиперпространственных фигур

§ 34. Прямоугольная система координат в гиперпространстве. Расстояние между точками

В курсе стереометрии вы познакомились с прямоугольной системой координат. Напомним, что координатной прямой, или координатной осью, называется прямая, на которой выбраны точка O, называемая началом координат, и единичный отрезок OE, указывающий положительное направление координатной прямой. Координатой точки A на координатной прямой называется расстояние x от точки A до начала координат, взятое со знаком «+», если A принадлежит положительной полуоси, и со знаком «−», если A принадлежит отрицательной полуоси.

Прямоугольной системой координат в пространстве называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых, называемых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy, Oz. Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются координатными плоскостями и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz соответственно.

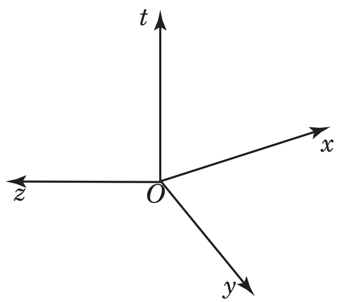


Рис. 34.1

Аналогичным образом, *прямоугольной системой координат* в гиперпространстве называется четверка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат (рис. 34.1). Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy, Oz, Ot.

Гиперпространство с прямоугольной системой координат называется координатным гиперпространством и обозначается $Oxyzt$.

Пространства, проходящие через тройки координатных прямых, называются координатными пространствами и обозначаются $Oxyz$, $Oxyt$, $Oxzt$ и $Oyzt$ соответственно.

Пусть A — точка в координатном гиперпространстве $Oxyzt$. Через эту точку проведем пространства, перпендикулярные координатным прямым Ox, Oy, Oz, Ot, и точки их пересечения с этими прямыми обозначим A_x, A_y, A_z, A_t, соответственно (рис. 34.2).

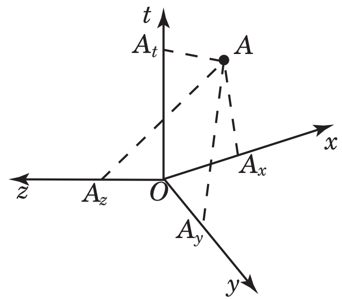


Рис. 34.2

Четверка чисел (x, y, z, t), содержащая координаты точек A_x, A_y, A_z, A_t на их координатных прямых называется координатами точки A в гиперпространстве. Точка A с координатами (x, y, z, t) обозначается $A\ (x, y, z, t)$.

Выведем формулу для расстояния между точками в гиперпространстве с заданными координатами.

В стереометрии доказывалось, что расстояние между точками $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$ в пространстве выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Докажем, что для расстояния между точками $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$ в гиперпространстве имеет место аналогичная формула

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(t_1-t_2)^2}.$$

Для данных точек A_1, A_2 рассмотрим прямую A_1A_2. Она не может быть параллельна одновременно всем осям координат. Предположим, например, что она не параллельна оси Ot, и пусть A_1', A_2' — ортогональные проекции соответственно точек A_1, A_2 на пространство $Oxyz$ (рис. 34.3). Пусть эти проекции имеют координаты (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) соответственно. Расстояние между точками A_1', A_2' выражается формулой

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

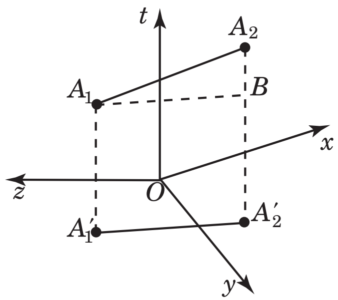


Рис. 34.3

Через точку A_1 проведем прямую, параллельную $A_1'A_2'$, и точку ее пересечения с прямой $A_2'A_2$ обозначим B. Тогда треугольник A_1A_2B — прямоугольный, $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |t_1 - t_2|$. Следовательно, по теореме Пифагора, имеем

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(t_1-t_2)^2}.$$

Непосредственно из определения гипершара и гиперсферы следует, что координаты точек гипершара с центром в точке $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$ и радиусом R удовлетворяют неравенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2 \leqslant R^2.$$

а координаты точек соответствующей гиперсферы — равенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2 = R^2.$$

Последнее равенство называется *уравнением гиперсферы* с центром в точке $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$ и радиусом R.

Упражнения

1. Что представляет собой геометрическое место точек гиперпространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) первая и вторая координата равны нулю; в) первая, вторая и третья координаты равна нулю; г) первая, вторая, третья и четвертая координаты равны нулю?

2. На каком расстоянии находится точка A $(1, -2, 3, -4)$ от координатного пространства: а) $Oxyz$; б) $Oxyt$; в) $Oxzt$; г) $Oyzt$?

3. На каком расстоянии находится точка A $(1, -2, 3, -4)$ от координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oxt; г) Oyz; д) Oyt; е) Ozt?

4. На каком расстоянии находится точка A $(1, -2, 3, -4)$ от координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz; г) Ot?

5. Каким является геометрическое место точек гиперпространства, для которых: а) первая координата равна единице; б) первая и вторая координаты равны единице; в) первая, вторая и третья координаты равны единице?

6. Какому условию удовлетворяют координаты точек гиперпространства, одинаково удаленные от: а) двух координатных пространств $Oxyz$, $Oyzt$; б) всех координатных пространств?

7. Дан гиперкуб $A\ldots H_1$ (рис. 3.1), ребро которого равно 1. Начало координат находится в точке A. Положительные лучи осей координат соответственно AB, AD, AE, AA_1. Назовите координаты всех вершин куба.

8. Как расположена гиперсфера радиуса 2 с центром в точке с координатами $(1, 2, 3, 4)$ относительно координатных пространств?

9. Пусть в гиперпространстве заданы точки $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$. Найдите координаты середины отрезка A_1A_2.

10. Найдите координаты середины отрезка:

а) AB, если A $(1, 2, 3, 4)$ и B $(-1, 1, -1, 1)$;

б) CD, если C $(3, 4, 0, 2)$ и D $(3, -1, 2, -4)$.

11. Точка A имеет координаты (x, y, z, t). Найдите координаты симметричных точек относительно: а) координатного пространства $Oxyz$; б) координатной плоскости Oxy; в) координатной прямой Ox; г) начала координат O.

12. Найдите расстояние между точками: а) A_1 $(1, 2, 3, 4)$ и A_2 $(-1, 1, -1, 1)$; б) B_1 $(3, 4, 0, 2)$ и B_2 $(3, -1, 2, -4)$.

13. Какая из точек A $(2, 1, 5, 4)$ или B $(-2, 1, 6, -3)$ лежит ближе к началу координат?

14. Найдите координаты центра C и радиус R гиперсферы, заданной уравнением:

а) $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2+(t-1)^2=9$;

б) $x^2+(y-6)^2+(z+1)^2+(t-2)^2=16$.

15. Напишите уравнение гиперсферы: а) с центром в точке O $(0, 0, 0, 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке C $(1, -2, 3, -4)$ и радиусом 4.

16. Напишите уравнение гиперсферы с центром в точке O $(1, 2, -1, -2)$, касающейся координатного пространства: а) $Oxyz$; б) $Oxyt$.

17. Напишите уравнение гиперсферы с центром в точке O $(3, -2, 1, 4)$, касающейся координатной прямой: а) Ox; б) Oy.

18. Докажите, что уравнение $x^2-4x+y^2+2y+z^2+t^2=0$ задает гиперсферу в гиперпространстве. Найдите ее радиус и координаты центра.

19. Как расположена точка A $(5, 1, 2, -1)$ относительно гиперсферы $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4+t^2=0$?

20. Что представляет собой геометрическое место точек гиперпространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+z^2=1$?

§ 35. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов

Определим понятие координат вектора в гиперпространстве с заданной прямоугольной системой координат. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются *координатами вектора*.

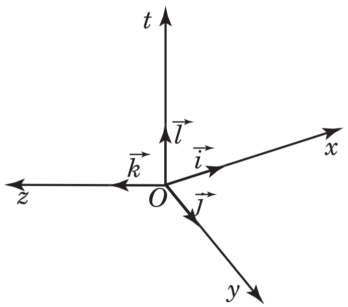


Рис. 35.1

Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}$ векторы с координатами $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их *координатными векторами* (рис. 35.1).

Теорема. *Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z, t) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}+t\vec{l}$.*

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_x}+\overrightarrow{OA_y}+\overrightarrow{OA_z}+\overrightarrow{OA_t}$ (рис. 35.2). Точка A имеет координаты (x, y, z, t) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x}=x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y}=y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z}=z\vec{k}$, $\overrightarrow{OA_t}=t\vec{l}$ и, значит, $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}+t\vec{l}$. □

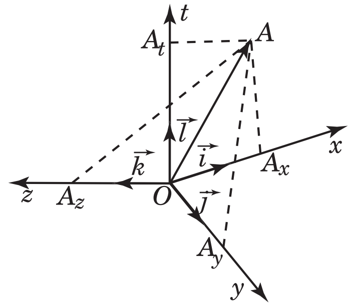


Рис. 35.2

Теорема. *Сумма $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ векторов*

$$\vec{a}_1\ (x_1, y_1, z_1, t_1) \quad и \quad \vec{a}_2\ (x_2, y_2, z_2, t_2)$$

имеет координаты $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2)$.

Доказательство. Разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}+t_1\vec{l}, \quad \vec{a}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}+t_2\vec{l}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ имеет место равенство:

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}+(t_1+t_2)t_1\vec{l},$$

и, следовательно, тройка чисел $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1+\vec{a}_2$.

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются. Аналогичным образом показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. □

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1$ (x_1, y_1, z_1, t_1), $\vec{a}_2$ (x_2, y_2, z_2, t_2) имеет координаты

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, t_1 - t_2).$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и концом — точку $A_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ (рис. 35.3). Тогда его можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$ и, следовательно, он имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_1 - t_2)$.

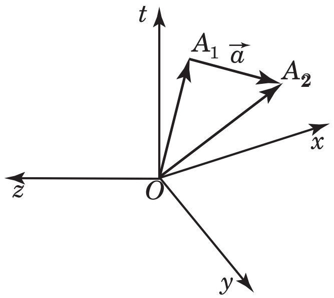


Рис. 35.3

Длина вектора $\vec{a}(x, y, z, t)$ выражается через координаты по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

Если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек, $A_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$, то его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (t_1 - t_2)^2}.$$

Угол между векторами и скалярное произведение векторов в гиперпространстве определяется аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости и в пространстве. А именно, угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

В остальных случаях векторы откладываются от общего начала, и угол между ними определяется как угол между векторами, лежащими в одной плоскости.

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1$ (x_1, y_1, z_1, t_1), $\vec{a}_2$ (x_2, y_2, z_2, t_2). Отложим их от начала координат, и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно (рис. 35.4). По теореме косинусов, имеем равенство:

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cos\varphi$$

и, следовательно, равенство $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

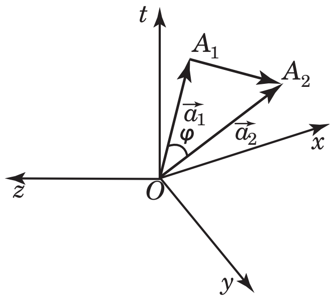


Рис. 35.4

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами

$$\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2; \quad \vec{a}_2^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2;$$
$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2.$$

Получим

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_1^2 -$$
$$-(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 - (t_1 - t_2)^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства, аналогичные свойствам произведения чисел:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(s\vec{a}) \cdot \vec{b} = s(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Доказательство непосредственно следует из формулы, выражающей скалярное произведение через координаты векторов.

Упражнения

1. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{l}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{l}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k} + \vec{l}$; г) $\vec{d} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$.

2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A\ (2, -6, 9, -4)$, $B\,(-5, 3, -7, 2)$; б) $A\,(1, 3, -8, 2)$, $B\,(6, -5, -10, 4)$; в) $A\,(-3, 1, -20, 5)$, $B\,(5, 1, -1, 10)$.

3. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b, c, d). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

4. Векторы $\vec{a}_1\ (x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $\vec{a}_2\ (x_2, y_2, z_2, t_2)$ коллинеарны. Как связаны между собой их координаты?

5. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}\ (1, 0, 2, -1)$, $\vec{b}\ (0, 3, -4, 2)$.

6. Даны векторы $\vec{a}\ (-1, 2, 8, -3)$ и $\vec{b}\ (2, -4, 3, -1)$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $1/2\vec{a} - 1/4b$; в) $-\vec{a} + 5\vec{b}$.

7. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(4, -3, 0, 1)$ и точка M — $(1, -3, -7, 2)$.

8. Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатному пространству $Oxyz$; б) параллелен координатной прямой Ox?

9. Найдите координаты конца единичного вектора с началом в точке $A\ (1, 2, 3, 4)$ и: а) перпендикулярного пространству $Oxyz$; б) параллельного прямой Ox.

10. Найдите длину вектора: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} + \vec{l}$; б) $8\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{l}$; в) $-\vec{j} + 2\vec{k} + 3\vec{l}$.

11. Длина вектора равна двум. Найдите координаты вектора, если известно, что все они равны.

12. Дан гиперкуб $A \ldots H_1$ (рис. 3.1). Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{D_1C}$; д) $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$.

13. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1\ (-1, 2, 3, 4)$ и $\vec{a}_2\,(2, -1, 0, 1)$.

14. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?

15. Используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами $\vec{a}_1\ (1, 2, -2, 3)$ и $\vec{a}_2\ (1, 0, -1, 2)$.

16. Докажите, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

§ 36. Уравнение пространства в гиперпространстве

В курсе стереометрии доказывалось, что плоскость в пространстве задается уравнением $ax + by + cz + d = 0$, в котором a, b, c, d — действительные числа, причем a, b, c одновременно не равны нулю. В гиперпространстве имеет место аналогичная теорема.

Теорема. *Пространство в гиперпространстве задается уравнением $ax + by + cz + dt + e = 0$, где a, b, c, d, e — действительные числа, причем a, b, c, d одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этому пространству и называемого вектором нормали.*

Доказательство. Пусть точка A_0 (x_0, y_0, z_0, t_0) принадлежит пространству и $\vec{n}$ (a, b, c, d) — вектор, перпендикулярный этому пространству (рис. 36.1). Тогда произвольная точка A (x, y, z, t) будет принадлежать этому пространству в том и только том случае, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}$ $(x-x_0, y-y_0, z-z_0, t-t_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. скалярное произведение $\overrightarrow{A_0A}\cdot\vec{n}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)+d(t-t_0)=0,$$

которое задает искомое пространства. Обозначая $-ax_0-by_0-cz_0-$ $-dt_0=e$ и преобразовав это уравнение, получим требуемое уравнение плоскости, а именно:

$$ax+by+cz+dt+e=0.$$

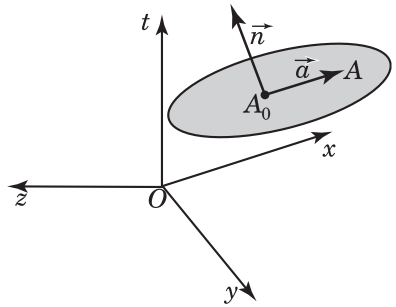


Рис. 36.1

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении пространств в гиперпространстве с точки зрения их уравнений.

Заметим, что два пространства в гиперпространстве параллельны или совпадают, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ коллинеарны и, следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2=t\vec{n}_1$.

Для пространств, заданных уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1t+e_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2t+e_2=0, \qquad (*)$$

векторы нормалей имеют координаты (a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2). Поэтому такие пространства параллельны или совпадают, если для некоторого числа s выполняются равенства $a_2=sa_1$, $b_2=sb_1$, $c_2=sc_1$, $d_2=sd_1$. При этом, если $e_2=se_1$, то уравнения $(*)$ определяют одно и то же пространство. Если же $e_2\neq se_1$, то эти уравнения определяют параллельные пространства.

Если два пространства не параллельны и не совпадают, то они пересекаются по плоскости, и угол φ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

В частности, два пространства перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняется равенство

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=0. \qquad \square$$

Упражнения

1. Найдите уравнения координатных пространств: а) $Oxyz$; б) $Oxyt$; в) $Oxzt$; г) $Oyzt$.

2. Дано пространство $x+2y-3z+t-1=0$. Найдите ее точки пересечения с осями координат.

3. Напишите уравнение пространства, проходящего через точку A_0 $(1, 2, 0, -1)$ с вектором нормали $\vec{n}$ $(-1, 1, 1, -1)$.

4. Точка H $(-2, 4, -1, 1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на пространство. Напишите уравнение этого пространства.

5. Напишите уравнение пространства, проходящего через точки: а) A $(1, 0, 0, 0)$, B $(0, 1, 0, 0)$, C $(0, 0, 1, 0)$, D $(0, 0, 0, 1)$.

6. Напишите уравнение пространства, которое: а) проходит через точку M $(1, -2, 4, -1)$ и параллельно координатному пространству $Oxzt$ б) проходит через точку M $(0, 2, 0, 0)$ и перпендикулярно оси Oy.

7. Определите, какие из перечисленных ниже пар пространств параллельны между собой:

а) $x+y+z+t-1=0$, $x+y+z+t+1=0$;

б) $x+y+z+t-1=0$, $x+y-z+t-1=0$;

в) $-7x+y+2z-t=0$, $7x-y-2z+t-5=0$;

г) $2x+4y+6z+8t-8=0$, $-x-2y-3z-4t+4=0$.

8. Составьте уравнение пространства, проходящего через точку M $(1, 3, -1, 2)$ параллельно пространству: а) $3x+y-z+2t+5=0$; б) $x-y+5z-t-4=0$.

9. Перпендикулярны ли пространства: а) $2x-5y+z+4=0$ и $3x+2y+4z-1=0$; б) $7x-y+t+9=0$ и $y+2z+t-3=0$?

10. Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями: а) $x+y+z+t+1=0$, $x+y-z-t-1=0$; б) $2x+3y+4z+t-5=0$, $4x+3y+2z+t-7=0$.

11. Гиперсфера, заданная уравнением $x^2+y^2+z^2+t^2=16$, пересечена пространством. Найдите координаты центра и радиус сферы сечения, если пространство задано уравнением: а) $z=0$; б) $y=1$; в) $x+y+z+t=4$.

12. Составьте уравнение пространства, касающегося гиперсферы $x^2+y^2+z^2+t^2=9$ в точке с координатами: а) $(0,3,0,0)$; б) $(2,-2,0,1)$.

§ 37. Уравнения прямой и плоскости в гиперпространстве

Поскольку плоскость в гиперпространстве можно рассматривать как пересечение двух пространств, то одним из способов аналитического задания плоскости в гиперпространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t+e_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t+e_2=0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся пространств.

Аналогичным образом, поскольку прямую в гиперпространстве можно рассматривать как линию пересечение трех пространств, то одним из способов аналитического задания прямой в гиперпространстве является задание с помощью системы из трех уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t+e_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t+e_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3t+e_3=0, \end{cases}$$

задающих тройку пересекающихся пространств.

Рассмотрим еще один способ аналитического задания прямой. Для этого заметим, что для задания прямой в гиперпространстве достаточно задать или пару точек $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$, через которые проходит эта прямая, или точку $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{e}(a,\ b,\ c,\ d)$, параллельный этой прямой или лежащий на ней.

Если прямая задана двумя точками

$$A_1\,(x_1, y_1, z_1, t_1), \quad A_2\,(x_2, y_2, z_2, t_2),$$

то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ с координатами $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, t_2-t_1)$, а в качестве точки A_0 какую-нибудь из точек A_1, A_2.

Найдем условия, которым должны удовлетворять координаты точки A (x, y, z, t), чтобы она принадлежала прямой, проходящей через точку $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}(a,\ b,\ c,\ d)$ (рис. 37.1).

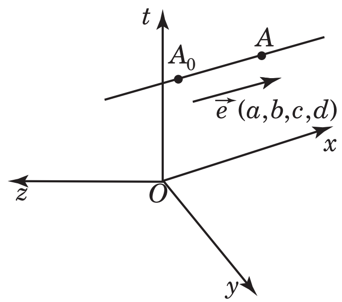


Рис. 37.1

В этом случае вектор $\overrightarrow{A_0A}$ $(x-x_0, y-y_0, z-z_0, t-t_0)$ должен быть коллинеарен вектору $\vec{e}\,(a, b, c, d)$ и, следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны, т. е. должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x-x_0=as, \\ y-y_0=bs, \\ z-z_0=cs, \\ t-t_0=ds, \end{cases}$$

где s — действительное число.

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} x=as+x_0, \\ y=bs+y_0, \\ z=cs+z_0, \\ t=ds+t_0. \end{cases}$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой в гиперпространстве*.

В случае, если прямая в пространстве задается двумя точками $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$, то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1,\ t_2-t_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x=(x_2-x_1)s+x_1, \\ y=(y_2-y_1)s+y_1, \\ z=(z_2-z_1)s+z_1, \\ t=(t_2-t_1)s+t_1. \end{cases}$$

Заметим, что если вместо направляющего вектора $\vec{e}\ (a, b, c, d)$ в параметрических уравнениях прямой взять вектор $k\vec{e}\ (ka, kb, kc, kd)$, то параметрические уравнения

$$\begin{cases} x=kas+x_0, \\ y=kbs+y_0, \\ z=kcs+z_0, \\ t=kds+t_0 \end{cases}$$

будут задавать ту же самую прямую.

Обычно в физических задачах параметр s играет роль времени, а параметрические уравнения прямой рассматриваются как уравнения движения точки. Так, моменту времени $s=0$ соответствует точка $A_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ на прямой. При изменении параметра s точка A с координатами (x, y, z, t), удовлетворяющими параметрическим уравнениям, будет перемещаться по прямой. Докажем, что перемещение точки по прямой является равномерным движением и найдем его скорость.

Рассмотрим промежуток времени от s_1 до s_2, $S=s_2-s_1$. Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ точки на прямой за этот промежуток времени будет иметь координаты (aS, bS, cS, dS). Разделив вектор перемещения на время S, получим, что вектор скорости имеет координаты (a, b, c, d). Он совпадает с направляющим вектором $\vec{e}$ и не зависит от выбора промежутка времени. Следовательно, движение точки по прямой является равномерным. Длина вектора скорости

$$|\vec{e}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

представляет собой скорость движения точки по прямой.

По аналогии с заданием прямой рассмотрим параметрическое задание плоскости в гиперпространстве. Для этого заметим, что для задания плоскости в гиперпространстве достаточно задать или тройку точек $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$, $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$, через которые проходит эта плоскость, или точку $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$ плоскости и два неколлинеарных направляющих вектора $\vec{e}_1(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1)$, $\vec{e}_2(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2)$, параллельных этой плоскости или лежащих на ней.

Если плоскость задана тремя точками $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$, $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$, то в качестве направляющих векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ можно взять векторы $\overrightarrow{A_0A_1}\ (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0, t_1-t_0)$ и $\overrightarrow{A_0A_2}\ (x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0, t_2-t_0)$.

Найдем условия, которым должны удовлетворять координаты точки $A\ (x, y, z, t)$, чтобы она принадлежала плоскости, проходящей через точку $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$ с направляющими векторами $\vec{e}_1(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1)$, $\vec{e}_2(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2)$, (рис. 37.2).

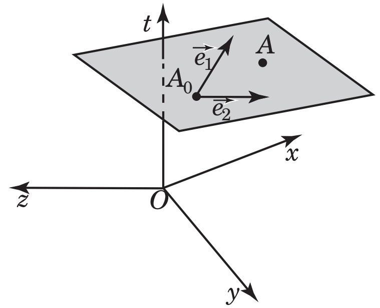


Рис. 37.2

В этом случае вектор $\overrightarrow{A_0A}\ (x-x_0, y-y_0, z-z_0, t-t_0)$ должен быть компланарен с векторами $\vec{e}_1\ (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\vec{e}_2\ (a_2, b_2, c_2, d_2)$ и, следовательно, для координат этих векторов должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x-x_0=a_1u+a_2v, \\ y-y_0=b_1u+b_2v, \\ z-z_0=c_1u+c_2v, \\ t-t_0=d_1u+d_2v, \end{cases}$$

где u, v — действительные числа.

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} x = a_1u + a_2v + x_0, \\ y = b_1u + b_2v + y_0, \\ z = c_1u + c_2v + z_0, \\ t = d_1u + d_2v + t_0. \end{cases}$$

Они называются *параметрическими уравнениями плоскости в гиперпространстве*.

В случае, если плоскость в гиперпространстве задается тремя точками $A_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$, $A_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$, то, выбирая в качестве направляющих векторов $\overrightarrow{A_0A_1}\,(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0, t_1-t_0)$ и $\overrightarrow{A_0A_2}\,(x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0, t_2-t_0)$, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_1-x_0)u + (x_2-x_0)v + x_0, \\ y = (y_1-y_0)u + (y_2-y_0)v + y_0, \\ z = (z_1-z_0)u + (z_2-z_0)v + z_0, \\ t = (t_1-t_0)u + (t_2-t_0)v + t_0. \end{cases}$$

Упражнения

1. Выясните смысл коэффициентов a_1, b_1, c_1, d_1 и a_2, b_2, c_2, d_2 в уравнениях плоскости в гиперпространстве.

2. Выясните смысл коэффициентов a_1, b_1, c_1, d_1; a_2, b_2, c_2, d_2 и a_3, b_3, c_3, d_3 в уравнениях прямой в гиперпространстве.

3. Какими уравнениями задаются координатные прямые?

4. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A\ (1, -2, 3, -4)$ с направляющим вектором $\vec{e}\,(2, 3, -1, 4)$.

5. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1\ (-2, 1, -3, 4)$, $A_2\ (5, 4, 6, -2)$.

6. Какой вид имеют параметрические уравнения прямых, параллельных оси Ox?

7. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M\ (1, 2, -3, 4)$ и перпендикулярную плоскости

$$x + y + z + t + 1 = 0.$$

8. В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_1s + x_1, \\ y = b_1s + y_1, \\ z = c_1s + z_1, \\ t = d_1s + t_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a_2s + x_2, \\ y = b_2s + y_2, \\ z = c_2s + z_2, \\ t = d_2s + t_2 \end{cases}$$

определяют перпендикулярные прямые?

9. Определите взаимное расположение прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 5s, \\ y - 1 = 4s, \\ z - 1 = 7s, \\ t - 1 = 3s, \end{cases}$$

и пространства, задаваемого уравнением $x - 3y + z + 1 = 0$.

10. Найдите координаты точки пересечения пространства $2x - y + z + t - 3 = 0$ и прямой, проходящей через точки $A\ (-1, 0, 2, 3)$ и $B\ (3, 1, 2, -1)$.

11. Докажите, что расстояние от точки $A\ (x, y, z, t)$ до пространства, заданного уравнением $ax + by + cz + dt + e = 0$, равно

$$\frac{|ax + by + cz + dt + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}.$$

12. Найдите расстояние от начала координат до пространства, заданного уравнением $12x + 4y + 3z - 5z - 4 = 0$.

§ 38. Аналитическое задание гипермногогранников

Заметим, что если пространство задано уравнением $ax + by + cz + dt + e = 0$, то неравенства $ax + by + cz + dt + e \geqslant 0$ и $ax + by + cz + dt + e \leqslant 0$ определяют полугиперпространства, на которые это пространство разбивает гиперпространство. Для того, чтобы определить, какому из двух полугиперпространств принадлежит точка $A\ (x, y, z, t)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения пространства и найти знак получившегося значения.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d, e, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, как с помощью таких неравенств в гиперпространстве можно задавать выпуклые гипермногогранники.

Действительно, пусть гиперграни выпуклого гипермногогранника лежат в пространствах, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t+e_1=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nx+b_ny+c_nz+d_nt+e_n=0. \end{cases}$$

Тогда сам выпуклый гипермногогранник является пересечением соответствующих полугиперпространств и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t+e_1\geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nx+b_ny+c_nz+d_nt+e_n\geqslant 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот гипермногогранник.

Например, неравенства

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad t\geqslant,\quad x\leqslant 1,\quad y\leqslant 1,\quad z\leqslant 1,\quad t\leqslant 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0\leqslant z\leqslant 1, \\ 0\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

определяют единичный гиперкуб в пространстве (рис. 38.1).

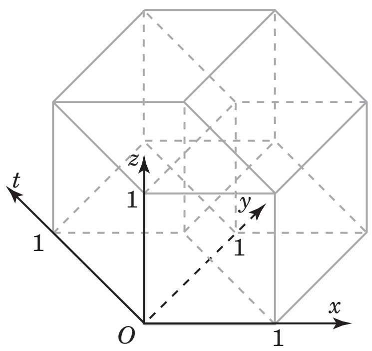


Рис. 38.1

На рисунке 38.2 изображен гипермногогранник, задаваемый неравенством

$$|x|+|y|+|z|+|t|\leqslant 1.$$

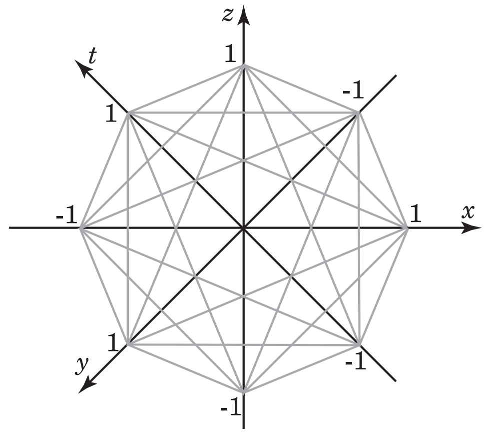


Рис. 38.2

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие гиперпространственные фигуры. Например, гиперцилиндр с радиусом основания R и высотой h можно задать неравенствами (рис. 38.3)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, \\ 0\leqslant t\leqslant h. \end{cases}$$

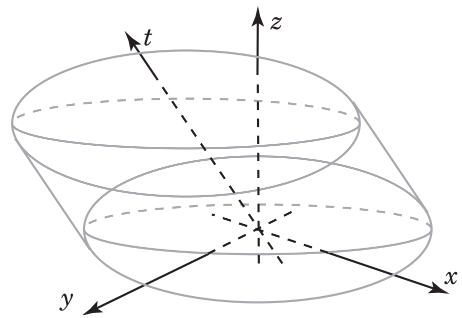


Рис. 38.3

Упражнения

1. Два полугиперпространства задаются неравенствами

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+e_1 \geqslant 0, \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2t+e_2 \geqslant 0.$$

Как будет задаваться пересечение этих полугиперпространств?

2. Определите, какому полугиперпространству

$$5x+3y-z+t-2 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad 5x+3y-z+t-2 \leqslant 0$$

принадлежит точка: а) A $(1, 0, 0, 0)$; б) B $(0, 1, 0, 0)$; в) C $(0, 0, 1, 0)$; г) D $(0, 0, 0, 1)$.

3. Какую фигуру в пространстве задает следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4, \\ 0 \leqslant t \leqslant 2? \end{cases}$$

4. Какой гипермногогранник задает система неравенств $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, $|t| \leqslant 1$?

5. Какой гипермногогранник задается неравенством $|x|+|y|+|z|+|t| \leqslant 1$? Какие у него гиперграни? Сколько у него вершин, ребер, граней и гиперграней?

6. Какой многогранник является сечением гипермногогранника, изображенного на рисунке 38.3, пространством, заданным уравнением $t=0$. Найдите ребро этого многогранника.

7. Опишите гипермногогранник, задаваемый системой неравенств:

$$\begin{cases} |x| \leqslant 1; \quad |y| \leqslant 1; \quad |z| \leqslant 1; \quad |t| \leqslant 1; \\ |x|+|y|+|z|+|t| \leqslant 3. \end{cases}$$

Сколько и какие у него гиперграни?

§ 39. Многомерная геометрия и оптимальное управление

По аналогии с 4-х мерным координатным пространством, рассмотренным в параграфе 34, определим n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^n$. Его точками являются упорядоченные наборы $(x_1, \ldots, x_n)$ действительных чисел, называемых координатами.

Расстояние между точками A $(x_1, \ldots, x_n)$, B $(y_1, \ldots, y_n)$ задается формулой

$$AB = \sqrt{(y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A $(x_1, \ldots, x_n)$ и концом в точке B $(y_1, \ldots, y_n)$ имеет координаты $(y_1-x_1, \ldots, y_n-x_n)$, и его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{b}\,(y_1, \ldots, y_n)$ определяется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1y_1+\ldots+x_ny_n.$$

Угол φ между векторами $\vec{a}(x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{b}(y_1, \ldots, y_n)$ находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

$n-1$-мерная сфера в n-мерном координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в точке A^0 $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2 = R^2.$$

$n-1$-мерное пространство в n-мерном координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ задается уравнением

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b = 0,$$

где числа $a_1, \ldots, a_n$ одновременно не равны нулю. Точка A $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит этому пространству, если ее координаты удовлетворяют данному уравнению.

n-мерный выпуклый многогранник в n-мерном координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ задается системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n+b_1 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n+b_m \geqslant 0. \end{cases}$$

Например, n-мерный прямоугольный параллелепипед задается системой неравенств

$$\begin{cases} a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n. \end{cases}$$

Определим понятие произведения фигур в координатном пространстве. Пусть Φ' — фигура в пространстве $\mathbb{R}^n$, Φ'' — фигура в пространстве $\mathbb{R}^m$. Определим произведение $\Phi' \times \Phi''$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$, считая точку с координатами $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ принадлежащей фигуре $\Phi' \times \Phi''$, тогда и только тогда, когда точка с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит Φ', а точка с координатами $(x_{n+1}, \ldots$ $\ldots, x_{n+m})$ принадлежит Φ''.

Пример 1. Произведением отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ является прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$ (рис. 39.1).

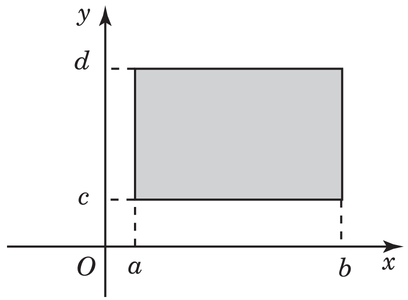


Рис. 39.1

Пример 2. Произведением n-угольника и отрезка является прямая n-угольная призма (рис. 39.2).

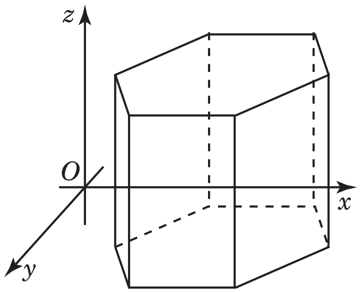


Рис. 39.2

Пример 3. Гиперкуб является произведением куба и отрезка, равного ребру этого куба (рис. 39.3). Гиперкуб является также произведением двух равных квадратов.

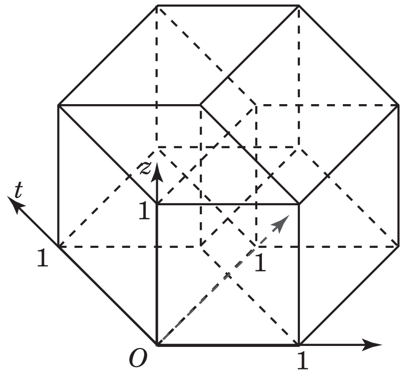
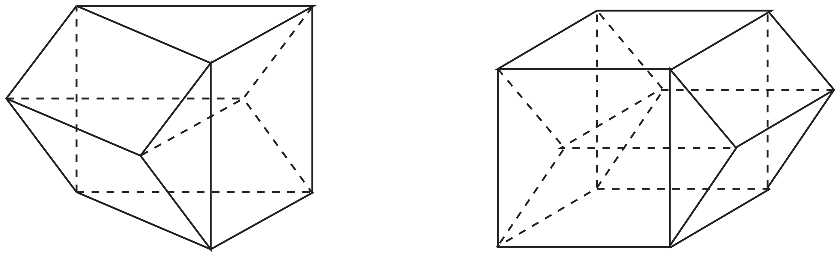


Рис. 39.3

Пример 4. На рисунках 39.4 а, б изображены гипермногогранники, являющиеся произведениями: а) двух треугольников; б) квадрата и треугольника со стороной, равной стороне квадрата.



а) б)

Рис. 39.4

По аналогии с объемом пространственных фигур, в n-мерном координатном пространстве определяется понятие n-мерного объема фигур. А именно, за единицу измерения n-мерного объема принимается n-мерный куб, ребро которого равно 1. Такой куб называется единичным n-мерным кубом. n-мерным объемом V_n (Φ) фигуры Φ в n-мерном координатном пространстве называется число, показывающее, сколько раз единичный n-мерный куб и его части укладываются в данной фигуре.

Для n-мерного объема справедливы свойства, аналогичные свойствам объемов пространственных фигур.

1. n-мерный объем V_n (Ф) фигуры Ф в n-мерном координатном пространстве является неотрицательным числом.

2. Равные фигуры имеют равные n-мерные объемы.

3. Если фигура Ф составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, пространства $\mathbb{R}^n$, то объем фигуры Ф равен сумме гиперобъемов фигур Φ_1 и Φ_2, т. е.

$$V_n(\Phi) = V_n(\Phi_1) + V_n(\Phi_2).$$

Кроме того, имеет место следующее свойство.

4. Если фигура Ф пространства $\mathbb{R}^{n+m}$ является произведением фигур Φ' пространства $\mathbb{R}^n$ и Φ'' пространства $\mathbb{R}^m$, то $n+m$-мерный объем фигуры Ф равен произведению n-мерного объема фигуры Φ' и m-мерного объема фигуры Φ'', т. е.

$$V_{n+m}(\Phi' \times \Phi'') = V_n(\Phi') \times V_m(\Phi'').$$

n-мерные пространства возникают естественным образом при решении различных прикладных задач и в том числе, так называемые, *задачи оптимизации*. Среди них:

транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

задача составления оптимального плана производства;

задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

Здесь мы рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи, приводящей к нахождению наименьшего значения линейной функции на многограннике в трехмерном пространстве. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трех, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства и n-мерных многогранников с очень большим n. При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Задача. Пусть на четыре завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$.

Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья, (в т) на складе		Потребность в сырье, (в т) на заводе			
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	5	6	4	10
$С_2$	3	7	3	7

Для решения этой задачи, в первую очередь, проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т. е. составим *математическую модель*. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1, З_2, З_3$, обозначим через x, y и z соответственно. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти $20-x-y-z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8-x$, $10-y$, $12-z$, $x+y+z-5$ сырья в тоннах. Запишем эти данные в таблицу 3.

Таблица 3

Склад	Кол-во сырья (в т), перевезенное на заводы			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	x	y	z	$20-x-y-z$
$С_2$	$8-x$	$10-y$	$12-z$	$x+y+z-5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \\ 8-x \geqslant 0, \quad 10-y \geqslant 0, \quad 12-z \geqslant 0, \\ 20-x-y-z \geqslant 0, \\ x+y+z-5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его построить, изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строкой данной системы. На рисунке 39.5 это параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$. Уравнение

$$20 - x - y - z = 0$$

определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая, пересекая параллелепипед, образует многоугольник $M_1M_2M_3C_1$. Уравнение $x+y+z-5=0$ определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед и образует в нем треугольник $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где

$$M_1\,(8, 10, 2),\ M_2\,(0, 10, 10),\ M_3\,(0, 8, 12),\ C_1\,(8, 0, 12),\ C\,(8, 0, 0),$$
$$B(8, 10, 0),\ A(0, 10, 0),\ E_1(5, 0, 0),\ E_2(0, 5, 0),\ E_3(0, 0, 5),\ O_1(0, 0, 12),$$

выполняются все условия данной системы. Назовем его многогранником ограничений.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножим расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты сложим. Общее число тонно-километров выражается формулой:

$$5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) + \\ + 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z.$$

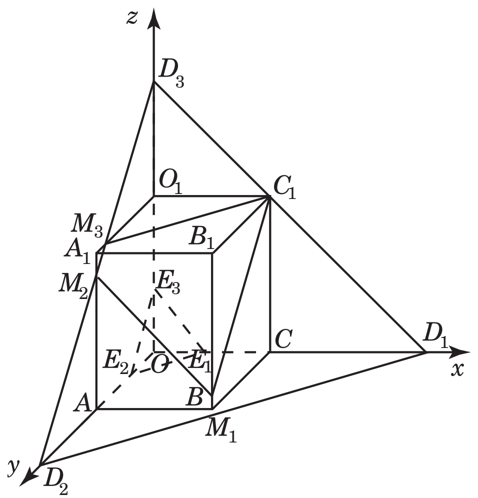


Рис. 39.5

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{\min} = 295 - f_{\max}$.

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax + by + cz$ $(c > 0)$ принимает свое наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax + by + cz$. Тогда уравнение $ax + by + cz = d$ задает плоскость в пространстве, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение d. В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d, а в точках, расположенных ниже этой плоскости — значения, меньшие d. Если число d выбрать достаточно большим, то плоскость $ax + by + cz = d$ расположится выше многогранника. Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d, до тех пор, пока она не соприкоснется с многогранником. Такое касание произойдет при некотором d_0 — в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 39.6), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

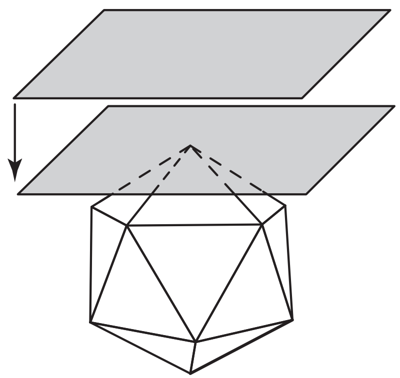


Рис. 39.6

В точках касания линейная функция принимает значение d_0, и, поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше d_0. Таким образом, d_0 — искомое наибольшее значение. Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике, достаточно вычислить значения функции в вершинах многограницка и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f=x+4y+2z$ в вершинах многогранника ограничений:

$$f(M_1)=52,\quad f(M_2)=60,\quad f(M_3)=56,\quad f(C_1)=32,$$
$$f(C)=8,\quad f(B)=48,\quad f(A)=40,\quad f(E_1)=5,$$
$$f(E_2)=20,\quad f(E_3)=10,\quad f(O_1)=24.$$

Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{\min}=295-60=235$. Это значение функция F принимает в точке M_2 (0, 10, 10).

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Кол-во сырья (в т), перевезенное на заводы			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	0	10	10	0
$С_2$	8	0	2	15

Упражнения

1. В n-мерном пространстве найдите расстояние между точками A (0, …, 0) и B (1, …, 1).

2. Как в n-мерном пространстве задается n-мерный шар с центром в точке A^0 $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и радиусом R?

3. Задайте n-мерный куб с центром в точке (0, …, 0) и ребром 2.

4. Найдите радиус $n-1$-мерной сферы, описанной около n-мерного куба из упражнения 2.

5. Докажите, что точка A $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит n —1-мерному пространству, задаваемому уравнением $a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b=0$, и проходящим через точку $A^0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{A^0A}(x_1-x_1^0, \ldots, x_n-x_n^0)$ и $\vec{n}(a_1, \ldots, a_n)$ перпендикулярны.

6. Напишите уравнение $n-1$-мерного пространства в n-мерном пространстве, проходящего через точку A_0 (1, …, 1) и перпендикулярного вектору $\vec{n}(1, \ldots, 1)$.

7. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A^0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, с направляющим вектором $\vec{a}$ $(a_1, \ldots, a_n)$.

8. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку O (0, …, 0), с направляющим вектором $\vec{a}$ (1, …, 1).

9. Какой фигурой в координатном пространстве является произведение: а) прямоугольника и отрезка; б) круга и отрезка?

10. Произведением каких фигур является: а) прямая гиперпризма; б) прямой гиперцилиндр?

11. Из каких многогранников стоят гиперграни гипермногогранников, изображенных на рисунках 39.4 а, б.

12. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 2+2x+y\geqslant 0,\\ 2-x+y\geqslant 0,\\ 5-x-y\geqslant 0.\end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F=y-x$.

13. На трех складах хранится сырье одинакового вида в количествах соответственно 10 т, 20 т, 30 т. На завод нужно завезти 35 т сырья. Найдите наиболее выгодный вариант перевозок, если расстояния от складов до завода равны 7 км, 5 км, 8 км.

14. Решите предыдущую задачу при дополнительном требовании: со второго склада вывозится сырья не больше, чем с третьего.

15. Установка собирается из трех различных деталей А, Б, В. На одном станке можно за смену изготовить либо 12 деталей типа А, 18 типа Б и 30 типа В (первый режим), либо 20 деталей типа А, 15 типа Б и 9 типа В (второй режим). Хватит ли ста станков, чтобы изготовить за смену детали для 720 установок? Какое наименьшее число станков (и с какими режимами работы) нужно для выполнения заказа?

16. Напишите равенство Эйлера для выпуклого n-мерного многогранника.

Ответы и указания

§ 1

1. а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** а) 4; б) 10; в) 20; г) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **3.** а) пять; б) 15; в) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. **4.** а), б), в), д) Нет; г) да.

§ 2

1. Нет. **2.** Пусть даны плоскости α и β, имеющие общую прямую c. Выберем точки C_1, C_2 принадлежащие прямой c, точку A плоскости α и точку B плоскости β, не принадлежащие прямой c. Точки A, B, C_1,C_2 не принадлежат одной плоскости и, следовательно, через них проходит единственное пространство Ω. Это пространство будет содержать плоскости α и β. Любое пространство, содержащее эти плоскости будет содержать точки A, B, C_1, C_2 и, следовательно, будет совпадать с пространством Ω. **3.** По аксиоме 5 существуют пять точек, не принадлежащих одному пространству. Обозначим их A, B, C, D, E. Через точки A, B, C и C, D, E проведем плоскости. Они имеют общую точку C. Если бы они имели еще одну общую точку, то они пересекались бы по прямой. В силу предыдущего упражнения, эти плоскости лежали бы в одном пространстве, а тогда и точки A, B, C, D, E лежали бы в одном пространстве, что противоречит условию. **4.** Пусть дана плоскость α и прямая c, пересекающая эту плоскость в точке C. Выберем на прямой c еще одну точку D, а в плоскости α точки A и B так, чтобы точки A, B, C не лежали на одной прямой. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости и, следовательно, через них проходит единственное пространство Ω. Это пространство будет содержать плоскость α и прямую c. Любое пространство, содержащее эти плоскость и прямую будет содержать точки A, B, C, D и, следовательно, будет совпадать с пространством Ω. **5.** Пусть дано пространство Ω. По аксиоме 5 существует, по крайней мере, пять точек, не принадлежащих одному пространству. Хотя бы одна из этих точек не принадлежит пространству Ω. **6.** По свойству 3, существует единственное пространство Ω, содержащее данные плоскость и точку. Если прямая проходит через

данную точку и пересекает данную плоскость, то она имеет с этим пространством две общие точки. По свойству 1, эта прямая содержится в пространстве Ω. **7.** Пусть плоскость α не лежит в пространстве Ω и имеет с этим пространством общую точку A. Через плоскость α проведем какое-нибудь пространство Σ, отличное от Ω. Эти пространства имеют общую точку и, следовательно, пересекаются по плоскости β. Плоскости α и β лежат в одном пространстве Σ и имеют общую точку. Следовательно, они пересекаются по прямой c. Прямая c лежит в плоскости β и, следовательно, содержится в пространстве Ω. Таким образом, прямая c содержится как в плоскости α, так и в пространстве Ω.

§ 3

2. а) 16; б) 5; в) 8. **3.** а) 32; б) 10; в) 16. **4.** а) 24; б) 10; в) 14. **5.** а) 8; б) 5; в) 6. **6.** а) 8; б), в) 0. **7.** 5. **8.** Тетраэдральная бипирамида. **9.** 10. **10.** Тетраэдральная бипирамида.

§ 4

1. CD, A_1B_1, EF,C_1D_1, GH, E_1F_1, G_1H_1. **2.** а) Нет; б) да. **3.** а) 112; б) 0; в) 12. **4.** Бесконечно много. **5.** A_1E_1, B_1F_1, DH, CG,A_1D_1, B_1C_1, DD_1, CC_1, EE_1, EH, FF_1, FG, D_1H_1, C_1G_1, E_1H_1, F_1G_1, HH_1, GG_1. **6.** CD, CE, DE. **7.** CD, CC_1, DD_1, A_1C_1, A_1D_1, B_1C_1, B_1D_1, C_1D_1. **8.** а) 288; б) 15. **9.** Нет. **10.** Возьмем две точки на одной прямой и две точки на другой прямой. Получим четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Через них проходит единственное пространство Ω. Любое пространство, содержащее данные скрещивающиеся прямые, будет содержать и выбранные точки. Следовательно, оно будет совпадать с пространством Ω.

§ 5

1. AB и $CDHG$, AB и $C_1D_1G_1H_1$. **2.** Нет. **3.** AB и $A_1B_1C_1$, AA_1 и BB_1C_1C. **4.** AB и CC_1G_1G, AB и $B_1C_1G_1F_1$. **5.** Да, например, AB и CDE. **6.** AB и CC_1D_1D, AB и $A_1C_1D_1$. **7.** Через данную точку и данную плоскость можно провести пространство. Поскольку в пространстве выполняются все аксиомы стереометрии, то в нем через данную точку можно провести прямые, параллельные данной плоскости. **9.** Пусть дана плоскость α и точка B, ей не принадлежащая. Проведем через них пространство Ω. Рассмотрим точку C, не принадлежащую пространству Ω, и проведем через точки B и C прямую c. По признаку скрещивающихся прямой и плоскости, прямая c и плоскость α будут скрещиваться. **11.** Нет.

§ 6

1. AB и $A_1B_1C_1G_1$, AB и CDD_1H_1. **2.** Нет. **3.** AB и $A_1B_1C_1D_1$, AA_1 и $BCDD_1$. **4.** Пусть точка B не принадлежит пространству Ω. Рассмотрим какую-нибудь прямую a, лежащую в этом пространстве. Через эту прямую и точку B проведем плоскость. В этой плоскости через точку B проведем прямую b, параллельную прямой a. По признаку параллельности она будет параллельна пространству Ω. **6.** Пусть прямые a и b параллельны и прямая a пересекает пространство Ω в точке A. Проведем через прямые a и b плоскость γ. Она не лежит в пространстве Ω и имеет с ним общую точку A. Следовательно (см. задачу 7 параграфа 2), она пересекает пространство по прямой c. Прямая c лежит в плоскости γ и пересекает прямую a. Следовательно, она пересекает и параллельную ей прямую b этой плоскости. Так как плоскость γ пересекает пространство по прямой c, то других общих точек прямой b с пространством Ω нет. Таким образом, прямая b пересекает пространство Ω.

§ 7

1. а) $ABCD$ и $EFGH$, $ABCD$ и $E_1F_1G_1H_1$; б) ABC и $A_1B_1C_1$, ABD и $A_1B_1D_1$. **2.** а) 36; б) 4. **3.** Нет. **5.** Пусть дана плоскость α и точка B, ей не принадлежащая. Проведем через них пространство Ω. Поскольку в пространстве выполняются все аксиомы стереометрии, то через точку B в этом пространстве проходит единственная плоскость β, параллельная плоскости α. **6.** Пусть дана плоскость α и точка B, ей не принадлежащая. Проведем через них пространство Ω. Рассмотрим в этом пространстве прямую c, параллельную плоскости α. Проведем прямую c и какую-нибудь точку, не принадлежащую пространству Ω, плоскость β. По признаку скрещивающихся плоскостей, плоскости α и β будут скрещиваться. **7.** Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c. Возьмем точки C_1, C_2, принадлежащие этой прямой, точку A, принадлежащую плоскости α и не принадлежащую прямой c, точку B, принадлежащую плоскости β и не принадлежащую прямой c. Через точки A, B, C_1, C_2 проходит пространство Ω. Оно будет содержать плоскости α и β. **8.** Рассмотрим точкиA, B, C, D, E, не принадлежащие одному пространству. Через точки A, B, C проведем плоскость α. Через точки C, D, E проведем плоскость β. Эти плоскости имеют общую точку C и не могут иметь общую прямую, так как не лежат в одном пространстве. **9.** Пусть плоскость α имеет с плоскостью π только одну общую точку A, плоскость β параллельна плоскости α. Докажем, что плоскость β имеет только одну общую точку с плоскостью π. Через плоскости α и β проведем пространство Ω. Оно имеет с плоскостью π одну общую точку A и, следовательно, пересекает эту плоскость по некоторой прямой c. Прямая c лежит в пространстве Ω и пересекает плоскость α в точке A. Следовательно, она пересечет и параллельную ей плоскость β в некоторой точке B. Эта точка и будет искомой точкой пересечения плоскостей β и π.

§ 8

1. $A_1D_1H_1$ и $ABCG$. **2.** $A_1B_1D_1$ и $ABCD$. **3.** Нет. **4.** Нет, вторая плоскость может лежать в этом пространстве. **5.** Параллельна. **6.** Да. **7.** Воспользуйтесь признаком параллельности плоскости и пространства. **8.** Пусть точка B не принадлежит пространству Ω. В пространстве Ω проведем плоскость α. Через эту плоскость и точку B проведем пространство Σ. В пространстве Σ через точку B проведем плоскость β, параллельную α. Она и будет искомой плоскостью, параллельной пространству Ω. Таких плоскостей бесконечно много. **9.** Пусть α и β две параллельные плоскости. Они лежат в некотором пространстве Ω. Возьмем какую-нибудь точку C, не принадлежащую этому пространству, и проведем через нее и плоскость β пространство Σ. Тогда плоскость α будет параллельна пространству Σ. Таких пространств бесконечно много. **10.** Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную пространству Ω и пересекает это пространство по прямой b. Тогда прямая b лежит в плоскости α и не пересекается с a, т. е. прямые a и b параллельны. **11.** Пусть плоскость α пересекает пространство Ω по прямой a. Плоскость β параллельна плоскости α. Рассмотрим пространство Σ, содержащее плоскости α и β. Оно пересекает пространство Ω по некоторой плоскости γ. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой a и, следовательно, пересекает параллельную ей плоскость β по некоторой прямой b, параллельной a.

§ 9

1. а) $ABCG$ и $A_1B_1C_1G_1$; б) $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. **2.** а) Нет; б) да, 4 пары. **3.** Нет. **4.** Нет. **5.** Да. **6.** Да. **7.** Нет. **8.** Пусть дано пространство Ω и точка B, не принадлежащая этому пространству. В пространстве Ω рассмотрим какие-нибудь две пересекающиеся плоскости α_1 и α_2. Через точку B проведем параллельные им плоскости β_1 и β_2. Через плоскости β_1 и β_2 проведем пространство Σ. Оно и будет искомым пространством, проходящим через точку B и параллельным данному пространству Ω. Докажем единственность такого пространства. Предположим противное, т. е. существует два пространства Σ_1 и Σ_2, проходящих через точку B и параллельных пространству Ω. Выберем точку A пространства Ω и точку C пространства Σ_1, не принадлежащую пространству Σ_2. Через точки A, B, C проведем плоскость γ. Она пересечет пространство Ω по некоторой прямой a, а пространства Σ_1 и Σ_2 по некоторым прямым b_1 и b_2, с общей точкой B. Таким образом, в плоскости γ мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные третьей прямой, что противоречит аксиоме параллельных. **9.** Нет. **10.** Если бы пространства имели бы общую точку, то через эту точку проходило бы два пространства, параллельных третьему пространству, что противоречит утверждению предыдущей задачи.

§ 10

1. Если прямая параллельна направлению проектирования. **2.** Три, две или одна. **3.** Две пересекающиеся прямые или одна прямая. **4.** Если плоскость этих прямых параллельна направлению проектирования, а сами прямые не параллельны направлению проектирования. **5.** Если прямые параллельны направлению проектирования. **6.** Две скрещивающиеся прямые, две параллельные прямые, две пересекающиеся прямые, прямая и точка, ей не принадлежащая. **7.** Плоскость, в которой лежат данная прямая и точка должна быть параллельна направлению проектирования. **8.** Пересекаются или скрещиваются. **9.** Скрещиваются. **10.** Нет. **11.** Нет. **12.** Да. **13.** Нет. **14.** Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы стереометрии (см. [1]). **15.** а) Нет; б), в) да. **16.** В случае параллельного проектирования гиперпространства на плоскость параллельные проекции имеют не все точки, а только те, которые расположенны в пространстве, содержащем плоскость проектирования и прямую, задающую направление проектирования.

§ 11

1. Центральная проекция не существует для точек, принадлежащих пространству, проходящему через центр проектирования и параллельному пространству проектирования. **2.** Если прямые параллельны пространству проектирования и имеют проекции. **3.** Да. **4.** Центральная проекция не существует для точек, принадлежащих пространству, проходящему через прямую — центр проектирования и параллельному плоскости проектирования. **5.** В случае центрального проектирования гиперпространства на плоскость с центром проектирования в некоторой точке проекции имеют только точки, расположенные в пространстве, содержащем плоскость проектирования и центр проектирования. **6.** Гипергрань $ABCDEFGH$ параллельна пространству проектирования, грань $ABFE$ параллельна плоскости проектирования.

§ 12

1. Тетраэдр. **2.** Тетраэдр. **3.** Треугольная призма. **4.** Правильный тетраэдр. **5.** Нет. **6.** Да. **7. 8.** Усеченный тетраэдр. **9.** Куб. **10.** Октаэдр.

§ 13

1. Бесконечно много. **2.** Бесконечно много. **3.** AB и AD, AB и AE, AB и AA_1. **4.** AB и CD, AB и DE. **5.** AB и CD, AB и AA_1, AB и C_1D_1. **6.** 1) 90°; 2) 90°; 3) 45°; 4) 0°; 5) 45°; 6) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 7) 90°; 8) 90°; 9) 90°; 10) 90°; 11) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 12) 45°; 13) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 14) 60°. **7.** 1) 90°; 2) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 3) 45°; 4) 0°; 5) 45°; 6) 90°; 7) 90°; 8) 90°; 9) 90°; 10) 60°; 11) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 12) 45°; 13) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$. **8.** 1) 45°; 2) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 3) 45°; 4) 0°; 5) 90°; 6) 90°; 7) 90°; 8) 90°; 9) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 10) 60°; 11) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 12) 45°. **9.** 1) 90°; 2) 90°; 3) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 4) 45°; 5) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 6) 60°; 7) 90°; 8) 90°; 9) 90°; 10) 90°. **10.** 1) 90°; 2) 60°; 3) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 4) 45°; 5) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 6) 90°; 7) 90°; 8) 90°; 9) 90°. **11.** 1) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 2) 60°; 3) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 4) 45°; 5) 90°; 6) 90°; 7) 90°; 8) 90°. **12.** 1) 90°; 2) 90°; 3) 90°; 4) 0°; 5) 45°; 6) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 7) 45°. **13.** 1) 90°; 2) 90°; 3) 45°; 4) 0°; 5) 45°; 6) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$. **14.** 1) 90°; 2) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 3) 45°; 4) 0°; 5) 45°. **15.** 1) 45°; 2) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 3) 45°; 4) 0°. **16.** 1) 90°; 2) 90°; 3) 90°. **17.** 1) 90°; 2) 90°. **18.** 90°. **19.** 1) 60°; 2) 90°; 4) 60°; 5) 90°; 6) 60°; 7) 90°; 8) $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{6}$; 9) 90°; 10) 60°; 11) $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{6}$; 12) 90°. **20.** 1) 90°; 2) 60°; 3) 90°; 4) $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{6}$; 5) 90°; 6) 60°; 7) 90°;

8) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$; 9) $60°$; 10) $90°$. **21.** 1) $60°$; 2) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt2$; 3) $0°$; 4) $90°$; 5) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$; 6) $60°$; 7) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$; 8) $45°$; 9) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{3}$; 10) $60°$. **22.** 1) $60°$; 2) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{3}$; 3) $60°$; 4) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$; 5) $45°$; 6) $60°$; 7) $90°$; 8) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$. **23.** 1) $45°$; 2) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$; 3) $60°$; 4) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{3}$; 5) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$; 6) $90°$; 7) $60°$. **24.** 1) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$; 2) $90°$; 3) $90°$; 4) $60°$; 5) $\cos\varphi=\frac14$; 6) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{6}$; 7) $60°$. **25.** 1) $60°$; 2) $0°$; 3) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{3}$; 4) $60°$. **26.** 1) $60°$; 2) $90°$; 3) $60°$; 4) $90°$. **27.** 1) $90°$; 2) $60°$; 3) $90°$. **28.** 1) $60°$; 2) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{3}$; 3) $0°$. **29.** $60°$. **30.** $60°$. **31.** 1) $\cos\varphi=\frac13$; 2) $90°$; 3) $90°$; 4) $\cos\varphi=\frac23$; 5) $\cos\varphi=\frac{\sqrt3}{6}$. **32.** 1) $\cos\varphi=\frac13$; 2) $\cos\varphi=\frac23$; 3) $\cos\varphi=\frac{\sqrt3}{6}$; 4) $90°$; 5) $90°$. **33.** 1) $\cos\varphi=\frac13$; 2) $\cos\varphi=\frac13$; 3) $90°$; 4) $\cos\varphi=\frac{\sqrt3}{6}$; $\cos\varphi=\frac23$. **34.** 1) $\cos\varphi=\frac23$; 2) $\cos\varphi=\frac13$; 3) $\cos\varphi=\frac{\sqrt3}{6}$; 4) $\cos\varphi=\frac13$. **35.** 1) $30°$; 2) $\cos\varphi=\frac23$; 3) $\cos\varphi=\frac23$; 4) $\cos\varphi=\frac23$. **36.** 1) $\cos\varphi=\frac23$; 2) $\cos\varphi=\frac{\sqrt3}{6}$; 3) $90°$; 4) $90°$. **37.** $0°$. **38.** $\cos\varphi=\frac13$. **39.** $\cos\varphi=\frac13$. **40.** $\cos\varphi=\frac13$.

§ 14

1. Нет. **2.** Нет, прямая и плоскость могут скрещиваться. **3.** AB и $BCGF$; AA_1 и $BCGF$. **4.** AA_1 и ABC. **5.** Прямые должны быть перпендикулярны. **6.** Пусть прямая a перпендикулярна плоскости α. Тогда она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Если прямая b параллельна прямой a, то она будет также перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α и, следовательно, будет перпендикулярна этой плоскости. **7.** Пусть прямая a перпендикулярна плоскости α. Тогда она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Если плоскость β параллельна α, то любая прямая лежащая в этой плоскости будет параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости α и, следовательно, будет перпендикулярна прямой a. Значит, прямая a будет перпендикулярна плоскости β. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** Пусть π — данная плоскость, γ — плоскость, перпендикулярная плоскости π и пересекающая ее в некоторой точке O. Если точка A принадлежит плоскости γ, то прямая AO перпендикулярна плоскости π. Следовательно, точка O будет как параллельной так и ортогональной проекцией точки A на плоскость π. Для точки A гиперпространства, не принадлежащей плоскости γ, рассмотрим плоскость α, параллельную γ. Она перпендикулярна плоскости π и пересекает ее в некоторой точке A'. Прямая AA' будет перпендикулярна плоскости π. Следовательно, точка A' будет как параллельной проекцией так и ортогональной проекцией точки A на плоскость π на эту плоскость. Таким образом, ортогональное проектирование на плоскость π совпадает с параллельным проектированием на эту плоскость в направлении плоскости γ. **11.** 1) $90°$; 2) $45°$; 3) $0°$; 4) $0°$; 5) $45°$; 6) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{3}$; 7) $45°$; 8) $90°$; 9) $90°$; 10) $\cos\varphi=\frac{\sqrt3}{3}$; 11) $\cos\varphi=\frac{\sqrt6}{3}$; 12) $45°$; 13) $\cos\varphi=\frac{\sqrt3}{3}$; 14) $45°$. **12.** 1) $\cos\varphi=\frac{\sqrt3}{3}$; 2) $90°$.

§ 15

1. Нет. **2.** Да. **3.** AB и $BCGG_1$. **4.** AA_1 и $ABCD$. **5.** Прямые должны быть перпендикулярны. **6.** Пусть прямая a перпендикулярна пространству Ω. Тогда она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этом пространстве. Если прямая b параллельна прямой a, то она будет также перпендикулярна любой прямой, лежащей в пространстве Ω и, следовательно, будет перпендикулярна этому пространству. **7.** Пусть прямые a и b перпендикулярны пространству Ω, A, B точки пересечения этих прямых с пространством. Через прямую a и точку B проведем плоскость. Она пересекает пространство Ω по прямой AB. В этой плоскости через точку B проведем прямую, параллельную a. Если бы она не совпадала с прямой b, то через точку B проходило бы две прямые, перпендикулярные пространству Ω, что невозможно. Значит, прямая b параллельна прямой a. **8.** Пусть прямая a перпендикулярна пространству Ω. Тогда она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этом пространстве. Если пространство Σ параллельно Ω, то любая прямая лежащая в этом пространстве будет параллельна некоторой прямой, лежащей в пространстве Ω и, следовательно, будет перпендикулярна прямой a. Значит, прямая a будет перпендикулярна пространству Σ. **9.** Пусть точка A принадлежит прямой a. Рассмотрим точки B, C, D, которые вместе с прямой a не лежат в одном пространстве. Через прямую a и точки B, C, D проведем плоскости и в них проведем прямые b, c, d, проходящие через точку A и перпендикулярные прямой a. Пространство Ω, содержащее прямые b, c, d, будет искомым пространством, перпендикулярным прямой a. Докажем его единственность. Предположим, что существуют два таких пространства Ω_1 и Ω_2. Тогда существует точка B_1, принадлежащая пространству Ω_1 и не принадлежащая пространству Ω_2. Проведем через прямую a и точку B_1 плоскость β. Она пересечет данные пространства по прямым b_1 и b_2, перпендикулярным прямой a. Это противоречит тому, что в плоскости β существует единственная прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная данной прямой. **10.** Пусть пространства Ω_1, Ω_2 перпендикулярны прямой a и пересекают ее в точках A_1, A_2. Если бы они не были параллельны, то проведя через точку A_1 пространство, параллельное Ω_2, мы получили бы два пространства, проходящих через точку A_1 и перпендикулярных прямой a, что противоречит предыдущей задаче. **11.** 1) B; 2) A_1; 3) D; 4) E. **12.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 0°; 4) 0°; 5) 45°; 6) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 7) 0°; 8) 0°; 9) 45°; 10; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 11) 0°; 12) 0°; 13) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 14) 30°. **13.** 1) 0°; 2) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 3) 45°; 4) 0°; 5) 0°; 6) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 7) 45°; 8) 0°; 9) 0°; 10) 30°; 11) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 12) 0°; 13) 0°. **14.** Центр сферы, описанной около тетраэдра $BCDE$. **15.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$. **16.** Центр окружности, описанной около треугольника BCD. **17.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **18.** Теорема (О трех перпендикулярах.) Если прямая, лежащая в пространстве, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этому пространству, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Доказательство. Пусть прямая a пространства Ω перпендикулярна ортогональной проекции AB' наклонной AB на пространство Ω. Тогда прямая a будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB' и BB'. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая a будет перпендикулярна плоскости ABB'. Следовательно, она будет перпендикулярна наклонной AB, лежащей в этой плоскости.

§ 16

1. а) $ABCD$ и $ABFE$; б) $ABCD$ и AA_1E_1E. **2.** а) ABC и ABB_1A_1; б) ABC и BB_1D_1D. **3.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 45°; 4) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 5) 90°;

6) 90°; 7) 90°; 8) 90°. **4.** 1) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$; 2) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$; 3) 90°. **5.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Да. **10.** Нет. **11.** Да. **12.** Да. **13.** Пусть точка B не принадлежит плоскости α. Рассмотрим пространство Ω, содержащее эти точку и плоскость. В нем через точку можно провести бесконечно много плоскостей, перпендикулярных данной плоскости. Если точка B принадлежит плоскости α, то существует бесконечно много пространств, содержащих данную плоскость. В каждом из них через точку B можно провести бесконечно много плоскостей, перпендикулярных плоскости α. **14.** Пусть точка B не принадлежит плоскости α. Рассмотрим пространство Ω, содержащее эти точку и плоскость. В нем из точки B опустим перпендикуляр BA на плоскость α. Рассмотрим какое-нибудь другое пространство Σ, содержащее плоскость α. В нем через точку A проведем прямую a, перпендикулярную α. Через прямые AB и a проведем плоскость β. Она будет гиперперпендикулярна плоскости α. Таких плоскостей бесконечно много. Если точка B принадлежит плоскости α, то рассмотрим какие-нибудь два пространства Ω и Σ, содержащие эту плоскость. В них через точку B проведем прямые a и b, перпендикулярные плоскости α. Через прямые a и b проведем плоскость β. Она будет гиперперпендикулярна плоскости α. Таких плоскостей бесконечно много.

§ 17

1. Ранее было доказано, что через точку гиперпространства проходит прямая, перпендикулярная данному пространству. Проведем через эту прямую плоскость. По признаку перпендикулярности плоскости и пространства, она будет перпендикулярной этому пространству. **2.** Бесконечно много. **3.** Выберем какую-нибудь прямую, лежащую в данной плоскости, и через данную точку проведем пространство, перпендикулярное этой прямой. Тогда данная плоскость будет проходить через прямую, перпендикулярную проведенному пространству. Следовательно, по признаку перпендикулярности плоскости и пространства, данная плоскость и проведенное пространство будут перпендикулярны. **4.** Одно. **5.** Через любую прямую можно провести плоскость, перпендикулярную данному пространству. В случае, если прямая перпендикулярна пространству, то таких плоскостей бесконечно много. Если же прямая не перпендикулярна пространству, то такая плоскость единственна. **6.** $ABCD$

и ABB_1F_1. **7.** 1) 90°; 2) 90°; 3) 90°. **8.** $\cos\varphi = \frac{19\sqrt{6}}{60}$. **9.** Пусть α и β две плоскости, имеющие одну общую точку C. Через точку C проведем два пространства, перпендикулярные плоскостям α и β, соответственно. Их пересечением будет искомая плоскость γ, перпендикулярная этим плоскостям.

§ 18

1. $ABCG$, $ABFF_1$. **2.** $ABCD$ и ABB_1D_1. **3.** 1) 90°; 2) 90°. **4.** 1) 90°; 2) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **5.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$. **6.** Через данную точку проведем прямую, перпендикулярную данному пространству. Через эту прямую проведем какое-нибудь пространство. По признаку перпендикулярности, оно будет перпендикулярно данному пространству. Таких пространств бесконечно много. **7.** Нет. **8.** Да.

§ 19

1. 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 1; 5) 1; 6) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) 1; 9) 1; 10) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 11) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 12) 1; 13) 1; 14) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 4) $\sqrt{2}$; 5) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 8) $\sqrt{2}$; 9) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 10) 1; 11) $\frac{\sqrt{60}}{6}$; 12) $\sqrt{2}$; 13) $\frac{\sqrt{60}}{6}$. **3.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{60}}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{60}}{6}$; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{60}}{6}$. **4.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; 5) 1. **6.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 1; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 8) $\sqrt{2}$; 9) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 10) $\sqrt{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **8.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{15}}{3}$. **9.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **10.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

§ 20

1. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) $\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{2}$; 7) $\sqrt{3}$. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) $\sqrt{2}$. **3.** 1. **4.** 1) 1; 2) 1; 3) 1. **5.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 1; 7) $\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{2}$; 9) $\sqrt{2}$. **6.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** 1) 1; 2) 1; 3) 1. **8.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **9.** 1) 1; 2) 1; 3) $\sqrt{2}$. **10.** 1) 1; 2) 1. **11.** 1. **12.** $\sqrt{3}$.

§ 21

1. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) $\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{2}$. **2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1; 3) 1; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **4.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **5.** $\frac{\sqrt{15}}{6}$. **6.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** 1) 1; 2) 1. **8.** 1) 1; 2) 1. **9.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.** Пространство, перпендикулярное отрезку, соединяющему две данные точки и проходящее через его середину. **11.** Плоскость, гиперперпендикулярная плоскости, в которой лежат треугольник с вершинами в данных точках, и проходящая через центр описанной окружности этого треугольника. **12.** Прямая, перпендикулярная пространству, в котором лежит тетраэдр с вершинами в данных точках, и проходящая через центр описанной сферы этого тетраэдра.

§ 22

1. Четыре. **2.** Три. **3.** Две. **4.** а), б) Нет; в) да. **5.** Да. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Гипермногогранник, составленный из девяти гиперкубов, аналогичный пространственному кресту. **9.** Воспользуйтесь тем, что пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой. **12.** В качестве вершины искомых гиперпирамид можно взять любую внутреннюю точку данного гипермногогранника. Их основаниями будут тетраэдры, на которые разбиваются гиперграни этого гипермногогранника.

§ 23

1. Нет. Число вершин гипермногогранника, в которых сходится нечетное число ребер, четно. Действительно, каждое ребро гипермногогранника соединяет две его вершины. Поэтому суммарное число ребер, выходящих из всех вершин многогранника, четно. Следовательно, число нечетных слагаемых в этой сумме должно быть четным. **2.** У любого гипермногогранника число гиперграней с нечетным числом граней четно. Действительно, каждая грань гипермногогранника входит ровно в две гиперграни. Поэтому суммарное число граней всех гиперграней четно. Следовательно, число нечетных слагаемых в этой сумме должно быть четным. **5.** 16. **6.** 96. **7.** В каждой вершине гипермногогранника сходится, по крайней мере, четыре ребра. Следовательно, число ребер больше или равно $\frac{4\Gamma_0}{2} = 2\Gamma_0$. Равенство выполняется для гиперкуба. Строгое неравенство выполняется для гиперпризмы, в основании которой октаэдр (рис. 3.5). **8.** Воспользуемся неравенством $\Gamma_1 \geqslant 2\Gamma_0$ и равенством $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$. Получим искомое неравенство $\Gamma_2 \geqslant \Gamma_0 + \Gamma_3$. Равенство выполняется для гиперкуба. Строгое неравенство выполняется для гиперпризмы, в основании которой октаэдр (рис. 3.5). **9.** Каждая гипергрань имеет, по крайней мере четыре грани. Следовательно, число граней больше или равно $\frac{4\Gamma_3}{2} = 2\Gamma_3$. Равенство выполняется для гипертетраэдра. Строгое неравенство выполняется для гиперкуба. **10.** Воспользуемся неравенством $\Gamma_2 \geqslant 2\Gamma_3$ и равенством $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$. Получим искомое неравенство $\Gamma_1 \geqslant \Gamma_0 + \Gamma_3$. Равенство выполняется для гипертетраэдра. Строгое неравенство выполняется для гиперкуба. **11.** Гиперкуб, внутри которого вырезан гиперкуб. **12.** Невыпуклая гиперпризма или невыпуклая гиперпирамида.

§ 24

1. $\Gamma_0 = 8$; $\Gamma_1 = 24$; $\Gamma_2 = 32$; $\Gamma_3 = 16$. **2.** $\Gamma_0 = 24$; $\Gamma_1 = 96$; $\Gamma_2 = 96$; $\Gamma_3 = 24$. **3.** $\Gamma_0 = 120$; $\Gamma_1 = 720$; $\Gamma_2 = 1200$; $\Gamma_3 = 600$. **4.** $\Gamma_0 = 600$; $\Gamma_1 = 1200$; $\Gamma_2 = 720$; $\Gamma_3 = 120$. **5.** Нет. **6.** Гипертетраэдр. **7.** $\frac{1}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{10}}{20}$. **9.** $\sqrt{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.** У гипермногогранника 10 вершин; его гипергранями являются 5 тетраэдров и 5 октаэдров. **12.** У гипермногогранника 32 вершины; его гипергранями являются 16 тетраэдров и 24 кубооктаэдра. **13.** Октаэдр. **14.** 1 : 3.

§ 25

1. 4 см. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** 4 см. **5.** а) Если расстояние d от центра гиперсферы до плоскости больше радиуса R ($d > R$), то гиперсфера и плоскость не имеют общих точек; б) если $d = R$, то плоскость касается гиперсферы; в) если $d < R$, то гиперсфера и плоскость пересекаются по окружности радиуса R. **6.** Если плоскость проходит через точку гиперсферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то расстояние от центра гиперсферы до этой плоскости будет равно радиусу и, следовательно, данная плоскость будет касательной плоскостью к гиперсфере. **7.** а) Если расстояние d от центра гиперсферы до прямой больше радиуса R ($d > R$), то гиперсфера и прямая не имеют общих точек; б) если $d = R$, то прямая касается гиперсферы; в) если $d < R$, то гиперсфера и прямая пересекаются (имеют две общие точки). **8.** Если прямая проходит через точку гиперсферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то расстояние от центра гиперсферы до этой прямой будет равно радиусу и, следовательно, данная прямая будет касательной прямой к гиперсфере. **9.** Одно. **10.** Бесконечно

много, так как любая плоскость, проходящая через данную точку и лежащая в касательном пространстве, будет касательной плоскостью. **11.** Бесконечно много, так как любая прямая, проходящая через данную точку и лежащая в касательном пространстве, будет касательной прямой. **12.** Через данную точку и центр гиперсферы проведем плоскость. Она пересечет гиперсферу по окружности. Касательная прямая, к этой окружности, проходящая через данную точку, будет касательной прямой к гиперсфере. Так как через данную точку и центр гиперсферы можно провести бесконечно много плоскостей, то и касательных прямых будет бесконечно много. **13.** Через данную точку проведем касательную прямую к гиперсфере. Через точку касания проведем какую-нибудь другую касательную прямую. Через полученные две касательные прямые проведем плоскость. Она будет касательной плоскостью к гиперсфере. Так как касательных прямых, проходящих через точку гиперсферы, бесконечно много, то и касательных плоскостей будет также бесконечно много. **14.** Через данную точку A и центр гиперсферы проведем касательную плоскость α. Пусть B — точка касания. Рассмотрим касательное пространство к гиперсфере, проходящее через точку B. Оно будет содержать плоскость α и, следовательно, будет касательным пространством к гиперсфере, проходящим через данную точку A. Так как касательных прямых к гиперсфере бесконечно много, то и касательных пространств также бесконечно много. **15.** Пусть AB и AC — отрезки касательных к гиперсфере, проведенных из точки A. Рассмотрим плоскость, проходящую через точки A, B и C. Она пересекает гиперсферу по окружности, касающейся прямых AB и AC в точках B и C, соответственно. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности, имеем $AB = AC$. **16.** Одну. **17.** Бесконечно много, так как любая плоскость, содержащая данную прямую, и лежащая в касательном пространстве, проходящем через точку касания гиперсферы и плоскости, будет касательной плоскостью. **18.** Бесконечно много. **19.** Бесконечно много. **20.** Два. **21.** Если расстояние d между центрами двух гиперсфер больше суммы их радиусов R и r ($d > R + r$), то эти гиперсферы не имеют общих точек, причем одна из них лежит вне другой. Если $d = R + r$, то гиперсферы касаются внешним образом. Если $R - r < d < R + r$, то гиперсферы пересекаются по сфере. Если $d = R - r$, то гиперсферы касаются внутренним образом. Если $d < R - r$, то гиперсферы не имеют общих точек, причем одна из них лежит внутри другой. **22.** Сферы должны лежать в параллельных пространствах, и прямая, проходящая через центры сфер должна быть перпендикулярна этим пространствам. **23.** Сферы должны иметь общий центр. **24.** Две, если прямая лежит в том же пространстве, что и сфера; ни одной в противном случае. **25.** Если расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса сферы, то сфера и прямая не имеют общих точек; если это расстояние равно радиусу, то сфера и прямая могут иметь одну общую точку (если они лежат в одном пространстве) и ни одной общей точки (в противном случае); если это расстояние меньше радиуса, то сфера и прямая могут иметь две общие точки (если они лежат в одном пространстве), одну или ни одной общей точки (в противном случае). **26.** Окружность, если плоскость лежит в том же пространстве, что и сфера; две точки в противном случае. **27.** Данная сфера, если она лежит в данном пространстве; окружность в противном случае.

§ 26

1. Да. **2.** $\sqrt{30}$. **3.** Нет. **4.** Да. **5.** Гиперпирамида, в основании которой наклонный параллелепипед. **6.** Около многогранника можно описать сферу. **7.** Гиперпризма, в основании которой наклонный параллелепипед. **8.** Нет. **9.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **10.** 1. **11.** $\frac{\sqrt{15}}{6}$. **12.** Вершинами данного гипермногогранника являются вершины гиперкуба, взятые через одну (см. § 24). Гиперсфера, описанная около гиперкуба, будет описанной и около данного гипермногогранника. Если ребра гиперкуба равны 1, то радиус этой сферы равен 1, а ребра данного гипермногогранника равны $\sqrt{2}$. Следовательно, для данного гипермногогранника с ребрами 1, радиус описанной гиперсферы будет равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 27

1. Нет. **2.** Нет. **3.** Да. **4.** Гиперпирамида, в основании которой параллелепипед и все боковые ребра равны. **5.** $\frac{\sqrt{10}}{20}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **8.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **12.** $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

§ 28

1. Бесконечно много. **2.** Шаром. **3.** Цилиндром. **4.** Цилиндром. **5.** 12π м^3. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** 2. **8.** Нет. **9.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **10.** Нет. **11.** 10.

12. Шаром. **13.** Конусом. **14.** 36π м^3. **15.** $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. **16.** 3 м. **17.** $\frac{25}{4}$ м. **18.** 8 см. **19.** Нет. **20.** Да.

§ 29

1. Гиперкуб имеет центр симметрии, гипертетраэдр — нет. **2.** Если бы ось симметрии не проходила через центр симметрии O, то точка O', симметричная O относительно оси симметрии, также была бы центром симметрии, что противоречит единственности центра симметрии. Аналогичным образом доказывается, что плоскость симметрии и пространство симметрии проходят через центр симметрии. **3.** а), б), в) Да; г) нет. **4.** Нет. **5.** Да, например, центр симметрии гиперсферы не принадлежит ей. **6.** Центром симметрии прямоугольного гиперпараллелепипеда является точка пересечения его диагоналей. **7.** а) Нет; б) да. **8.** 12 осей симметрии, проходящие через центры противоположных граней и 4 оси симметрии, проходящие через центры противоположных гиперграней. **9.** Нет. **10.** Бесконечно много. **11.** Да, любая плоскость, проходящая через центр гиперсферы, является плоскостью симметрии. **12.** Любая плоскость, проходящая через ось гиперцилиндра является его плоскостью симметрии. **13.** 12 плоскостей симметрии, проходящие через диагонали противоположных граней; 6 плоскостей симметрии, проходящие через центры противоположных гиперграней гиперкуба и параллельные некоторым ребрам гиперкуба. **14.** Пять плоскостей симметрии 3-го порядка, проходящие через ребра гипертетраэдра и центры противоположных им граней. **15.** а) Любое пространство, проходящее через центр гипершара является его пространством симметрии; любое пространство, проходящее через ось гиперцилиндра, является его пространством симметрии. Кроме того, пространством симметрии гиперцилиндра является пространство, проходящее через середину оси и параллельное основаниям гиперцилиндра. **16.** Да, любое пространство, проходящее через ось гиперконуса, является его пространством симметрии. **17.** 12 пространств симметрии, проходящих через противоположные грани гиперкуба. **18.** Да, десять пространств симметрии, проходящие через грани гипертетраэдра и середины противоположных им ребер. **19.** Три оси симметрии, проходящие через центры противоположных боковых граней; три плоскости симметрии, проходящие через параллельные оси симметрии оснований; четыре плоскости симметрии 3-го порядка, проходящие через параллельные оси симметрии 3-го порядка оснований; шесть пространств симметрии, проходящие через параллельные плоскости симметрии оснований, и пространство симметрии, проходящее через середины боковых ребер гиперпризмы. **20.** Ось симметрии, проходящая через центр симметрии основания и вершину; плоскости симметрии, проходящие через оси симметрии основания и вершину; пространства симметрии, проходящие через плоскости симметрии основания и вершину гиперпирамиды.

§ 30

1. 1 см. **2.** а) $1:2^4$; б) $1:3^4$; в) $1:n^4$. **3.** 1 см. **4.** Эти части будут центрально симметричны, а следовательно, равны. Значит, они имеют равные объемы. **5.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **6.** $\frac{\pi}{6}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **8.** $\frac{1}{8}$. **9.** π. **10.** $\frac{4\pi}{3}$.

§ 31

1. $\frac{\sqrt{5}}{8}$. **2.** $\frac{\sqrt{5}}{96}$. **3.** Сумма расстояний постоянна и равна объему гиперкуба, деленому на сумму объемов его гиперграней. **4.** а) В 3 раза; б) в 8 раз. **5.** Увеличится в 4 раза. **6.** 10π см^4. **7.** $1:15$. **8.** $W=\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{b^2-R^2}$. **9.** 36π см^4. **10.** 5π. **11.** $\frac{15}{81}V$.

§ 32

1. $8\pi^2$ см^4. **2.** а) В 81 раз; б) в 256 раз. **3.** $\sqrt[4]{962}$ см. **4.** 81. **5.** $\frac{\pi^2}{2}$. **6.** $\frac{\pi^2}{32}$. **7.** $\frac{1}{2}\pi^2 10^4$ см^4. **8.** $\frac{2\pi^2a^4}{25}$. **9.** $\frac{\pi^2a^4}{3200}$. **10.** $\frac{\pi^2}{16}$.

§ 33

1. 8. **2.** $\frac{5\sqrt{2}}{12}$. **3.** 64 м^3. **4.** 48π м^3. **5.** 32 м^3. **6.** 84π м^3. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3+$ $+\sqrt{3}a^2b$. **8.** 6. **9.** 6π см^3. **10.** Увеличится в: а) 8 раз; б) 27 раз; в) n^3 раз. **11.** $2000\pi^2$ см^3. **12.** 5 м. **13.** $2:3$. **14.** 8. **15.** а) $\frac{3\pi}{13}$; б) $\frac{3\pi}{16}$.

§ 34

1. а) Координатное пространство $Oyzt$; б) координатная плоскость Ozt; в) координатная прямая Ot; г) начало координат O. **2.** а) 4; б) 3; в) 2; г) 1. **3.** а) 5; б) $3\sqrt{2}$; в) $\sqrt{13}$; г) $\sqrt{17}$; д) $\sqrt{10}$; е) $\sqrt{5}$. **4.** а) $\sqrt{29}$; б) $\sqrt{26}$; в) $\sqrt{21}$; г) $\sqrt{14}$. **5.** а) Пространство, параллельное координатному пространству $Oyzt$; б) плоскость, параллельная координатной плоскости Ozt; в) прямая, параллельная координатной прямой Ot. **6.** а) Для координат (x, y, z, t) выполняется равенство: а) $x=t$; б) $x=y=z=t$. **7.** C $(1,1,0,0)$; F $(1,0,1,0)$; G $(1,1,1,0)$; H $(0,1,1,0)$; B_1 $(1,0,0,1)$; C_1 $(1,1,0,1)$; D_1 $(0,1,0,1)$; E_1 $(0,0,1,1)$; F_1 $(1,0,1,1)$; G_1 $(1,1,1,1)$; H_1 $(0,1,1,1)$. **8.** Пересекается с пространством $Oyzt$; касается пространства $Oxzt$; не имеет общих точек с пространствами $Oxyt$, $Oxyz$. **9.** $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}, \frac{t_1+t_2}{2}\right)$. **10.** а) $(0, \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2})$; б) $(3, \frac{3}{2}, 1, -1)$. **11.** а) $(x, y, z, -t)$; б) $(x, y, -z, -t)$; в) $(x, -y, -z, -t)$; г) $(-x, -y, -z, -t)$. **12.** а) $\sqrt{30}$; б) $\sqrt{65}$. **13.** Точка A. **14.** а) O $(2,-5,0,1)$, $R=3$; б) O $(0,6,-1,2)$, $R=4$. **15.** а) $x^2+y^2+z^2+t^2=1$; б) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2+$ $+(t+4)^2=16$. **16.** а) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2+(t+2)^2=4$; б) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2+(t+2)^2=1$. **17.** а) $(x-3)^2+(y+2)^2+$ $+(z-1)^2+(t-4)^2=21$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2+(t-4)^2=26$. **18.** Данное уравнение можно переписать в виде $(x-2)^2+(y+1)^2+$ $+z^2+t^2=5$. Следовательно, центром гиперсферы является точка O $(2,-1,0,0)$, а ее радиус $R=\sqrt{5}$. **19.** Лежит внутри сферы. **20.** Цилиндрическое пространство с осью Ot.

§ 35

1. а) $(-2,6,1,-3)$; б) $(1,3,0,2)$; в) $(0,-3,2,1)$; г) $(-5,0,5,0)$. **2.** а) $(-7,9,-16,6)$; б) $(5,-8,-2,2)$; в) $(8,0,19,5)$. **3.** $(-a,-b,$ $-c,-d)$. **4.** $x_2=sx_1$, $y_2=sy_1$, $z_2=sz_1$, $t_2=st_1$. **5.** $(1,3,-2,1)$, $(1,-3,6,-3)$. **6.** а) $(1,-2,30,-11)$; б) $(1,2,3\frac{1}{4},-1\frac{1}{4})$; в) $(11,-22,$ $7,-2)$. **7.** $(5,-6,-7,3)$. **8.** Вектор должен иметь координаты вида: а) $(0,0,0,t)$; б) $(x,0,0,0)$. **9.** а) $(1,2,3,5)$; б) $(2,2,3,4)$. **10.** а) $\sqrt{15}$; б) $\sqrt{69}$; $\sqrt{14}$. **11.** 1. **12.** а), в) $90°$; б), д) $135°$; г) $60°$. **13.** 0. **14.** а) $+$; б) $-$. **15.** $30°$. **16.** Для скалярного произведения данных векторов имеем: $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})+(\vec{b},\vec{a})-(\vec{a},\vec{b})+$ $+(\vec{b},\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$. Следовательно, векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны.

§ 36

1. а) $t=0$; б) $z=0$; в) $y=0$; г) $x=0$. **2.** $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{3}$, $t=$ $=1$. **3.** $-(x-1)+(y-2)+z-(t-1)=0$. **4.** $2(x+2)-4(y-4)+$

$+(z+1)-(t-1)=0$. **5.** $x+y+z+t=1$. **6.** а) $y+2=0$; б) $y-2=$ $=0$. **7.** а), в). **8.** а) $3(x-1)+(y-3)-(z+1)+2(t-2)=0$; б) $(x-1)-(y-3)+5(z-1)-(t-2)=0$. **9.** а) Да; б) нет. **10.** $90°$. **11.** а) O $(0,0,0,0)$, $R=4$; б) O $(0,1,0,0)$, $R=\sqrt{15}$; в) O $(1,1,1,1)$, $R=2\sqrt{3}$. **12.** а) $y=3$; б) $-2(x-2)+2(y+2)-(t-1)=0$.

§ 37

1. Коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 и a_2, b_2, c_2, d_2 составляют координаты векторов $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1, d_1)$ и $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$, перпендикулярных данной плоскости. **2.** Коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1; a_2, b_2, c_2, d_2 и a_3, b_3, c_3, d_3 составляют координаты векторов $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$ и $\vec{n}_3(a_3, b_3, c_3, d_3)$, перпендикулярных данной прямой. **3.** Ось Ox задается уравнениями $\begin{cases} x=s, \\ y=0, \\ z=0, \\ t=0. \end{cases}$ Аналогичным образом задаются другие оси. **4.** $\begin{cases} x=2s+1, \\ y=3s-2, \\ z=-s+3, \\ t=4s-4. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x=7s-2, \\ y=3s+1, \\ z=9s-3, \\ t=-6s+4. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x=as+x_0, \\ y=y_0, \\ z=z_0, \\ t=t_0. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} x=s+1, \\ y=s+2, \\ z=s-3, \\ t=s+4. \end{cases}$ **8.** Если $a_1a_2+a_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=$ $=0$. **9.** Перпендикулярны. **10.** $(-1,0,2,3)$. **11.** Расстояние от точки A (x,y,z,t) до пространства, заданного уравнением $ax+by+$ $+cz+dt+e=0$, равно длине перпендикуляра AA_0, опущенного на это пространство. Пусть A_0 имеет координаты (x_0, y_0, z_0, t_0). Вектор $\overrightarrow{AA_0}$ должен быть параллелен вектору нормали и, следовательно, должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x-x_0=as, \\ y-y_0=bs, \\ z-z_0=cs, \\ t-t_0=ds. \end{cases}$$

Длина этого вектора равна

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}|s|.$$

Для нахождения $|s|$ воспользуемся приведенными выше равенствами, и умножим их на координаты вектора нормали. Получим

$$\begin{cases} a(x-x_0)=a^2s, \\ b(y-y_0)=b^2s, \\ c(z-z_0)=c^2s, \\ d(t-t_0)=d^2s. \end{cases}$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $ax_0+by_0+cz_0+dt_0+e=$ $=0$, находим $s=\dfrac{ax+by+cz+dt+e}{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Откуда получаем, что длина искомого вектора $\overrightarrow{AA_0}$ равна $\dfrac{|ax+by+cz+dt+e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$. **12.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

§ 38

1. Системой неравенств $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t+e_1\geqslant 0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t+e_2\geqslant 0. \end{cases}$ **2.** а), б) Первому; в), г) второму. **3.** Прямоугольный гиперпараллелепипед. **4.** Гиперкуб. **5.** Правильный гипермногогранник с индексом Шлефли $\{3,3,4\}$, $\Gamma_0=8$, $\Gamma_1=24$, $\Gamma_2=32$, $\Gamma_3=16$. **6.** Октаэдр, $\sqrt{2}$. **7.** Этот гипермногогранник получается из гиперкуба отсечением углов пространствами, проходящими через середины ребер, выходящих из одной вершины. Его гранями будут 8 кубооктаэдров и 8 тетраэдров.

§ 39

1. $\sqrt{n}$. **2.** Неравенством $(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2\leqslant R^2$. **3.** n-мерный куб задается системой неравенств $|x_1|\leqslant 1, \ldots, |x_n|\leqslant 1$. **4.** $\sqrt{n}$. **5.** Точка A $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит данному $n-1$-мерному пространству тогда и только тогда, когда выполняется равенство $a_1(x_1-x_1^0)+\ldots+a_n(x_n-x_n^0)=0$, которое означает, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A^0A}$ $(x_1-x_1^0, \ldots x_n-x_n^0)$ и $\vec{n}$ $(a_1, \ldots, a_n)$ равно нулю, т. е. эти векторы перпендикулярны. **6.** $x_1+\ldots+x_n-n=0$.

7. $\begin{cases} x_1 = a_1 t + x_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = a_n t + x_n^0. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x_1 = t, \\ \ldots\ldots, \\ x_n = t. \end{cases}$ **9.** а) Прямоугольный параллелепипед; б) прямой цилиндр. **10.** а) Многогранника и отрезка; б) Шара и отрезка. **11.** а) треугольных призм; б) кубов и треугольных призм. **12.** −2. **13.** С 1-го склада — 10 т, со 2-го — 20 т, с 3-го — 5 т. **14.** С 1-го склада — 0 т, со 2-го и 3-го — 17,5 т. **15.** Хватит. Наименьшее число станков равно 44, из них 20 должны работать в первом режиме. **16.** $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \ldots + (-1)^{n-1}\Gamma_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$.

Литература

1. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрия 10—11 кл.: Учебник по геометрии для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2008.
2. *Кокстер Г. С. М.* Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
3. *Демидович Н.* Как начертить n-мерный куб // Квант. 1975. № 8. С. 11—16.
4. *Дужин С., Рубцов В.* Четырехмерный куб // Квант. 1986. № 6. С. 3—7.
5. *Котенок А. Н.* Гиперкуб. Первый шаг в четвертом измерении // Математика. 1999. № 44.
6. *Котенок А. Н.* Гиперпирамида. Второй шаг в четвертом измерении // Математика. 2001. № 31.
7. *Котенок А. Н.* Гиперсфера // Математика. 2005. № 13.
8. Энциклопедия элементарной математики. Кн. V. М.: Наука, 1966.

Владимир Алексеевич Смирнов
Ирина Михайловна Смирнова

Четырёхмерная геометрия

Элективный курс
для учащихся 10—11 классов общеобразовательных учреждений

Подписано в печать ??.??.2010 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 11,5. Тираж ??? экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано по CtP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.