

ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

В современной программе по математике для общеобразовательной школы говорится о том, что цели обучения математике определяются ее ролью в развитии общества в целом и формировании личности каждого отдельного человека. Таким образом, выделяются два основных направления в постановке курса математики. Назовем их – *общее* и *личное*. Первое определяется общественными запросами, предъявляемыми к школе, а второе связано с выявлением и развитием задатков, склонностей, интересов, способностей учащихся. В соответствии с этим определяются следующие цели обучения математике в школе:

а) овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;

б) интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для продуктивной жизни в обществе;

в) формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

г) формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса.

Сформулированные цели в равной степени относятся ко всем разделам школьной математики, в том числе и к геометрии.

Теперь, исходя из этих общих целей, рассмотрим специальные цели, ради которых преподается геометрия.

Давайте начнем с того, что проанализируем, как ставился и решался данный вопрос в известных руководствах по методике преподавания геометрии прошлых лет. Представим некоторые из них.

В методическом пособии *Р. В. Гангнуса* и *Ю. О. Гурвица* говорится о том, что изучение геометрии должно дать умение и навык отличать друг от друга формы различных геометрических фигур, перечисляя их существенные признаки, знать их образование и свойства, соотношения между отдельными элементами фигур, выполнять четкий чертеж несложной геометрической ситуации, разбираться в данном чертеже и вызывать в своем воображении по данному чертежу соответствующие геометрические образы, решать задачи на вычисление длин, площадей, объемов тел и их частей, размеров их элементов, а также задачи на построение геометрических фигур. Изучение геометрии, содействуя развитию пространственных представлений и пространственной интуиции, должно, в конечном счете, дать учащимся прочные навыки и знания, нужные им не только для последующей учебной работы, но и для последующей профессиональной деятельности.

В методике геометрии *Н. М. Бескина* выделяются три цели преподавания геометрии в школе:

1. Сообщение геометрических сведений.

Эти сведения, во-первых, непосредственно нужны работникам многих профессий. Во-вторых, они необходимы при изучении других школьных предметов, таких, например, как физика, тригонометрия, география. В-третьих, использование при обучении в высшей школе.

2. Логическое развитие.

Эта важная задача в школе возлагается в основном на курс геометрии. При этом учитель предостерегается от использования уроков геометрии для преподавания логики. В курсе геометрии имеют дело лишь с применением логических методов. Эта логика в действии, логика, которая основывается на геометрическом материале. По мнению автора, нельзя одобрить практику тех учителей, которые сосредотачивают все свое внимание на привитии ученикам навыков и обходят все сколько-нибудь «тонкие» принципиальные вопросы под тем предлогом, что они мало доступны ученикам. Если ученик только приобрел навыки в решении задач и запомнил доказательства теорем, приводимые в учебнике, то цель преподавания геометрии еще не достигнута. Основное правило преподавания математики на всех ступенях – не снижать научного уровня, не обходить принципиальных вопросов, а, наоборот, подчеркивать их. Глубоко ошибочно думать, что, имея перед собой «слабых» учеников, мы облегчим им усвоение математики, обходя «тонкие» вопросы. Дело обстоит как раз наоборот, ибо, не добившись вполне отчетливого усвоения учениками принципиальных вопросов, мы не облегчим, а затрудним для них изучение геометрии, так как лишим их многих ассоциаций, общего подхода к разным вопросам и многих внутренних связей. Из стройной системы мы превратим геометрию в собрание отдельных предложений. Имея дело со «слабыми» учениками, учитель должен проходить принципиальные вопросы математики несколько не в меньшем объеме, чем с «сильными», а лишь разъяснять их более подробно. Математику можно преподавать всем, не превращая это преподавание в натаскивание, а сохраняя полностью все необходимые идейные моменты.

3. Развитие пространственного воображения.

При изучении геометрии надо добиваться, чтобы ученик мог охватывать сразу весь чертеж (сначала простой, потом – посложнее) и улавливать те соотношения между элементами чертежа, которые могут быть нужны при решении данного вопроса. Особенно полезны случаи, когда для решения проблемы приходится делать на чертеже дополнительные вспомогательные построения. Весьма полезны упражнения в проведении геометрических рассуждений, не делая чертежа на доске или на бумаге, а представляя его в уме. Решение задач на построение способствует развитию пространственного воображения.

В. М. Брадис в своем методическом руководстве говорит о том, что основная цель изучения геометрии в школе состоит в овладении основами этой

науки. При этом геометрию следует изучать в соответствии с тремя историческими стадиями развития этой науки, а именно:

а) накопление отдельных фактов и первые попытки установления связей между ними; здесь геометрия носит преимущественно экспериментальный характер;

б) геометрия Евклида; экспериментальная база геометрии существенно сужается; вместо построений и измерений на первый план выдвигается логическое рассуждение, нередко, однако, обращающееся к интуиции, к очевидным свойствам геометрических образов;

в) неевклидова геометрия; наряду с евклидовой геометрией появляются и другие, число аксиом в каждой из них доводится до минимума, и в списке аксиом остаются только те, относительно которых доказано, что они, действительно, недоказуемы с помощью других аксиом. Все остальные предложения доказываются на основе аксиом и ранее доказанных теорем, при доказательствах никакого обращения к интуиции, к очевидности не допускается.

Вместе с образовательной целью, заключающейся, с точки зрения автора, в усвоении фактического материала основного курса геометрии и того метода его логического развертывания, какой характерен для евклидовой стадии развития геометрии, ее изучение преследует и воспитательную цель, развивая логические навыки учащихся и их пространственное воображение. Правильно рассуждать они учатся на занятиях любого предмета учебного плана, но ни в одной дисциплине рассуждения не занимают столь большого и видного места, как в геометрии. Изучая геометрию, учащиеся приучаются правильно давать определения, правильно классифицировать понятия, различать условия и заключение в каждом предложении, различать предложение прямое, обратное, противоположное, понимать их взаимную зависимость, устанавливать условия, необходимые и достаточные, пользоваться различными методами доказательства и т. п.

В гармоническом развитии трех сторон – развития пространственного воображения, развития логического мышления и выработки навыков в практических приложениях – и заключается залог успеха занятий по геометрии.

В методике преподавания геометрии *В. Г. Чичигина* говорится о том, что школьный курс геометрии имеет наибольшую стройность, логическую строгость и последовательность по сравнению с другими учебными математическими дисциплинами. Поэтому даже в дореволюционной школе XIX – начала XX веков основным мотивом внесения геометрии в учебный план средней школы было развитие логического мышления учащихся.

Автор специально выделяет образовательные, воспитательные и практические цели преподавания геометрии.

Образовательные цели состоят в том, чтобы:

а) дать учащимся ряд геометрических понятий и знаний, приведенных в определенную стройную систему;

б) научить обрабатывать получаемые знания, объединять и обобщать создаваемые понятия и приводить их в систему;

в) научить в каждой задаче, понимая задачу в самом широком смысле этого слова, отчетливо различать, что дано, что надо найти и поставить вопрос, как это сделать.

Все это, вместе взятое, должно помогать развитию и повышению способности учащихся к правильному логическому мышлению.

К воспитательным целям отнесены:

а) развитие мировоззрения учащихся;

б) воспитание чувства национальной гордости и патриотизма;

в) воспитание инициативы, воли, настойчивости в преодолении трудностей;

г) воспитание уважения к истине и критического отношения к собственным и чужим суждениям;

д) развитие воображения, внимания, аккуратности при выполнении работы.

Практические цели состоят в том, чтобы:

а) приучить учащихся распознавать математическую сущность в явлениях окружающей жизни;

б) научить их применять полученные знания и навыки в повседневной практической жизни и при изучении других школьных предметов;

в) подготовить к дальнейшему изучению математики, физики и технических дисциплин в высшей школе.

В методике под общей редакцией *С. Е. Ляпина* сказано, что основной целью обучения математике, в частности геометрии, в школе является задача подготовки учеников к будущей практической деятельности, а поэтому им необходимо сообщить определенный круг знаний, позволяющих понимать отношения и зависимости простейших явлений реального мира и разбираться в его формах. Эти знания должны содействовать воспитанию у школьников научного мировоззрения, развивать логическое мышление и пространственное воображение.

Геометрические знания должны помочь ученикам решать прикладные задачи, узнавать геометрические фигуры в реальных конструкциях, быстро ориентироваться в чертежах, проводить измерения и т. п. В то же время при изучении геометрии учащиеся должны овладеть умением логически обосновывать то, что многие зависимости, обнаруженные путем рассмотрения отдельных частных случаев, имеют общее значение и распространяются на все фигуры определенного вида, и, кроме того, вырабатывать потребность в логическом обосновании зависимостей.

Правильно построенное преподавание должно воспитывать у школьников стремление творчески применять геометрические знания на

практике, что впоследствии может привести к плодотворным поискам решения конкретных прикладных задач.

В методике преподавания геометрии под редакцией *А. И. Фетисова* в качестве первой и основной цели обучения геометрии выделяется ясное сознание учащимися, что предметом ее изучения являются пространственные формы окружающего мира. Одновременно с этим среди задач преподавания геометрии указываются:

а) развитие пространственных представлений и пространственного воображения;

б) ознакомление учащихся с методами геометрии, с ее логической структурой; в процессе ее изучения учащиеся должны получить известное представление о значении аксиом, о сущности, формах и способах доказательства, о значении математической и логической символики.

в) выявление практической значимости науки, ее многообразных приложений в смежных дисциплинах и технической деятельности людей.

В одном из первых изданий учебника по геометрии для средней школы *А. В. Погорелова* в послесловии говорится о том, что «главная задача преподавания геометрии в школе - научить учащихся логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать; очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами; будут и такие, которые в своей практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора; однако вряд ли найдется хотя бы один, которому не придется рассуждать, анализировать, доказывать».

Автор другого известного учебника по геометрии для средней школы *А. Д. Александров*, говоря о целях преподавания геометрии, указывает, что особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и дополняют друг друга. В соответствии с этим делается вывод о том, что преподавание геометрии в школе должно включать в себя три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление и применение к реальным вещам. Задача преподавания геометрии - развить у школьников соответствующие три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

Таким образом, видим, что в специальных руководствах по методике преподавания геометрии разные авторы отдавали и отдают предпочтение различным направлениям обучения геометрии в школе и по-разному формулируют основные задачи школьного курса геометрии. Поэтому для систематизации накопленного материала по этой проблеме, а также исходя из современных тенденций математического образования, сформулируем, прежде всего, *требования*, которым должны удовлетворять цели преподавания геометрии в средней школе. Среди них выделим следующие:

I. Требование преемственности, означающее, что обучение геометрии должно обобщать исторический путь развития геометрии, передавать подрастающему поколению знания, накопленные человечеством на протяжении веков.

Геометрия, как наука, зародилась в глубокой древности и в своем развитии прошла несколько этапов. Первоначально она имела характер чисто практический и заключала в себе собрание правил, полученных эмпирически, длинные ряды опытов и наблюдений. Об этих правилах мы можем судить по папирусам, написанным около 2000 лет до нашей эры. В них содержатся решения задач, носящих, довольно, разрозненный и частный характер, среди которых имеется, например, задача о вычислении объема усеченной пирамиды. Какие-либо доказательства или обоснования решений отсутствуют.

Примерно за 6 столетий до нашей эры в древней Греции впервые появились теоремы и доказательства. Наиболее известным ученым, внесшим значительный вклад в становление науки -геометрии, был Пифагор (VI в. до н. эры). Его, прежде всего, интересовало чистое знание, вне зависимости от того, чему оно может послужить на практике. В течение последующих трех столетий геометрия оформилась как дедуктивная наука, в основу которой положены некоторые аксиомы и постулаты, принимаемые без доказательства, и содержание которой составляли теоремы, выводимые из них с помощью рассуждений. Непревзойденным изложением геометрии, как дедуктивной науки, явились «Начала» Евклида, написанные за 300 лет до нашей эры, которые на протяжении двух тысячелетий формировали умы математиков. Геометрия Евклида не только не исходит из практических задач, но и сама наглядность и наглядные представления о геометрических фигурах отодвигаются на второй план. Они не могут служить опорой в доказательствах, которые проводятся исключительно с помощью логических рассуждений. Главным в геометрии становится ее логика, сами же геометрические понятия: точка, прямая, плоскость, - могут иметь различные наглядные интерпретации (модели), лишь бы для них выполнялись данные постулаты (аксиомы). Итогом такой точки зрения на геометрию можно считать «Основания геометрии», опубликованные в 1899 году *Д. Гильбертом*, в которых он сделал геометрию чисто дедуктивной наукой. По существу, аксиоматика Гильберта является основой построения школьного курса геометрии и в настоящее время. Не следует, однако, думать, что аспекты аксиоматики и дедуктивного построения геометрии исчерпывают все вопросы геометрии. Среди других вопросов, которыми интересовались математики, выделим такие:

1. Изображение пространственных фигур на плоскости.

Еще в глубокой древности человек пытался рисовать изображения различных предметов и животных. В древней Греции уже знали некоторые законы, по которым следует изображать пространственные тела. Подобные изображения использовались, например, в декорациях спектаклей. В эпоху Возрождения методы изображения пространственных фигур систематически изучались художниками, скульпторами, архитекторами: *Леонардо да Винчи, А.*

Дюрером, Рафаэлем, Микеланджело, Тицианом и мн.др. Основы математической теории изображения пространственных тел на плоскости были разработаны Ж. Дезаргом и Г. Монжем, труды которых привели к созданию новых разделов геометрии: начертательной и проективной.

2. Измерение геометрических величин.

Как мы видели, первые задачи на измерение объемов пирамид встречаются еще у древних египтян. Общая формула вычисления объема произвольной пирамиды была получена Евдоксом Книдским в IV веке до нашей эры с помощью, так называемого, метода исчерпывания. Этим методом впоследствии пользовались Евклид, Архимед и др. В XVI-XVII веках проблемой нахождения объемов и площадей поверхностей пространственных фигур занимались Галилей, И. Кеплер, Б. Кавальери и др. ученые. В книге "Новая стереометрия винных бочек" Кеплер вычислил объемы многих тел, в том числе и тел вращения. Появление в конце XVII века интегрального исчисления дало мощный аппарат не только для нахождения объемов и площадей поверхностей различных тел, но и для обоснования известных ранее формул.

3. Алгебраические методы в геометрии.

Долгое время, на протяжении веков, геометрия и алгебра были независимы друг от друга, развивались как-бы параллельно. Только работы Р. Декарта (XVII век) позволили применять алгебраические методы в геометрии. Декарт открыл метод координат, при котором каждой точке плоскости сопоставляется пара чисел, а каждой точке пространства - тройка чисел, называемых координатами точки. При этом геометрические фигуры определяются уравнениями, связывающими координаты точек этой фигуры, что позволяет свести многие геометрические задачи к алгебраическим. Другим алгебраическим методом в геометрии является векторный метод, интерес к которому возник в XIX веке в связи с потребностями механики и физики. Оказалось, что многие геометрические задачи удобно описываются и решаются с помощью векторов. Векторный метод в геометрии положил начало векторному анализу и векторной алгебре.

4. Помимо евклидовой геометрии, появлялись и другие геометрии, среди которых: проективная, геометрия Лобачевского, сферическая, риманова, многомерная, дифференциальная геометрия и др.

Требование преемственности целей обучения геометрии в школе предполагает включение в содержание обучения вопросов ее истории. О важности исторических аспектов в преподавании говорится во многих работах, специальных исследованиях, высказываниях известных ученых-математиков. Впервые эта проблема была поставлена на знаменитых Всероссийских съездах преподавателей математики (о которых мы говорили выше, в главе I) в докладах В. В. Бобынина "Цели, формы и средства введения исторических элементов в курсе математики средней школы" и "Об указаниях, получаемых преподавателями математики от ее истории".

В них было обращено внимание на то, что рассмотрение исторического материала на уроках математики способствует:

- повышению интереса учащихся к предмету;
- углублению понимания ими фактического материала;
- расширению умственного кругозора учащихся;
- повышению их общей культуры.

Отечественной школой накоплен большой опыт включения элементов истории в преподавание школьного курса математики. Создана библиотека специальной литературы. Среди значительных книг по истории математики для школы можно назвать работы таких авторов, как *И. Г. Башмакова, Б. В. Болгарский, Г. И. Глейзер, Б. В. Гнеденко, В. Н. Молодший, К. А. Рыбников, А. А. Свечников, Д. Я. Стройк, В. Д. Чистяков, А. П. Юшкевич* и др.

Вышли сборники исторических задач, среди них:

- *Г. Н. Попов*. Исторические задачи по элементарной математике (1938, переиздана в 1999);
- *В. Д. Чистяков*. Три знаменитые задачи древности (1963);
- *С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов*. Старинные занимательные задачи (1988, 1996);
- *И. И. Баврин, Е. А. Фрибус*. Старинные задачи (1994);
- *С. С. Перли, Б. С. Перли*. Страницы русской истории на уроках математики: Нетрадиционный задачник (1994) и др.

Среди целей введения элементов истории в преподавание математики особо выделим следующие:

1. История математики служит для *формирования мировоззрения*, так как сведения о научных поисках, открытиях помогает увидеть по-новому то, что кажется привычным и обыденным. Основными целями введения исторического материала является проникновение в мировоззренческий смысл науки, в процесс формирования ее основных идей и методов. Исторический материал должен демонстрировать учащимся, каким может быть трудным и длительным путь ученого к истине, которая сегодня формулируется в виде короткого утверждения.

2. Использование исторических сведений является одним из *критериев интересности содержания учебного материала*, служит для развития познавательных интересов учащихся к математике.

3. Исторические сведения служат для развития *творческих способностей* учащихся, так как включение сведений о творчестве крупных ученых, о том, как они приходили к постановке своих исследований, как находили метод решения, как формулировали окончательный результат, позволяет создать творческую атмосферу на уроках, помогает понять, что в процессе творчества нет ничего необычного, сверхъестественного, но цели достигаются в результате упорного труда.

4. Элементы истории служат средством *нравственного воспитания* учащихся, воспитания чувства гордости за достижения отечественной математики. История науки обладает множеством

впечатляющих фактов о благородных социальных и гражданских мотивах деятельности ученых. Пренебрежение этим материалом или умалчивание о нем обедняет познавательный и нравственный опыт учащихся. Лишенные конкретных доказательств о единстве науки и нравственности школьники могут считать, что существует чистая наука, далекая от реальной жизни, несвязанная с судьбами людей и общества.

5. Наконец, история математики важна не только потому, что она необходима для решения ряда методологических и педагогических проблем. Она важна, и сама по себе как *«памятник человеческому гению, позволившему человечеству пройти великий путь от полного незнания и полного подчинения силам природы до великих замыслов и свершений в познании законов, управляющих внутриатомными процессами и процессами космического масштаба. История науки является тем факелом, который освещает новым поколениям путь дальнейшего развития и передает им священный огонь Прометея, толкающий их на новые открытия, на вечный поиск, ведущий к познанию окружающего нас мира, включая нас самих»* (Б. В. Гнеденко).

Важная методическая проблема заключается в создании научно-обоснованной системы работы учителя с историческим материалом на уроках геометрии. Она еще очень далека от своего совершенства. Необходимо найти умелое сочетание элементов истории с математическим материалом. Трудность заключается в отборе конкретного исторического материала, а также методов и форм его преподавания. Для реализации названных дидактических функций элементов истории на уроках геометрии они должны быть специально включены в программы, учебники, контрольные мероприятия. В идеале по каждой теме школьного курса геометрии нужно создать соответствующие методические разработки с указанием конкретных исторических фактов и методов их преподнесения учащимся.

В своей работе с учащимися основной школы и старших классов мы выделили следующие *формы использования исторического материала (классификация по объему предлагаемой информации)*:

1. Историческая справка.
2. Исторический экскурс.
3. Историческая задача.
4. Статья (сочинение) на историческую тему.
5. Реферат, посвященный истории математики.
6. Проект по истории математики.

Среди *форм проведения* выделим:

- 1) Создание соответствующей проблемной ситуации.
- 2) Короткое сообщение ученика.
- 3) Доклад ученика.
- 4) Беседа или рассказ учителя.
- 5) Урок или семинар по определенной теме.

Формы внеклассной работы, где может быть использована история математики:

- Историческая математическая газета или рубрика настенной классной газеты, посвященной вопросам истории математики.
- Историческая математическая викторина.
- Исторический математический вечер.
- Серия кружковых, или факультативных занятий, или элективных курсов.

В распоряжении каждого учителя математики должен быть исторический материал по изучаемой теме, которым он может распорядиться по собственному усмотрению, в соответствии со своим опытом, вкусом, уровнем и профилем класса. Значение такого материала для начинающего учителя трудно переоценить.

II. Требование научной и практической значимости геометрии, означающее, что цели ее обучения должны соответствовать той роли, которую играет геометрия в жизни общества, в познании окружающего нас мира.

По выражению *А. Д. Александрова*, «ученику нужно показать реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрежке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальными вещами». Показ прикладных аспектов геометрии совершенно необходим, особенно для учащихся старших классов, которых нужно убедить в полезности того, что они изучают в школе.

Опыт работы показывает, что учащиеся средней школы живо интересуются современными проблемами в различных областях знания. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, появление большого количества научно-популярной литературы, научно-популярных телевизионных и радиопередач, современных компьютерных информационных технологий. Неправильной является точка зрения, согласно которой считается, что школьникам недоступно познание современного состояния науки и, в частности геометрии, поэтому вводить элементы современной геометрии в школе не нужно. Знакомство с основными направлениями развития современной науки необходимо каждому выпускнику школы, независимо от его будущей деятельности, для ориентации в современном мире, правильному представлению о процессах, происходящих в природе и обществе. Главное здесь найти "золотую середину", т.е. такой метод изложения материала, при котором, не вдаваясь в трудные детали, познакомить учащихся с некоторыми современными вопросами геометрии.

III. Цели обучения должны соответствовать общественным запросам, тем задачам, которые общество ставит перед школой.

Общественные запросы меняются со временем. Так в период, когда ставилась задача политехнического образования, главной целью обучения в школе была подготовка учащихся к производственному труду. В то время, когда был взят курс на всеобщее высшее образование, главной целью обучения в школе являлась подготовка к продолжению образования в вузе. Когда целью

общественного развития было построение коммунизма, перед школой ставилась задача формирования всесторонне развитой личности, активного строителя коммунизма. В настоящее время отношение общества к школе изменилось, усилилась дифференциация обучения, расширилась сеть специализированных школ и классов с углубленным изучением отдельных предметов. Требования, предъявляемые сейчас обществом к средней школе, носят общеобразовательный характер, предполагающий раскрытие возможностей и способностей каждого ученика с тем, чтобы он в дальнейшем мог выбрать себе профессию по душе в соответствии со своими склонностями и способностями.

IV. Цели обучения должны удовлетворять запросы самих учеников, учитывать их индивидуальные и возрастные особенности. Они должны быть понятными и принятыми самими учащимися, должны способствовать активному участию всех школьников в процессе обучения.

В отношении задач, которые ставятся перед учениками, *С. Л. Рубинштейн* писал: "Для того, чтобы учащиеся по-настоящему включились в работу, нужно, чтобы задачи, которые перед ними ставятся в ходе учебной деятельности, были не только понятны, но и приняты ими, т. е., чтобы они приобрели значимость для учащихся и нашли, таким образом, отклик и опорную точку в их переживаниях".

Принятие учениками целей обучения в качестве своих личных целей является одним из важнейших условий теории учебной деятельности, разработанной в трудах отечественных психологов *П. Я. Гальперина, В. В. Давыдова, А. Н. Леонтьева, Д. Б. Эльконина* и др.

V. Цели обучения должны удовлетворять психолого-педагогическим требованиям к процессу обучения.

В теории обучения рассматриваются принципы воспитывающего и развивающего обучения, разработанные в трудах известных отечественных педагогов и психологов: *Ю. К. Бабанского, Л. С. Выготского, П. Я. Гальперина, В. В. Давыдова, Л. В. Занкова, Н. А. Менчинской, Н. Ф. Талызиной* и др.

Принцип воспитывающего обучения предполагает рассмотрение обучения в качестве одной из форм воспитания. Это не означает, конечно, что в процессе обучения воспитание происходит автоматически. В случае, когда учитель ставит лишь цель научить учащихся определенным знаниям, умениям и навыкам, воспитание носит стихийный, случайный характер, не является прямым результатом обучения. Неправильным также является планирование и решение воспитательных задач на уроке в отрыве от процесса обучения. Воспитательные моменты, оторванные от содержания учебного предмета и логики педагогического процесса, отводят воспитанию второстепенную роль, противопоставляются обучению и воспитанию. Воспитывающее обучение требует единства в решении образовательных и воспитательных задач обучения. Обучение должно так организовываться, так проводиться, чтобы оно прямо и непосредственно решало воспитательные задачи, связанные с

формированием личности учащихся. Через воспитание, в процессе воспитания только и можно эффективно и по-настоящему осуществлять цели и задачи обучения.

О воспитании в процессе обучения математике ярко говорили и говорят российские математики. Широко известна речь *Н. И. Лобачевского* "О важнейших предметах воспитания", произнесенная им 5 июля 1828 года на торжественном собрании Казанского университета, в которой, в частности, говорится, что "одно образование умственное не довершает еще воспитание. Человек, обогащая свой ум познаниями, еще должен уметь наслаждаться жизнью".

Другой выдающийся математик XIX века *М. В. Остроградский* в своей брошюре "Размышления о преподавании" отмечал, что в содержание научных курсов обязательно нужно включать материал для развития души учеников. Например, включать элементы истории: "Для каждого, кто любит изучать человека, его разум, происхождение его мыслей и развитие его суждений, мы не знаем более увлекательного предмета, чем история научных изобретений и их творцов, чем исследование попыток упростить обучение, чем усовершенствование тех изобретений, которые уже добыты".

В работе *Б. В. Гнеденко* "Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике" отмечается, что мировоззрение воспитывается не только на уроках гуманитарного цикла. "В действительности, каждый школьный предмет обладает своими неповторимыми возможностями для развития и раскрытия, по крайней мере, некоторых аспектов научного мировоззрения. Перед математиками в этом большом ответственном деле стоит ряд серьезных задач и на первом месте - борьба с ошибочными точками зрения на природу математического знания, на его место в познании окружающего нас мира, на происхождение математических понятий, на источники новых задач в математике и новых ее ветвей".

Известный математик и педагог *А. Я. Хинчин* в своих, ставших знаменитыми, «Педагогических статьях» указывал на то, что среди воспитательных задач обучения математике важное место занимает воспитание патриотизма, чувства гордости за достижения отечественной науки, ученых. "История российской математики богата фактами, знакомство с которыми, в особенности на фоне правильной исторической перспективы, способны возбуждать в нас законную радостную гордость. И среди этих фактов есть немало таких, понимание которых доступно учащимся средней школы в достаточной мере для того, чтобы они могли оценить принципиальное и практическое значение". Среди черт личности, которые воспитывает математика, *А. Я. Хинчин* выделил *честность, правдивость, настойчивость* и *мужество*. "По моему многолетнему опыту работа над усвоением математической науки неизбежно воспитывает - исподволь и постепенно - в молодом человеке ряд черт, имеющих яркую моральную окраску и способных в дальнейшем стать важнейшими моментами в его нравственном облике.

Сделать этот процесс более активным и результаты его более прочными - достойная задача учителя".

В статье *В. Г. Болтянского* "Математическая культура и эстетика" говорится о том, что природа математики представляет собой богатые возможности для воспитания у школьников эстетического чувства красоты в самом широком значении этого слова.

Красота геометрии заключается в строгих, смелых, оригинальных доказательствах, выводах, решениях, в проявлениях геометрии в живой природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т.д.

Красивое всегда удивляет, оно неожиданно, необычно. *В. Г. Болтянский* приводит следующую формулу математической красоты:

$$\begin{aligned} \text{Красота} &= \text{Наглядность} + \text{Неожиданность} = \\ &= \text{Изоморфизм} + \text{Простота} + \text{Неожиданность}. \end{aligned}$$

Среди развивающих задач обучения геометрии особо выделяются следующие:

1) Развитие мышления.

Развитие мышления с давних пор считалось одной из основных задач геометрии. Логика геометрии заключена не только в отдельных формулировках и доказательствах, но и во всей системе в целом. Смысл каждого определения, каждого доказательства в конечном счете определяется системой, которая и делает геометрию целостной наукой, а не собранием отдельных определений и теорем. Развитию логического мышления учащихся посвящены многочисленные работы, среди которых *Н. Я. Виленкина, А. Н. Колмогорова, А. В. Погорелова, А. А. Столяра* и др.

2) Развитие пространственного воображения.

Важность развития пространственного воображения ни у кого не вызывает сомнений. "Хорошее пространственное воображение нужно конструктору, создающему новые машины, геологу, разведывающему недра земли, архитектору, сооружающему здания современных городов, хирургу, производящему тончайшие операции среди сложной сети кровеносных сосудов и нервных волокон, скульптору, художнику и т. д.". Эти слова принадлежат известному математику *Н. Ф. Четверухину*. Развитие пространственного воображения расширяет видение мира, делает его более пространственно выпуклым и содержательным. Оно обогащает внутренний мир человека, давая ему возможность создавать в себе и созерцать разнообразные картины. Словом, развитие пространственного воображения - это важный элемент общей культуры. Развитию пространственных представлений учащихся посвящены работы *Г. Д. Глейзера, Н. П. Ирошниковой, В. Н. Литвиненко, А. Д. Семушина, Р. С. Черкасова, И. С. Якиманской* и др.

3) Формирование познавательного интереса к геометрии.

Проблема развития познавательного интереса учащихся возникла во второй половине XVIII века в связи с тем, что обучение стало приобретать

массовый характер. До этого времени определенных высказываний об интересе к обучению не было, поскольку грамотность и просвещение были доступны лишь немногим, и обучение сводилось преимущественно к зазубриванию текстов. Проблеме интереса при обучении посвятили свои работы многие передовые российские просветители, среди них: *А. Н. Радищев, Н. А. Добролюбов, В. Ф. Одоевский, В. Г. Белинский, А. И. Герцен, К. Д. Ушинский, Л. Н. Толстой* и др.

Проблемам интереса в обучении был посвящен целый ряд педагогических исследований, среди которых выделяются исследования *Г. И. Щукиной*.

Сегодня нас уже не может устроить пассивный багаж знаний учащихся, необходимо проведение целенаправленной работы по формированию устойчивого интереса учащихся к овладению знаниями. Решение образовательных, воспитательных и развивающих задач обучения невозможно без активного интереса учащихся к обучению, без той положительной эмоциональной установки, которую нужно создать у школьников. Задачи обучения могут быть достигнуты только тогда, когда в процессе обучения будет сформирован устойчивый интерес к знаниям, так как только в этом случае можно достигнуть эффекта сопереживания, пробуждающего определенные нравственные чувства и суждения учащихся.

Наличие познавательных интересов школьников способствует росту их активности на уроках, повышению качества знаний, формированию положительных мотивов учения, активной жизненной позиции, что в совокупности вызывает повышение эффективности всего процесса обучения. Необходимость решения проблемы развития познавательных интересов учащихся диктуется тем, что, с одной стороны, как было сказано выше, без активного интереса нам не удастся решить задачи обучения, а с другой - в последние годы наметилось снижение интереса школьников к математике вообще и к геометрии, в частности.

4) Развитие творческих математических способностей.

На современном этапе общественного развития творчество человека является неотъемлемой частью личности. Творческие способности, творческий подход к делу необходимы каждому человеку. Творить - значит создавать что-то новое, открывать неизвестное. Всякое творчество требует большой наблюдательности, опыта, полета фантазии, знаний. Чем шире круг знаний человека, тем продуктивнее его творческая деятельность. Творчество - высшая форма активности и самостоятельности.

Исследованием математических способностей учащихся занимался *В. А. Крутецкий*. Он подчеркивал, что об учебных способностях тоже можно говорить как о творческих, так как они связаны с самостоятельным овладением школьным курсом, например, геометрии, с самостоятельной постановкой несложных проблем и нахождением путей для их решения, изобретением доказательств теорем, выводов формул, решением нестандартных задач. Все это проявление творчества, только творчества субъективного, когда ученик

открывает новое, ценное, значимое для себя. Математическое творчество школьников - первый шаг к математическому научному творчеству. "Странно то, что мы искусственно разделяем два процесса - учебу и творчество. На самом деле - это один процесс. Если учеба для человека не является процессом творческим, то она бесполезна. И, наоборот, только сохраняя способность учиться и удивляться новому, человек сохраняет способность творить независимо от возраста. Опять-таки этот процесс определяется индивидуальными усилиями и потребностями, общественными стимулами, которые формируют их".

Работа по реализации воспитательных и развивающих задач обучения не может идти стихийно. Она должна носить целенаправленный комплексный характер, охватывающий все стороны деятельности учащихся.

Единство образования, воспитания и развития учащихся составляет суть комплексного подхода к обучению, разработанного в трудах отечественных педагогов. Например, *Ю. К. Бабанский* рассматривал комплексный подход в качестве способа оптимизации учебно-воспитательного процесса в школе. Следует особо отметить, что комплексный подход к планированию учебного процесса предполагает охват всех сторон воспитания школьников - формирование у них мировоззрения, трудовое, нравственное, эстетическое и физическое воспитание.

Не следует думать, что комплексный подход, требование единства обучения, воспитания и развития относится только ко всему процессу обучения и не относится к каждому отдельному предмету, т. е. вклад в процесс формирования личности учащихся для различных предметов является существенно различным. Это не так. Например, геометрия обладает всеми возможностями для успешного решения не только образовательных, но и воспитательных, и развивающих задач обучения.

VI. Цели обучения должны быть конкретными. Из них должны вытекать практические рекомендации по отбору содержания, выбору форм и методов обучения. Достижение целей обучения должно быть проверено с тем, чтобы можно было осуществлять соответствующий контроль за их достижением.

Конкретизация целей обучения позволяет более четко организовать процесс обучения, выделить наиболее существенные, значимые стороны, сосредоточить на них усилия учеников, организовать эффективный контроль за их достижением.

Опираясь на выдвинутые требования, кратко сформулируем основные цели обучения геометрии в средней школе, традиционно разбив их на три группы: образовательные, развивающие и воспитательные.

I. Образовательные. В результате изучения курса геометрии учащиеся должны получить представления о: истории становления и развития науки геометрии; роли геометрии в возникновении различных разделов математики и ее приложений; методах геометрии; языке геометрии; прикладных аспектах геометрии; современных направлениях развития геометрии.

II. *Развивающие*. Изучение геометрии должно внести вклад в: развитие логического мышления; развитие пространственных представлений и пространственного воображения; формирование познавательных интересов; развитие творческих интеллектуальных способностей учащихся.

III. *Воспитательные*. Изучение геометрии должно внести вклад в: формирование научного мировоззрения; нравственное воспитание; эстетическое воспитание учащихся.

Обучение, являясь единым процессом, имеет две стороны: *преподавание*, которое определяется деятельностью учителя, и *учение*, связанное с деятельностью учащихся. Поэтому различаются цели преподавания и цели изучения геометрии, которые, конечно, по-существу, должны совпадать, не иметь принципиальных различий. При этом цели изучения геометрии – это соответствующая интерпретация целей преподавания геометрии. Учащиеся должны понимать и принимать цели изучения геометрии. Очень важно обсуждать с ними эту проблему. Такой разговор целесообразно начинать сразу, на самых первых уроках геометрии, когда начинается ее систематическое изучение. В качестве примера приведем фрагмент беседы о целях изучения геометрии с учащимися старших классов.

Зачем нужно изучать геометрию?

Во-первых, геометрия знакомит нас с окружающей действительностью, в которой многие предметы напоминают различные геометрические фигуры, фактически мы живем в мире геометрии. Необходимо научиться понимать, как он устроен, чтобы правильно ориентироваться в нем. Именно геометрия помогает нам это сделать, так как она дает необходимые каждому человеку пространственные представления, знакомит с разнообразными пространственными формами, законами их восприятия.

Во-вторых, очень интересно устроена наша голова. Есть левое полушарие головного мозга, которое «отвечает» за развитие рациональных психических функций, например, логическое мышление. Правое полушарие связано с развитием иррациональных психических функций, образов, чувств, его даже называют «интуитивным полушарием». В психологии убедительно доказано, что, чтобы стать истинным творцом в любой сфере человеческой деятельности, нужно иметь хорошо и пропорционально развитыми оба полушария головного мозга, и левое, и правое. Приведем на этот счет два примера.

Выдающийся французский математик *Анри Пуанкаре*, исследуя вопрос о математическом творчестве, говорил о том, что самым важным качеством настоящего математика является чувство математической эстетики, красоты, изящества решения. Тот, кто не обладает этим свойством, т.е. не имеет хорошо развитым правое полушарие, никогда не сможет сделать неожиданных, нестандартных открытий, а потому добиться значительных результатов в области математической науки.

Другой знаменитый француз, выдающийся архитектор XX столетия, *Ле Корбюзье* считал, что в основе всего изобразительного искусства лежит

геометрия. Он писал: «Человек нашей эпохи своими художественными впечатлениями обязан в первую очередь геометрии. После столетия анализа современное искусство и современная мысль рвутся за пределы случайного, и геометрия приводит их к математическому порядку и гармонии. Эта тенденция усиливается с каждым днем».

Геометрия, как ни один другой предмет, обладает широкими возможностями для развития обоих полушарий головного мозга, так как в ней интуитивно понятные, наглядные факты получают строгое логическое обоснование и доказательство. Действительно, геометрия, по образному выражению *А. Д. Александрова*, это «лед и пламень».

Кроме этого, при изучении геометрии вырабатываются необходимые практические навыки изображения, моделирования, конструирования геометрических фигур, а также измерения основных геометрических величин – длин, величин углов, площадей, объемов.

Наконец, геометрия интересна, и сама по себе, так как имеет яркую историю, связанную с именами выдающихся ученых, таких как *Пифагор*, *Евклид*, *Архимед*, *И. Кеплер*, *Л. Эйлер* и мн. др.; богатые прикладные аспекты, в том числе в кристаллографии, живописи, архитектуре, строительстве и т.д. Геометрия занимательна, изучает красивые объекты, среди которых особо выделяются правильные, полуправильные, звездчатые многогранники и др. Она связана с развитием многих разделов современной математики и ее приложений.

Сказанному и посвящен школьный курс геометрии, по мере изучения которого все это и будет подробно раскрываться и представляться.