ЗАДАЧИ НА КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ

В. А. Смирнов
Московский педагогический государственный университет
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация: в работе рассматриваются возможности использования программы GeoGebra для решения задач на комбинации многогранников.

Ключевые слова: задачи, комбинации многогранников, программа GeoGebra.

PROBLEMS ON COMBINATIONS OF POLYHEDRA

V.A. Smirnov
Moscow State Pedagogical University
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
I.M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Annotation: the paper discusses the possibilities of using the GeoGebra program for solving problems on combinations of polyhedra.

Keywords: problems, combinations of polyhedra, GeoGebra program.

Одной из важных современных задач обучения математике в школе является использование компьютерных технологий. В связи с тем, что задачи, которые сейчас содержатся в действующих учебниках геометрии, не предполагают использование компьютерных программ, необходимо дополнительно подбирать задачи, решению которых помогают такие программы.

В работе [1] нами были рассмотрены возможности программы GeoGebra для решения задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми. Здесь мы рассмотрим возможности этой программы для решения задач (в основном повышенной трудности и олимпиадных), связанных с комбинациями многогранников. Трудности в решении этих задач, во многом, обусловлены недостаточной наглядностью плоских изображений пространственных фигур и, как следствие, сложностью проведения дополнительных построений. Компьютерная программа GeoGebra позволяет создавать трёхмерные модели пространственных фигур, производить над ними различные действия, что способствует развитию пространственных представлений учащихся и помогает решать сложные задачи. Большая часть рисунков этой статьи сделаны с помощью этой программы.

Более подробно с возможностями моделирования геометрических фигур в программе GeoGebra можно познакомиться в книгах [2, 3].

Задача 1. Правильный тетраэдр повернули вокруг прямой, проходящей через середины двух его противолежащих рёбер, на угол 90°. Какой многогранник является общей частью исходного тетраэдра и повёрнутого? Найдите его объём, если объём исходного тетраэдра равен 1.

Решение. На рисунке 1 представлено изображение правильного тетраэдра и прямой, проходящей через середины противолежащих рёбер.

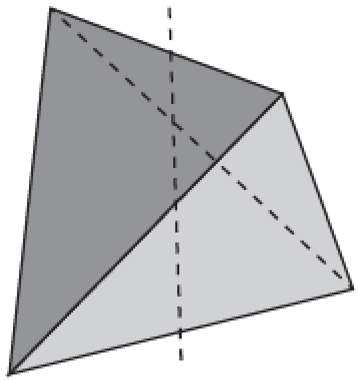

Рис. 1

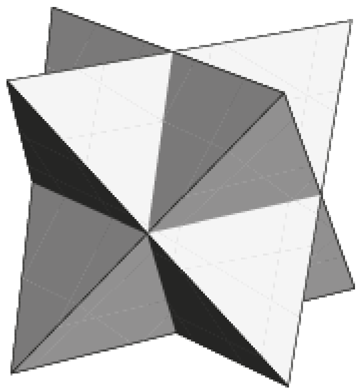

Рис. 2

Нетрудно видеть, что общей частью данного и повёрнутого тетраэдров является октаэдр, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра (рис. 2).

Этот октаэдр получается отсечением от исходного тетраэдра четырёх тетраэдров, рёбра которых в два раза меньше рёбер исходного тетраэдра. Объём каждого такого отсечённого тетраэдра равен $\frac{1}{8}$. Следовательно, объём октаэдра равен $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Правильную четырёхугольную пирамиду (рис. 3) симметрично отразили относительно середины высоты. Какой многогранник является общей частью исходной и симметричной пирамид? Найдите его объём, если объём исходной пирамиды равен 1.

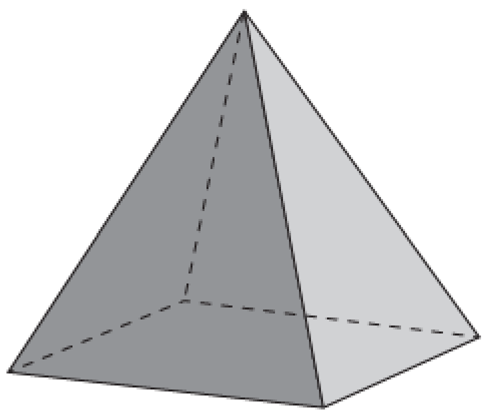

Рис. 3

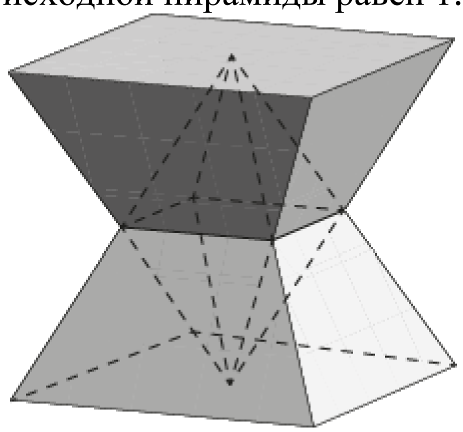

Рис. 4

Решение. Данная и симметричная пирамиды показаны на рисунке 4. Их общей частью является многогранник, составленный из двух правильных четырёхугольных пирамид с общим основанием (четырёхугольная бипирамида). Рёбра каждой такой пирамиды в два раза меньше соответствующих рёбер исходной пирамиды. Объёмы этих пирамид равны $\frac{1}{8}$. Искомый объём общей части равен $\frac{1}{4}$.

Задача 3. Правильный тетраэдр (рис. 5) симметрично отразили относительно середины его высоты. Какой многогранник является общей частью исходного и симметричного тетраэдров? Найдите его объём, если объём исходного тетраэдра равен 1.

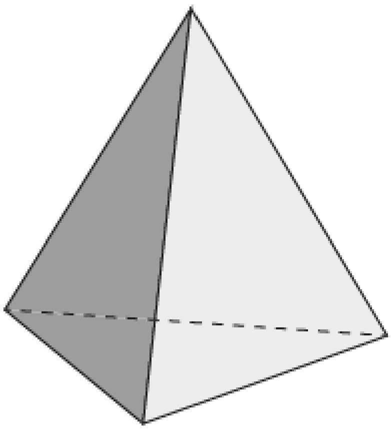

Рис. 5

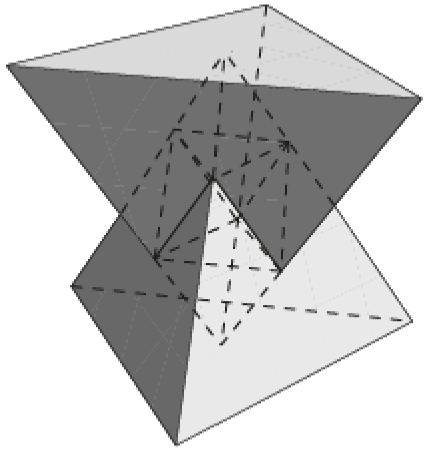

Рис. 6

Решение. Данный и симметричный тетраэдры показаны на рисунке 6. Их общей частью является многогранник, составленный из октаэдра и двух тетраэдров, рёбра которых в три раза меньше рёбер исходного тетраэдра. Объём каждого из этих тетраэдров равен $\frac{1}{27}$. Объём октаэдра равен $\frac{4}{27}$. Искомый объём общей части равен $\frac{2}{9}$.

Задача 4. Единичный куб повернули вокруг прямой, содержащей его диагональ, на угол 60°. Какой многогранник является общей частью исходного куба и повёрнутого? Найдите его объём.

Решение. Данный и повёрнутый кубы показаны на рисунке 7.

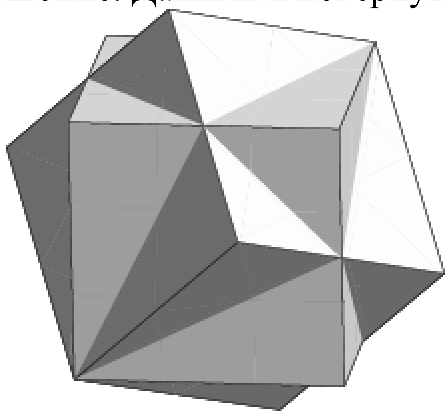

Рис. 7

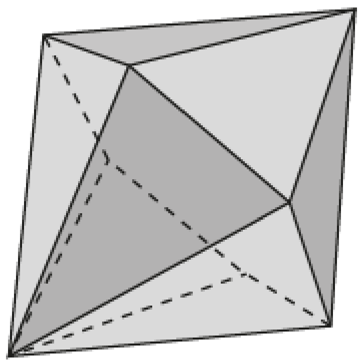

Рис. 8

Общей частью этих кубов является многогранник, составленный из двух правильных шестиугольных пирамид с общим основанием (рис. 8).

Он получается отсечением от исходного куба шести равных треугольных пирамид. Площади их оснований равны $\frac{1}{8}$, высоты равны 1. Значит, их объёмы равны $\frac{1}{24}$. Следовательно, объём общей части равен $\frac{3}{4}$.

Задача 5. Единичный куб повернули вокруг прямой, проходящей через середины двух его противолежащих рёбер, на угол 90°. Какой многогранник является общей частью исходного куба и повёрнутого? Найдите его объём.

Решение. Данный и повёрнутый кубы показаны на рисунке 9.

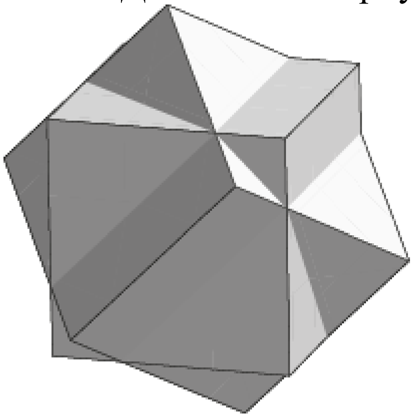

Рис. 9

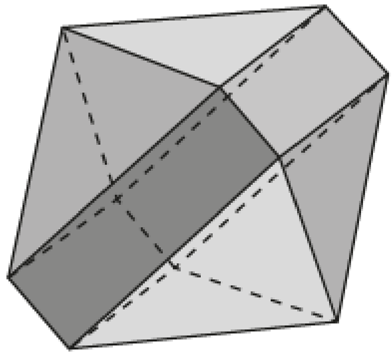

Рис. 10

Общей частью этих кубов является многогранник, составленный из двух правильных четырёхугольных пирамид и правильной четырёхугольной призмы (рис. 10).

Стороны оснований этих пирамид равны 1, а высоты равны $\frac{1}{2}$. Следовательно, объём каждой из них равен $\frac{1}{6}$. Стороны оснований призмы равны 1, а её высота равна $\sqrt{2}-1$. Следовательно, её объём равен $\sqrt{2}-1$. Значит, искомый объём равен $\sqrt{2}-\frac{2}{3}$.

Задача 6. Додекаэдр (рис. 11) повернули вокруг прямой, проходящей через середины двух его противолежащих рёбер, на угол 90°. Какой многогранник является общей частью исходного додекаэдра и повёрнутого? Найдите его объём, если рёбра додекаэдра равны 1.

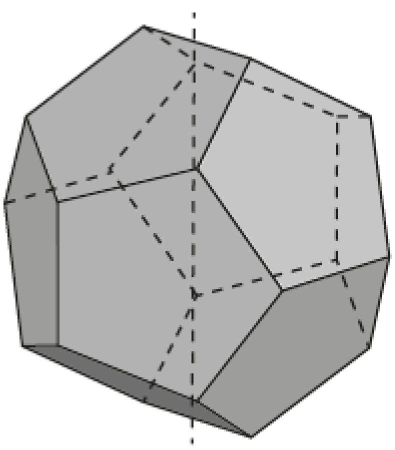

Рис. 11

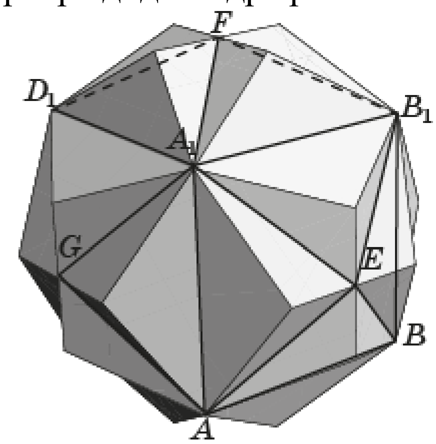

Рис. 12

Решение. Данный и повёрнутый додекаэдры показаны на рисунке 12. Общей частью исходного и повёрнутых додекаэдров является многогранник, состоящий из куба и шести правильных четырёхугольных пирамид, основаниями которых служат грани этого куба. Некоторые рёбра куба и пирамид показаны на рисунке 12. Например, четырёхугольник ABB_1A_1 является гранью куба и основанием пирамиды $EABB_1A_1$.

Ребро куба равно диагонали грани додекаэдра. Если рёбра додекаэдра равны 1, то рёбра куба равны $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Объём куба равен $2+\sqrt{5}$. Расстояние между противолежащими рёбрами додекаэдра равно $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, высоты правильных четырёхугольных пирамид равны $\frac{1}{2}$. Объём такой пирамиды равен $\frac{3+\sqrt{5}}{12}$. Следовательно, объём многогранника, являющегося общей частью двух додекаэдров, равен $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Задача 7. Октаэдр, рёбра которого равны 1 (рис. 13), повернули вокруг прямой, проходящей через середины E, F двух его противолежащих рёбер на угол 90°. Ещё один октаэдр получили поворотом исходного октаэдра вокруг прямой, проходящей через середины G, H двух других его противолежащих рёбер на угол 90°. Какой многогранник является общей частью исходного октаэдра и двух октаэдров, полученных из него поворотами? Найдите его объём.

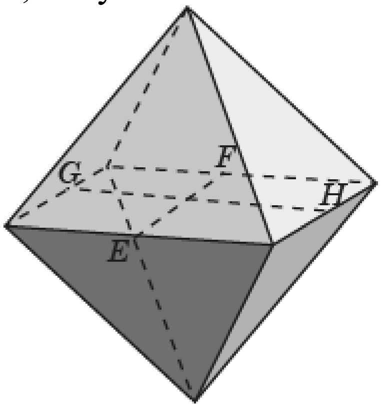

Рис. 13

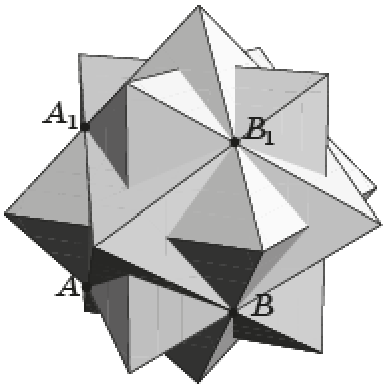

Рис. 14

Решение. На рисунке 14 показан исходный и повёрнутые октаэдры. У этих октаэдров имеется 24 грани. Следовательно, у многогранника, являющегося общей частью этих октаэдров, также имеется 24 грани.

Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются точки пересечения рёбер данного октаэдра и соответствующих рёбер повёрнутых октаэдров (рис. 15). Некоторые из таких вершин отмечены на рисунке 14. Рёбра этого куба равны $2-\sqrt{2}$.

При указанных поворотах октаэдра этот куб переходит сам в себя, следовательно, он содержится в общей части исходного октаэдра и повёрнутых.

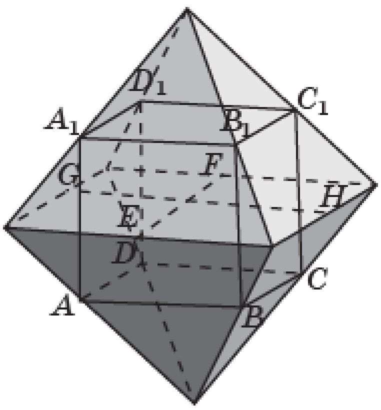

Рис. 15

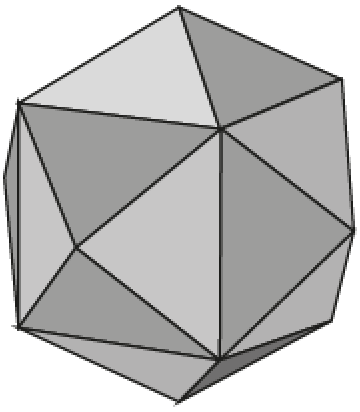

Рис. 16

На рисунке 16 показан многогранник, являющийся общей частью исходного и повёрнутых октаэдров. Он состоит из указанного выше куба и шести правильных четырёхугольных пирамид, основаниями которых служат грани этого куба, а высоты равны $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Непосредственные вычисления показывают, что объём этого многогранника равен $6-4\sqrt{2}$.

Задача 8. Единичный куб (рис. 17) повернули вокруг прямой, проходящей через середины *E*, *F* двух его противолежащих рёбер, на угол 90°. Ещё один куб получили поворотом исходного куба вокруг прямой, проходящей через середины *G*, *H* двух других его противолежащих рёбер на угол 90°. Какой многогранник является общей частью исходного куба и двух кубов, полученных из него поворотами?

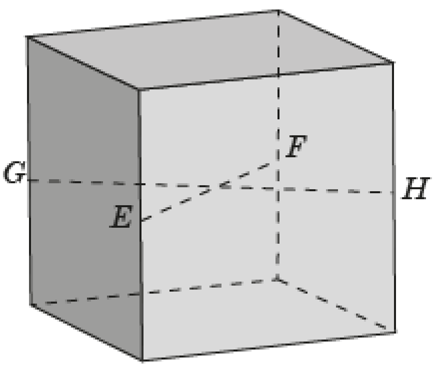

Рис. 17

Рис. 18

Решение. На рисунке 18 показан данный куб и два куба, полученные из него поворотами вокруг прямых соответственно *EF* и *GH* на угол 90°. У этих кубов имеется 18 граней. Следовательно, у многогранника, являющегося общей частью этих кубов, также имеется 18 граней.

Рассмотрим куб, вершинами которого являются точки пересечения граней данного куба и соответствующих граней повёрнутых кубов. Одна из таких вершин отмечена на рисунке 18. Рёбра этого куба равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При указанных поворотах данного куба этот куб переходит сам в себя, следовательно, он содержится в общей части исходного куба и повёрнутых.

На рисунке 19 показан этот многогранник. Он состоит из указанного выше куба и шести правильных четырёхугольных усечённых пирамид, основаниями которых служат грани этого куба. Другими основаниями усечённых пирамид являются квадраты, стороны которых равны $\sqrt{2}-1$. Высоты усечённых пирамид равны $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Заметим, что равнобедренные трапеции, являющиеся боковыми гранями усечённых пирамид, имеющие общее основание, лежат в одной плоскости и образуют шестиугольник. Таким образом, гранями искомого многогранника являются шесть квадратов и двенадцать шестиугольников.

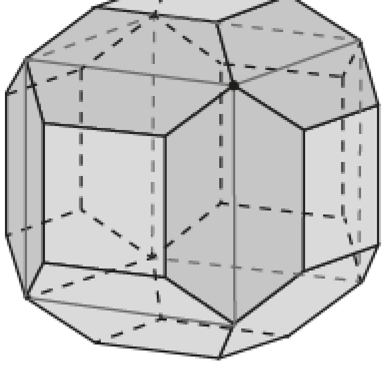

Рис. 19

Задача 9. Вершины октаэдров, изображённых на рисунке 20, являются серединами рёбер икосаэдра. Сколько этих октаэдров? Что является их общей частью?

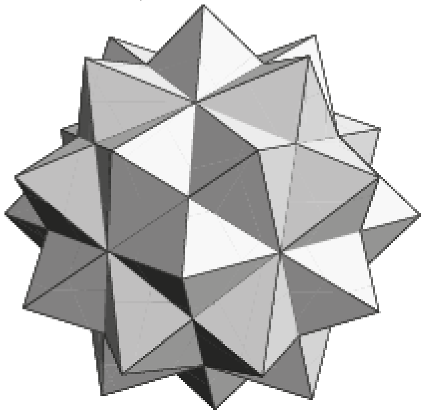

Рис. 20

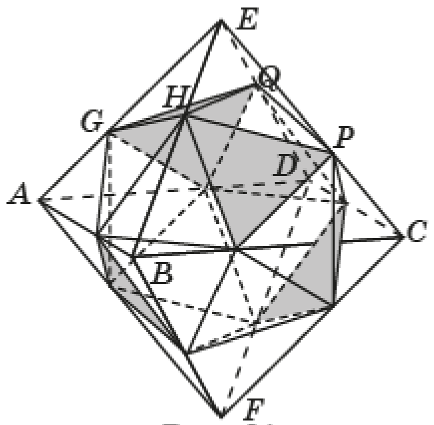

Рис. 21

Решение. У икосаэдра имеется 30 рёбер, у октаэдра – 6 вершин. Следовательно, имеется 5 октаэдров. Рассмотрим один из них. Впишем в него икосаэдр, как показано на рисунке 21.

Восемь граней этого икосаэдра будут лежать на гранях октаэдра. То же самое верно и для других октаэдров. Таким образом, этот икосаэдр будет содержаться в каждом из пяти данных октаэдров, следовательно, будет являться их общей частью.

Найдём рёбра этого икосаэдра, если рёбра октаэдров равны 1. Напомним, что вершины икосаэдра, вписанного в октаэдр, делят рёбра октаэдра в золотом отношении. В частности,

$$\frac{GE}{AE}=\frac{BE}{BH}=\frac{PE}{CE}=\frac{DQ}{DE}=\varphi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Заметим, что четырёхугольник $BFDE$ – квадрат, $HE = QE = 1-\varphi$. Следовательно, ребро HQ икосаэдра равно $\sqrt{2}(1-\varphi)=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$.

Задача 10. Вершины тетраэдров, изображённых на рисунке 22, образуют вершины додекаэдра. Сколько этих тетраэдров? Что является их общей частью?

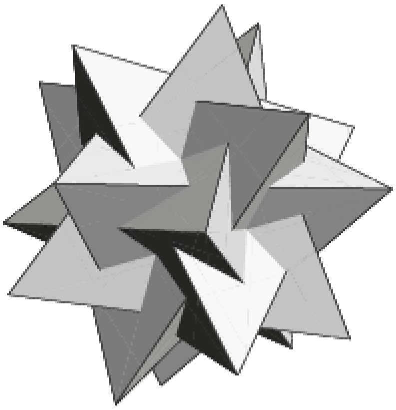

Рис. 22

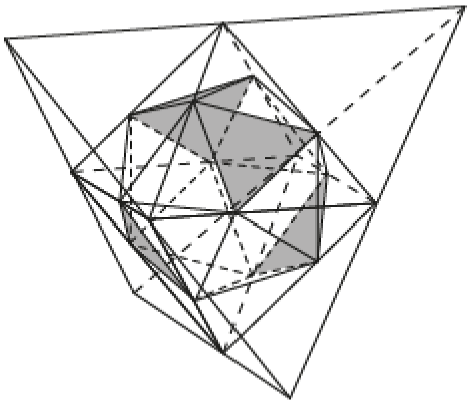

Рис. 23

Решение. У додекаэдра имеется 20 вершин, у тетраэдра – 4 вершины. Следовательно, имеется 5 тетраэдров. Рассмотрим один из них. Впишем в него октаэдр, а в него – икосаэдр, как показано на рисунке 23. Четыре грани этого икосаэдра будут лежать на гранях тетраэдра. То же самое верно и для других тетраэдров. Таким образом, этот икосаэдр будет содержаться в каждом из пяти данных тетраэдров, следовательно, будет являться их общей частью.

Если рёбра тетраэдров равны 1, то рёбра октаэдра, вписанного в этот тетраэдр, равны $\frac{1}{2}$, следовательно, рёбра икосаэдра равны $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$.

Задача 11. Вершины кубов, изображённых на рисунке 24, являются вершинами додекаэдра. Сколько этих кубов? Что является их общей частью?

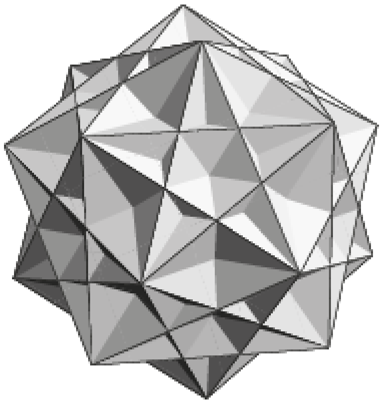

Рис. 24

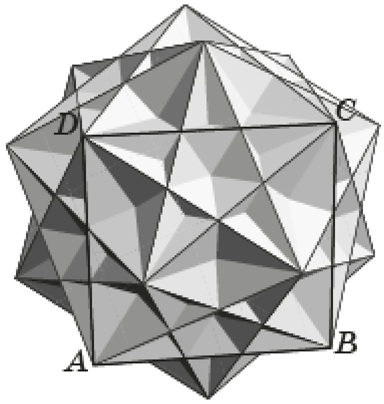

Рис. 25

Решение. У додекаэдра имеется 20 вершин, у куба – 8 вершин. В каждой вершине додекаэдра находятся вершины двух кубов. Следовательно, имеется пять кубов. У этих кубов имеется 30 граней.

Значит, у многогранника, являющегося общей частью этих кубов, также имеется 30 граней.

Рассмотрим грань одного из кубов, выделенную на рисунке 25.

Грани остальных кубов отсекают от неё прямоугольные треугольники (рис. 26). В результате от грани остаётся ромб $EFGH$. Если рёбра кубов равны 1, то диагонали этого ромба выражаются через золотое отношение, $EG = \varphi$, $FH = 1 - \varphi$.

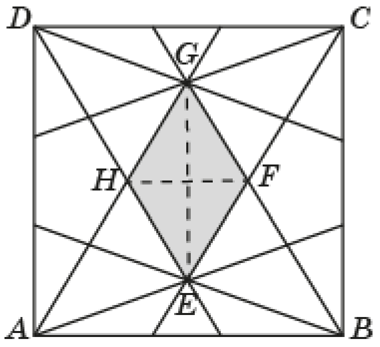

Рис. 26

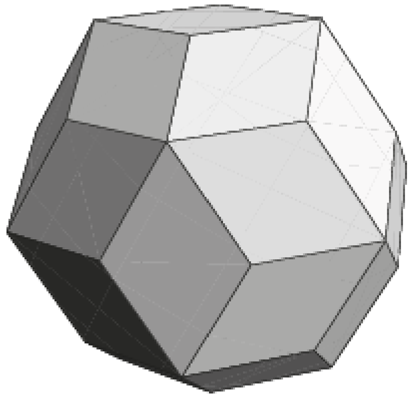

Рис. 27

Многогранник, полученный в результате всех отсечений, будет общей частью всех кубов. Он изображён на рисунке 27. Его гранями являются 30 ромбов.

Литература

1. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Визуализация задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми // Математика в школе. - 2019. - № 6. - С. 10-16.

2. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия. – М.: Прометей, 2018. – 206 с.

3. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. – М.: Прометей, 2018. – 172 с.