

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЕ

Известно, какую большую роль играет геометрия в науке и образовании. На протяжении всей истории человечества она служила источником развития не только математики, но и многих других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии.

Многие геометрические задачи способствовали появлению новых научных направлений. Наоборот, решение многих научных проблем получено с использованием геометрических методов. Например:

- задача об измерении длины отрезков привела к открытию Пифагором несоизмеримых отрезков и в дальнейшем к построению действительных чисел;

- задачи об измерении длины окружности, площади круга, объемов шара и пирамиды привели древнегреческих ученых к понятию предела и заложили основы интегрального исчисления;

- задачи нахождения уравнения касательной к кривой и вычисления площади криволинейной трапеции привели Г. Лейбница и И. Ньютона к созданию дифференциального и интегрального исчисления;

- геометрические методы изображения пространственных фигур стали фундаментом живописи, изобразительного искусства;

- задача о нахождении орбит космических тел оказалась связанной и была решена с помощью конических сечений;

- современные представления о Вселенной описываются на языке геометрии с помощью понятия многообразия.

- задача Эйлера о кенигсбергских мостах положила начало нового направления геометрии – теории графов;

- функциональный анализ, один из современных разделов математического анализа, опирается на понятие бесконечномерного линейного пространства, обобщающего понятие евклидова пространства;

- одно из основных понятий современной алгебры – понятие группы, возникло на основе геометрических понятий симметрии и движения. Группы симметрий играют важную роль не только в математике, но и в физике, химии, биологии, кристаллографии и других науках;

- в последние десятилетия активно развивается алгебраическая геометрия – раздел математики, изучающий алгебраические структуры геометрическими методами. В частности, решение проблемы Ферма было недавно получено с использованием глубоких геометрических методов;

- разработка методов решения задач оптимального управления стала возможной благодаря развитию геометрических методов, в том числе теории многогранников;

- в последние годы, в связи с развитием компьютерной техники, возникло и успешно развивается новое направление геометрии – компьютерная геометрия;

Вообще современная наука и ее приложения немислимы без геометрии и ее разделов, таких как топология, теория графов, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, компьютерная геометрия и др.

Отметим, что появление компьютеров не только не снижает, но и увеличивает роль геометрии, поскольку при этом существенно расширяются возможности графического представления материала.

Отечественной школой накоплен уникальный опыт преподавания геометрии. Учебник по геометрии А. П. Киселева под редакцией Н. А. Глаголева на протяжении десятилетий оставался образцом строгости, четкости и доступности изложения геометрии.

Конечно, этот и другие учебники геометрии прошлого века уже не отвечают современной структуре и дидактическим требованиям к обучению. Их содержание приходится на времена «до нашей эры».

Так, например, изучение геометрических фигур в планиметрии ограничивается треугольниками, четырехугольниками, правильными многоугольниками и окружностями. Полностью отсутствуют кривые, не рассматриваются (даже в ознакомительном порядке) современные направления развития геометрии и их приложения.

Все это существенно обедняет курс геометрии в школе, делает его неинтересным, не дает возможности сформировать у учащихся необходимые геометрические представления, сдерживает их интеллектуальное развитие.

Мы исходим из того, что геометрия – это элемент общей культуры человека, который вносит неопределимый вклад в развитие мышления, воображения, исследовательских способностей.

Об этом говорили и говорят многие видные ученые-математики. Например, Н. Ф. Четверухин подчеркивал важность развития пространственных представлений для всех учащихся вне зависимости от направления их дальнейшего образования и выбора будущей профессии. «Хорошее пространственное воображение нужно конструктору, создающему новые машины, геологу, разведывающему недра земли, архитектору, сооружающему здания современных городов, хирургу, производящему тончайшие операции среди кровеносных сосудов и нервных волокон, скульптору, художнику и т. д.». (Геометрические характеристики причины трудности узнавания фигур на чертеже //Математика в школе. – 1965. - № 4. – С.13).

А. Д. Александров, говоря о целях преподавания геометрии, указывает, что «особенность геометрии, выделяющая ее среди других

наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга». (О геометрии //Математика в школе. – 1980. - № 3. – С.56). В соответствии с этим в статье делается вывод о том, что преподавание геометрии в школе должно включать в себя три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление и применение к реальным вещам. Задача геометрии заключается в развитии у учащихся трех соответствующих качеств: логического мышления, пространственного воображения и практического понимания.

В. Г. Болтянский в статье «Математическая культура и эстетика» говорил о том, что природа геометрии предоставляет богатые возможности для воспитания у школьников эстетического чувства красоты в самом широком значении этого слова. Красота геометрии заключается в ее проявлениях в живой природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т.д., а также в смелых, оригинальных, нестандартных доказательствах, выводах и решениях.

Задача обновления школьного курса геометрии состоит в том, чтобы сделать курс геометрии современным, интересным, учитывающим склонности и способности каждого ученика, направленным на воспитание математической культуры, интеллектуальное развитие личности, формирование представлений учащихся о математике, ее месте и роли в современном мире.

Для этого в школьный курс геометрии необходимо включать вопросы философского и мировоззренческого характера, истории развития математики, знакомить учащихся с некоторыми современными направлениями ее развития и приложениями. При этом особое значение мы придаем формированию пространственных представлений учащихся, развитию их геометрической интуиции.

Считается, что элементы современной геометрии и приложения доступны учащимся, способным к математике, и могут быть рассмотрены только в специальных математических классах. На самом деле из того, что ученику трудно даются некоторые разделы основного курса геометрии не следует, что он не может и не должен знакомиться с элементами современной геометрии. Как правило, материал, относящийся к современным разделам геометрии, обладает большей наглядностью, имеет исторические и прикладные аспекты, вызывает повышенный интерес учащихся.

Рассмотрим некоторые темы, заслуживающие, на наш взгляд, изучения в школьном курсе геометрии.

1. Кривые.

Кривые с древних времен привлекали к себе внимание ученых и использовались ими для описания различных природных явлений от траектории брошенного камня до орбит космических тел.

В школьном курсе математики в качестве кривых рассматриваются в основном только графики функций. При этом основное внимание уделяется их аналитическим свойствам, возрастанию, убыванию и т. п. Геометрические же свойства остаются в стороне даже для таких известных кривых как парабола, эллипс, гипербола. Знакомство с кривыми, изучение их свойств позволит расширить геометрические представления, углубить знания, повысить интерес к геометрии, создаст содержательную основу для дальнейшего изучения математики, физики и др. наук.

В седьмом классе можно рассмотреть кривые как геометрические места точек. Среди таких кривых: парабола, эллипс, гипербола и др.

В восьмом классе кривые могут определяться как траектории движения точек. Среди таких кривых: циклоида – траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся по прямой; кардиоида – траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса; астроида – траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внутренней стороны другой окружности в четыре раза большего радиуса и др.

В девятом классе учащихся можно познакомить с аналитическими способами задания кривых: уравнением в полярных координатах (спираль Архимеда, логарифмическая (золотая) спираль, n -лепестковые розы и др.), параметрическими уравнениями (циклоида, кардиоида и др.).

2. Графы.

Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, электрические цепи и др. На языке графов описываются взаимосвязи и отношения между различными объектами. Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок более двухсот лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кенигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Л. Эйлера, и решение которой привело к созданию нового направления в математике. Учащихся можно познакомить с основными понятиями теории графов, решить ряд задач и в том числе: задачу Эйлера о кенигсбергских мостах, задачу о трех домиках и трех колодцах, задачу о раскрашивании карт и др.

3. Фракталы

Многие природные объекты и явления имеют не гладкий, а изломанный характер. Среди них листья деревьев, береговая линия, молния и др. Для описания этих объектов не подходят обычные дифференцируемые функции, с которыми имеет дело классический математический анализ. В последние десятилетия возникло и

развивается новое направление в математике – фрактальная геометрия. Слово "фрактал" ввел в 1975 г. Б. Мандельброт (от латинского слова "fractus" - изломанный, дробный).

Особенностью фракталов является не только их изломанность, но и самоподобность, означающая, что каждая часть фрактала подобна целому. Свойство самоподобности также отражает особенность природных объектов, когда отдельная клетка растения или животного несет в себе полную информацию обо всем организме.

Знакомство учащихся с фракталами позволит расширить и углубить геометрические представления учащихся, понять строение некоторых природных объектов.

4. Золотое сечение.

С давних времен люди занимались поисками гармонии и совершенства. Древние греки считали, что мир устроен по законам гармонии и задачей познания мира, таким образом, является поиск гармонии. Одним из вопросов, волновавших древних ученых, был вопрос о нахождении наилучшего соотношения неравных частей, составляющих вместе единое целое. Его решение связывают с именем Пифагора, который установил, что наиболее совершенным делением целого на две неравные части является такое, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому. В Древней Греции такое деление называлось гармоническим отношением. Интерес к нему необычайно возрос в эпоху Возрождения (XV – XVII вв.). В 1509 году итальянский математик, монах Лука Пачоли (1445 – ок. 1514), друг Леонардо да Винчи (1452 – 1519), написал целую книгу "О божественной пропорции". Леонардо выполнил иллюстрации к этой книге. В ней воздействие божественной пропорции на человека называлось "существенным, невыразимым, чудесным, неизъяснимым, неугасимым, возвышенным, превосходнейшим, непостижимым". Пачоли назвал гармоническое отношение божественной пропорцией ("Sectio Divina"). Термин золотое сечение ("Sectio aurea") появился в Германии в первой половине XIX века.

Учащихся можно познакомить с историей золотого сечения, проявлениями золотого сечения в живописи, скульптуре, архитектуре, решить ряд задач с использованием золотого сечения.

5. Паркет.

Паркет представляет собой такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

Паркетам посвящены некоторые картины голландского художника Мариуса Эшера (1898-1972).

Оказывается, что из любого треугольника и четырехугольника можно составить паркет, и существует 11 паркетов, состоящих из

правильных многоугольников. Изучение паркетов с учащимися можно провести в виде лабораторной работы, в результате которой каждый ученик может составить свой собственный паркет.

6. Равносоставленность и задачи на разрезание.

Понятие равносоставленности тесно связано с понятием площади. Опираясь на него, выводятся формулы площади параллелограмма, треугольника и т. д. С помощью равносоставленности легко доказываются и некоторые трудные теоремы, например теорема Пифагора. Задачи на равносоставленность и разрезание входят в различные олимпиады и конкурсы по математике. Эта тема, как и предыдущие, имеет и теоретическое содержание, и практические задачи, и приложения.

7. Многогранники.

Многогранники, с одной стороны, имеют тысячелетнюю историю. В то же время это современный раздел математики, глубокие результаты в которой получены отечественными математиками: Б. Н. Делоне, А. Д. Александровым, А. В. Погореловым. Теория многогранников тесно связана с другими современными разделами математики и ее приложениями. Формы многогранников находят широкое применение в архитектуре. В природе форму многогранников имеют кристаллы, свойства которых определяются их геометрическим строением.

Обычно в школьном курсе геометрии среди многогранников изучаются параллелепипед, призма и пирамида, правильные многогранники – тела Платона. Кроме этого, учащихся можно было бы познакомить с выпуклыми многогранниками и их свойствами; доказать теорему Эйлера о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника; рассмотреть полуправильные многогранники – тела Архимеда, звездчатые многогранники – тела Кеплера-Пуансо, кристаллы – природные многогранники. Модели многогранников, изготовленные самими учащимися, могут украсить кабинет математики.

8. Поверхности. Лист Мёбиуса.

Среди поверхностей, с которыми можно познакомить учащихся, отметим: поверхности вращения и в том числе тор и гиперболоид вращения; лист Мёбиуса, бутылка Клейна, как примеры неориентируемых поверхностей; поверхности, заданные аналитически.

9. Симметрия.

Понятие симметрии является одним из центральных в математике. С учащимися можно рассмотреть основные виды симметрий и их свойства, проявления симметрии в природе и архитектуре, постепенно подвести к важнейшему понятию математики – понятию группы.

10. Построение и изображение фигур.

В школьном курсе геометрии 7-9 классов обычно рассматривается способ построения фигур на плоскости с помощью циркуля и линейки. Показывается, как построить треугольник по его трем элементам, биссектрису угла, серединный перпендикуляр, прямую, параллельную данной и т. д. В старших классах с помощью циркуля и линейки строятся изображения пространственных фигур.

Использование циркуля и линейки для изображения пространственных фигур имеет свои недостатки:

1. Оно занимает много времени даже для изображения простых пространственных фигур, не говоря уже о сложных.

2. Использование циркуля и линейки является скорее теоретическим методом, свидетельствующим о возможности построения фигуры, чем практическим. На практике неизбежные погрешности могут приводить к неправильным изображениям. Например, такие погрешности возникают при построении прямой параллельной данной и т. п.

3. Для изображения круглых тел (цилиндр, конус, сфера) требуется построить изображение окружности, являющееся эллипсом. Однако циркулем и линейкой можно построить отдельные точки эллипса, но не весь эллипс. Соединяя же отдельные построенные точки эллипса плавной кривой, мы получим только приближенное изображение эллипса, не всегда хорошего качества.

Строить изображения пространственных фигур можно не только с помощью циркуля и линейки, но и используя компьютерные графические редакторы. Такой способ изображения пространственных фигур имеет ряд преимуществ по сравнению с использованием циркуля и линейки:

1. Наличие в стандартных фигурах графических редакторов правильных многоугольников и эллипса, легкость построения параллельных прямых, параллелограммов и др. существенно ускоряет процесс построения, дает возможность изображать многогранники и круглые тела.

2. Использование графических редакторов позволяет получать изображения гораздо более сложных пространственных фигур, в том числе на комбинации многогранников и тел вращения.

3. Построенные учениками изображения могут составить компьютерную коллекцию изображений пространственных фигур, ежегодно пополняемую самими учениками.

11. Комбинаторные задачи

В последнее время интерес к комбинаторике в школьном курсе математики заметно возрос. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в новые стандарты по математике для основной и профильной школ. Формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления школьников входит в число основных целей обучения математике. Однако обычно,

когда говорят об элементах комбинаторики, имеют в виду задачи алгебраического содержания.

Приведем примеры комбинаторных задач, которые можно решать с самого начала изучения геометрии:

1. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

2. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

3. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

4. Сколько диагоналей имеет n -угольник?

5. Может ли прямая пересекать все стороны многоугольника?

6. В пространстве даны n точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из этих точек?

7. Может ли многогранник иметь 21 плоский угол?

8. Докажите, что у любого многогранника число граней с нечетным числом ребер четно.

12. Экстремальные задачи

Обычно экстремальные задачи, или задачи на нахождение наибольших и наименьших значений, решаются в курсе алгебры и начал анализа старших классов с помощью производной.

Вместе с тем имеется важный класс геометрических экстремальных задач, которые решаются своими методами без помощи производной.

Эти задачи, с одной стороны, имеют большое значение, как для математики, так и для ее приложений, а с другой стороны, могут служить пропедевтикой изучения соответствующих разделов курса алгебры и начал анализа.

Знакомство учащихся с экстремальными задачами и методами их решения чрезвычайно важно для математического образования школьников, развития их мышления и формирования соответствующих геометрических представлений.

Среди таких задач: задача Герона об отражении света; задача Штейнера; изопериметрическая задача; задачи оптимального управления и др.

13. Приложения геометрии.

Приложения геометрии не исчерпываются решением задач с практическим содержанием на измерение геометрических величин. Как уже отмечалось выше, геометрия имеет приложения в физике, химии, биологии, кристаллографии, живописи, скульптуре, архитектуре и др. Показ настоящих приложений геометрии позволит выработать у учащихся правильные представления о месте и роли

геометрии в современной жизни, повысит интерес учащихся к обучению.

14. Лабораторные работы по геометрии.

Лабораторные работы являются очень важной формой работы с учащимися. Они могут быть посвящены изготовлению моделей многогранников из разверток и геометрического конструктора, изображению пространственных фигур на плоскости, проведению опытов с листом Мёбиуса и другими поверхностями, моделированию плоских и пространственных фигур на компьютере.

15. Исследовательская работа с учащимися.

Указанный выше материал может быть использован для проведения исследовательской работы с учащимися по математике, написания рефератов и проектов, подготовки докладов для конференций, участия в различных конкурсах и олимпиадах по математике.

Литература

1. И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2001 г., Мнемозина, 2005 г.

2. И. М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2003 г.

3. И. М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия. Учебник для 10-11 классов естественно-научного профиля обучения. – М.: Просвещение, 2001 г.

4. И. М. Смирнова. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений гуманитарного профиля. – М.: Просвещение, 1997, Мнемозина, 2003 г.

5. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Компьютер помогает геометрии. – М.: Дрофа, 2003.