ЭЛЛИПС КАК АНАЛОГ ОКРУЖНОСТИ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация: в работе рассматриваются эллипс и его свойства, аналогичные окружности. Для иллюстрации полученных свойств используется компьютерная программа GeoGebra.

Ключевые слова: окружность, эллипс, аналогия.

AN ELLIPSE AS AN ANALOGUE OF A CIRCLE

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Astract: the work discusses the ellipse and its properties similar to the circle. To illustrate the obtained properties, the GeoGebra computer program is used.

Keywords: circle, ellipse, analogy.

Кривые, среди которых парабола, эллипс, гипербола, с древних времён привлекали к себе внимание учёных и использовались ими для описания различных природных явлений от траектории брошенного камня до орбит космических тел.

В школьном курсе геометрии в качестве кривой рассматривается только окружность, что, конечно, недостаточно для формирования представлений учащихся о кривых. Учебный материал о параболе, эллипсе и гиперболе имеется в учебнике [1].

Здесь мы рассмотрим эллипс как аналог окружности. Предложим задания для учащихся на установление свойств эллипса, аналогичных свойствам окружности. Для иллюстрации этих свойств будем использовать компьютерную программу GeoGebra [2].

Знакомство учащихся с эллипсом, использование компьютерных программ для моделирования эллипса и установление его свойств, используя аналогию с соответствующими свойствами окружности, позволит расширить геометрические представления учащихся, углубить их знания и повысить интерес к геометрии.

Рассмотрим две точки F_1, F_2 плоскости и число c, большее расстояния между этими точками. Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, равная c, называется эллипсом. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса (рис. 1).

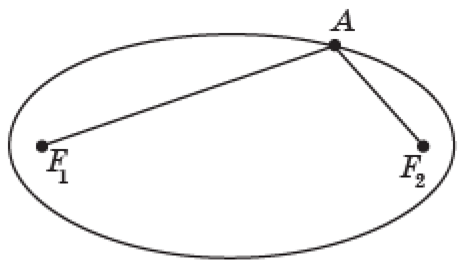

Рис. 1

Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 выполняется равенство

$$AF_1 + AF_2 = c.$$

Заметим, что при совпадении точек F_1, F_2 эллипс превращается в окружность радиусом $R = \frac{c}{2}$.

Так же, как и окружность, эллипс разбивает плоскость на две области – внутреннюю и внешнюю. Для точек A' внутренней области выполняется неравенство

$$A'F_1 + A'F_2 < c,$$

Для точек A'' внешней области выполняется неравенство

$$A''F_1 + A''F_2 > c.$$

Слово "фокус" в переводе с латинского языка означает "очаг", "огонь". Именно это свойство эллипса послужило основанием для названия точек F_1, F_2 фокусами.

Ещё И. Кеплер обнаружил, что планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причём, Солнце находится в фокусах этих эллипсов. Точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу, называется перигелий, а наиболее удалённая - афелий. Однако из-за того, что орбита Земли представляет собой очень мало сжатый эллипс, похожий на окружность, такое приближение и удаление от Солнца незначительно сказывается на температуре. Гораздо большее значение для температуры на поверхности Земли имеет угол падения солнечных лучей. Например, когда Земля бывает в перигелии, в нашем полушарии зима, а когда в афелии - в нашем полушарии лето. Луна, искусственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Для того чтобы изобразить эллипс, можно воспользоваться карандашом, ниткой и кнопками. Отметим на листе бумаги две точки – фокусы. Положим лист бумаги на дощечку. Прикрепим кнопками концы нити к фокусам. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги. Будем перемещать карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге эллипс (рис. 2).

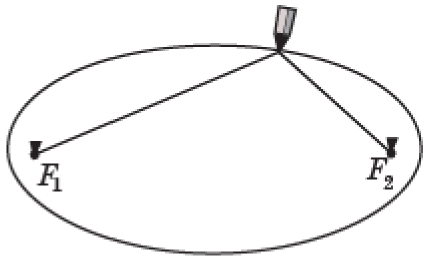

Рис. 2

Эллипс можно получить в свободно распространяемой компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно выбрать инструмент «Эллипс», а затем отметить две точки (фокусы эллипса) и точку (точку на эллипсе) (рис. 3).

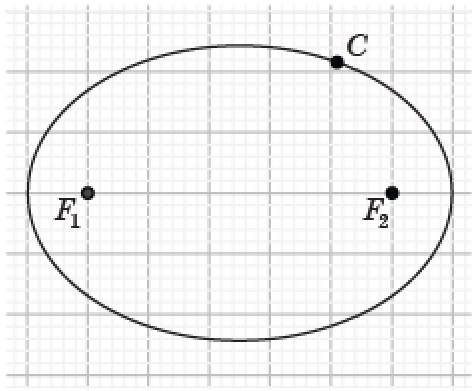

Рис. 3

Задание 1. По аналогии с определением касательной к окружности определите касательную к эллипсу.

Ответ. Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку. Общая точка называется точкой касания.

В школьном курсе геометрии доказывается, что касательной к окружности, проходящей через её точку A, является прямая, перпендикулярная радиусу, проведённому в эту точку.

Задание 2. В программе GeoGebra проведите касательную к эллипсу. Установите, какая прямая является касательной.

Ответ. Касательную к эллипсу можно получить, используя инструмент «Касательная». Используя инструмент «Угол», можно предположить, что касательной к эллипсу, проходящей через его точку A, является прямая a, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2 (рис. 4).

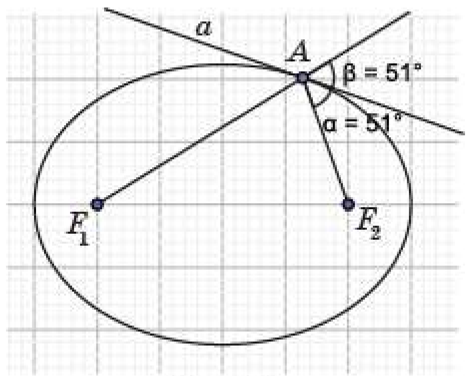

Рис. 4

Задание 3*. Докажите, что прямая a, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2, является касательной к эллипсу.

Ответ. Докажем, что никакая точка A' прямой a, отличная от точки A, не принадлежит эллипсу. Обозначим F'_2 точку, симметричную точке F_2 относительно прямой a. Проведём отрезки $A'F_1$, $A'F_2$ и $F_2F'_2$ (рис. 5).

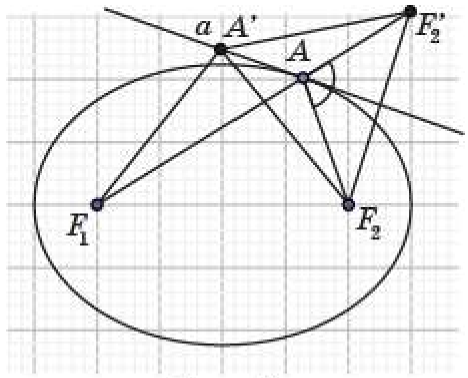

Рис. 5

Прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку $F_2F'_2$. Следовательно, $A'F_1 + A'F_2 > F_1F'_2 = AF_1 + AF_2 = c$. Таким образом, сумма расстояний от точки A' до фокусов больше c. Значит, точка A' не принадлежит эллипсу.

Задание 4 (Оптическое свойство эллипса). Докажите, что если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом его фокусе. Воспользуйтесь тем, что угол падения света равен углу отражения и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведённой в точку падения.

Ответ. Пусть луч света исходит из фокуса F_1 и отражается от эллипса в точке A (рис. 6). Тогда углы 1 и 2 равны, как вертикальные, а углы 2 и 3 равны, так как касательная a является биссектрисой угла $F_2AF'_2$. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Значит, луч света, после отражения в точке A, пройдёт через фокус F_2.

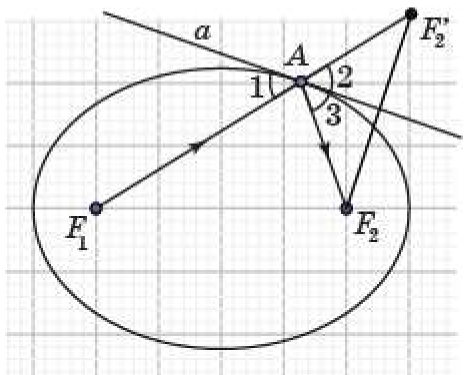

Рис. 6

Задание 5. В программе GeoGebra, проведите касательные к эллипсу, проходящие через точку A, расположенную во внешней области. Отметьте точки касания. Укажите способ построения касательной циркулем и линейкой.

Ответ. Для получения касательных к эллипсу нужно выбрать инструмент «Касательная», а затем указать точку A и эллипс. Для получения точек касания нужно выбрать инструмент «Пересечение», а затем указать касательную и эллипс (рис. 7).

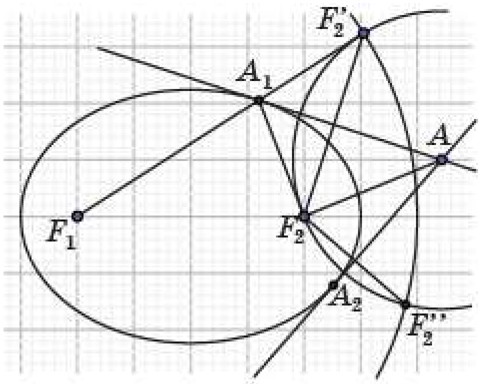

Рис. 7

Для построения касательных циркулем и линейкой нужно провести окружность с центром F_1 и радиусом c (константа эллипса) и провести окружность с центром A и радиусом AF_2. Затем найти точки F'_2, F''_2 пересечения этих окружностей, и провести серединные перпендикулярны к отрезкам $F_2F'_2$, $F_2F''_2$. Они и будут искомыми касательными.

Рассмотрим некоторые свойства окружности и аналогичные им свойства эллипса.

Свойство 1. Отрезки AA_1, AA_2 касательных, проведённых к окружности с центром O из точки A, равны (рис. 8).

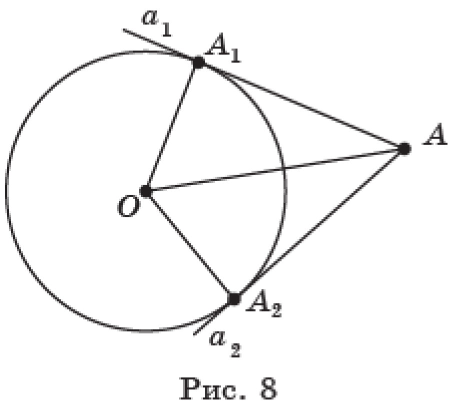

Рис. 8

Доказательство следует из равенства треугольников AOA_1 и AOA_2.

Задание 6. Используя программу GeoGebra, выясните, выполняется ли аналогичное свойство для эллипса.

Ответ. Используя инструмент «Расстояние или длина», можно убедиться, что отрезки касательных, проведённых к эллипсу из одной точки, могут быть не равны (рис. 9).

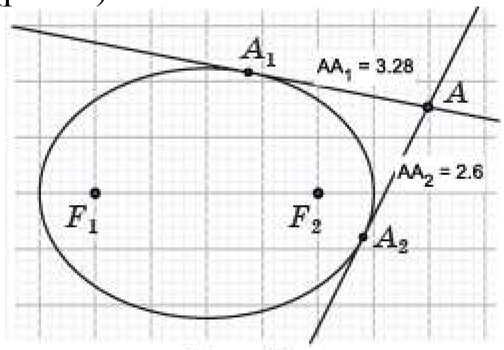

Рис. 9

Свойство 2. Для касательных AA_1, AA_2, проведённых к окружности с центром O из точки A, углы OAA_1 и OAA_2 равны (рис. 8).

Задание 7. Используя программу GeoGebra, установите, аналогичное свойство для эллипса.

Ответ. Используя инструмент «Угол», можно предположить, что для эллипса имеет место следующее свойство.

Свойство 2'. Для касательных AA_1, AA_2, проведённых к эллипсу с фокусами F_1, F_2 из точки A, равны углы F_1AA_1 и F_2AA_2 (рис. 10).

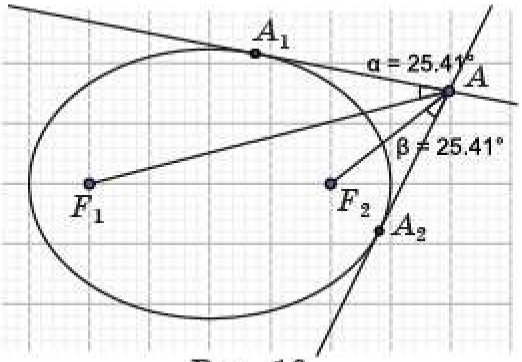

Рис. 10

Задание 8*. Докажите выполнимость этого свойства.

Ответ. Обозначим F'_1, F'_2 точки, симметричные фокусам соответственно F_1, F_2 относительно касательных AA_1, AA_2 (рис. 11).

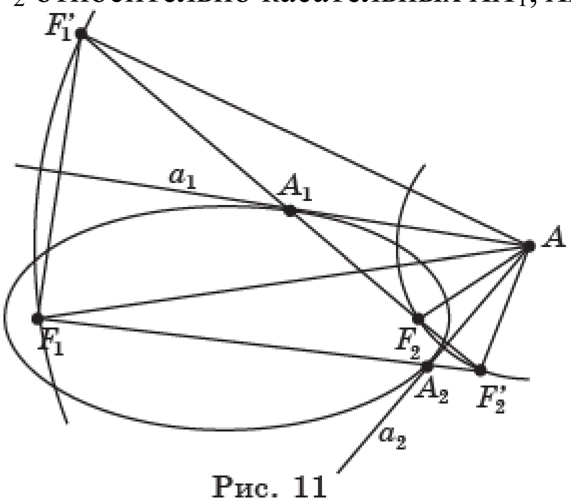

Рис. 11

Треугольники F'_1AF_2 и $F_1AF'_2$ равны по трём сторонам ($F'_1A = F_1A$, $AF_2 = AF'_2$, $F'_1F_2 = F_1F'_2 = c$). Следовательно, $\angle F'_1AF_2 = \angle F_1AF'_2$. Значит, равны углы F'_1AF_1 и F'_1AF_1 . Углы F_1AA_1, F_1AA_2 равны половинам этих углов. Следовательно, они также равны.

Свойство 3. Для касательных AA_1, AA_2, проведённых к окружности с центром O из точки A, углы AOA_1 и AOA_2 равны (рис. 8).

Задание 9. Используя программу GeoGebra, установите аналогичное свойство для эллипса.

Ответ. Используя инструмент «Угол», можно предположить, что для эллипса имеет место следующее свойство.

Свойство 3'. Для касательных AA_1, AA_2, проведённых к эллипсу с фокусами F_1, F_2 из точки A, равны углы AF_1A_1, AF_1A_2 и углы AF_2A_1, AF_2A_2 (рис. 12).

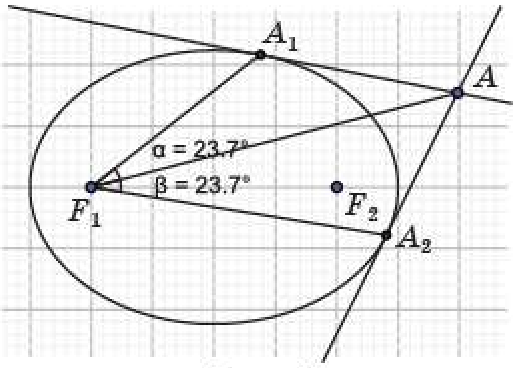

Рис. 12

Задание 10*. Докажите выполнимость этого свойства.

Ответ. Докажем, например, равенство углов AF_1A_1 и AF_1A_2 (рис. 13).

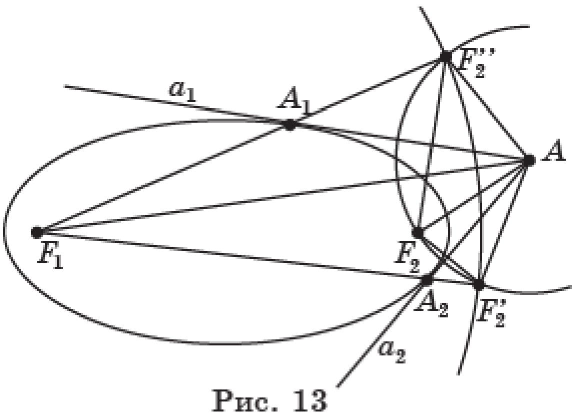

Рис. 13

Из построения касательных следует равенство треугольников $AF_1F'_2$ и $AF_1F''_2$. Значит, равны углы AF_1A_1 и AF_1A_2.

Свойство 4. Пусть AA_1, AA_2 – отрезки касательных к окружности, проведённые из точки A. Через точку B_0 меньшей дуги окружности, расположенной внутри угла A_1AA_2 проведём касательную. Обозначим B_1, B_2

её точки пересечения с касательными соответственно AA_1, AA_2 (рис. 14). Периметр треугольника AB_1B_2 не зависит от положения точки B_0.

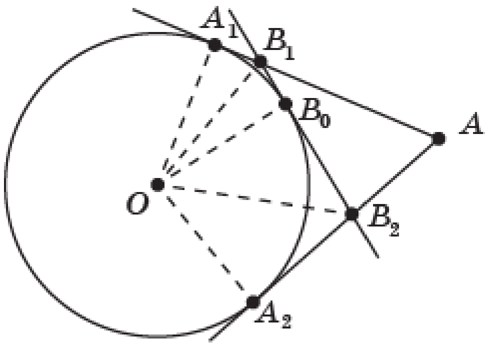

Рис. 14

Доказательство. В силу свойства 1, имеют место равенства отрезков A_1B_1 и B_0B_1, A_2B_2 и B_0B_2. Следовательно, периметр треугольника AB_1B_2 равен сумме отрезков AA_1 и AA_2, которые не зависят от положения точки B_0.

Задание 11. Используя программу GeoGebra, выясните, выполняется ли аналогичное свойство для эллипса.

Ответ. Используя инструмент «Расстояние или длина», можно убедиться, что для эллипса периметр треугольника AB_1B_2 зависит от положения точки B_0.

Свойство 5. В условиях свойства 4 (рис. 14) величина угла $B_1O\,B_2$ не зависит от положения точки B_0.

Задание 12. Используя программу GeoGebra, установите аналогичное свойство для эллипса.

Ответ. Используя инструмент «Угол», можно предположить, что для эллипса имеет место следующее свойство.

Свойство 5'. Пусть AA_1, AA_2 – отрезки касательных к эллипсу, проведённые из точки A. Через точку B_0 меньшей дуги эллипса, расположенной внутри угла A_1AA_2 проведём касательную. Обозначим B_1, B_2 её точки пересечения с касательными соответственно AA_1, AA_2. Величины углов $B_1F_1B_2$ и $B_1F_2B_2$ не зависят от положения точки B_0 (рис. 15).

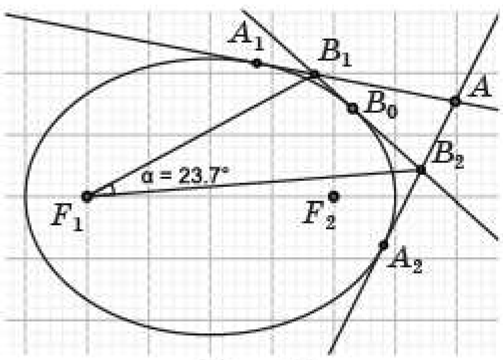

Рис. 15

Задание 13. Докажите выполнимость этого свойства.

Ответ. Докажем, например, что величина угла $B_1F_1B_2$ не зависит от положения точки B_0 (рис. 16).

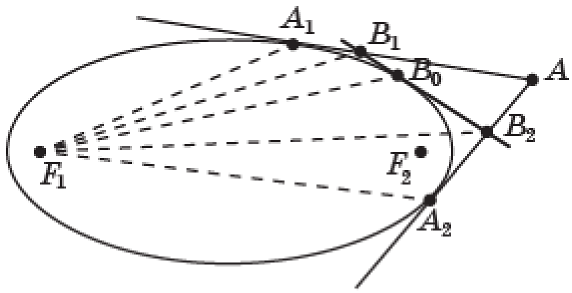

Рис. 16

Как было установлено в свойстве 3’, имеют место равенства углов $\angle B_1F_1A_1 = \angle B_1F_1B_0, \angle B_2F_1A_2 = \angle B_2F_1B_0$. Угол $B_1F_1B_2$ равен половине угла $A_1F_1A_2$, величина которого не зависит от положения точки B_0. Следовательно, величина угла $B_1F_1B_2$ не зависит от положения точки B_0.

Свойство 6. Суммы противолежащих сторон четырёхугольника $ABCD$, описанного около окружности равны, т. е. $AB + CD = AD + BC$ (рис. 17).

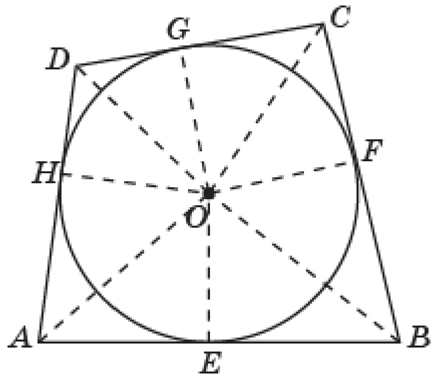

Рис. 17

Доказательство. В силу свойства 1, имеют место равенства отрезков AE и AH, BE и BF, CF и CG, DG и DH. Из этих равенств следует искомое равенство $AB + CD = AD + BC$.

Задание 14. Используя программу GeoGebra, выясните, выполняется ли аналогичное свойство для эллипса.

Ответ. Используя инструмент «Расстояние или длина», можно убедиться, что суммы противолежащих сторон четырёхугольника $ABCD$, описанного около эллипса, могут быть не равны.

Свойство 7. Для четырёхугольника $ABCD$, описанного около окружности с центром O, суммы углов, под которыми из центра O видны противолежащие стороны данного четырёхугольника, равны, т. е. имеют место равенства $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle AOD = 180°$ (рис. 17).

Задание 15. Используя программу GeoGebra, установите аналогичное свойство для эллипса.

Ответ. Используя инструмент «Угол», можно предположить, что для эллипса имеет место следующее свойство.

Свойство 7'. Для четырёхугольника $ABCD$, описанного около эллипса, суммы углов, под которыми из фокуса эллипса видны противолежащие стороны описанного четырёхугольника $ABCD$, равны, т. е. имеют место равенства $\angle AF_1B + \angle CF_1D = \angle BF_1C + \angle AF_1D = 180°$ (рис. 18).

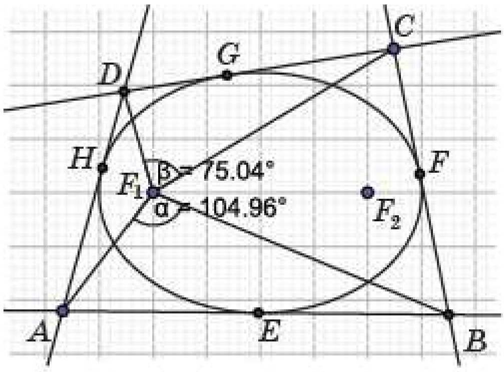

Рис. 18

Задание 16. Докажите, что суммы углов, под которыми из фокуса эллипса видны противолежащие стороны описанного четырёхугольника, равны.

Ответ. Как было установлено в Свойстве 3', для четырёхугольника $ABCD$, описанного около эллипса, имеют место равенства углов $\angle AF_1E = \angle AF_1H$, $\angle BF_1E = \angle BF_1F$, $\angle CF_1F = \angle CF_1G$, $\angle DF_1G = \angle DF_1H$ (рис. 19).

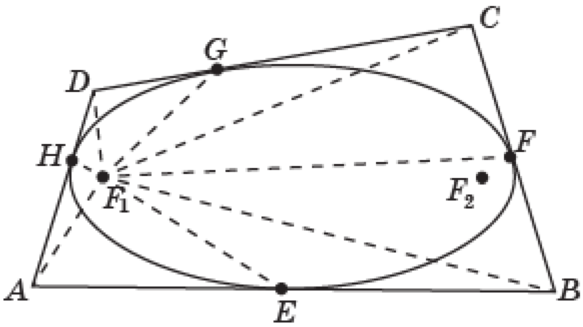

Рис. 19

Из этих равенств следует искомые равенства $\angle AF_1B + \angle CF_1D = \angle BF_1C + \angle AF_1D = 180°$.

Литература

1. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2019.
2. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия. – М.: Прометей, 2018.