И.М.Смирнова, В.А.Смирнов

КРИВЫЕ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Математика в школе 2000 № 4

Обычно кривые рассматриваются как графики функций в курсе алгебры и начал анализа 10-11 классов. Конечно, это уже довольно поздно. Кроме того, при их изучении преобладает алгебраический аспект, связанный с выбранной системой координат. Геометрические же свойства остаются в стороне даже для таких известных кривых как парабола, эллипс, гипербола. Вместе с тем, определения этих и других кривых могут быть даны как геометрических мест точек без использования системы координат. Такой подход предоставляет широкие возможности для обобщающего повторения по теме «Геометрические места точек» в курсе геометрии 7 го класса и в том числе для повторения свойств биссектрисы, серединного перпендикуляра, касательной к окружности и т. д.

Другим способом является определение кривой как траектории движения точки. К числу таких кривых относятся циклоидальные кривые, которые являются траекториями движения точки, закрепленной на окружности, катящейся по прямой или другой окружности. Эти кривые обладают целым рядом замечательных свойств и их изучением занимались многие великие математики. Знакомство учащихся с циклоидальными кривыми можно провести в 8-ом классе после изучения темы «Длина окружности».

Здесь мы рассмотрим несколько кривых, предлагаемых для изучения в учебнике И.М.Смирновой, В.А.Смирнова, Геометрия 7-9, который будет издан в издательстве «Просвещение» в 2001 г.

Парабола

Пусть на плоскости задана прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой d и точки F, называется ***параболой***. Прямая d называется ***директрисой***, а точка F - ***фокусом*** параболы (рис. 1).

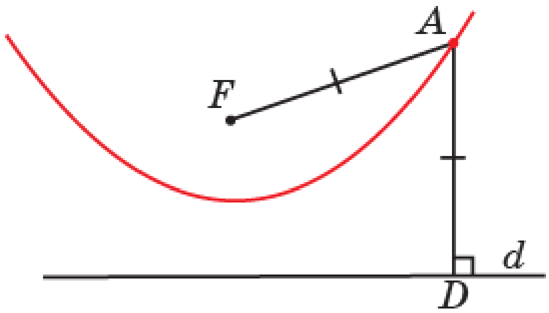

Рис. 1

Для того, чтобы нарисовать параболу, потребуются линейка, угольник, нить, длиной, равной большему катету угольника, и кнопки. Прикрепим один конец нити к фокусу, а другой - к вершине меньшего угла угольника. Приложим линейку к директрисе и поставим на нее угольник меньшим катетом. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги и прижималось к большему катету. Будем перемещать угольник и прижимать к его катету карандаш так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге параболу (рис. 2).

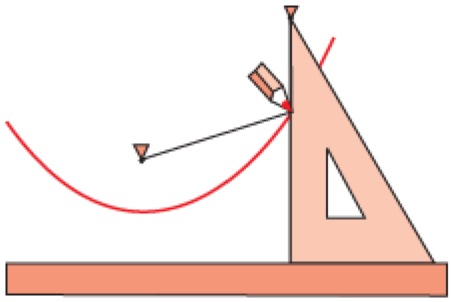

Рис. 2

Осью параболы называется прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Точка пересечения параболы с ее осью называется ***вершиной*** параболы.

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная ее директрисе, называется ***касательной*** к параболе.

Теорема. Пусть A – точка на параболе с фокусом F и директрисой d, AD – перпендикуляр, опущенный на директрису (рис. 3). Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A, будет биссектриса угла FAD.

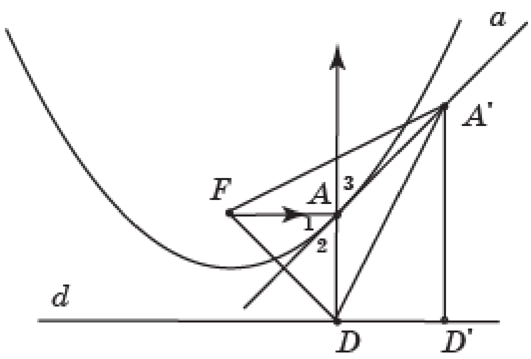

Рис. 3

Доказательство. Докажем, что биссектриса a угла FAD (рис. 3). будет касательной к параболе. Действительно, треугольник FAD равнобедренный. Следовательно, прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку FD. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, опустим перпендикуляр $A'D'$ на прямую d. Тогда

$$A'F = A'D > A'D'.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит параболе и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с параболой, т.е. является касательной.

Фокальное свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения и тем, что от кривой свет отражается также как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F параболы, a – касательная, AD – прямая, перпендикулярная директрисе (рис. 3). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла FAD. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 1, то угол отражения будет равен углу 3, т.е. направление отраженного луча будет перпендикулярно директрисе.

Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т.д.

Построение касательной к параболе. Пусть парабола задана фокусом F и директрисой d. Используя циркуль и линейку, построим касательную к параболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF проведем окружность и найдем ее точки пересечения с директрисой d. Если расстояние от точки C до фокуса больше, чем расстояние до директрисы, то таких точек две (рис. 4).

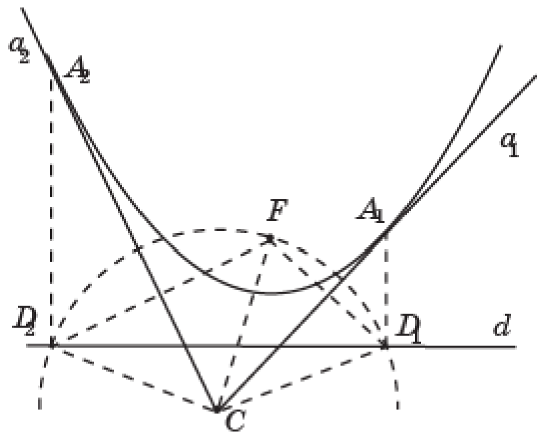

Рис. 4

Обозначим их D_1 и D_2. Проведем биссектрисы a_1 и a_2 углов FCD_1 и FCD_2 соответственно. Они являются серединными перпендикулярами к отрезкам FD_1 и FD_2 и, значит, будут искомыми касательными к параболе. Для построения точек касания через точки D_1 и D_2 проведем прямые, перпендикулярные директрисе и найдем их точки пересечения A_1 и A_2 с прямыми a_1 и a_2. Они и будут искомыми точками касания.

Может случиться, что расстояние от точки C до фокуса равно расстоянию до директрисы. В этом случае точка C будет лежать на параболе, окружность с центром в точке C и радиусом CF будет касаться директрисы в некоторой точке D и, следовательно, через точку C будет проходить одна касательная – биссектриса угла FCD.

В случае, если расстояние от точки C до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, то точек пересечения окружности с директрисой нет и, следовательно, нет касательных к параболе, проходящих через эту точку.

Лабораторная работа. Укажем способ получения параболы из листа бумаги. Возьмем лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большой стороны точку F. Сложим лист так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой на D большой стороне, и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 5).

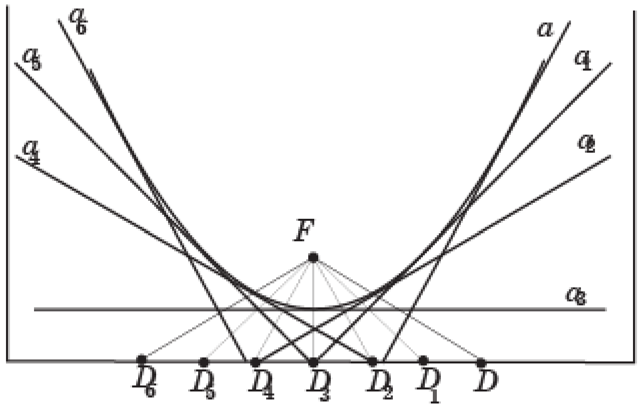

Рис. 5

Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FD и, следовательно, касательной к параболе. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку F с другой точкой большой стороны. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к параболе. Участок внутри этих сгибов будет иметь форму параболы.

Упражнения

1. Изготовьте прибор для построения параболы. Для заданных фокуса и директрисы постройте соответствующую им параболу.

2. Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек на параболе до директрисы? Укажите соответствующую точку на параболе.

3. Для точки F, не лежащей на прямой d, найдите геометрическое место точек, расстояния от которых до точки F: а) меньше расстояния до прямой d; б) больше расстояния до прямой d.

4. Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?

5. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, проходящую через данную точку: а) на параболе; б) вне параболы.

6. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, перпендикулярную оси параболы.

7. Докажите, что две касательные к параболе, проведенные из точки, принадлежащей директрисе, перпендикулярны.

8. Найдите геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.

9. Для заданных фокуса и директрисы параболы, с помощью циркуля и линейки постройте несколько точек параболы.

10. Даны фокус параболы и две касательные. Постройте директрису этой параболы.

11. Даны фокус, касательная и на ней точка касания. Постройте директрису параболы.

12. Даны директриса параболы и две касательные. Постройте фокус параболы.

13. Даны директриса, касательная и на ней точка касания. Постройте фокус.

14. Даны две пересекающиеся прямые. Нарисуйте какую-нибудь параболу, касающуюся этих прямых. Сколько таких парабол? Какие точки плоскости могут быть фокусами таких парабол?

15. Дана парабола. Укажите способ нахождения ее фокуса и директрисы.

16. Возьмем лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большой стороны точку S. Сложим лист так, чтобы точка S совместилась с какой-нибудь точкой на большой стороне. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку S с другой точкой большой стороны. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Участок внутри этих сгибов будет иметь форму параболы. Докажите, что линии сгибов являются касательными к параболе.

Эллипс

Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется ***эллипсом***. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** эллипса.

Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 сумма $AF_1 + AF_2$ постоянна и равна накоторому отрезку c (рис. 6).

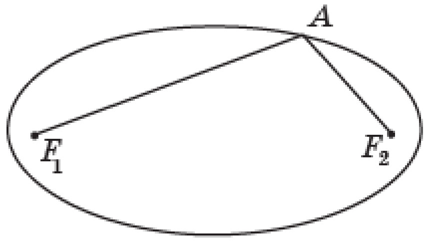

Рис. 6

Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть больше отрезка F_1F_2.

Слово "фокус" в переводе с латинского означает "очаг", "огонь", и именно это свойство эллипса послужило основанием для названия точек F_1, F_2 фокусами.

Еще И.Кеплер обнаружил, что планеты солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причем Солнце находится в фокусах этих эллипсов. Точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу, называется перигелий, а наиболее удаленная - афелий. Однако, из-за того, что орбита Земли представляет собой очень мало сжатый эллипс, похожий на окружность, такое приближение и удаление от Солнца незначительно сказывается на температуре. Гораздо большее значение для температуры на поверхности Земли имеет угол падения солнечных лучей. Так, например, Земля бывает в перигелии, когда в нашем полушарии зима, а в афелии - когда в нашем полушарии лето. Луна, исскуственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Для того, чтобы нарисовать эллипс потребуется нить и кнопки. Прикрепим концы нити к фокусам. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги. Будем перемещать карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге эллипс (рис. 7).

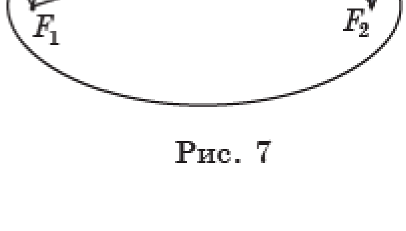

Рис. 7

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку.

Теорема. Пусть A - произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A является биссектриса угла смежного с углом F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что биссектриса a угла смежного с углом F_1AF_2 будет касательной к эллипсу (рис. 8).

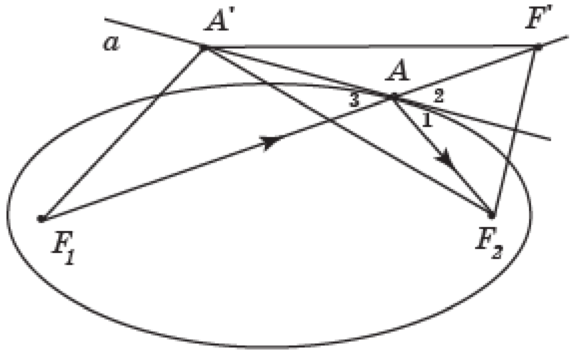

Рис. 8

Обозначим $AF_1 + AF_2 = c$. Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = c.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т.е. является касательной.

Фокальное свойство. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберуться в другом его фокусе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения и тем, что от кривой свет отражается также как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a – касательная (рис. 8). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_1AF'. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т.е. луч света, после отражения в точке A, пойдет в направлении AF_2.

Построение касательной к эллипсу. Пусть эллипс задан своими фокусами и константой c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к эллипсу, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 9).

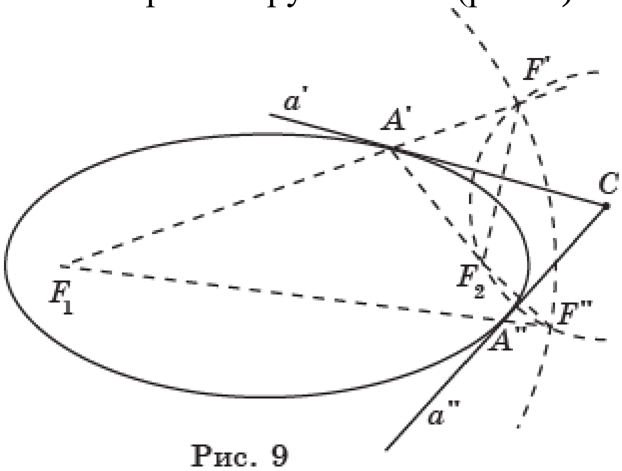

Рис. 9

Таких точек может быть две F', F'', одна или ни одной в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы a', a'' углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Они являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'CF_2$, $F''CF_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'' соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

Лабораторная работа. Укажем способ получения эллипса из листа бумаги. Вырежем из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставим точку F. Сложим круг так, чтобы чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности круга, и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 10).

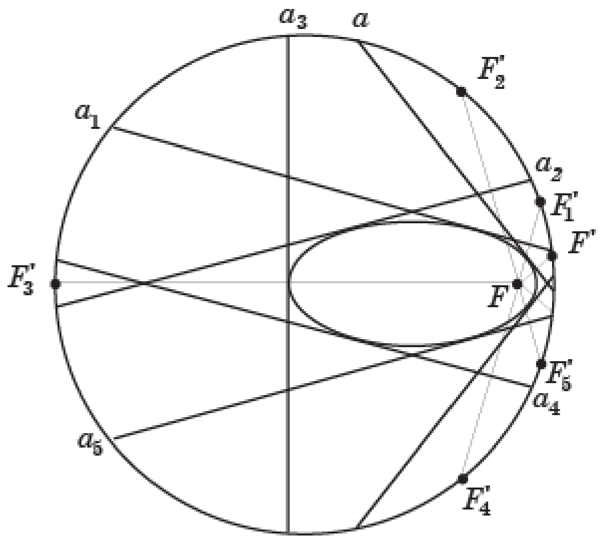

Рис. 10

Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку *FF'* и, следовательно, касательной к эллипсу. Разогнем круг и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности круга. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к эллипсу. Участок круга внутри этих сгибов будет иметь форму эллипса.

Для другого способа получения эллипса потребуется сковорода и картонный круг диаметром, вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положив круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс.

Упражнения

1. Нарисуйте эллипс с заданными фокусами F_1, F_2. Сколько таких эллипсов?

2. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и суммой радиусов.

3. Даны фокусы эллипса и сумма расстояний до них. С помощью циркуля постройте несколько точек этого эллипса.

4. Что будет происходить с эллипсом, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

5. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c постройте точки на эллипсе, равноудаленные от фокусов. Сколько таких точек?

6. Найдите геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

7. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c.

8. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AD = BC$ и $AB = CD$ (рис. 11), сторона AD закреплена, а остальные подвижны. Найдите геометрическое место точек пересечения сторон AB и CD.

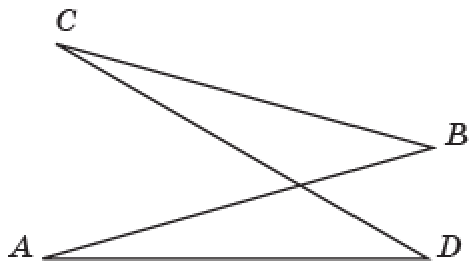

Рис. 11

9. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательные перпендикулярные прямой F_1F_2.

10. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательную, проходящую через заданную точку: а) на эллипсе; б) вне эллипса.

11. Даны фокусы F_1, F_2 эллипса и сумма расстояний до них с. Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом с серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к эллипсу. Найдите точку касания.

12. Даны два фокуса и касательная к эллипсу. Постройте постоянную c и нарисуйте эллипс.

13. Даны две касательные, фокус и постоянная c. Постройте второй фокус эллипса.

14. Дан эллипс. Укажите способ нахождения его фокусов.

15. Вырежьте из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставьте точку. Сложите круг так, чтобы чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой окружности круга, и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогните круг и снова согните его, совместив точку с другой точкой окружности круга. Сделайте так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Участок круга внутри этих сгибов будет иметь форму эллипса. Покажите, что линии сгибов являются касательными к эллипсу.

16. Возьмем сковородку и картонный круг диаметром, вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положим круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс. Докажите.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** гиперболы (рис. 12).

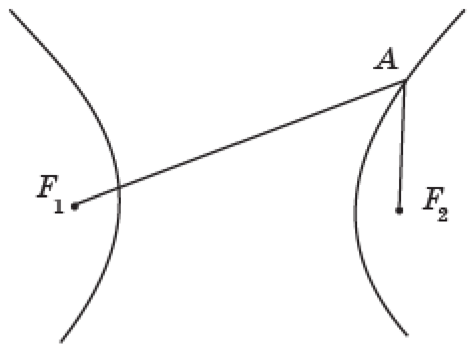

Рис. 12

Таким образом, для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется одно из равенств: AF_1 - AF_2 = c, AF_2 – AF_1 = c где c - некоторый фиксированный отрезок.

Гипербола состоит из двух ветвей, для точек которых выполняется соответственно первое или второе равенство.

Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть меньше отрезка F_1F_2.

Для того, чтобы нарисовать гиперболу потребуется линейка, нить, длина которой меньше длины линейки, а разность длин линейки и нити была бы меньше, чем расстояние между фокусами. Прикрепим один конец нити к концу линейки, а второй конец к фокусу. Второй конец линейки совместим со вторым фокусом. Натянем нить, прижав ее к линейке острием карандаша (рис. 13).

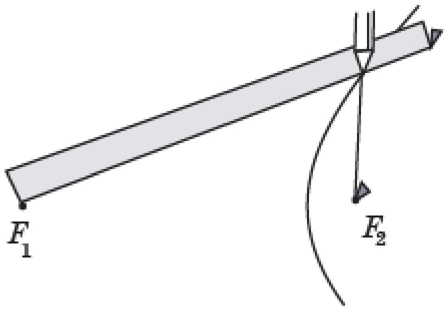

Рис. 13

Если поворачивать линейку вокруг фокуса, прижимая к ней карандаш и оставляя нить натянутой, то карандаш будет описывать гиперболу.

Рассмотрим ветвь гиперболы, точки которой удовлетворяют равенству AF_1 - AF_2 = c. Она разбивает плоскость на две области – внешнюю, для точек A' которой выполняется неравенство $A'F_1 – A'F_2 < c$ и внутреннюю, для точек A'' которой выполняется неравенство $A'F_1 – A'F_2 > c$.

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат во внешней области, т.е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 – A'F_2 < c$, называется ***касательной*** к гиперболе. Точка A называется ***точкой касания***.

Аналогичным образом определяется касательная для точки, лежащей на другой ветви гиперболы.

Теорема. Пусть A - точка гиперболы с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A, является биссектриса угла F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что биссектриса a угла F_1AF_2 будет касательной к гиперболе (рис. 14).

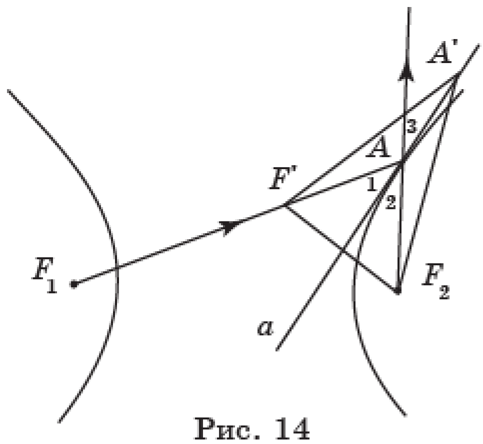

Рис. 14

Обозначим AF_1 - AF_2 = c. Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - A'F' < F_1F' = c.$$

Следовательно, прямая a является касательной.

Фокальное свойство гиперболы. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от эллипса, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a – касательная (рис. 14). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_1AF'. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т.е. луч света, после отражения в точке A, пойдет в направлении AF_2.

Построение касательной к гиперболе. Пусть гипербола задана своими фокусами и константой c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к гиперболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 15).

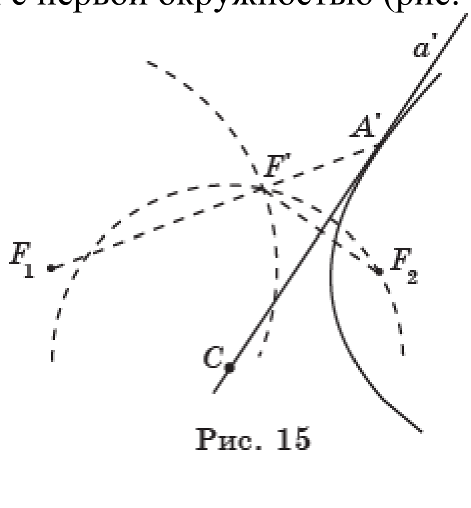

Рис. 15

Таких точек может быть две *F'*, *F''*, одна или ни одной в зависимости от расположения точки *C*. В первом случае проведем биссектрисы *a'*, *a''* углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Они являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'CF_2$, $F''CF_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения *A'*, *A''* с касательными *a'*, *a''* соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

Лабораторная работа. Укажем способ получения гиперболы из листа бумаги. Вырежем из листа бумаги круг и отметим точку *F* на оставшейся части листа. Сложим лист так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой *F'* окружности вырезанного круга, и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности. Сделаем так несколько раз. Линии сгибов будут касательными к гиперболе. Участок листа внутри этих сгибов будет иметь форму гиперболы.

Упражнения

1. Изготовьте прибор для построения гиперболы. Нарисуйте гиперболу с заданными фокусами F_1, F_2. Сколько таких гипербол?

2. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и разностью радиусов.

3. С помощью циркуля постройте несколько точек гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них.

4. Найдите геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины *c*; б) больше заданной величины *c*.

5. Что будет происходить с гиперболой, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

6. У шарнирной замкнутой ломаной *ABCD*, у которой *AB* = *CD* и *AD* = *BC*, сторона *AB* закреплена, а остальные стороны подвижны (рис. 16). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых *AD* и *BC*.

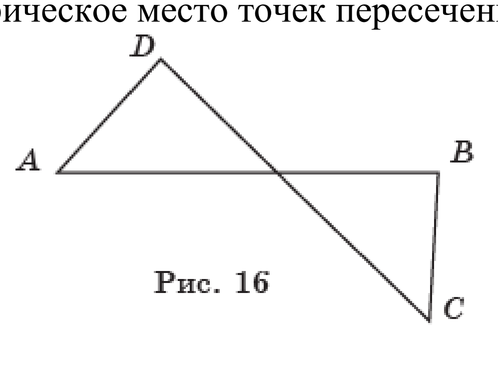

Рис. 16

7. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.

8. Через точку гиперболы с заданными фокусами проведите касательную к гиперболе.

9. Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и разностью расстояний до них c найдите точки, касательные в которых перпендикулярны прямой F_1F_2.

10. Через точку вне гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них проведите касательную к этой гиперболе.

11. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами в точках пересечения имеют перпендикулярные касательные.

12. Даны фокусы F_1, F_2 гиперболы и разность расстояний до них c. Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом с серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к гиперболе, если он пересекается с прямой F_2C. Найдите точку касания.

13. Даны два фокуса и касательная к гиперболе. Постройте постоянную c и нарисуйте гиперболу.

14. Даны две касательные, фокус и постоянная c. Постройте второй фокус гиперболы.

15. Дана гипербола. Укажите способ нахождения ее фокусов.

16. Вырежем из листа бумаги круг и отметим точку на оставшейся части листа. Сложим лист так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой окружности вырезанного круга, и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности. Сделаем так несколько раз. Участок листа внутри этих сгибов будет иметь форму гиперболы. Докажите, что линии сгибов являются касательными к гиперболе.