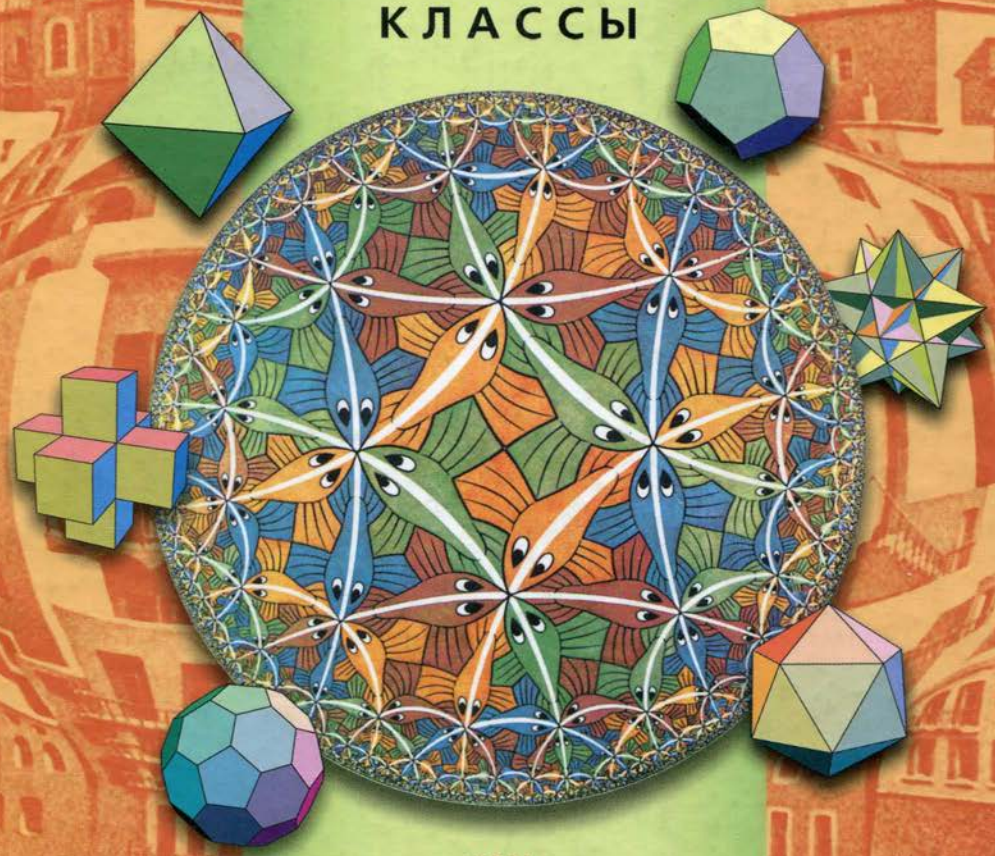
И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

ГЕОМЕТРИЯ

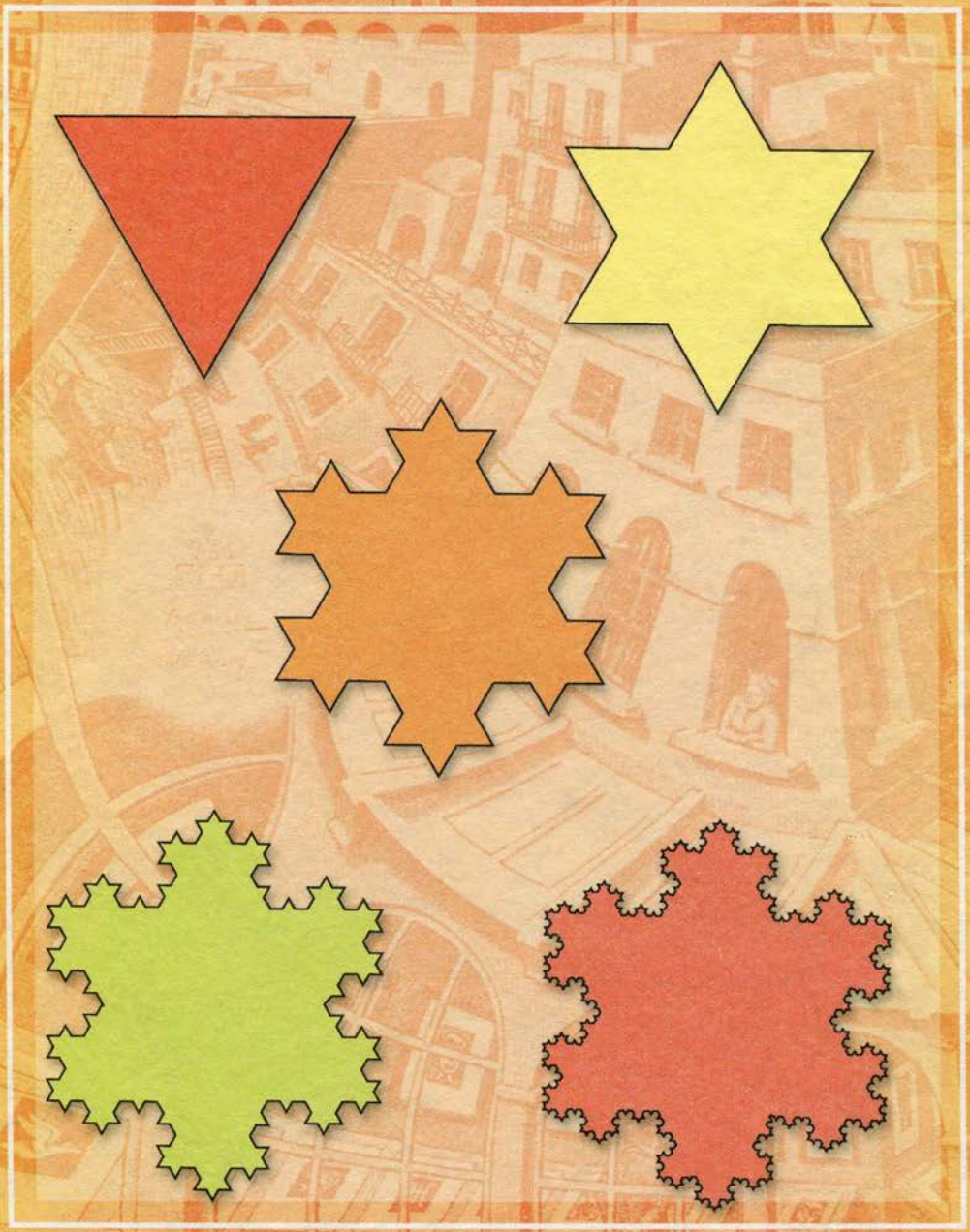
УЧЕБНИК

7—9 КЛАССЫ

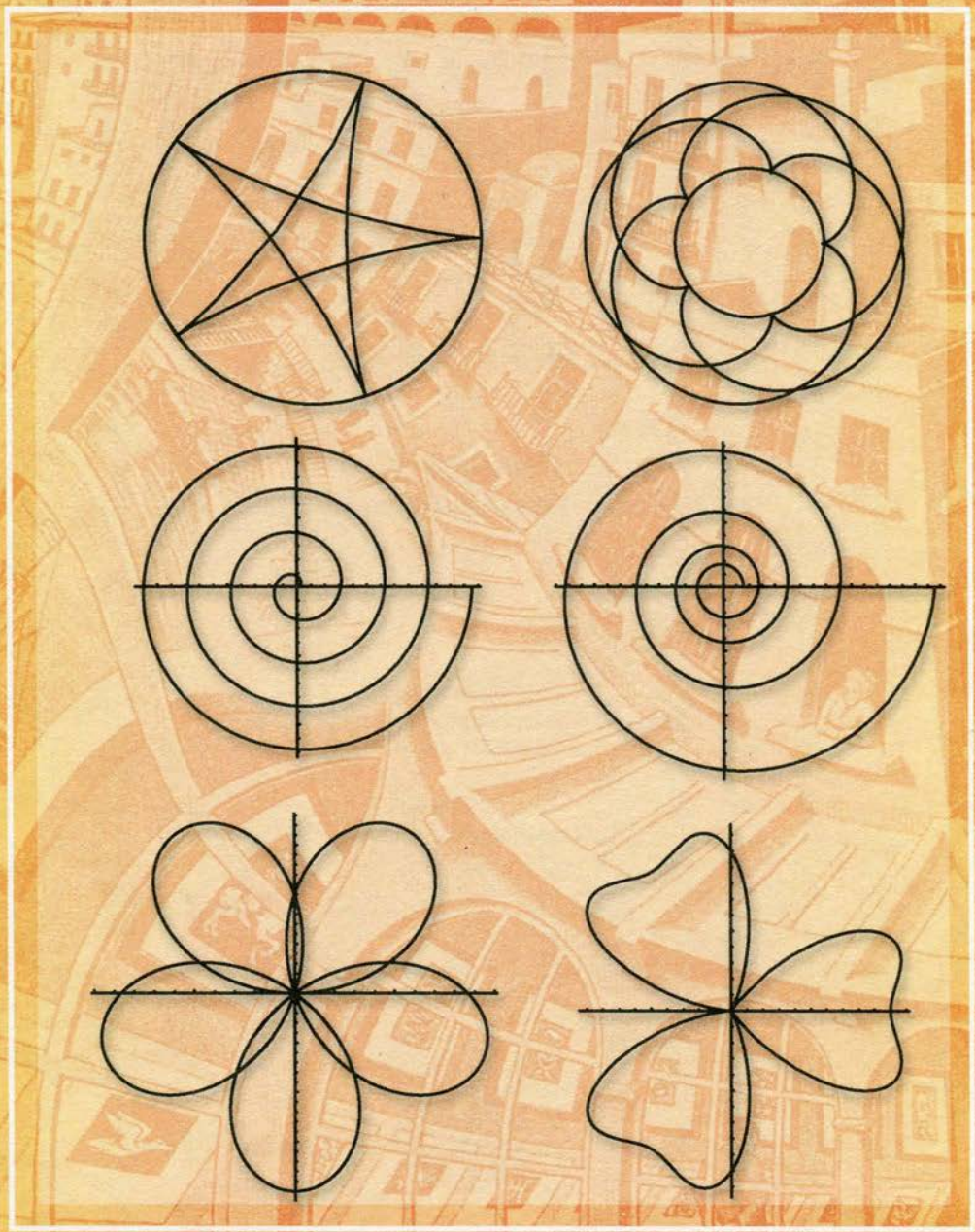


ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

МНОГОУГОЛЬНИКИ



КРИВЫЕ



И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

ГЕОМЕТРИЯ

7–9 классы

УЧЕБНИК
для общеобразовательных учреждений

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

2-е издание, исправленное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2007

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

Смирнова И. М.
С50 Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — 2-е изд., испр. — М. : Мнемозина, 2007. — 376 с. : ил.

ISBN 978-5-346-00782-1

Учебник соответствует программе по математике для общеобразовательных учреждений. Помимо классической геометрии на плоскости в качестве дополнительного материала включены также вопросы геометрии пространства, научно-популярной и современной геометрии, топологии и др.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна,
Смирнов Владимир Алексеевич

ГЕОМЕТРИЯ
7—9 классы

УЧЕБНИК
для общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *И. Б. Копылова, Л. С. Щербакова*
Компьютерная верстка и графика: *Л. А. Стариков, А. А. Рязанцев*

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.60.953.Д.0001815.02.07 от 22.02.2007
Формат 70×90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 27,50. Доп. тираж 10 000 экз. Заказ № 3965

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
E-mail: ioc@mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина» (розничная и мелкооптовая продажа книг).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б. Тел.: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: (495) 657-98-98. E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «ИПК "Ульяновский Дом печати"»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

© «Мнемозина», 2005
© «Мнемозина», 2007,
с изменениями
© Оформление. «Мнемозина», 2007
Все права защищены

ISBN 978-5-346-00782-1

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия — наука, изучающая формы, размеры и взаимное расположение фигур. Она возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. С древних времен люди сталкивались с необходимостью находить расстояния между предметами, определять размеры участков земли, ориентироваться по расположению звезд на небе и т. п.

Слово ***геометрия*** — греческое, оно означает «землемерие» (***гео*** — земля, ***метрео*** — измеряю).

Геометрия состоит из двух разделов: планиметрии и стереометрии.

Планиметрия — средневековый термин, первая часть которого — «плани» — происходит от латинского слова «плоскость», а вторая — «метрия» — от греческого «мерить», т. е. буквально планиметрия означает «плоскомерие». В планиметрии изучаются плоские фигуры, т. е. расположенные в одной плоскости.

Стереометрия — греческое слово, составленное из «стерео» — тело — и «метрео» — измеряю. Таким образом, стереометрия — это «теломерие». В стереометрии изучаются неплоские фигуры, т. е. не лежащие в одной плоскости. Чаще их называют пространственными.

О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до нашей эры древнегреческий ученый Геродот (V в. до н. э.) пишет следующее: «Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, насколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

При строительстве различных сооружений необходимо было рассчитывать, сколько материала пойдет на постройку, вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так, египетские пирамиды,

сооруженные за две, три и четыре тысячи лет до нашей эры, поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие геометрические положения и расчеты. Одна из самых известных и больших пирамид — пирамида Хеопса (XXVIII в. до н. э.). Ее высота достигает 146,5 м, а основанием служит квадрат, сторона которого равна 233 м. Это сооружение, сотворенное человеком, считалось самым высоким на Земле вплоть до XIX века.

Развитие торговли и мореплавания требовало умения ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времен года, уметь определять свое местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направление движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звездами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке — астрономии.

Начиная с VII века до нашей эры, в древней Греции создаются так называемые философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Все большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства исходя из некоторого перечня свойств, принимаемых без доказательства и называемых аксиомами.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI—V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора.

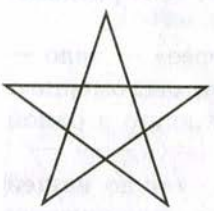


Рис. 1

Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма (рис. 1). В переводе на язык математики пентаграмма — правильный невыпуклый, или звездчатый, пятиугольник, который можно получить из выпуклого правильного пятиугольника путем проведения его диагоналей.

Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов. Вот что мы находим у Гёте в «Фаусте»:

Мефистофель:

Нет, трудновато выйти мне теперь,
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

Фауст:

Не пентаграмма ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Мефистофель:
Изволили ее вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей, — и я свободно мог вскочить.

Объяснение устройства мира пифагорейцы тесно связывали с геометрией. Так, выделяя первоосновы бытия, они приписывали их атомам форму правильных многогранников, а именно: атомам огня — форму тетраэдра (рис. 2, а), земли — гексаэдра (куба, рис. 2, б), воздуха — октаэдра (рис. 2, в), воды — икосаэдра (рис. 2, г). Всей Вселенной приписывалась форма додекаэдра (рис. 2, д). В названиях этих многогранников указывается число граней (от греч. ***эдра*** — грань): ***тетра*** — четыре, ***гекса*** — шесть, ***окто*** — восемь, ***икоси*** — двадцать, ***додека*** — двенадцать.

Более поздняя философская школа — Александрийская — интересна тем, что дала миру знаменитого ученого Евклида, который жил около 300 года до нашей эры. К сожалению, о жизни его мало известно. В одном из своих сочинений математик Папп (III в. н. э.) изображает его как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм. Насколько серьезно и строго он относился к изучению математики, можно судить по следующему известному рассказу. Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его «Начала». Евклид на это ответил: «В геометрии нет царского пути».

Именно «Начала» создали славу Евклиду. В них впервые было представлено стройное аксиоматическое строение геометрии. На протяжении около двух тысячелетий этот труд остается основой изучения систематического курса геометрии.

В последние столетия возникли и развивались новые направления геометрии, среди которых: геометрия Лобачевского, топология, теория графов и др. Появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволяющие переводить геометрические задачи на

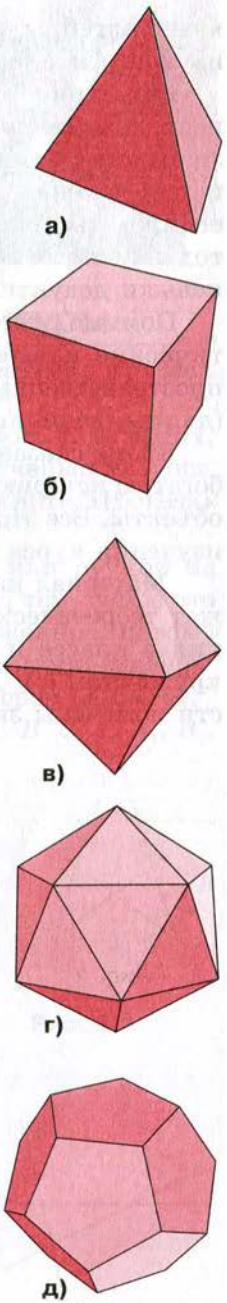


Рис. 2

язык алгебры и наоборот. Геометрия широко используется в других науках: физике, химии, биологии, экономике и др.

Геометрия, как ни один другой предмет, нужна каждому человеку, поскольку именно она дает необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения различных фигур, что позволяет человеку правильно ориентироваться в окружающем мире. С другой стороны, геометрия дает метод научного познания, способствует развитию мышления, формирует навыки дедуктивных рассуждений.

Помимо этого, изучение геометрии вырабатывает необходимые практические навыки в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длины, величины угла, площади, объема и др.).

Кроме сказанного, геометрия обладает интересным содержанием, имеет богатую историю, яркие приложения, она занимательна, изучает красивые объекты. Все это постепенно будет раскрываться и представляться по мере изучения курса геометрии.

Материал настоящего учебника разбит на параграфы, которые содержат теоретический материал, исторические сведения и задачи для решения в классе и для самостоятельной работы. Устные задачи помечены кружочком (○). Дополнительный материал и задачи повышенной трудности помечены звездочкой (*).

Глава I

НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Основные геометрические фигуры

Основными геометрическими фигурами являются ***точка***, ***прямая*** и ***плоскость***.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Древнегреческий ученый Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге «Начала» определял точку как то, что не имеет частей.

Точки изображаются остро отточенным карандашом или ручкой на листе бумаги, мелом на доске и т. п. Чем острее карандаш, тем лучше это изображение. Однако изображение точки только приближенное, потому что точка, нарисованная карандашом, всегда имеет хоть и очень маленькие, но ненулевые размеры, а геометрическая точка размеров не имеет.

Точки обозначаются прописными латинскими буквами A, B, C, ..., A_1, B_2, C_3, ..., A', B'', C''', ... (рис. 1.1).

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки. Хотя изображения прямых ограничены, их следует представлять себе неограниченно продолженными в обе стороны.

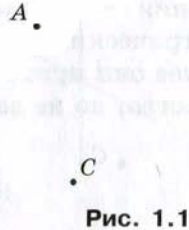


Рис. 1.1

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами a, b, c, ..., a_1, b_2, c_3, ..., a', b'', c''', ... или двумя прописными латинскими буквами AB, CD, ..., A_1B_1, C_2D_2, ..., $A'B'$, $C''D''$, ... (рис. 1.2).

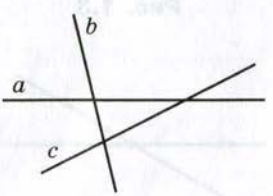


Рис. 1.2

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точка, прямая и плоскость являются основными геометрическими фигурами в том смысле, что остальные фигуры определяются с их помощью.

Сами же основные фигуры не определяются, для них указываются свойства, которым они удовлетворяют. Эти свойства называются ***аксиомами***, что в переводе с греческого языка означает «достойное признания, не вызывающее сомнения».

Идея аксиоматического построения геометрии была предложена и реализована Евклидом. Она состоит в том, что если мы не можем определить, что представляет собой исследуемый объект, то следует определить его свойства, выделить существенные признаки объекта и абстрагироваться от несущественных.

Например, фигуры шахматного слона могут быть сделаны из разных материалов, иметь разную форму, быть непохожими на настоящих слонов. Все эти признаки не являются для них существенными. Существенными являются правила (аксиомы), по которым они могут передвигаться по шахматной доске.

Каждая наука имеет свои определенные правила. В жизни также приходится иметь дело с теми или иными правилами. Например, различные игры основываются на правилах. При работе с компьютером руководствуются определенными правилами. Свод законов, регулирующих деятельность человека в той или иной области, также представляет собой набор правил.

Аналогичным образом аксиомы геометрии можно рассматривать как правила игры в геометрию. Используя аксиомы, путем логических рассуждений выводятся (доказываются) свойства геометрических фигур, называемые ***теоремами***. Особую роль при этом играют логические рассуждения — ***доказательства***. Несмотря на то, что некоторые свойства геометрических фигур могут показаться вытекающими из рисунка, тем не менее они нуждаются в доказательстве. Рисунок помогает найти доказательство, но не заменяет его.

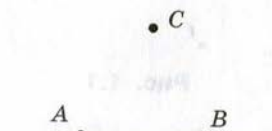


Рис. 1.3

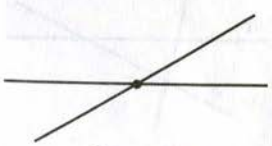


Рис. 1.4

Раздел геометрии, изучающий свойства геометрических фигур на плоскости (плоских фигур), называется ***планиметрией***. Мы начнем изучение геометрии с этого раздела.

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении точек и прямых на плоскости.

Точка может принадлежать данной прямой, в этом случае говорят также, что прямая проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что прямая не проходит через точку (рис. 1.3).

Если две прямые имеют одну общую точку, то говорят, что прямые ***пересекаются*** в этой точке (рис. 1.4).

Если две прямые не имеют общих точек, то говорят, что прямые ***параллельны*** (рис. 1.5).

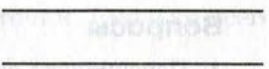


Рис. 1.5

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

Через любые две точки проходит единственная прямая.

Пример 1. Провести четыре прямые так, чтобы каждые две прямые пересекались и никакие три прямые не пересекались в одной точке.

Решение показано на рисунке 1.6.

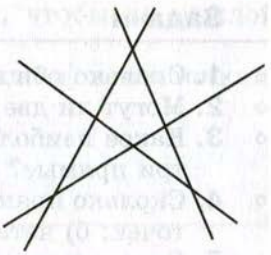


Рис. 1.6

Пример 2. Сколько прямых можно провести через различные пары из: а) трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Решение. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что: через различные пары из трех точек проходят три прямые (рис. 1.7, а); через различные пары из четырех точек проходят шесть прямых (рис. 1.7, б); через различные пары из пяти точек проходят десять прямых (рис. 1.7, в).

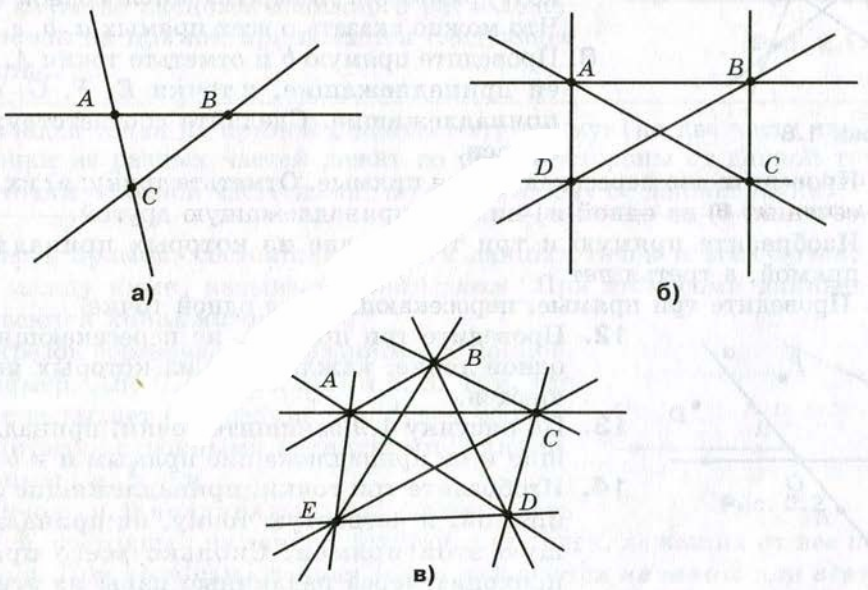


Рис. 1.7

Вопросы

1. Перечислите основные геометрические фигуры.
2. Как изображаются и обозначаются: а) точки; б) прямые?
3. Какие две прямые называются пересекающимися?
4. Какие две прямые называются параллельными?
5. Что в переводе с греческого языка означает слово «аксиома»?
6. Сколько прямых проходит через две точки?

Задачи

1. Сколько общих точек могут иметь две пересекающиеся прямые?

2. Могут ли две прямые иметь две общие точки?

3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три прямые?

4. Сколько прямых может проходить через различные пары из: а) трех точек; б) четырех точек? Рассмотрите возможные случаи.

5. Сколько прямых изображено на рисунке 1.8? Сколько у них точек попарных пересечений?

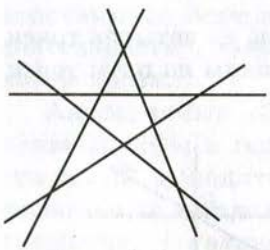


Рис. 1.8

6. Пусть точки A, B, C принадлежат одной прямой и точки B, C, D принадлежат одной прямой. Что можно сказать о всех точках A, B, C, D?

7. Пусть прямые a, b, c пересекаются в одной точке и прямые b, c, d пересекаются в одной точке. Что можно сказать о всех прямых a, b, c, d?

8. Проведите прямую b и отметьте точки A, B, C, ей принадлежащие, и точки E, F, G, ей не принадлежащие. Сделайте соответствующие записи.

9. Проведите две пересекающиеся прямые. Отметьте точку: а) их пересечения; б) на одной из них, не принадлежащую другой.

10. Изобразите прямую и три точки, две из которых принадлежат прямой, а третья нет.

11. Проведите три прямые, пересекающиеся в одной точке.

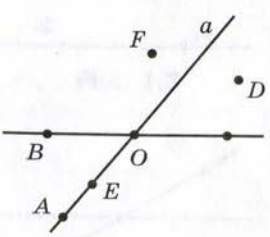


Рис. 1.9

12. Проведите три прямые, не пересекающиеся в одной точке, каждые две из которых пересекаются.

13. По рисунку 1.9 запишите точки, принадлежащие и не принадлежащие прямым a и b.

14. Изобразите три точки, принадлежащие одной прямой, и четвертую точку, не принадлежащую этой прямой. Сколько всего прямых проходит через различные пары из этих точек?

* **15.** Даны три прямые. На каждой прямой взяты две точки. Сколько всего точек? Рассмотрите различные случаи.

* **16.** Сколько прямых можно провести через различные пары из n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

* **17.** Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) три прямые; б) четыре прямые; в) пять прямых; г) n прямых?

* **18.** Изобразите четыре прямые и четыре точки так, чтобы на каждой прямой было ровно две точки.

* **19.** Изобразите пять прямых и десять точек так, чтобы на каждой прямой было ровно четыре точки.

* **20.** Могут ли семь прямых попарно пересекаться в: а) семи точках; б) восьми точках?

§2. Отрезок и луч

Отметим на прямой какую-нибудь точку C. Она разбивает прямую на две части. Точки A и B на рисунке 2.1 принадлежат разным частям. В этом случае говорят, что точки A и B ***лежат по разные стороны*** от точки C, а точка C ***лежит между*** точками A и B. Точки B и D принадлежат одной части. В этом случае говорят, что точки B и D ***лежат по одну сторону*** от точки C.

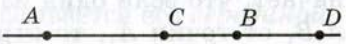


Рис. 2.1

В качестве аксиомы взаимного расположения точек на прямой принимается следующее свойство.

Каждая точка на прямой разбивает эту прямую на две части так, что точки из разных частей лежат по разные стороны от данной точки, а точки из одной части лежат по одну сторону от данной точки.

Часть прямой, состоящая из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними, называется ***отрезком***. При этом сами данные точки называются ***концами отрезка***.

Отрезок обозначается указанием его концов. Например, AB, C_1D_1 (рис. 2.2) и т. д. Там, где это не вызывает недоразумений, будем обозначать отрезки строчными латинскими буквами. Например, a, b, c и т. д.

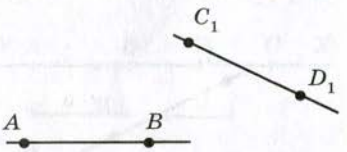


Рис. 2.2

Лучом, или ***полупрямой***, называется часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих от нее по одну сторону. При этом сама данная точка называется ***началом*** или ***вершиной луча***.

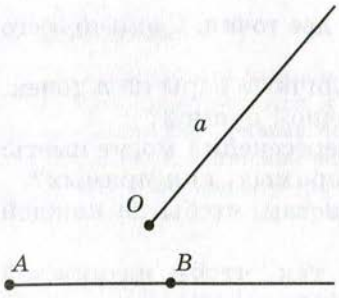


Рис. 2.3

Для обозначения лучей используются пары прописных латинских букв, например AB, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку, принадлежащую лучу (рис. 2.3). Там, где это не вызывает недоразумений, будем обозначать лучи строчными латинскими буквами. Например, a, b, c и т. д.

Заметим, что обозначение отрезка совпадает с обозначением луча. Поэтому, чтобы не возникало недоразумений, следует оговаривать, о чем идет речь в том или ином случае — луче или отрезке.

Одной из основных операций, которую можно производить с отрезками, является операция ***откладывания данного отрезка*** на данном луче от его вершины. Получающийся при этом отрезок называется ***равным*** исходному отрезку.

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

На любом луче от его начала можно отложить только один отрезок, равный данному.

Равенство отрезков AB и A_1B_1 записывается в виде $AB = A_1B_1$. Оно означает, что если один из этих отрезков, например AB, отложить на луче A_1B_1 от точки A_1, то отрезок AB при этом совместится с отрезком A_1B_1 (рис. 2.4, а).

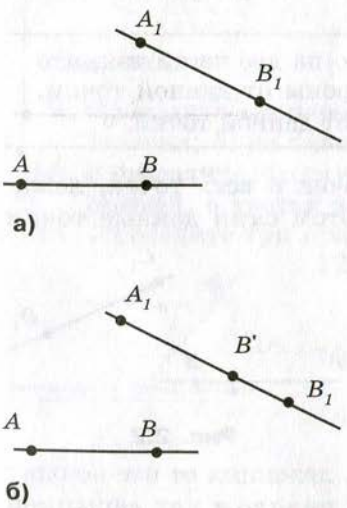


Рис. 2.4

Если при откладывании отрезка AB на луче A_1B_1 от точки A_1 точка B переходит в точку B', лежащую между точками A_1 и B_1, то говорят, что отрезок AB ***меньше*** отрезка A_1B_1, и обозначают $AB < A_1B_1$. Говорят также, что отрезок A_1B_1 ***больше*** отрезка AB, и обозначают $A_1B_1 > AB$ (рис. 2.4, б).

Операция откладывания отрезков позволяет определить сложение и вычитание отрезков. А именно, чтобы сложить отрезки AB и DE, выберем какой-нибудь луч с вершиной A_1 и отложим от его начала отрезок A_1B_1, равный AB (рис. 2.5). Затем от точки B_1 в ту же сторону отложим отрезок B_1C_1, равный отрезку DE. Отрезок A_1C_1 будет искомой суммой отрезков AB и DE, обозначается $A_1C_1 = AB + DE$.

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего отрезка меньшего.

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

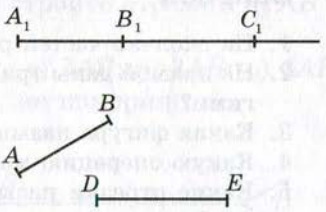


Рис. 2.5

Отрезки, полученные сложением или вычитанием соответственно равных отрезков, равны.

Можно доказать, что для сложения отрезков выполняются свойства, аналогичные свойствам сложения положительных чисел:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность).

Используя операцию сложения отрезка с самим собой, можно определить операцию ***умножения*** отрезка на натуральное число. А именно, положим для отрезка AB

$$2AB = AB + AB,\ 3AB = 2AB + AB,\ ...,\ nAB = (n-1)AB + AB,\ ... .$$

Определим также операцию ***деления*** трезка на натуральное число, или, что то же самое, операцию деления отрезка на n равных частей, считая $AB : n$ отрезком, при умножении которого на n получается исходный отрезок AB, т. е. $n(AB : n) = AB$.

Точка, делящая отрезок на две равные части, называется его ***серединой***.

Пример 1. Для точек A, B, C, D прямой известно, что точки B и C лежат по одну сторону от точки A, точки B и D тоже лежат по одну сторону от точки A. Как расположены точки C и D относительно точки A?

Решение. По условию точка C лежит по ту же сторону от точки A, что и точка B. Точка D также лежит по ту же сторону от точки A, что и точка B. Следовательно, точки B и D лежат по одну сторону от точки A (рис. 2.6).

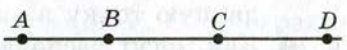


Рис. 2.6

Пример 2. Докажите, что если для отрезков b и c выполняется неравенство $b < c$, то для отрезка a будет выполняться неравенство $a + b < a + c$.

Решение. Неравенство $b < c$ означает, что если отрезки b и c отложить на луче OX, то для полученных отрезков $OB = b$ и $OC = c$ точка B будет лежать между точками O и C (рис. 2.7). Отложим на луче OY отрезок $OA = a$, как показано на рисунке 2.7. Тогда $AB = a + b$ и $AC = a + c$. Так как B лежит между точками A и C, то выполняется неравенство $a + b < a + c$.

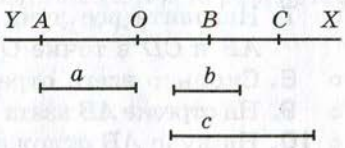


Рис. 2.7

Вопросы

1. На сколько частей разбивает прямую одна точка?
2. На прямой даны три точки. Сколько точек из них лежит между двумя другими?
3. Какая фигура называется: а) отрезком; б) лучом?
4. Какую операцию можно производить над отрезками?
5. Какие отрезки называются равными? Как обозначается равенство отрезков?
6. Что означает, что отрезок AB меньше отрезка A_1B_1? Какое обозначение в этом случае используется?
7. Как определяется: а) сумма двух отрезков; б) разность двух отрезков?
8. В каком случае определена разность двух отрезков?
9. Как определяется: а) умножение отрезка на натуральное число; б) деление отрезка на натуральное число?
10. Какая точка называется серединой отрезка?

Задачи

1. Изобразите на прямой точки A, B, C, D так, чтобы:
а) точка C лежала между точками A и B, а точка D лежала между точками B и C;
б) точка A лежала между точками B и C, а точка C — между точками A и D.

2. На сколько частей делят прямую: а) одна точка; б) две точки; в) три точки; г)* n точек?

3. Сколько лучей, расположенных на данной прямой, могут иметь данную точку в качестве своей вершины?

4. Как могут располагаться два луча на прямой?

5. На отрезке AB взята точка C. Среди лучей AB, AC, CA, CB, BA, BC назовите пары совпадающих лучей.

6. Объясните, почему любые две точки луча лежат по одну сторону от его вершины.

7. Назовите все лучи, образовавшиеся при пересечении двух прямых AB и CD в точке O.

8. Сколько всего отрезков изображено на рисунке 2.6? Назовите их.

9. На отрезке AB взята точка C. Какой отрезок больше, AB или AC? Почему?

10. На луче AB отложен отрезок AC, меньший AB. Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими?

11. На прямой отмечены точки A, B, C, D (рис. 2.6). Запишите каждый из отрезков в виде суммы или разности остальных.

12. На данной прямой от данной точки отложите данный отрезок. Сколько решений имеет задача?

13. Для данных отрезков AB и CD ($CD < AB$) постройте отрезки: а) $AB + CD$; б) $AB - CD$.

14. Для данного отрезка AB постройте отрезки: а) $2AB$; б) $3AB$; в) $4AB$.

15. Сравните отрезки AB и CD на рисунке 2.8, не измеряя их.

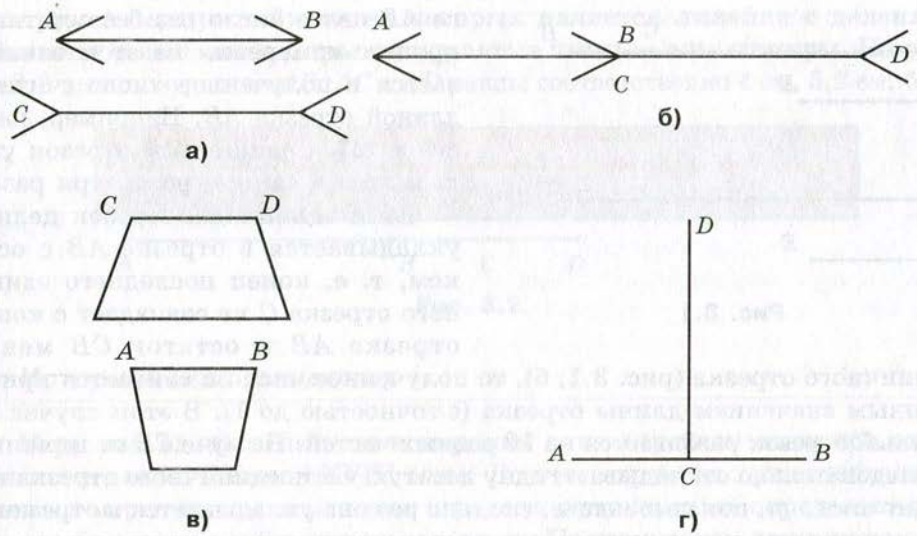


Рис. 2.8

* **16.** Расположите на плоскости шесть отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими.

* **17.** Пусть A и B — точки, принадлежащие прямой c, O — середина отрезка AB. Докажите, что для любой точки C прямой c, не принадлежащей отрезку AB, выполняется равенство $OC = (AC + BC) : 2$.

* **18.** Докажите коммуникативность и ассоциативность сложения отрезков.

* **19.** Докажите, что если для отрезков a, b, c выполняются неравенства $c < a < b$, то выполняется и неравенство $a - c < b - c$.

* **20.** Определите операцию вычитания отрезков.

§3. Измерение длин отрезков

Измерение длины отрезка основано на сравнении его с отрезком, длина которого принимается за единицу (единичный отрезок).

Длина отрезка — это положительное число, показывающее, сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в данном отрезке.

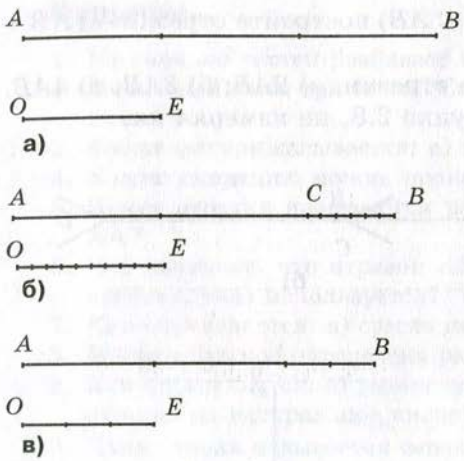


Рис. 3.1

Для измерения длины данного отрезка AB последовательно откладывают единичный отрезок OE на луче AB от вершины A. Если при этом единичный отрезок целиком укладывается в отрезке AB целое число раз без остатка, то процесс измерения на этом заканчивается и полученное число считается длиной отрезка AB. Например, на рисунке 3.1, а единичный отрезок укладывается в данном ровно три раза.

Если единичный отрезок целиком укладывается в отрезке AB с остатком, т. е. конец последнего единичного отрезка C не совпадает с концом отрезка AB и остаток CB меньше единичного отрезка (рис. 3.1, б), то полученное число n считается приближенным значением длины отрезка (с точностью до 1). В этом случае единичный отрезок разбивается на 10 равных частей. На луче CB от вершины C последовательно откладывают одну десятую часть единичного отрезка и находят число m, показывающее, сколько раз она укладывается в отрезке CB. Если при этом конец последнего отрезка совпадет с концом отрезка CB, то процесс измерения заканчивается и число, выражаемое десятичной дробью n,m, считается длиной отрезка AB. На рисунке 3.1, б $n = 2$, $m = 6$.

Если конец последнего отрезка не совпадает с концом отрезка CB, то число n,m считается приближенным значением длины отрезка (с точностью до 0,1). В этом случае одна десятая часть единичного отрезка разбивается на десять равных частей и повторяется описанная процедура.

В результате процесс измерения может на некотором шаге закончиться. В этом случае длина отрезка будет выражаться конечной десятичной дробью. Однако может случиться, что процесс измерения не заканчивается ни на каком шаге. В этом случае длина отрезка будет выражаться бесконечной десятичной дробью.

Единичный отрезок можно разбивать не только на 10, но и на другое число частей. Так, если единичный отрезок разбит на q равных частей и одна такая часть укладывается в отрезке AB ровно p раз, то длина отрезка AB считается равной дроби $\frac{p}{q}$. На рисунке 3.1, в $q = 3$, $p = 8$.

Длину отрезка AB называют также ***расстоянием*** между точками A и B. Иногда под расстоянием между точками A и B мы будем понимать сам отрезок AB.

Длину отрезка AB будем обозначать так же, как и сам отрезок, AB.
Длина отрезка удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. Длины равных отрезков равны.

Свойство 2. Длина суммы отрезков равна сумме их длин.

Для измерения длин отрезков применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является линейка с делениями, обозначающими сантиметры и их десятые части — миллиметры. На рисунке 3.2 длины отрезков AB, AC и AD равны соответственно 4 см, 5,2 см, 6,5 см.

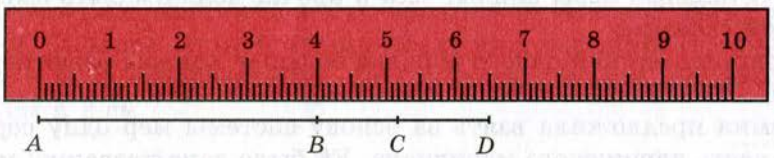


Рис. 3.2

Исторические сведения

Метр как единая единица измерения длин отрезков появился относительно недавно, в конце XVIII века. До этого времени существовали различные меры длины и все они страдали неточностью определения, что давало большие ошибки в вычислениях. По-видимому, одними из самых первых единиц измерения длины были единицы, связанные с размерами человеческого тела.

В одной старинной арабской рукописи VIII века нашей эры, посвященной вопросам измерения длин, сказано, что за единицу измерения длины принимается локоть, равный ширине 8 кулаков, кулак — ширине 4 пальцев, палец — толщине 6 ячменных зерен, а ячменное зерно — толщине 6 волос с ослиной морды. Современным ученым, решившим проверить вычисления арабов, пришлось заняться измерениями толщины волос с морды осла.

К концу XVIII века положение с измерениями длин стало совершенно нетерпимым. В каждой стране были свои единицы измерения. И все они были не совершеннее, чем толщина волоса с морды осла. От этого страдали астрономы, торговцы, мореплаватели, землемеры и др. Ученые не раз придумывали хорошие способы избавления от этой путаницы. Они представляли их на утверждение королям, короли благодарили ученых, одобряли проекты и — клали их под сукно.

Но вот грянула Французская революция. Группа ученых решила, что со сломом старого общества удастся избавиться и от старых мер. Они внесли соответствующий проект в Учредительное собрание Франции, которое

поручило Академии наук разработать единую систему мер и весов. В состав комиссии вошли величайшие математики, физики и астрономы Франции во главе с Пьером Лапласом (1749—1827).

Доклад Академии был готов в марте 1791 года. По мнению Академии, новая система мер должна была покоиться на трех принципах:

1) в основе ее должна лежать единица длины, естественная и неизменная, т. е. такая, которая существует в природе независимо от людей и будет существовать вечно;

2) все остальные меры длины, веса и прочие должны быть выведены из нее и с ней связаны;

3) в пределах единиц одного порядка большая должна равняться десяти меньшим.

Академия предложила взять за основу системы мер одну сорокамиллионную часть парижского меридиана. Ей было дано название: метр. Для определения величины метра и изготовления эталона нужно было измерить длину парижского меридиана с большой степенью точности. Для этого были сформированы шесть комиссий.

Работа комиссий проходила во время военных действий. Измерительными работами во Франции руководил Даламбер. В 1795 году на парижской конференции были подведены итоги этой работы и утвержден эталон единицы длины — метр. В результате был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве.

Впоследствии выяснилось, что он оказался на 0,05 мм короче одной сорокамиллионной парижского меридиана. Ошибка была вызвана тем, что форма Земли не является идеально шаровой, а чуть-чуть сплющена у полюсов. Тем не менее, чтобы не ломать всю систему мер и не пересчитывать все цифры и таблицы во всех отраслях науки и техники, ученые XIX века решили навсегда сохранить однажды установленный метр. Это решение было вынесено в 1872 году в Париже на Международной конференции. Старый платиновый эталон метра был признан ненадежным и неудобным для сравнения. Ученые сообща разработали для него новую конструкцию из нержавеющего и почти нерасширяющегося сплава металлов.

Эталон представляет собой брусок с поперечным сечением в форме буквы X. Длина эталона 102 см. На нем на расстоянии 1 см от каждого конца нанесены очень тонкие штрихи. Расстояние между ними и считается метром. По постановлению конференции был изготовлен тридцать один эталон метра. Хранение одного из них было поручено Международному бюро мер и весов в городе Севре, недалеко от Парижа. Остальные тридцать прототипов метра были распределены между государствами — участниками конференции. Россия получила два из них.

Пример 1. Могут ли точки A, B, C принадлежать одной прямой, если $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см?

Решение. Нет, не могут. Если бы они принадлежали одной прямой, то одна из этих точек лежала бы между двумя другими. В этом случае длина большего отрезка равнялась бы сумме длин двух других отрезков. Но для данных длин отрезков это условие не выполняется.

Пример 2. Сумма двух отрезков равна 6 см, а их разность — 2 см. Найдите сами отрезки.

Решение. Обозначим искомые отрезки через x и y. Тогда $x + y = 6$, а $x - y = 2$. Сложим левые и правые части этих равенств. Получим $2x = 8$. Откуда $x = 4$, и, следовательно, $y = 2$. Таким образом, искомые отрезки равны 4 см и 2 см.

Вопросы

1. Что такое длина отрезка?
2. Как измеряется длина отрезка?
3. В каком случае длина отрезка выражается: а) натуральным числом; б) десятичной дробью с одной цифрой после запятой?
4. Всегда ли длина отрезка выражается конечной десятичной дробью? Может ли длина отрезка выражаться бесконечной десятичной дробью?
5. Длина отрезка выражается дробью $\frac{p}{q}$. Что это означает?
6. Что называется расстоянием между точками A и B?
7. Каким свойствам удовлетворяет длина отрезка?
8. Что в настоящее время принято за единицу измерения длины?

Задачи

1. Точка C лежит на прямой между точками A и B. Найдите длину отрезка AB, если: а) $AC = 2{,}5$ см, $CB = 3{,}5$ см; б) $AC = 3{,}1$ дм, $CB = 4{,}6$ дм; в) $AC = 12{,}3$ м, $CB = 5{,}8$ м.

2. На прямой в одну сторону последовательно отложены отрезки $OE = 5$ см, $EF = 30$ мм, $FG = 1{,}5$ см, $GH = 11$ см. Найдите отрезки: а) OH; б) OF; в) EG; г) FH.

3. Точки A, B и C принадлежат одной прямой. Известно, что $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

4. Точки A, B, C принадлежат одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если $AC = 3$ см, $BC = 5$ см?

5. Могут ли точки A, B, C принадлежать одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC?

6. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся в ней пополам. Известно, что $AO = 2CO$. Сравните отрезки AB и CD.

7. С помощью линейки измерьте изображенные на рисунке 3.3 отрезки.

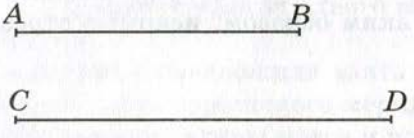


Рис. 3.3

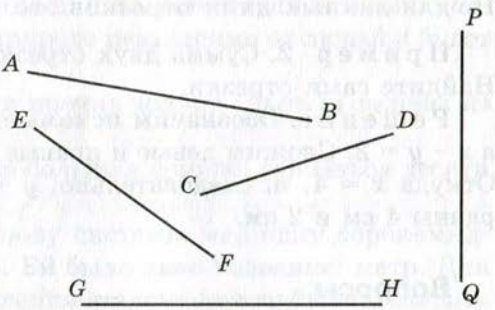


Рис. 3.4

8. Используя линейку, нарисуйте отрезки длиной: а) 6 см; б) 18 мм; в) 1,1 дм; г) 0,08 м.

9. На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если: а) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC; б) отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC; в) длины отрезков AC и BC относятся как 2 : 3.

10. На данной прямой от данной точки отложите на глаз отрезки, равные: а) 3 см; б) 7 см; в) 10 см. Проверьте точность построений линейкой.

11. На рисунке 2.6 $AB = CD$, $AC = 6$ см. Найдите BD.

12. На рисунке 2.6 $AC = BD$, $AC = 10$ см, $CD = 4$ см. Найдите длину отрезка BC.

13. На прямой последовательно отложены три отрезка AB, BC и CD так, что $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

14. От точки A, взятой на некоторой прямой, отложены в одном направлении два отрезка AB и AC, причем $AB = 60$ мм, $AC = 100$ мм. Найдите: а) длину отрезка BC; б) расстояние от точки A до середины отрезка BC; в) расстояние между серединами отрезков AB и AC.

15. На рисунке 3.4 укажите наибольший и наименьший отрезки.

16. Общей частью двух отрезков длины a и b является отрезок длины c. Найдите длину отрезка, покрываемого обоими данными отрезками.

*** 17.** На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма которых равна 28 см; конец первого отрезка служит

серединой второго, а конец второго — серединой третьего. Найдите длины этих отрезков.

* **18.** На прямой взяты точки A, B, C и D таким образом, что $AB = CD$, $AC = BD$. Докажите, что середина отрезка AD является серединой отрезка BC.

* **19.** Отрезки AB и AC лежат на одной прямой. Точка O — середина отрезка AB, точка P — середина отрезка AC. Докажите, что $BC = 2OP$.

* **20.** Вдоль прямой улицы по одну сторону от нее стоят четыре дома. В каком месте улицы нужно установить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

§ 4. Полуплоскость и угол

Проведем на плоскости какую-нибудь прямую a. Она разобьет плоскость на две части. На рисунке 4.1 точки A и B принадлежат одной из этих частей, отрезок AB не пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки A и B ***лежат по одну*** сторону от прямой a. Точки B и C принадлежат разным частям плоскости, отрезок BC пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки B и C ***лежат по разные стороны*** от прямой a.

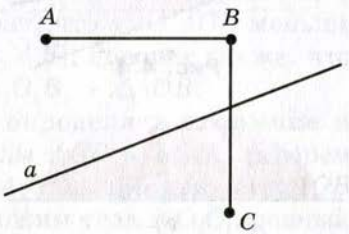


Рис. 4.1

Следующее свойство является аксиомой взаимного расположения точек на плоскости относительно данной прямой.

Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части. При этом если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

Часть плоскости, состоящая из точек данной прямой и точек, лежащих по одну сторону от этой прямой, называется ***полуплоскостью*** (рис. 4.2).

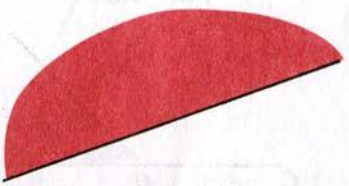


Рис. 4.2

Рассмотрим два луча с общей вершиной (рис. 4.3). Они разбивают плоскость на две части.

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости,

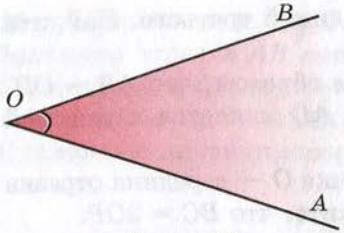


Рис. 4.3

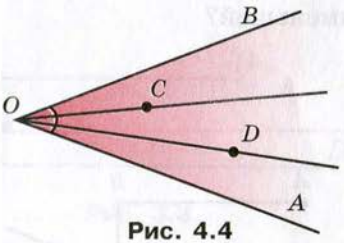
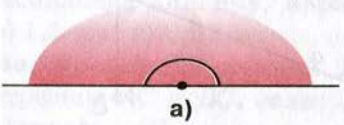
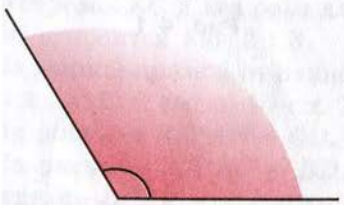


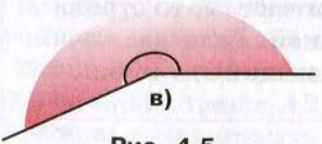
Рис. 4.4



а)



б)



в)

Рис. 4.5

ограниченной этими лучами, называется ***углом***. Общая вершина называется ***вершиной угла***, а сами лучи — ***сторонами угла***.

Угол обозначается или одной буквой, указывающей его вершину, или тремя буквами, средняя из которых указывает вершину угла, а крайние — какие-нибудь точки на сторонах угла. Например, $\angle A$, $\angle AOB$ и т. д. Иногда углы обозначаются цифрами, например $\angle 1$, $\angle 2$ и т. д.

Точки угла, не принадлежащие его сторонам, называются ***внутренними***. Лучи, исходящие из вершины данного угла и проходящие через внутренние точки угла, называются ***внутренними***.

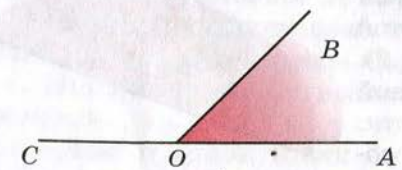
На рисунке 4.4 изображен угол AOB. Точки C и D — его внутренние точки, лучи OC и OD — его внутренние лучи.

Угол называется ***развернутым***, если его стороны вместе составляют прямую (рис. 4.5, а). В противном случае угол называется ***неразвернутым***.

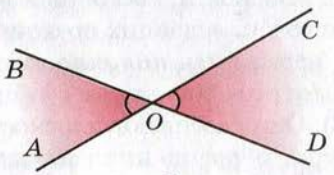
Неразвернутый угол может быть меньше развернутого, т. е. являться частью развернутого угла (рис. 4.5, б), или быть больше развернутого, т. е. содержать развернутый угол (рис. 4.5, в). Как правило, если не оговорено противное, мы будем рассматривать углы, меньшие развернутых.

Два угла называются ***смежными***, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую (рис. 4.6, а).

Два угла называются ***вертикальными***, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла (рис. 4.6, б).



а)



б)

Рис. 4.6

Одной из основных операций, которую можно производить с углами, является операция ***откладывания данного угла*** в ту или другую сторону от данного луча (рис. 4.7). Получающийся при этом угол называется ***равным*** исходному углу.

В качестве аксиом принимаются следующие свойства.

От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить только один угол, равный данному.

Все развернутые углы равны.

Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например $\angle AOB$, отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1, то угол AOB при этом совместится с углом $A_1O_1B_1$.

Если при откладывании угла AOB от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч O_1B', лежащий внутри угла $A_1O_1B_1$, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$, и обозначают $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ (рис. 4.8). Говорят также, что угол $A_1O_1B_1$ больше угла AOB, и обозначают $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$.

Операция откладывания углов позволяет определить сложение и вычитание углов. А именно, чтобы сложить углы AOB и DQE, выберем какой-нибудь луч O_1A_1 и отложим от него угол $A_1O_1B_1$, равный углу AOB (рис. 4.9). Затем от луча O_1B_1 в ту же сторону отложим угол $B_1O_1C_1$, равный углу DQE. Угол $A_1O_1C_1$ будет искомой суммой углов AOB и DQE, обозначается $\angle A_1O_1C_1 = \angle AOB + \angle DQE$.

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего угла меньшего.

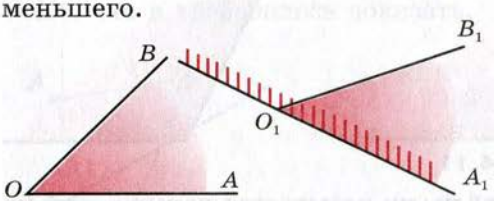


Рис. 4.7

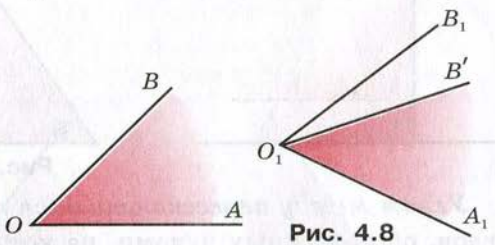


Рис. 4.8

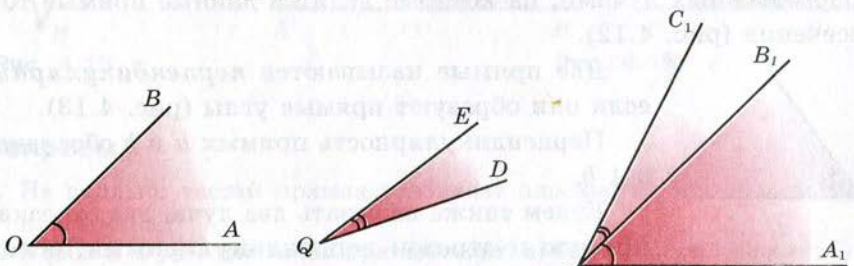


Рис. 4.9

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

Углы, полученные сложением или вычитанием соответственно равных углов, равны.

Непосредственно из определения суммы углов следует, что сумма смежных углов равна развернутому углу.

Можно доказать, что для сложения углов выполняются свойства, аналогичные свойствам сложения положительных чисел:

1. $\angle A + \angle B = \angle B + \angle A$ (коммутативность);
2. $(\angle A + \angle B) + \angle C = \angle A + (\angle B + \angle C)$ (ассоциативность).

Теорема. Вертикальные углы равны.

Доказательство. Пусть AOC и BOD — вертикальные углы. Стороны OB и OD угла BOD дополняют до прямых стороны соответственно OA и OC угла AOC (рис. 4.10). Тогда углы AOC и COB составляют в сумме развернутый угол. Углы BOD и COB также составляют в сумме развернутый угол. Следовательно, $\angle AOC + \angle COB = \angle BOD + \angle COB$. Вычитая из обеих частей этого равенства $\angle COB$, получаем требуемое равенство $\angle AOC = \angle BOD$. ■

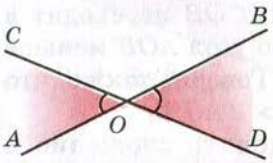


Рис. 4.10

Угол, равный своему смежному, называется ***прямым***. Угол, меньший прямого угла, называется ***острым***. Угол, больший прямого угла, но меньший развернутого угла, называется ***тупым*** (рис. 4.11).

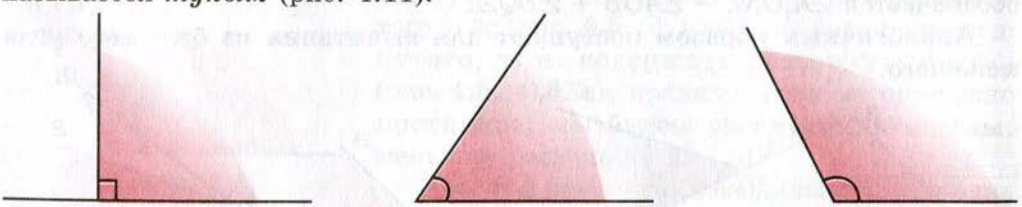


Рис. 4.11

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами, на которые делятся данные прямые точкой их пересечения (рис. 4.12).

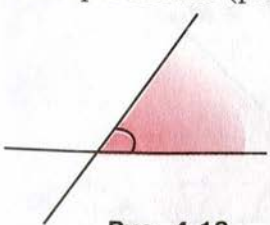


Рис. 4.12

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если они образуют прямые углы (рис. 4.13).

Перпендикулярность прямых a и b обозначается $a \perp b$.

Будем также называть два луча, два отрезка или прямую и отрезок перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Используя операцию сложения угла с самим собой, можно определить операцию умножения угла на натуральное число и деления угла на n равных частей. Для угла AOB углом $AOB : n$ считается такой угол, при умножении которого на n получается исходный угол AOB, т. е. $n(\angle AOB : n) = \angle AOB$.

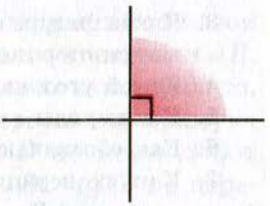


Рис. 4.13

Биссектрисой угла называется внутренний луч, делящий этот угол на два равных угла (рис. 4.14).

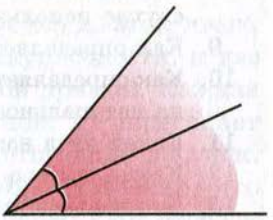


Рис. 4.14

Пример 1. Даны прямая и три точки A, B, C, не принадлежащие этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок BC?

Решение. Из того, что отрезок AB пересекает прямую, следует, что точки A и B лежат по разные стороны от этой прямой. Из того, что отрезок AC не пересекает прямую, следует, что точки A и C лежат по одну сторону от прямой. Таким образом, точки B и C лежат по разные стороны от прямой, и, следовательно, отрезок BC пересекает прямую (рис. 4.15).

Пример 2. На рисунке 4.16 AB и CD — прямые, $\angle 1 = \angle 3$. Докажите, что $\angle 2 = \angle 4$.

Решение. $\angle AOB = \angle CPD$ как развернутые углы. При этом $\angle AOB = \angle 1 + \angle 2$, $\angle CPD = \angle 3 + \angle 4$. Так как по условию $\angle 1 = \angle 3$, получаем $\angle 2 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

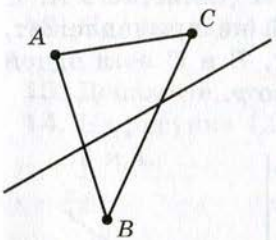


Рис. 4.15

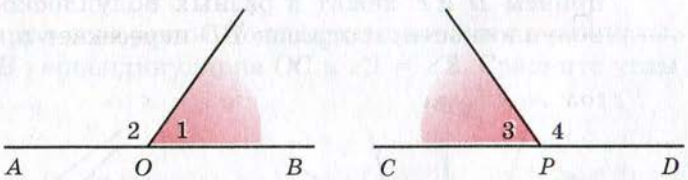


Рис. 4.16

Вопросы

1. На сколько частей прямая разбивает плоскость? Что называется полуплоскостью?
2. В каком случае две точки принадлежат: а) одной полуплоскости; б) разным полуплоскостям относительно данной прямой?

3. Какая фигура называется углом? Что называется вершиной угла? Что называется сторонами угла?
4. Какой угол называется развернутым?
5. Какие углы называются: а) смежными; б) вертикальными?
6. Как обозначаются углы?
7. Какую операцию можно производить над углами? Какие углы называются равными? Как обозначается равенство углов?
8. Один угол меньше другого. Что это означает? Какое обозначение в этом случае используется?
9. Как определяется: а) сумма двух углов; б) разность двух углов?
10. Как определяется: а) умножение угла на натуральное число; б) деление угла на натуральное число?
11. Какой угол называется: а) острым; б) прямым; в) тупым?
12. Какие прямые называются перпендикулярными?
13. Что называется биссектрисой угла?
14. Сформулируйте и докажите теорему о вертикальных углах.

Задачи

1. На рисунке 4.17 укажите пары точек, лежащие по одну и по разные стороны от данной прямой.

2. На сколько частей разбивают плоскость: а) две пересекающиеся прямые; б) три попарно пересекающиеся прямые; в) четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

3. Изобразите прямую p и точки A, B, C, D, E, F такие, что A, E принадлежат данной прямой, а остальные ей не принадлежат, причем D и F лежат в разных полуплоскостях, B и C — в одной полуплоскости, и отрезок BD пересекает прямую p.

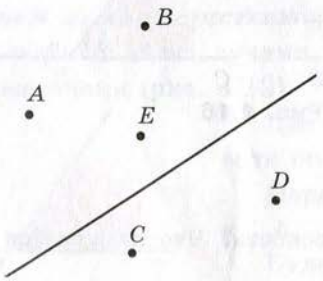


Рис. 4.17

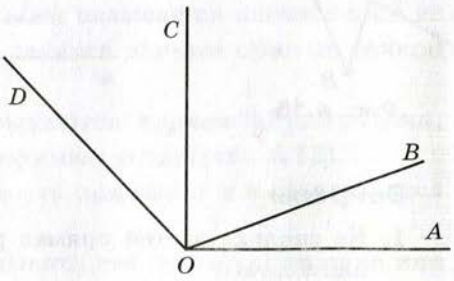


Рис. 4.18

4. Даны прямая и четыре точки A, B, C, D, не принадлежащие этой прямой. Пересекает ли эту прямую отрезок AD, если: а) отрезки AB, BC и CD пересекают прямую; б) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает; в) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; г) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; д) отрезки AB, BC и CD не пересекают прямую; е) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую? Изобразите данные ситуации.

5. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости, а две другие — в другой полуплоскости относительно этой прямой. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков: а) пересекает прямую; б) не пересекает прямую? Сделайте соответствующий рисунок.

* **6.** Точки A, B, C, D не принадлежат одной прямой. Известно, что прямая AB пересекает отрезок CD, а прямая CD пересекает отрезок AB. Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

7. Изобразите лучи OA, OB, OC, OD так, чтобы: а) луч OC лежал внутри угла AOB, а луч OD лежал внутри угла BOC; б) луч OA лежал внутри угла BOC, а луч OC лежал бы внутри угла AOD.

○ **8.** Сколько всего углов определяется лучами, изображенными на рисунке 4.18? Назовите их. Укажите наибольший и наименьший.

○ **9.** Укажите, какие из углов на рисунке 4.18: а) острые; б) прямые; в) тупые.

○ **10.** Сколько имеется углов, смежных данному?

○ **11.** Могут ли два смежных угла быть одновременно: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми?

12. По рисунку 4.19 запишите пары: а) вертикальных углов; б) смежных углов.

13. Докажите, что если два угла равны, то равны и смежные с ними углы.

14. На рисунке 4.20 AB перпендикулярна OC и $\angle 1 = \angle 2$. Сравните углы 3 и 4.

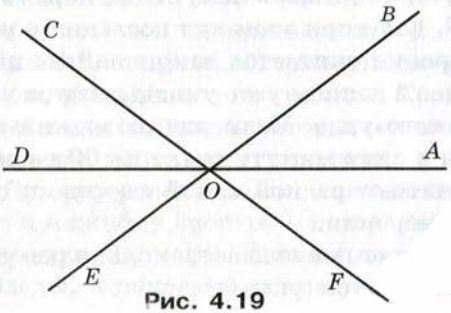


Рис. 4.19

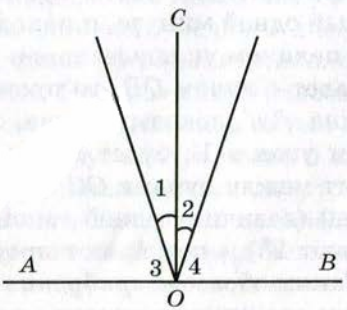


Рис. 4.20

15. Найдите угол, который образуют биссектрисы вертикальных углов.
16. Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
17. Углы AOB и BOC имеют общую сторону OB. Найдите угол, образованный биссектрисами данных углов.
* **18.** Докажите коммутативность и ассоциативность сложения углов.
* **19.** Определите операцию вычитания углов.
* **20.** Докажите, что если для углов A и B выполняется неравенство $\angle A < \angle B$, то выполняется и неравенство $\angle A + \angle C < \angle B + \angle C$.
* **21.** Когда часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол?
* **22.** Сколько раз за сутки часовая и минутная стрелки образуют развернутый угол?

§5. Измерение величин углов

Для измерения величин углов поступают так же, как и в случае измерения длин отрезков.

Сначала выбирают угол, принимаемый за единицу измерения, — единичный угол. Обычно такой угол составляет одну сто восьмидесятую часть развернутого угла. Считают, что величина этого угла равна одному градусу; обозначают $1°$.

Затем для измерения величины данного угла AOB от луча OA последовательно откладывают единичный угол и находят число n, показывающее, сколько раз он укладывается в данном угле. Если при этом луч последнего единичного угла совпадет с лучом OB, то процесс измерения считается законченным и полученное число градусов n будет величиной угла AOB; обозначается $\angle AOB = n°$. Если же луч OC последнего единичного угла лежит между лучами OA и OB, то единичный угол разбивают на 60 равных частей. Величину одной такой части называют одной минутой и обозначают $1'$. Затем последовательно откладывают от луча OC угол, равный одной минуте, и находят число m, показывающее, сколько раз этот угол целиком укладывается в угле COB. Если при этом луч последнего угла совпадет с лучом OB, то процесс измерения считается законченным и величина $n°m'$, показывающая, сколько раз в данном угле укладываются угол в $1°$ и угол в $1'$, будет величиной данного угла. Если же последний луч лежит между лучами OC и OB, то угол в одну минуту делят на 60 равных частей (величину одной такой части считают равной одной секунде и обозначают $1''$) и повторяют процедуру измерения.

Таким образом, ***градусная величина угла*** показывает, сколько раз угол в один градус и его части укладываются в этом угле.

Градусная величина угла удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. Градусные величины равных углов равны.

Свойство 2. Градусная величина суммы углов равна сумме их градусных величин.

Градусную величину угла обычно обозначают так же, как и сам угол. Например, запись $\angle AOB = 30°$ означает, что величина угла AOB равна 30°. Говорят также, что угол AOB равен 30°. Иногда градусную величину угла обозначают строчными греческими буквами, например φ, ψ и т. д.

Непосредственно из определений следует, что прямой угол равен 90°. Острый угол меньше 90°, а тупой угол больше 90°, но меньше 180°.

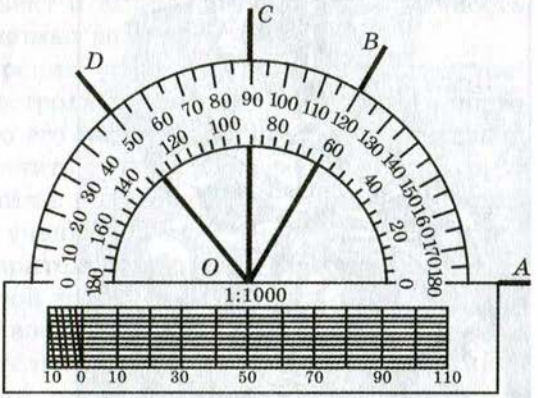


Рис. 5.1

Для измерения величин углов применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является известный вам транспортир (рис. 5.1).

Исторические сведения

Проблема измерения углов восходит к глубокой древности. Астрономические наблюдения, необходимость определения положения солнца и звезд на небе потребовали создания специальных приборов для определения углов, под которыми видны эти светила. На старинной гравюре (рис. 5.2) художник изобразил моряка эпохи Великих географических открытий, прокладывающего курс корабля с помощью измерительных инструментов. Одним из первых угломерных инструментов была астролябия, изобретенная Гиппархом (180—125 гг. до н. э.) и усовершенствованная впоследствии немецким ученым Регионтаном (1436—1476). Она состояла из тяжелого медного диска — лимба, который подвешивался за кольцо так, чтобы он висел вертикально и линия $\Gamma_1\Gamma_2$ принимала горизонтальное положение. По краю лимба наносилась шкала, разделенная на градусы. Кроме этого, на лимбе имелась полоса A_1A_2, называемая алидадой, которая могла вращаться вокруг центра лимба и имела на концах поперечные пластинки с отверстиями, называемыми диоптрами.

Для определения высоты звезды над горизонтом наблюдатель прикладывал глаз к нижнему диоптру и поворачивал алидаду так, чтобы звезда была видна через другой диоптр. Деление на шкале, около которого останавливался край алидады, и показывало высоту звезды над горизонтом в градусах.

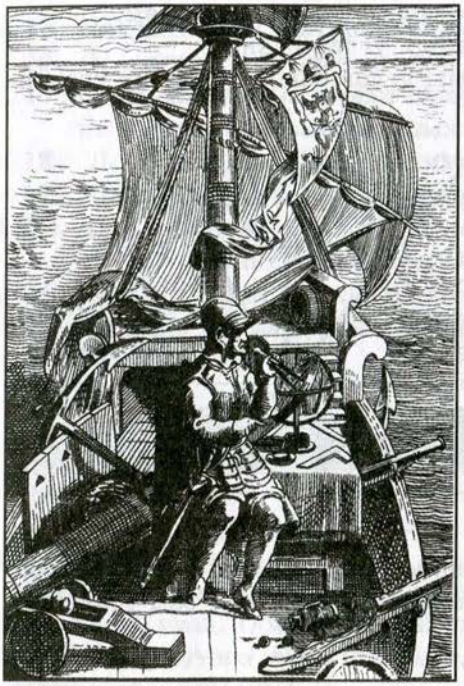


Рис. 5.2

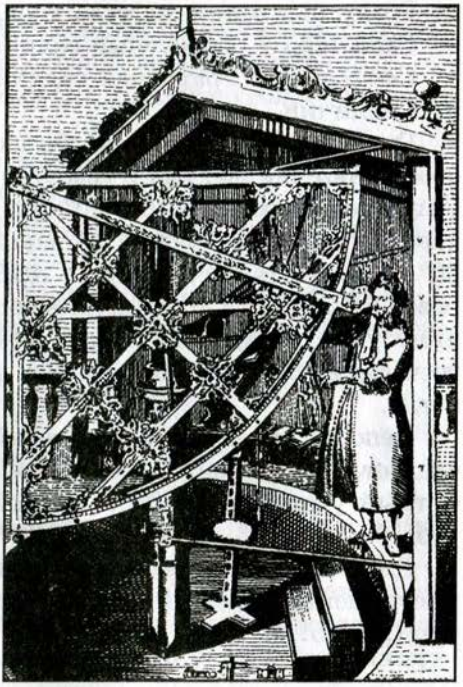


Рис. 5.4

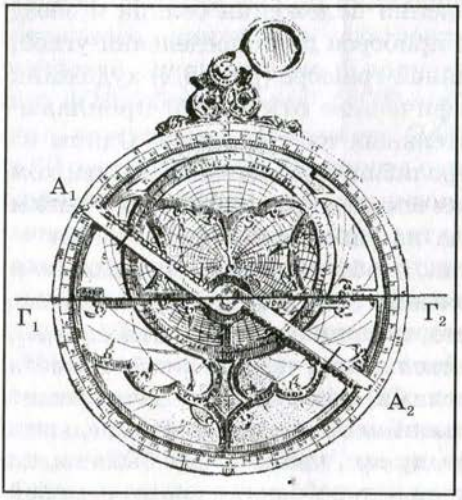


Рис. 5.3

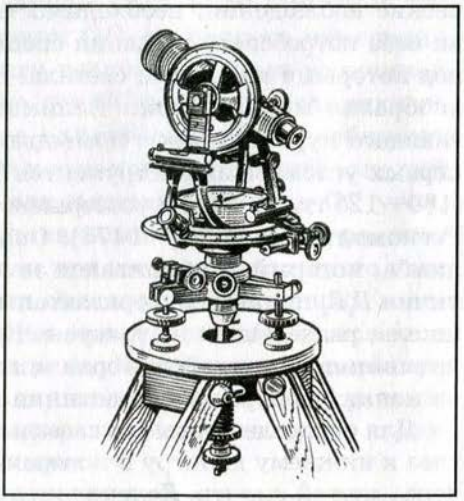


Рис. 5.5

Располагая плоскость лимба горизонтально, можно измерять углы и в горизонтальной плоскости. Для этого после установки астролябии (рис. 5.3) алидаду сначала наводят на один объект наблюдения и засекают угол на шкале лимба, а затем на другой объект и также засекают угол. Разность между этими значениями и есть искомая величина угла.

Другим инструментом для измерения углов был квадрант, представляющий собой одну четвертую часть астролябии (рис. 5.4). Квадрант имел то преимущество перед астролябией, что его можно было сделать значительно больших размеров и тем самым увеличить точность измерения углов.

Существенные усовершенствования в конструкции астролябии и квадранта были сделаны французским ученым Жаном Пикаром в середине XVII века. Пикар заменил диоптры зрительной трубой, изобретенной незадолго до этого Галилеем. Перед линзой трубы он установил сетку из перекрещивающихся волосков, а для плавного вращения алидады использовал микрометрический винт, что значительно повысило точность измерения.

Наиболее совершенным угловым инструментом, применяющимся в настоящее время для выполнения геодезических работ, является теодолит (рис. 5.5), состоящий из двух лимбов, расположенных в вертикальной и горизонтальной плоскостях, что позволяет измерять вертикальные и горизонтальные углы одновременно. На вертикальном лимбе имеется зрительная труба, с помощью которой алидады вертикального и горизонтального лимбов наводятся на объект наблюдения. Точность измерения углов при этом составляет доли минуты.

Пример 1. Один из смежных углов на 45° меньше другого. Найдите эти углы.

Решение. Назовем данные углы $\angle 1$ и $\angle 2$. По условию задачи $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Пусть $\angle 1 = \angle 2 + 45°$. Следовательно, $(\angle 2 + 45°) + \angle 2 = 180°$. Откуда $\angle 2 = \frac{135°}{2} = 67°30'$. $\angle 1 = 67°30' + 45° = 112°30'$.

Пример 2. Сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306°. Найдите эти углы.

Решение. Поскольку два из трех углов, образованных при пересечении двух прямых, смежные, то их сумма равна 180°. Значит, третий угол равен 126°. Смежный с ним угол равен 54°. Оставшийся угол будет равен 126°.

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения величины угла?
2. Что такое: а) градус; б) минута; в) секунда?
3. Что такое градусная величина угла?

4. Что делают для измерения градусной величины угла?
5. Градусная величина угла равна $n°$. Что это означает?
6. Каким свойствам удовлетворяет градусная величина угла?
7. Какие инструменты служат для измерения углов?
8. Что представляет собой: а) астролябия; б) квадрант; в) теодолит?

Задачи

1. С помощью транспортира измерьте величины указанных на рисунке 5.6 углов.

2. С помощью транспортира постройте углы величиной 10°, 30°, 60°, 90°, 120°.

3. Оцените «на глаз» градусную величину углов на рисунке 5.7. Проверьте ваши оценки, измерив углы с помощью транспортира.

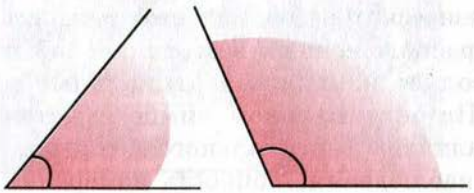


Рис. 5.6

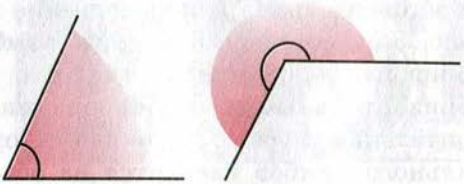


Рис. 5.7

4. Луч OC лежит внутри угла AOB. Найдите градусную величину угла AOB, если: а) $\angle AOC = 35°$, $\angle COB = 75°$; б) $\angle AOC = 75°$, $\angle COB = 62°$; в) $\angle AOC = 94°$, $\angle COB = 85°$.

5. Может ли луч OC лежать внутри угла AOB, если: а) $\angle AOC = 30°$, $\angle AOB = 80°$; б) $\angle AOB = 50°$, $\angle AOC = 100°$; в) $\angle AOC > \angle AOB$?

6. Луч OC лежит внутри угла AOB, равного 60°. Найдите углы AOC и BOC, если: а) угол AOC на 30° больше угла BOC; б) угол AOC в два раза больше угла BOC; в) градусные меры углов AOC и BOC относятся как 2 : 3.

7. Некоторый угол равен 38°. Чему равен смежный с ним угол?

8. Какую часть прямого угла составляют углы, равные: а) 45°; б) 30°; в) 10°; г) 18°; д) 72°; е) 150°?

9. Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.

10. Найдите смежные углы, если: а) один из них на 30° больше другого; б) их разность равна 40°; в) один из них в три раза меньше другого; г) они равны.

11. Найдите смежные углы, если их градусные величины относятся как: а) 2 : 3; б) 3 : 7; в) 11 : 25; г) 22 : 23.

12. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?

13. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

14. Даны три прямые, пересекающиеся в одной точке (рис. 5.8). Докажите, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

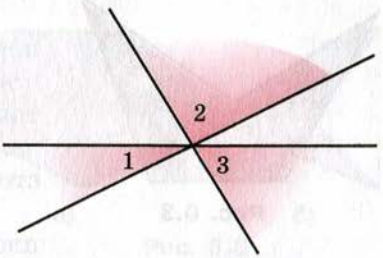


Рис. 5.8

15. Может ли сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, быть равной 150°?

16. Разность двух смежных углов равна 90°. Найдите величину этих углов.

17. Общей частью двух углов величины φ и ψ является угол величины γ. Найдите угол, покрываемый обоими данными углами.

18. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в: а) 3 ч; б) 6 ч; в) 9 ч; г) 5 ч?

19. На сколько градусов повернется минутная стрелка за: а) 20 мин; б) 10 мин?

20. На сколько градусов повернется часовая стрелка за: а) 2 ч; б) 15 мин; в) 30 с?

* **21.** Какой угол образуют часовая и минутная стрелки, когда часы показывают 2 ч 15 мин?

§6. Ломаные и многоугольники

Фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго — началом третьего и т. д., называется ***ломаной линией*** или просто ***ломаной*** (рис. 6.1). Отрезки называются ***сторонами ломаной***, а их концы — ***вершинами ломаной***.

Длиной ломаной называется сумма длин ее сторон.

Ломаная обозначается последовательным указанием ее вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2\ldots A_n$. Ломаная называется ***простой***, если она не имеет точек самопересечения (рис. 6.2).

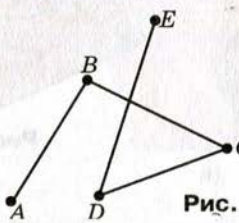


Рис. 6.1

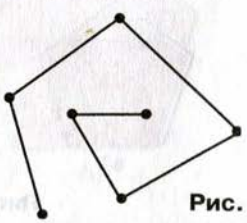


Рис. 6.2

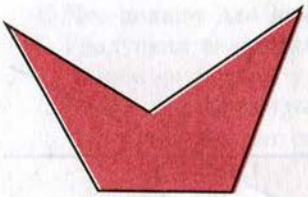


Рис. 6.3

Ломаная называется ***замкнутой***, если начало первого отрезка ломаной совпадает с концом последнего. Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют простой (рис. 6.3).

Всякая простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. Фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью, называется ***многоугольником***. Вершины ломаной называются ***вершинами многоугольника***, стороны ломаной — ***сторонами многоугольника***, а углы, образованные соседними сторонами, — ***углами многоугольника***. Точки многоугольника, не принадлежащие его сторонам, называются ***внутренними***.

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Многоугольники подразделяются на ***треугольники*** — многоугольники с тремя углами, ***четырехугольники*** — многоугольники с четырьмя углами и т. д. (рис. 6.4). Многоугольник, у которого n углов, называется ***n-угольником***.

Многоугольник называется ***правильным***, если у него все стороны равны и все углы равны (рис. 6.5).

Многоугольник называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 6.6).

Любой треугольник выпуклый. Среди многоугольников с числом углов, большим трех, могут быть выпуклые и невыпуклые (рис. 6.7).

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины. Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все

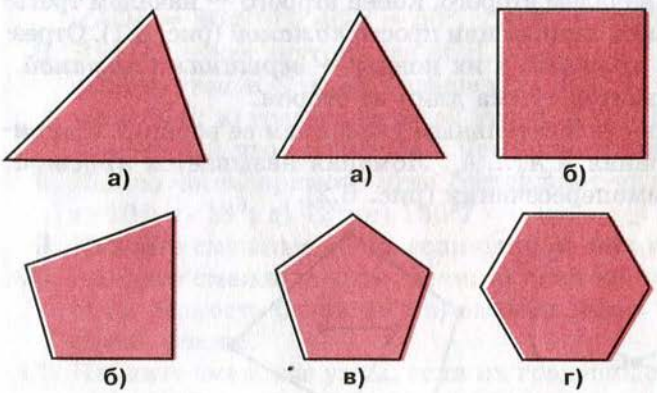


Рис. 6.4

Рис. 6.5

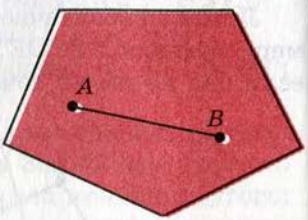


Рис. 6.6

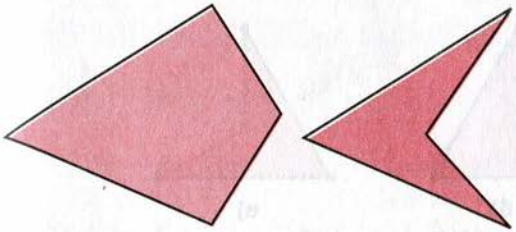
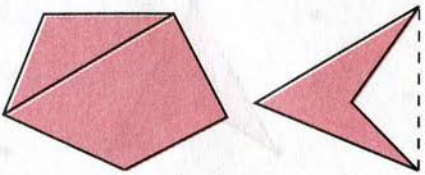


Рис. 6.7



а) б)

Рис. 6.8

свои диагонали. Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 6.8).

Иногда многоугольником называется замкнутая ломаная, у которой возможны точки самопересечения (рис. 6.9). К числу таких многоугольников относятся правильные звездчатые многоугольники, у которых все стороны и все углы равны (рис. 6.10).

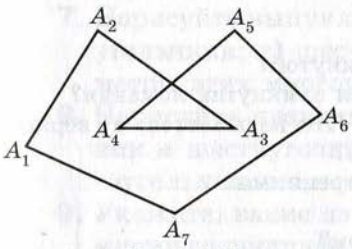
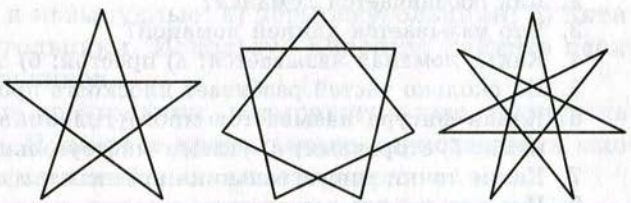


Рис. 6.9

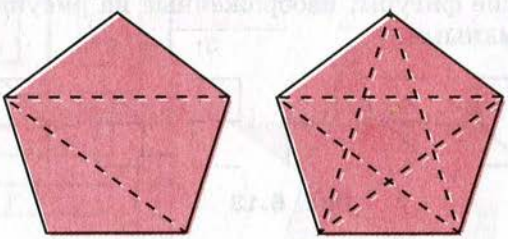


а) б) в)

Рис. 6.10

Пример 1. Сколько диагоналей имеет пятиугольник?

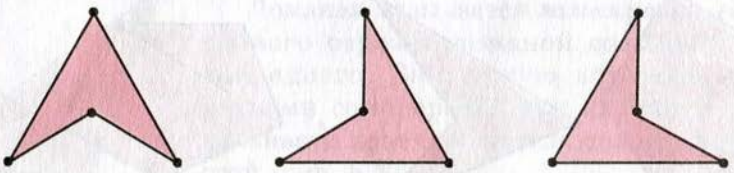
Решение. Через каждую вершину пятиугольника можно провести две диагонали (рис. 6.11, а). Всего вершин пять. Однако, подсчитывая диагонали, проходящие через вершины, мы каждую диагональ подсчитаем дважды: первый раз — проходящей через одну вершину, и второй раз — через другую. Таким образом, число диагоналей пятиугольника равно $2 \cdot 5 : 2 = 5$ (рис. 6.11, б).



а) б)

Рис. 6.11

http://vk.com/school_ipad



а) б) в)

Рис. 6.12

Пример 2. Могут ли четыре точки на плоскости быть вершинами разных четырехугольников?

Решение. Да. Соответствующий пример показан на рисунке 6.12.

Вопросы

1. Что называется ломаной? Что называется: а) сторонами; б) вершинами ломаной?
2. Как обозначается ломаная?
3. Что называется длиной ломаной?
4. Какая ломаная называется: а) простой; б) замкнутой?
5. На сколько частей разбивает плоскость простая замкнутая ломаная?
6. Какая фигура называется многоугольником? Что называется: а) вершинами; б) сторонами; в) углами многоугольника?
7. Какие точки многоугольника называются внутренними?
8. Что называется периметром многоугольника?
9. Какой многоугольник называется n-угольником?
10. Какой многоугольник называется: а) правильным; б) выпуклым?
11. Что называется диагональю многоугольника?
12. Какой многоугольник содержит все свои диагонали?

Задачи

1. Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у нее сторон?

2. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у нее вершин?

3. Укажите, какие фигуры, изображенные на рисунке 6.13, являются простыми ломаными.

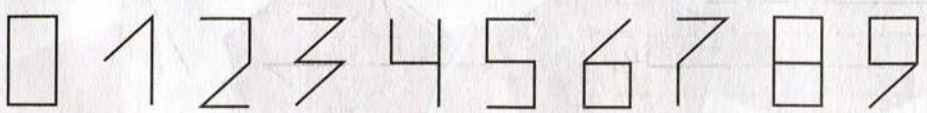
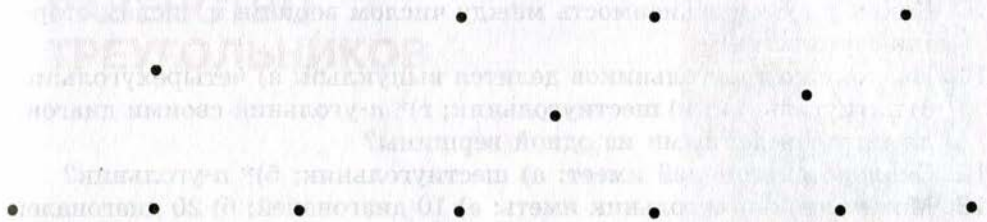


Рис. 6.13

4. Данные точки, изображенные на рисунке 6.14, соедините простой ломаной.

http://vk.com/school_ipad



а) б) в)

Рис 6.14

5. Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области?

6. Проверьте, что линия, изображенная на рисунке 6.15, является простой замкнутой ломаной. Выясните, какие из данных точек лежат внутри, а какие вне этой ломаной.

7. Нарисуйте выпуклые и невыпуклые: а) четырехугольники; б) пятиугольники; в) шестиугольники. Используя линейку, найдите периметры этих многоугольников.

8. Нарисуйте правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.

9. Укажите, какие из представленных на рисунке 6.16 фигур являются многоугольниками, а какие нет.

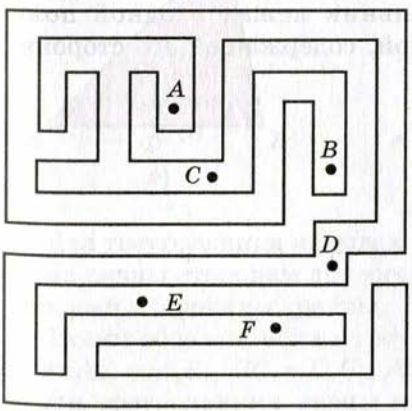


Рис. 6.15

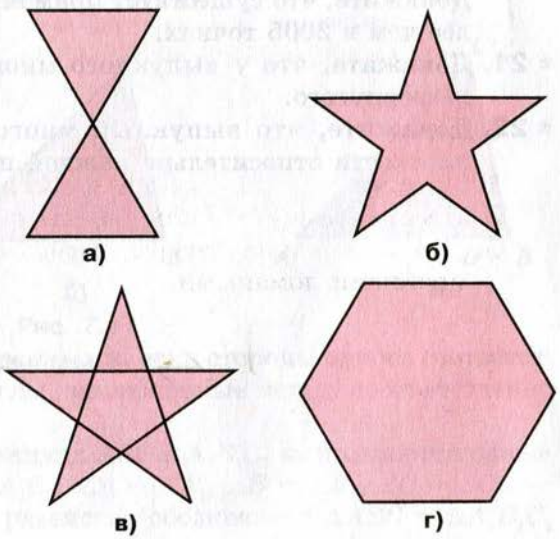


Рис. 6.16

10. Какая имеется зависимость между числом вершин и числом сторон многоугольника?

11. На сколько треугольников делится выпуклый: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г)* n-угольник своими диагоналями, проведенными из одной вершины?

12. Сколько диагоналей имеет: а) шестиугольник; б)* n-угольник?

13. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей?

14. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?

* **15.** Докажите, что в любом четырехугольнике найдется диагональ, целиком в нем содержащаяся.

* **16.** Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из: а) четырех сторон; б) пяти сторон; в) n сторон?

* **17.** Нарисуйте замкнутую шестистороннюю ломаную, пересекающую каждую свою сторону ровно один раз.

* **18.** Может ли прямая иметь с простой замкнутой ломаной нечетное число общих точек?

* **19.** Может ли прямая, не проходящая через вершины простой замкнутой ломаной, пересекать ее стороны в нечетном числе точек?

* **20.** Прямая l имеет с простой замкнутой ломаной 2005 общих точек. Докажите, что существует прямая l', пересекающая эту ломаную более чем в 2005 точках.

* **21.** Докажите, что у выпуклого многоугольника нет углов, больших развернутого.

* **22.** Докажите, что выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону.

Глава II

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§7. Треугольники

Напомним, что треугольником называется многоугольник с тремя углами. ***Периметром*** треугольника называется сумма длин его сторон.

Треугольник обозначается указанием его вершин. Например, треугольник ABC.

Среди основных элементов треугольника, кроме вершин, сторон и углов, выделяют следующие:

- ***медиана*** треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 7.1, а);
- ***биссектриса*** треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны (рис. 7.1, б);
- ***высота*** треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны или ее продолжения и перпендикулярный этой стороне (рис. 7.1, в).

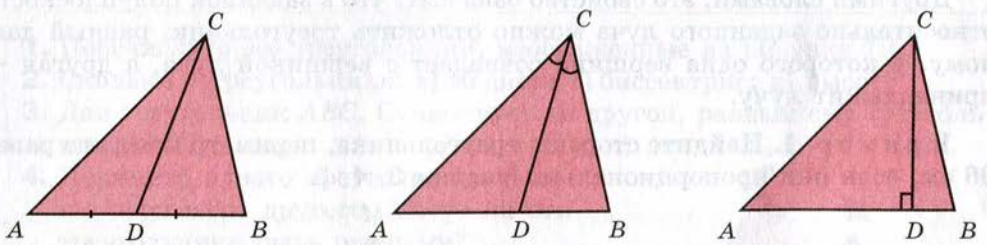


Рис. 7.1

Два треугольника называются ***равными***, если стороны одного соответственно равны сторонам другого и углы, заключенные между соответственно равными сторонами, равны.

Таким образом, если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, — то эти треугольники равны и их равенство обозначают: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 7.2).

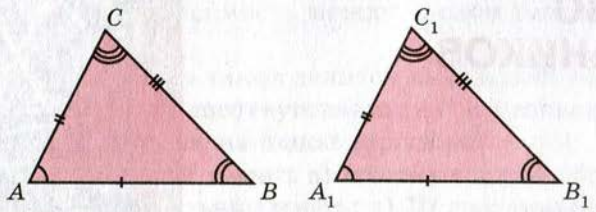


Рис. 7.2

Следующее свойство равенства треугольников принимается за аксиому.

Каковы бы ни были треугольник и луч на плоскости, существует треугольник, равный данному, у которого первая вершина совпадает с вершиной луча, вторая — лежит на луче, а третья — расположена в заданной полуплоскости относительно луча (рис. 7.3).

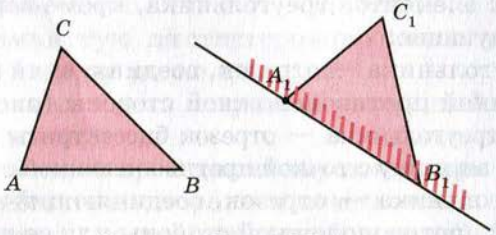
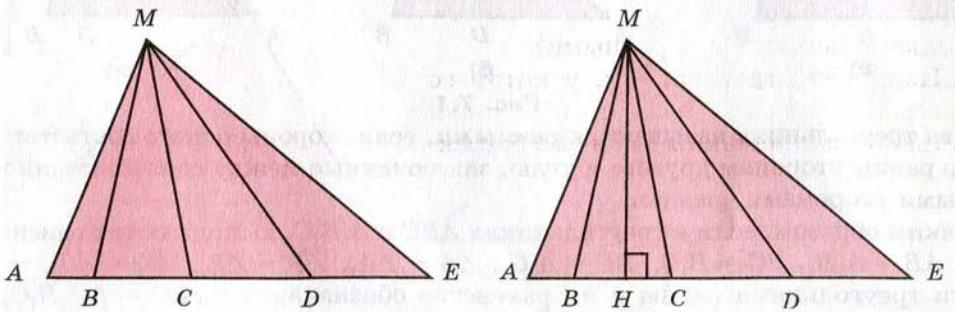


Рис. 7.3

Другими словами, это свойство означает, что в заданной полуплоскости относительно заданного луча можно отложить треугольник, равный данному, у которого одна вершина совпадает с вершиной луча, а другая — принадлежит лучу.

Пример 1. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 96 см, если они пропорциональны числам 3, 4, 5.



а) **Рис. 7.4** б)

Р е ш е н и е. Пусть стороны треугольника равны $3x$, $4x$, $5x$. Тогда $3x + 4x + 5x = 96$. Откуда $12x = 96$, и, следовательно, $x = 8$. Таким образом, стороны треугольника равны 24 см, 32 см и 40 см.

П р и м е р 2. По рисунку 7.4, а выпишите все треугольники. Сколько их? Из какой вершины можно провести высоту, общую для этих треугольников? В каких треугольниках она будет расположена: а) внутри треугольника; б) вне треугольника?

Р е ш е н и е. На рисунке 7.4, а изображены следующие треугольники: AMB, AMC, AMD, AME, BMC, BMD, BME, CMD, CME, DME. Всего 10 треугольников. Общая высота для них проходит через вершину M. На рисунке 7.4, б — это MH. Она лежит: а) внутри треугольников AMC, AMD, AME, BMC, BMD, BME; б) вне треугольников AMB, CMD, CME, DME.

Вопросы

1. Какая фигура называется треугольником? Что называется: а) вершинами треугольника; б) сторонами треугольника; в) углами треугольника?
2. Как обозначается треугольник?
3. Что называется: а) медианой; б) биссектрисой; в) высотой треугольника?
4. Что называется периметром треугольника?
5. Какие треугольники называются равными? Как обозначается равенство треугольников?
6. Сформулируйте аксиому об откладывании треугольника, равного данному.

Задачи

1. Перечислите все треугольники, изображенные на рисунке 7.5.

2. Сколько у треугольника: а) медиан; б) биссектрис; в) высот?

3. Дан треугольник ABC. Существует ли другой, равный ему треугольник ABD?

4. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли эти треугольники быть равными?

5. Нарисуйте треугольник, у которого все углы острые. Проведите из какой-нибудь его вершины медиану, биссектрису и высоту.

6. Нарисуйте треугольник с прямым углом и проведите из вершины прямого угла медиану, биссектрису и высоту.

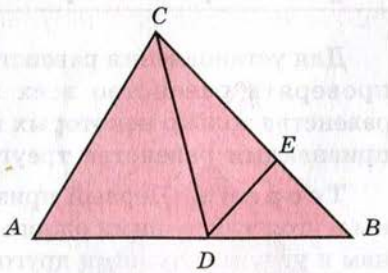


Рис. 7.5

7. Нарисуйте треугольник с тупым углом и проведите из вершины тупого угла медиану, биссектрису и высоту.

○ **8.** Может ли проходить вне треугольника его: а) медиана; б) биссектриса; в) высота?

9. Треугольники ABC и EFG равны. Известно, что $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Найдите стороны треугольника EFG.

10. Треугольники ABC и EFG равны. Известно, что $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. Найдите углы треугольника EFG.

11. Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $XZ = 7$ см. Найдите остальные стороны каждого треугольника.

12. Сторона AB треугольника ABC равна 17 см. Сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

13. Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

14. Периметр треугольника равен 54 см. Найдите его стороны, если они относятся как $2:3:4$.

15. У треугольника равны две стороны и каждая из них составляет $\frac{2}{7}$ его периметра. Третья сторона равна 21 см. Найдите периметр данного треугольника.

* **16.** Докажите, что если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает и одну из двух других его сторон.

* **17.** Дан треугольник ABC. На стороне AC взята точка B_1, а на стороне BC — точка A_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются.

§8. Первый признак равенства треугольников

Для установления равенства треугольников оказывается необязательным проверять равенство всех пар сторон и углов, достаточно проверить равенство только некоторых из них. Соответствующие теоремы называются признаками равенства треугольников.

Теорема. (Первый признак равенства треугольников.) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 8.1). Если, откладывая один из этих треугольников, его удастся совместить с другим, то эти треугольники будут

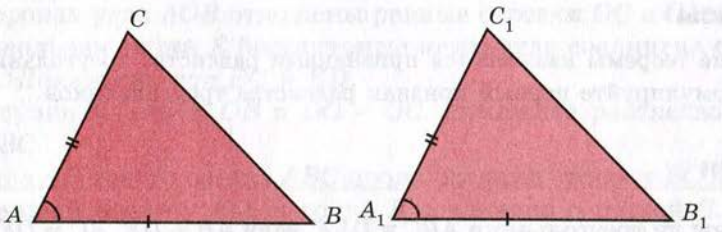


Рис. 8.1

равны. Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 в полуплоскости, определяемой вершиной C_1. При этом вершина A совместится с вершиной A_1. В силу равенства сторон AB и A_1B_1 вершина B совместится с вершиной B_1. В силу равенства углов A и A_1 сторона AC пойдет по стороне A_1C_1, и в силу равенства этих сторон вершина C совместится с вершиной C_1. Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A_1B_1C_1$. Следовательно, эти треугольники равны. ■

Пример 1. На рисунке 8.2 $AB = AC$, $AE = AD$. Докажите, что $BD = CE$.

Решение. Треугольники ABD и ACE равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$, $AE = AD$, угол A общий). Следовательно, $BD = CE$.

Пример 2. Две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника. Следует ли из этого, что эти треугольники равны?

Решение. Нет, не следует. Заметим, что в формулировке признака равенства треугольников требуется, чтобы соответственно равные углы лежали между соответственно равными сторонами. Если это не так, то треугольники могут быть не равны. Примеры таких треугольников показаны на рисунке 8.3.

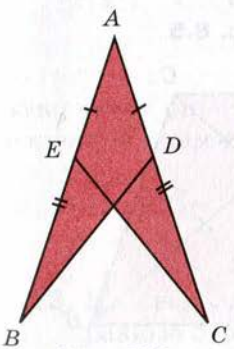


Рис. 8.2

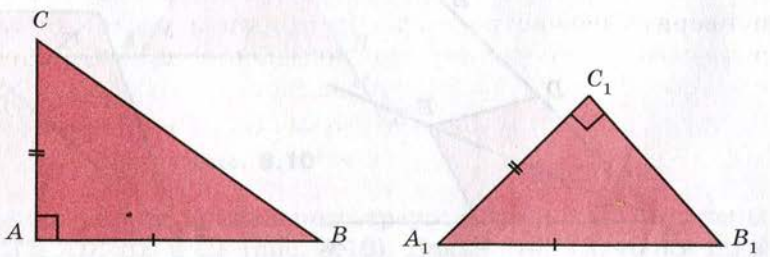


Рис. 8.3

Вопросы

1. Какие теоремы называются признаками равенства треугольников?
2. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.

Задачи

1. Равны ли треугольники ABC и DEF, если $AB = DE$, $AC = DF$ и $\angle A = \angle D$?

2. На рисунке 8.4 $KL = NM$, $\angle 1 = \angle 2$. Есть ли на нем равные треугольники?

3. На рисунке 8.5 $BH \perp AC$ и $AH = CH$. Есть ли на нем равные треугольники?

4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок AC равен 10 м?

5. Через середину O отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что каждая точка C этой прямой одинаково удалена от точек A и B.

6. На стороне AB треугольника ABC взята точка D, а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1. Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

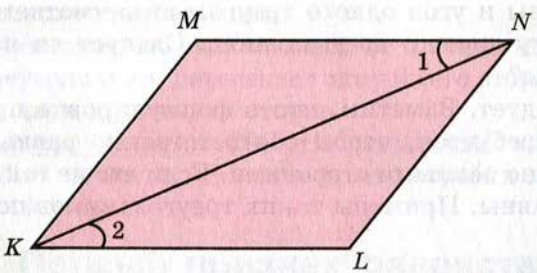


Рис. 8.4

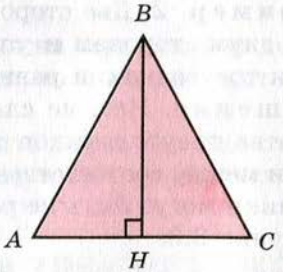


Рис. 8.5

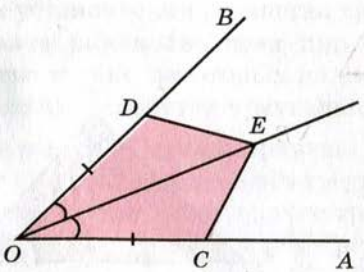


Рис. 8.6

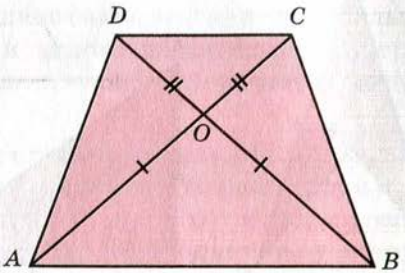


Рис. 8.7

7. На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD (рис. 8.6). Произвольная точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D. Докажите, что $EC = ED$.

8. На рисунке 8.7 $AO = OB$ и $DO = OC$. Докажите равенство отрезков AD и BC.

9. Медиана AD треугольника ABC продолжена за сторону BC на отрезок DE, равный отрезку AD, и точка E соединена с точкой C. Найдите величину угла ACE, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

10. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

11. На рисунке 8.8 $AB = BC$, $BD = BE$, $\angle ABC = \angle DBE$. Найдите на этом рисунке равные треугольники.

12. На сторонах правильного треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF (рис. 8.9). Точки D, E и F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF правильный.

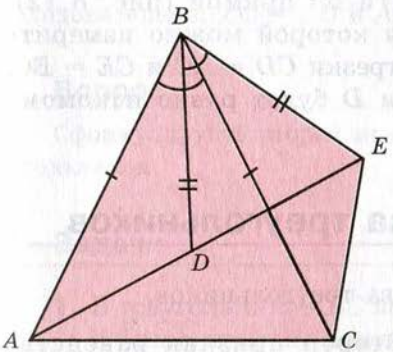


Рис. 8.8

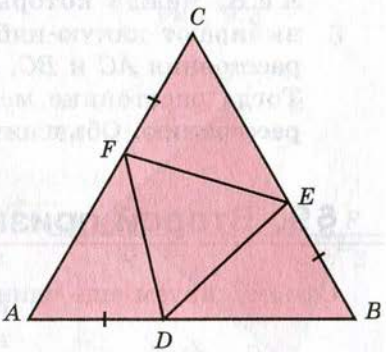


Рис. 8.9

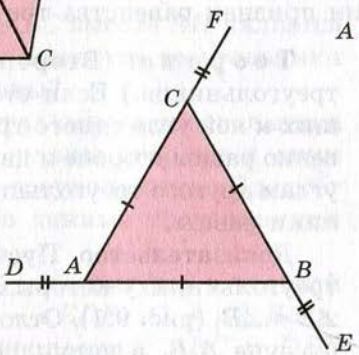


Рис. 8.10

13. На продолжении сторон правильного треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF (рис. 8.10). Докажите, что точки D, E и F являются вершинами правильного треугольника.

14. По рисунку 8.11 докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный.

15. Докажите, что в правильном четырехугольнике диагонали равны.

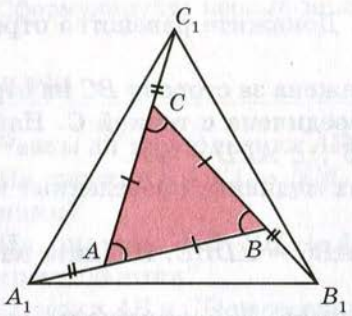


Рис. 8.11

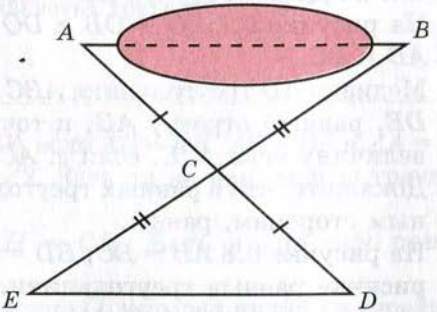


Рис. 8.12

* **16.** Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 8.12), выбирают какую-нибудь точку C, для которой можно измерить расстояния AC и BC, и откладывают отрезки $CD = AC$ и $CE = BC$. Тогда расстояние между точками E и D будет равно искомому расстоянию. Объясните почему.

§9. Второй признак равенства треугольников

Сформулируем еще один признак равенства треугольников.

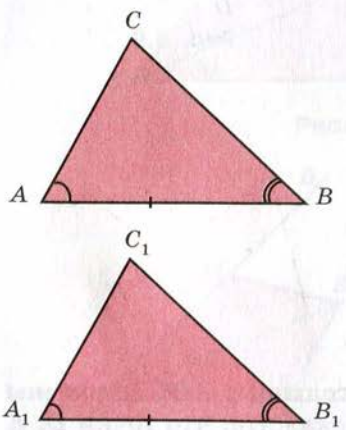


Рис. 9.1

Теорема. (Второй признак равенства треугольников.) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 9.1). Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 в полуплоскости, определяемой вершиной C_1. При этом вершина A совместится с вершиной A_1. В силу равенства сторон AB и A_1B_1 вершина B совместится с вершиной B_1. В силу равенства углов A и A_1 сторона AC пойдет по стороне A_1C_1, и в силу равенства

углов B и B_1 сторона BC пойдет по стороне B_1C_1. Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A_1B_1C_1$. Следовательно, эти треугольники равны.■

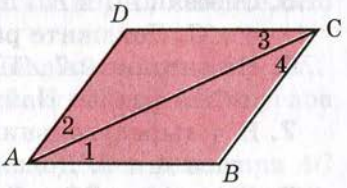


Рис. 9.2

Пример 1. На рисунке 9.2 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Будут ли треугольники CDA и ABC равны?

Решение. Да. Треугольники CDA и ABC равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона и $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ по условию).

Пример 2. На рисунке 9.3 $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

Решение. Треугольники AOC и BOD равны по второму признаку равенства треугольников ($AO = BO$, $\angle OAC = \angle OBD$, $\angle AOC = \angle BOD$). Следовательно, $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

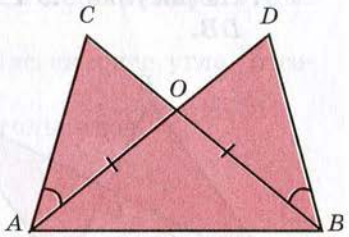


Рис. 9.3

Вопрос

Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

Задачи

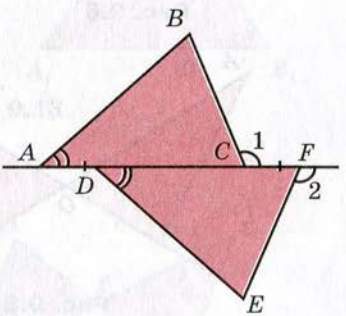


Рис. 9.4

1. В треугольнике ABC высота BH является и биссектрисой. Будут ли треугольники ABH и CBH равны?
2. Сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника. Следует ли из этого, что данные треугольники равны?
3. На рисунке 9.4 дана фигура, у которой $AD = CF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны.
4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 9.5). $OB = OC$ и $\angle B = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOC и DOB.

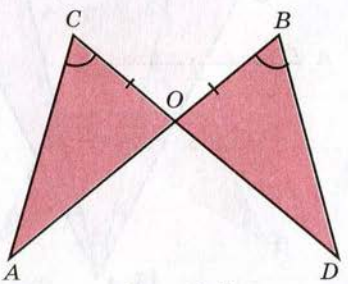


Рис. 9.5

5. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O (рис. 9.6). $AO = OC$ и $\angle A = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOB и COD.

6. На рисунке 9.7 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что треугольники ABC и CDA равны. Найдите AB и BC, если $AD = 19$ см, $CD = 11$ см.

7. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC лежит на биссектрисах углов A и C. Докажите, что треугольники ABC и ADC равны.

8. Лучи AD и BC пересекаются в точке O (рис. 9.8). $\angle 1 = \angle 2$, $OC = OD$. Докажите, что $\angle A = \angle B$.

9. На рисунке 9.9 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ см. Найдите DB.

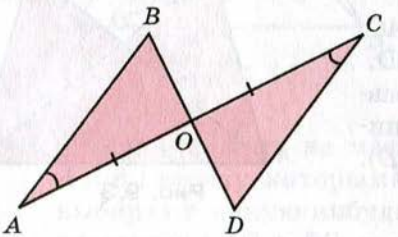


Рис. 9.6

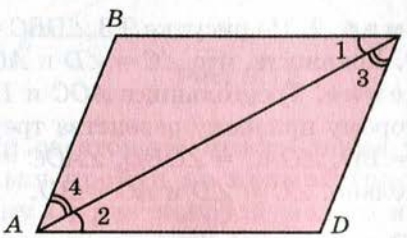


Рис. 9.7

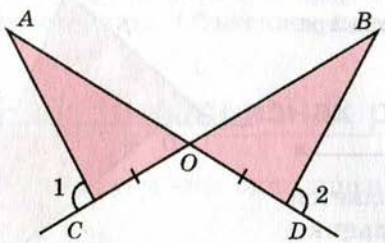


Рис. 9.8

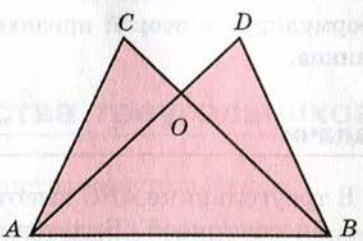


Рис. 9.9

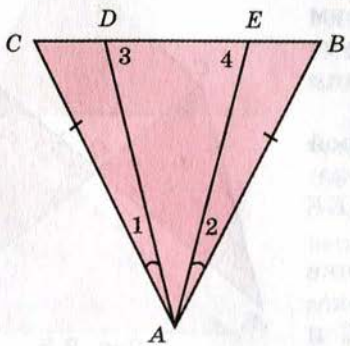


Рис. 9.10

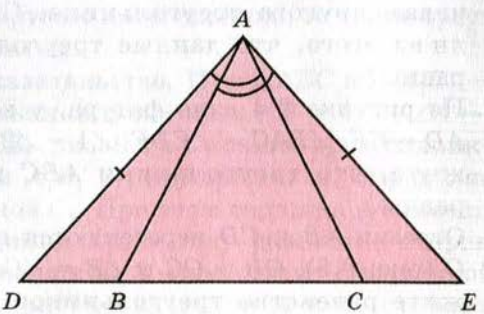


Рис. 9.11

10. В треугольнике ABC $AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 9.10). Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

11. На рисунке 9.11 $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $BD = CE$.

12. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы равных углов равны.

13. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 9.12) $\angle DAB = \angle CBA$ и диагонали AC и BD образуют со стороной AB равные углы. Докажите, что $AC = BD$.

14. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (рис. 9.13). Отрезки CD и C_1D_1 образуют со сторонами соответственно CB и C_1B_1 равные углы. Докажите, что $AD = A_1D_1$.

15. Докажите, что прямая, перпендикулярная биссектрисе угла, отсекает на его сторонах равные отрезки.

16. На рисунке 9.14 укажите пары равных треугольников.

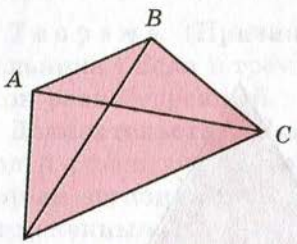


Рис 9.12

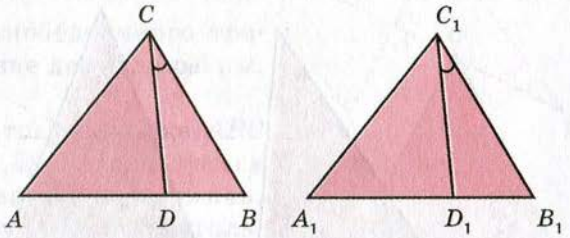


Рис 9.13

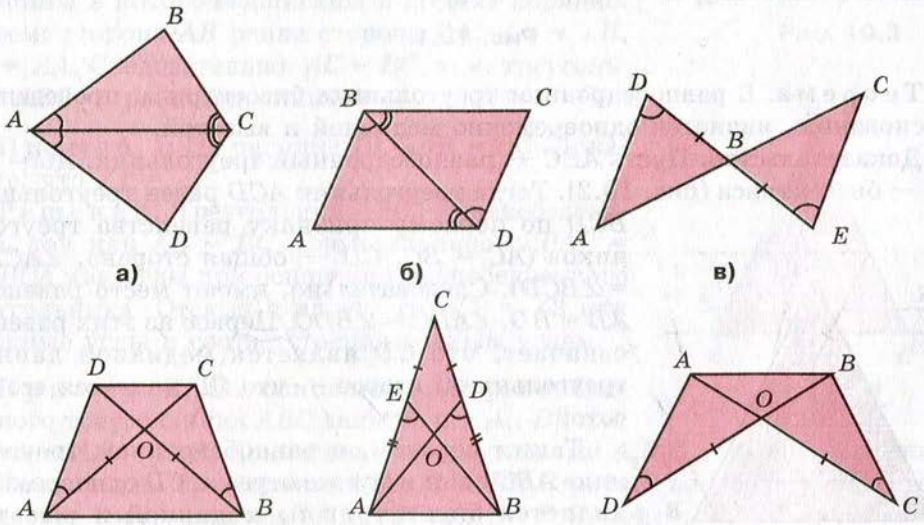


Рис 9.14

§10. Равнобедренные треугольники

В зависимости от соотношений между сторонами треугольники подразделяются на следующие виды: а) разносторонние; б) равнобедренные; в) равносторонние.

Треугольник называется ***разносторонним***, если у него стороны попарно не равны (рис. 10.1, а).

Треугольник называется ***равнобедренным***, если у него две стороны равны (рис. 10.1, б).

Эти равные стороны называются ***боковыми сторонами***, а третья сторона — ***основанием***.

Треугольник называется ***равносторонним***, если у него все стороны равны (рис. 10.1, в).

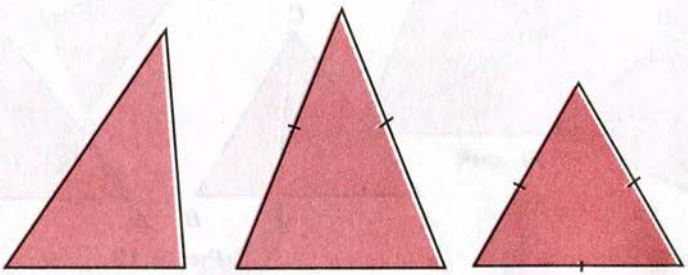


Рис. 10.1

Теорема. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.

Доказательство. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $AC = BC$, CD — биссектриса (рис. 10.2). Тогда треугольник ACD равен треугольнику BCD по первому признаку равенства треугольников ($AC = BC$, CD — общая сторона, $\angle ACD = \angle BCD$). Следовательно, имеют место равенства $AD = BD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Первое из этих равенств означает, что CD является медианой данного треугольника, второе — что CD является его высотой.

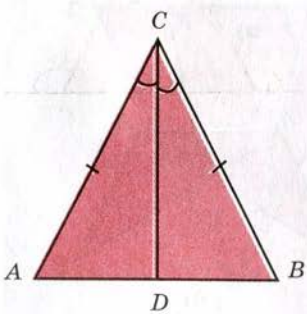


Рис. 10.2

Таким образом, в равнобедренном треугольнике ABC один и тот же отрезок CD одновременно является биссектрисой, медианой и высотой, а также перпендикуляром к основанию, проходящим через его середину. ■

Так как каждое из этих свойств вполне определяет положение отрезка CD, то наличие одного из них влечет за собой все остальные. Например, высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является одновременно биссектрисой угла при вершине, медианой, проведенной к основанию, и перпендикуляром к основанию, проходящим через его середину.

Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство. Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AC = BC$). Проведем биссектрису CD. Треугольники ADC и BDC равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = BC$, DC — общая сторона, $\angle ACD = \angle BCD$). Следовательно, $\angle A = \angle B$. ■

Из этой теоремы следует, что у равностороннего треугольника все углы равны, и, значит, равносторонний треугольник является правильным.

Теорема. (Признак равнобедренного треугольника.) Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол A равен углу B (рис. 10.3). Воспользуемся вторым признаком равенства треугольников, примененным к треугольнику ABC и треугольнику BAC, т. е. к тому же самому треугольнику, вершины в котором записаны в другом порядке. Имеем: сторона AB равна стороне BA, $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$. Следовательно, $AC = BC$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный. ■

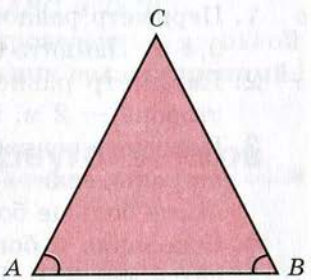


Рис. 10.3

Пример 1. На рисунке 10.4 $AB = BC$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

Решение. Треугольник ABC — равнобедренный, так как $AB = BC$. Следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2$ как смежные углы к соответственно равным углам.

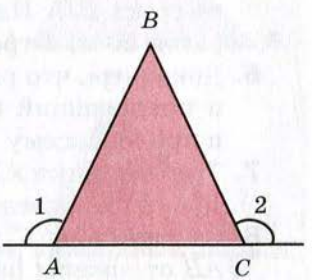


Рис. 10.4

Пример 2. На основании AB равнобедренного треугольника ABC даны точки A_1, B_1, для которых $AA_1 = B_1B$. Докажите, что треугольник A_1B_1C — равнобедренный.

Решение. Треугольники AA_1C и BB_1C равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = BC$, $AA_1 = B_1B$, $\angle A = \angle B$). Следовательно, $A_1C = B_1C$, и, значит, треугольник A_1B_1C — равнобедренный.

Вопросы

1. Назовите виды треугольников в зависимости от соотношения между их сторонами.
2. Какой треугольник называется: а) разносторонним; б) равнобедренным; в) равносторонним?
3. Какие стороны называются боковыми, а какая — основанием равнобедренного треугольника?
4. Чем является биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника?
5. Что можно сказать об углах при основании равнобедренного треугольника?

Задачи

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 2 м, а основание — 0,4 м. Найдите боковую сторону.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона — 2 м. Найдите основание.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если: а) основание меньше боковой стороны на 3 м; б) основание больше боковой стороны на 3 м.

4. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника относятся как 3 : 8. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 38 см.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Найдите ее длину, если периметр треугольника ABC равен 50 м, а треугольника ABD — 40 м.

6. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

7. Треугольники ABC и ABD равнобедренные с общим основанием AB. Докажите равенство треугольников ACD и BCD.

8. От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB. Докажите равенство треугольников: а) CAB_1 и CBA_1; б) ABB_1 и BAA_1.

9. Треугольники ACD и BCD равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CD. Докажите, что треугольники ABC и ABD равнобедренные.

10. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

11. Докажите, что у равнобедренного треугольника медианы, проведенные к боковым сторонам, равны; биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны.

12. На рисунке 10.5 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

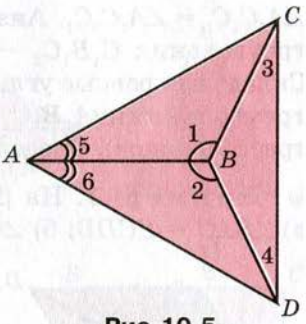


Рис 10.5

13. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

14. Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой, причем отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB, то треугольник CDE тоже равнобедренный с основанием CD.

15. Отрезки равной длины AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB.

* **16.** Докажите, что если медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, совпадают, то треугольник равнобедренный.

§11. Третий признак равенства треугольников

Рассмотрим еще один признак равенства треугольников.

Теорема. (Третий признак равенства треугольников.) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

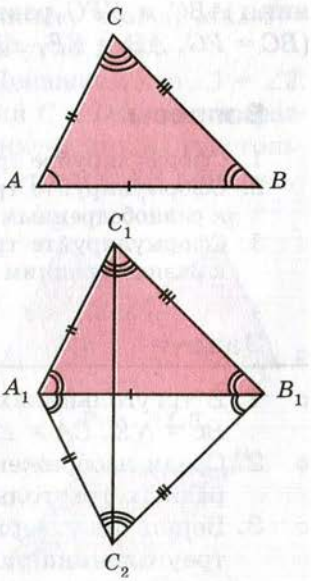


Рис. 11.1

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 11.1). Докажем, что эти треугольники равны. Для этого отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла бы в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1. Тогда треугольник $A_1B_1C_2$ будет равен треугольнику ABC. При этом луч C_1C_2 может лежать внутри угла $A_1C_1B_1$, совпадать с одной из его сторон или лежать вне этого угла. Рассмотрим первый из этих случаев (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ — равнобедренный, и, значит,

$\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Аналогично, из равенства сторон B_1C_1 и B_1C_2 следует, что треугольник $C_1B_1C_2$ — равнобедренный, и, значит, $\angle B_1C_1C_2 = \angle B_1C_2C_1$. Складывая равные углы, получаем, что угол C_1 равен углу C_2. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$, $A_1B_1C_2$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. ■

Пример 1. На рисунке 11.2 $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что: а) $\angle BAC = \angle CDB$; б) $\angle CAD = \angle ADB$.

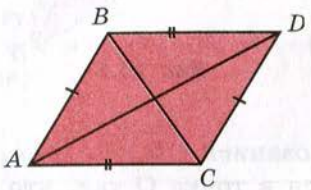


Рис. 11.2

Решение. Треугольники ABC и DCB равны по третьему признаку ($AB = DC$, $AC = DB$, BC — общая сторона). Следовательно, $\angle BAC = \angle CDB$. Аналогично, треугольники ABD и DCA равны по третьему признаку ($AB = DC$, $AC = DB$, AD — общая сторона). Следовательно, $\angle CAD = \angle ADB$.

Пример 2. В треугольниках ABC и EFG равны стороны AB и EF, BC и FG, а также медианы CD и GH, проведенные соответственно к сторонам AB и EF. Докажите, что треугольники равны.

Решение. Треугольники BCD и FGH равны по третьему признаку равенства треугольников ($BC = FG$, $CD = GH$ по условию, $BD = FH$ как половины равных сторон). Следовательно, $\angle B = \angle F$, и, значит, треугольники ABC и EFG равны по первому признаку равенства треугольников ($BC = FG$, $AB = EF$, $\angle B = \angle F$).

Вопросы

1. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.
2. Сформулируйте третий признак равенства треугольников применительно к равнобедренным треугольникам.
3. Сформулируйте третий признак равенства треугольников применительно к равносторонним треугольникам.

Задачи

○ **1.** В треугольниках ABC и MNK справедливы неравенства $AB \neq MN$, $BC \neq NK$, $CA \neq KM$, а треугольники все же равны. Возможно ли это?

○ **2.** Среди изображенных на рисунке 11.3 треугольников укажите пары равных треугольников.

○ **3.** Верно ли утверждение, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то эти треугольники равны? Почему?

○ **4.** На рисунке 11.4 $AB = DC$ и $BC = AD$. Докажите, что угол B равен углу D.

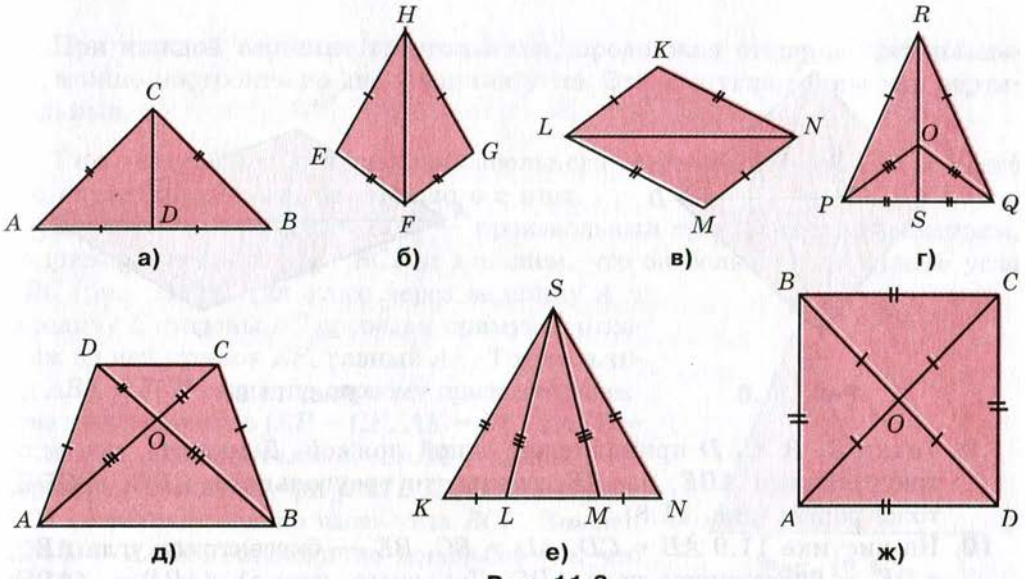


Рис. 11.3

5. Докажите, что у равных треугольников медианы, проведенные из соответственных вершин, равны.

6. На рисунке 11.5 $AB = AD$ и $DC = BC$. Докажите, что: а) $\angle ADC = \angle ABC$; б) отрезок AC является биссектрисой угла BAD.

7. На рисунке 11.6 $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

8. Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 11.7). Докажите, что: а) треугольники CBD и DAC равны; б) прямая CD делит отрезок AB пополам.

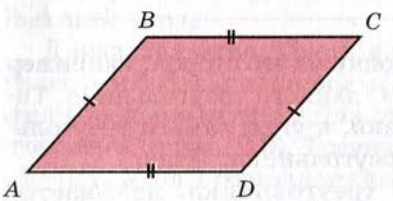


Рис. 11.4

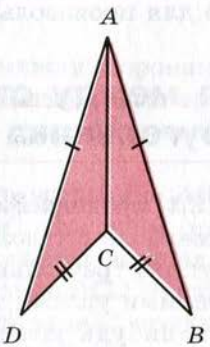


Рис. 11.5

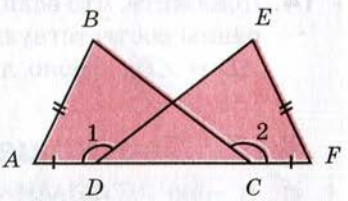


Рис. 11.6

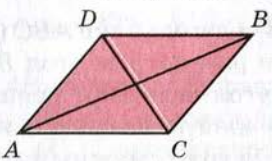


Рис. 11.7

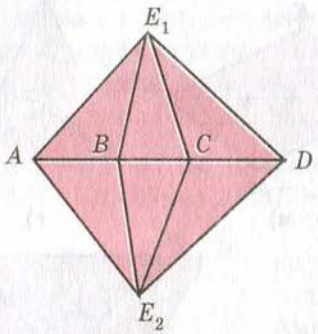


Рис. 11.8

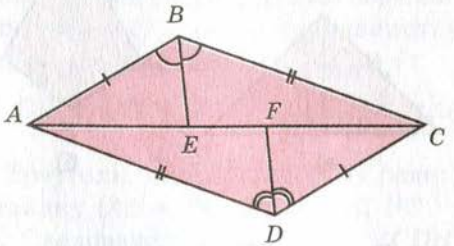


Рис. 11.9

9. Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны (рис. 11.8).

10. На рисунке 11.9 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC, а DF — биссектриса угла ADC. Докажите, что: а) $\angle ABE = \angle ADF$; б) $\Delta ABE = \Delta CDF$.

11. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ биссектрисы AD и A_1D_1 равны; $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

* **12.** Докажите, что если у выпуклых четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны и диагонали AC и A_1C_1, то равны и соответствующие углы.

* **13.** Верно ли, что если у двух выпуклых четырехугольников равны соответствующие стороны, то равны и соответствующие углы? Приведите примеры.

* **14.** Докажите, что если у выпуклых четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны и $\angle A = \angle A_1$, то $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$. Верно ли это для произвольных четырехугольников?

§12. Соотношения между сторонами и углами треугольника

В треугольнике ABC (рис. 12.1) продолжим одну из его сторон, например AC, и рассмотрим угол BCD, смежный с углом C данного треугольника. Такой угол называют внешним углом треугольника, а углы самого треугольника иногда называют внутренними углами треугольника. Итак:

- угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется ***внешним углом*** этого треугольника.

При каждой вершине треугольника, продолжая стороны треугольника, можно построить по два внешних угла. Эти два угла равны как вертикальные.

Теорема. Внешний угол произвольного треугольника больше каждого его внутреннего угла, не смежного с ним.

Доказательство. Пусть ABC — произвольный треугольник. Рассмотрим, например, внешний угол BCD и докажем, что он больше внутреннего угла ABC (рис. 12.2). Для этого через вершину A и середину E стороны BC проведем прямую и отложим на ней отрезок EF, равный AE. Треугольники ABE и FCE равны по первому признаку равенства треугольников ($BE = CE$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BCF$. Но вершина F лежит внутри угла BCD. Поэтому угол BCF составляет только часть угла BCD. Значит, $\angle BCD > \angle ABC$. Аналогично доказывается, что $\angle BCD > \angle BAC$ (сделайте это самостоятельно). ■

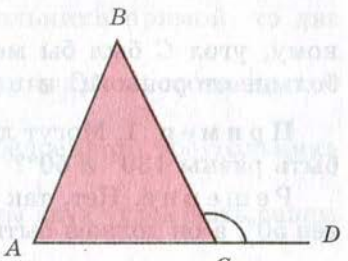


Рис. 12.1

Следствие 1. В треугольнике может быть только один тупой угол.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол C тупой. Тогда смежный с ним внешний угол будет острым. По доказанной теореме он больше внутренних углов A и B. Следовательно, углы A и B тоже острые. ■

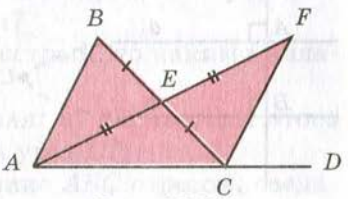


Рис. 12.2

Следствие 2. В треугольнике может быть только один прямой угол.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Теорема. (Соотношение между сторонами и углами треугольника.) В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

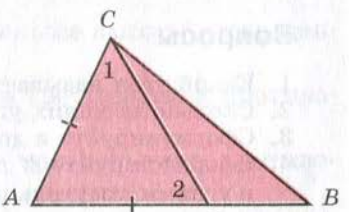


Рис. 12.3

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. Докажем, что угол C больше угла B. Для этого отложим на луче AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 12.3). Треугольник ACD — равнобедренный. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Угол 1 составляет часть угла C, поэтому $\angle 1 < \angle C$. С другой стороны, угол 2 является внешним углом треугольника BCD, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Следовательно, имеем $\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$. ■

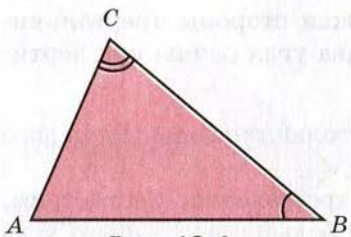


Рис. 12.4

Следствие. В произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол C больше угла B (рис. 12.4). Стороны AB и AC не могут быть равны, так как в этом случае треугольник ABC был бы равнобедренным и, следовательно, угол C равнялся бы углу B. Сторона AB не может быть меньше стороны AC, так как в этом случае, по доказанному, угол C был бы меньше угла B. Остается только, что сторона AB больше стороны AC. ■

Пример 1. Могут ли в треугольнике градусные величины двух углов быть равны 130° и 60°?

Решение. Нет, так как внешний угол к углу треугольника в 130° равен 50°, а он должен быть больше всех остальных углов треугольника.

Пример 2. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

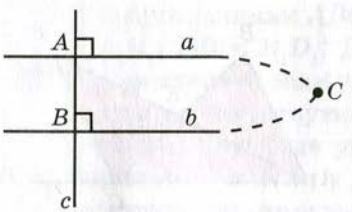


Рис. 12.5

Решение. Пусть прямые a и b перпендикулярны прямой c (рис. 12.5) и A, B — их точки пересечения с прямой c. Если бы прямые a и b пересекались в точке C, то внешний угол при вершине A треугольника ABC был бы равен 90° и равен внутреннему углу B, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Значит, прямые a и b не пересекаются, т. е. параллельны.

Вопросы

1. Какой угол называется внешним углом треугольника?
2. Сколько внешних углов имеется при каждой вершине треугольника?
3. Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
4. Сформулируйте и докажите теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.

Задачи

○ **1.** Может ли внешний угол треугольника быть больше: а) одного внутреннего угла; б) двух внутренних углов этого треугольника? Приведите примеры.

○ **2.** Какая сторона треугольника лежит против: а) прямого угла; б) тупого угла?

○ **3.** Известно, что в треугольнике ABC $BC > AC > AB$. Какой из углов больше: а) B или A; б) C или A; в) B или C?

○ **4.** Сравните стороны треугольника ABC, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.

○ **5.** Какой вид имеет треугольник, если известно, что: а) два его угла равны между собой; б) три его угла равны между собой?

○ **6.** Могут ли в треугольнике быть: а) два прямых угла; б) два тупых угла?

7. Докажите, что если один из углов треугольника прямой, то два другие острые.

8. Докажите, что если один из углов треугольника тупой, то два другие острые.

9. Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

10. Могут ли в треугольнике градусные величины двух углов быть равны 100° и 90°?

11. Точка D, взятая внутри треугольника ABC, соединена с вершинами A и C. Докажите, что угол ADC больше угла ABC.

12. Может ли внешний угол при основании равнобедренного треугольника быть: а) прямым; б) острым; в) тупым?

13. Если один из внешних углов треугольника острый, то какими являются его остальные внешние углы?

14. В треугольнике ABC сторона AB наибольшая: а) какие углы этого треугольника острые; б) каким может быть угол C?

15. Докажите, что в равнобедренном треугольнике ABC отрезок, соединяющий любую точку основания AB, отличную от A и B, с вершиной C, меньше боковой стороны.

* **16.** Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

17. Докажите, что средней по величине стороне треугольника противолежит средний по величине угол.

18. Докажите, что среднему по величине углу треугольника противолежит средняя по величине сторона.

19. Используя соотношение между сторонами и углами треугольника, докажите признак равнобедренного треугольника: «Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный».

* **20.** Пусть в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$. Докажите, что: а) если CD — медиана, то $\angle ACD < \angle BCD$; б) если CD — биссектриса, то $AD > BD$.

* **21.** Можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника?

§13. Соотношения между сторонами треугольника

Одним из основных соотношений между сторонами треугольника является неравенство треугольника.

Теорема. (Неравенство треугольника.) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

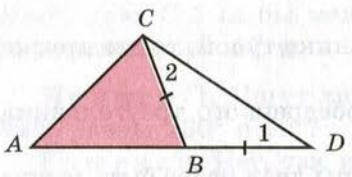


Рис. 13.1

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Отложим на продолжении стороны AB отрезок BD, равный стороне BC (рис. 13.1). Треугольник BDC — равнобедренный. Поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Угол 2 составляет часть угла ACD. Следовательно, $\angle 2 < \angle ACD$. Таким образом, в треугольнике ACD угол C больше угла D. Воспользуемся тем, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Получим неравенство $AD > AC$. Но $AD = AB + BD = AB + BC$. Следовательно, имеем неравенство $AB + BC > AC$, или $AC < AB + BC$, означающее, что сторона AC треугольника меньше суммы двух других сторон. ■

Следствие 1. Каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AC больше стороны BC. По доказанной теореме выполняется неравенство $AB + BC > AC$. Вычитая из обеих частей этого неравенства BC, получим неравенство $AB > AC - BC$, означающее, что сторона AB треугольника больше разности двух сторон AC и BC. ■

Следствие 2. Если выполняется равенство $AC + CB = AB$, то точка C лежит на отрезке AB между точками A и B.

Доказательство. Действительно, если точка C не принадлежит прямой AB, то будет выполняться неравенство $AC + CB > AB$. Если точка C принадлежит прямой AB и находится вне отрезка AB, то также будет выполняться это неравенство. Остается одна возможность — точка C лежит на отрезке AB между точками A и B. ■

Теорема. Длина отрезка, соединяющего концы ломаной, не превосходит длины самой ломаной.

Доказательство. Рассмотрим, например, ломаную $ABCDE$ (рис. 13.2). Заменим соседние стороны AB и BC на отрезок AC. При этом длина ломаной уменьшится или, по крайней мере, не увеличится. Будем и дальше

заменять соседние стороны ломаной на отрезки, пока не дойдем до отрезка, соединяющего начало и конец ломаной. При этом каждый раз длина ломаной не будет увеличиваться. Значит, длина отрезка, соединяющего концы ломаной, не превосходит длины всей ломаной. ■

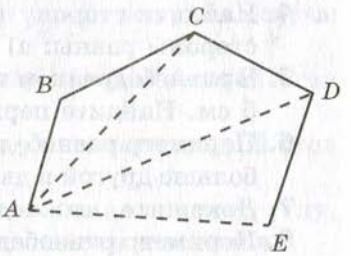


Рис. 13.2

Пример 1. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 15 см, а другая 7 см. Найдите его периметр.

Решение. Сторона, равная 15 см, не может быть основанием равнобедренного треугольника, так как в этом случае не выполнялось бы неравенство треугольника ($7 + 7 < 15$). Поэтому сторона, равная 15 см, является боковой стороной, и, следовательно, периметр данного треугольника равен $7 + 15 + 15 = 37$ (см).

Пример 2. Докажите, что если для точек A, B, C и D выполняется равенство $AB + BC + CD = AD$, то они принадлежат одной прямой.

Решение. Для точек A, B и D будет выполняться неравенство $AB + BD \leqslant AB + BC + CD = AD$. С другой стороны, выполняется неравенство $AD \leqslant AB + BD$. Следовательно, имеем равенство $AB + BD = AD$, из которого вытекает, что точки A, B и D принадлежат одной прямой. Аналогично, взяв вместо точки B точку C, получим, что точки A, C и D принадлежат одной прямой. Значит, все четыре точки принадлежат одной прямой.

Вопросы

1. В чем заключается неравенство треугольника?
2. Что можно сказать о разности двух сторон треугольника?
3. Что можно сказать о точке C, для которой выполняется равенство $AC + CB = AB$?
4. Может ли длина отрезка, соединяющего концы ломаной, быть: а) больше длины ломаной; б) равной длине ломаной?

Задачи

1. Можно ли построить треугольник со сторонами: а) 13 см, 2 см, 8 см; б) 1 м, 0,5 м, 0,5 м?

2. Могут ли стороны треугольника относиться как: а) $1 : 2 : 3$; б) $2 : 3 : 6$; в) $1 : 1 : 2$?

3. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая 10 см. Какая из них является основанием?

4. Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 6 см и 3 см; б) 8 см и 2 см.

5. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 12 см, а другая — 5 см. Найдите периметр данного треугольника.

6. Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см. Одна из сторон больше другой в два раза. Найдите длины сторон этого треугольника.

7. Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.

8. Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов острый. Найдите стороны треугольника.

9. Докажите, что если для точек A, B и C выполняется равенство $AC - AB = BC$, то они принадлежат одной прямой.

10. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины его периметра.

11. Существуют ли на плоскости точки A, B, C, D, для которых выполняется неравенство $AB + BC + CD < AD$?

12. Для точек A, B, C, D одной прямой выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$. Выясните, как расположены эти точки.

* **13.** Верно ли, что если для точек A, B, C, D выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$, то они принадлежат одной прямой?

* **14.** Докажите, что диагонали четырехугольника меньше его полупериметра.

* **15.** В каких пределах может изменяться периметр треугольника, если две его стороны равны a и b?

* **16.** Для точек A, B, C, D на плоскости выполняются равенства $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см и неравенство $AC + BD \leqslant 2$ см. Найдите AD.

* **17.** Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше его половины.

* **18.** Докажите, что для всякой точки O, взятой внутри треугольника ABC, выполняется неравенство $AB + BC > AO + OC$.

* **19.** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до вершин данного многоугольника больше его полупериметра.

* **20.** Четыре населенных пункта расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. В каком месте следует построить пекарню, чтобы сумма расстояний от нее до всех четырех данных пунктов была наименьшей?

§14. Прямоугольные треугольники

В зависимости от величины углов различают следующие виды треугольников: остроугольные, тупоугольные и прямоугольные.

Треугольник называется ***остроугольным***, если у него все углы острые (рис. 14.1, а).

Треугольник называется ***тупоугольным***, если у него есть тупой угол (рис. 14.1, б).

Треугольник называется ***прямоугольным***, если у него есть прямой угол (рис. 14.1, в).

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется ***гипотенузой***, две другие стороны называются ***катетами***.

На рисунке 14.1, в $\angle C = 90°$, AB — гипотенуза, AC и BC — катеты прямоугольного треугольника ABC.

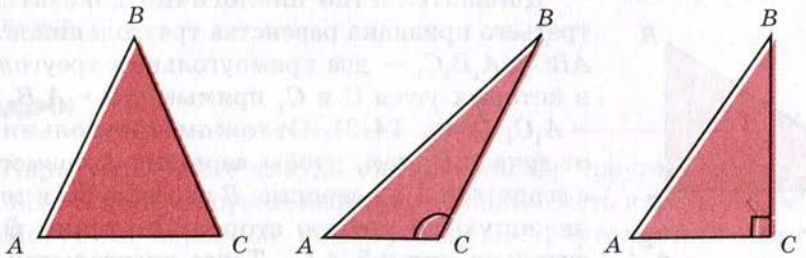


Рис. 14.1

Так как внешний угол к прямому углу треугольника является прямым и он больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним, то в прямоугольном треугольнике только один прямой угол, а остальные два — острые.

Так как против большего угла в треугольнике лежит большая сторона, то гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катетов.

Признаки равенства треугольников, примененные к прямоугольным треугольникам, дают следующие признаки равенства прямоугольных треугольников.

Теорема. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Прямоугольные треугольники будут равны по двум сторонам и углу между ними, т. е. по первому признаку равенства треугольников. ■

Теорема. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему

к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Прямоугольные треугольники будут равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, т. е. по второму признаку равенства треугольников. ■

Рассмотрим еще один признак равенства прямоугольных треугольников.

Теорема. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

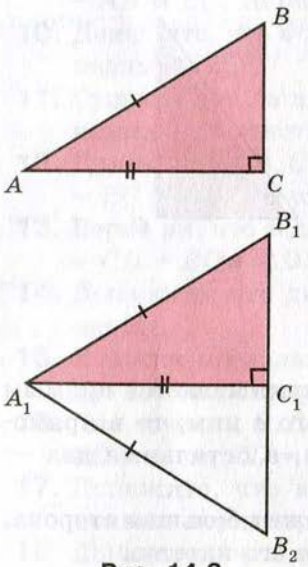


Рис. 14.2

Доказательство аналогично доказательству третьего признака равенства треугольников. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника, в которых углы C и C_1 прямые, $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$ (рис. 14.2). Отложим треугольник ABC от луча A_1C_1 так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а вершина B перешла бы в точку B_2, лежащую по другую сторону от точки B_1 относительно прямой A_1C_1. Тогда треугольник $A_1B_2C_1$ будет равен треугольнику ABC. Так как углы $A_1C_1B_1$ и $A_1C_1B_2$ прямые, то точки C_1, B_1 и B_2 принадлежат одной прямой. Из равенства сторон A_1B_1 и A_1B_2 следует, что треугольник $B_1A_1B_2$ — равнобедренный. Воспользуемся тем, что высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является биссектрисой. Получим, что A_1C_1 — биссектриса, и, значит, равны углы $C_1A_1B_1$ и $C_1A_1B_2$. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. ■

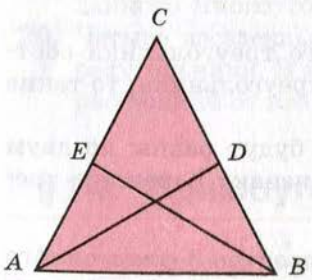


Рис. 14.3

Пример 1. Может ли прямоугольный треугольник иметь стороны, равные 4, 5, 5?

Решение. Нет, так как гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катетов и, следовательно, одна сторона прямоугольного треугольника должна быть больше двух других сторон.

Пример 2. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный.

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC высоты AD и BE равны (рис. 14.3). Прямоугольные треугольники ABD и BAE равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle B = \angle A$, и, следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

Вопросы

1. Назовите виды треугольников в зависимости от их углов.
2. Какой треугольник называется: а) остроугольным; б) тупоугольным; в) прямоугольным?
3. Что называется гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника?
4. Что больше, катет или гипотенуза прямоугольного треугольника, и почему?
5. Сформулируйте и докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.

Задачи

1. Нарисуйте какие-нибудь прямоугольные треугольники.

2. Может ли прямоугольный треугольник иметь катеты 11 см и 111 см?

3. Могут ли неравные прямоугольные треугольники иметь равные гипотенузы?

4. Могут ли неравные прямоугольные треугольники иметь равные катеты?

5. Может ли прямоугольный треугольник иметь два прямых угла?

6. Может ли прямоугольный треугольник иметь тупой угол?

7. Может ли прямоугольный треугольник быть: а) равнобедренным; б) равносторонним?

8. Стороны прямоугольного треугольника равны 3 см, 4 см, 5 см. Чему равна гипотенуза?

9. На высоте равнобедренного треугольника, опущенной на его основание, взята произвольная точка. Докажите, что она одинаково удалена от вершин при основании.

10. Докажите, что если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

11. В равнобедренном треугольнике ABC точки D и E взяты на основании AC так, что $AD = CE$. Из точек D и E к основанию проведены перпендикуляры до пересечения с боковыми сторонами треугольника соответственно в точках M и N. Докажите, что $DM = EN$.

12. Докажите, что в равнобедренном треугольнике две высоты, проведенные из вершин основания, равны.

13. Докажите, что если катет и высота, опущенная на гипотенузу, одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и высоте,

опущенной на гипотенузу, другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

14. В треугольнике KLM проведена медиана LN. Докажите, что высоты треугольников MLN и KLN, проведенные соответственно из вершин M и K, равны.

15. На сторонах угла с вершиной O взяты точки A и B так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C. Докажите, что луч OC — биссектриса данного угла.

* **16.** В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена медиана BD. Какой из углов больше: ABD или CBD?

* **17.** В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена биссектриса BE. Какой из отрезков больше: AE или CE?

* **18.** Как измерить ширину реки, находясь на одном ее берегу?

§15. Перпендикуляр и наклонная

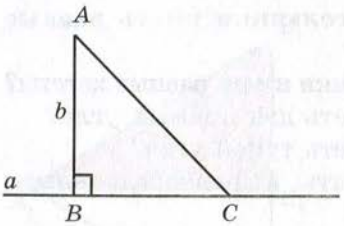


Рис. 15.1

Рассмотрим прямую a и не принадлежащую ей точку A. Пусть прямая b проходит через точку A и перпендикулярна прямой a, B — точка пересечения прямых a и b. Отрезок AB называется ***перпендикуляром***, опущенным из точки A на прямую a (рис. 15.1). Точка B называется ***основанием перпендикуляра***. Длина перпендикуляра называется ***расстоянием*** от точки A до прямой a.

Для произвольной точки C на прямой a, отличной от B, отрезок AC называется ***наклонной***, проведенной из точки A к прямой a. Точка C называется ***основанием наклонной***. Отрезок BC называется ***проекцией наклонной*** на прямую a (рис. 15.1).

Из соотношений между сторонами в прямоугольном треугольнике получаем следующую теорему.

Теорема. Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую, короче всякой наклонной, проведенной из этой точки к этой прямой. Иначе говоря, расстояние от точки до прямой является наименьшим из расстояний от этой точки до точек данной прямой.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a, AB — перпендикуляр, AC — наклонная (рис. 15.1). Тогда в прямоугольном треугольнике ABC сторона AB — катет, а AC — гипотенуза. Следовательно, $AB < AC$. ■

С перпендикулярами и наклонными связана одна классическая задача о нахождении кратчайшего пути на плоскости. Ее решение было известно еще Архимеду (287—212 гг. до н. э.).

Задача. Дана прямая c и две точки A и B на плоскости. Требуется найти такую точку C на этой прямой, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда точки A и B лежат по разные стороны от прямой c (рис. 15.2, а). Покажем, что в этом случае искомой точкой C является точка пересечения отрезка AB и прямой c. Действительно, из неравенства треугольника следует, что для любой другой точки C' прямой c выполняется неравенство $AC' + C'B > AC + CB$ и, значит, сумма $AC + CB$ будет наименьшей.

Пусть теперь точки A и B лежат по одну сторону от прямой c (рис. 15.2, б). Идея нахождения искомой точки C состоит в замене точки B на точку B', лежащую по другую сторону от прямой c, и сведению этого случая к предыдущему.

Из точки B опустим на прямую c перпендикуляр BH и отложим отрезок HB', равный BH (рис. 15.2, б). Пусть C' — точка на прямой c. Прямоугольные треугольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Поэтому сумма $AC' + C'B$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC' + C'B'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A, B', C' принадлежат одной прямой, т. е. искомая точка C является точкой пересечения отрезка AB' с прямой c.

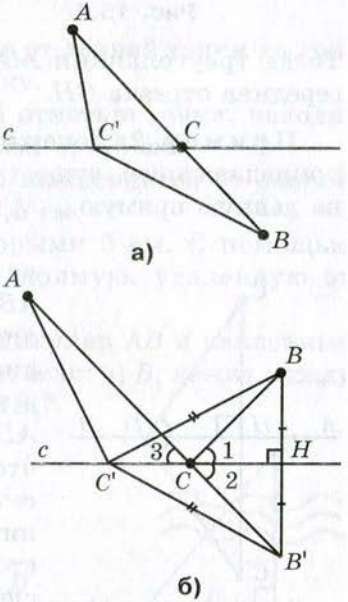


Рис. 15.2

Заметим, что полученная точка C обладает тем свойством, что углы, образованные прямыми AC и CB и прямой c, равны. Действительно, $\angle 1 = \angle 2$ как соответствующие углы в равных треугольниках BHC и $B'HC$, $\angle 2 = \angle 3$ как вертикальные углы. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Из этого равенства углов вытекает закон отражения света. А именно, известно, что луч света распространяется по кратчайшему пути. Поэтому если луч света исходит из точки A, отражается от прямой c и приходит в точку B, то точка C будет точкой отражения и, таким образом, имеет место закон отражения света: угол падения светового луча равен углу отражения.

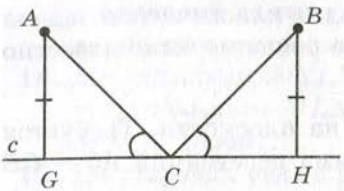


Рис. 15.3

Пример 1. Точки A и B расположены по одну сторону и на одинаковом расстоянии от прямой c. Где на прямой a расположена точка C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая?

Решение. Пусть AG и BH — перпендикуляры, опущенные на прямую c (рис. 15.3). Тогда треугольники AGC и BHC равны, и, следовательно, точка C — середина отрезка GH.

Пример 2. Докажите, что для произвольной прямой и точки, ей не принадлежащей, существует перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую.

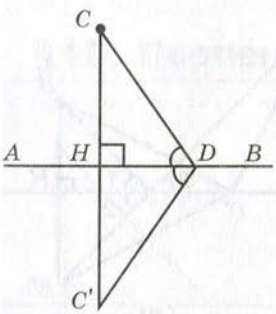


Рис. 15.4

Решение. Пусть AB — прямая, C — точка, ей не принадлежащая (рис. 15.4). Выберем на прямой AB какую-нибудь точку D. Если прямая CD перпендикулярна AB, то отрезок CD — искомый перпендикуляр. В противном случае отложим от луча DA в полуплоскость, не содержащую точку C, угол ADC', равный углу ADC. Точку C' выберем так, чтобы отрезки DC и DC' были равны. Точку пересечения прямых AB и CC' обозначим H. Треугольники CDH и $C'DH$ равны ($CD = C'D$, DH — общая сторона, $CDH = C'DH$). Значит, $CHD = C'HD$, и, следовательно, CHD — прямой. Таким образом, CH — искомый перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую AB.

Вопросы

1. Что называется перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую? Что называется основанием перпендикуляра?
2. Что называется наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой? Что называется: а) основанием наклонной; б) проекцией наклонной?
3. Что называется расстоянием от точки до прямой?
4. Что больше, перпендикуляр или наклонная, проведенные из одной точки к данной прямой?
5. Сформулируйте и решите задачу Архимеда.
6. Сформулируйте и обоснуйте закон отражения света.

Задачи

1. Сколько наклонных заданной длины можно провести из данной точки к данной прямой?

2. Верно ли, что проекции равных наклонных равны?

3. Из точки вне данной прямой с помощью угольника проведите перпендикуляр и наклонную.

4. С помощью угольника измерьте расстояние от данной точки до данной прямой, не проходящей через эту точку.

5. С помощью угольника для данной прямой отметьте точки, находящиеся от нее на расстоянии: а) 1 см; б) 3 см; в) 4,5 см.

6. С помощью угольника проведите прямые, находящиеся от данной точки на расстоянии: а) 1 см; б) 2 см; в) 3,5 см.

7. Даны две точки, расстояние между которыми 5 см. С помощью угольника через одну из них проведите прямую, удаленную от другой на расстояние 3 см.

8. Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AB и наклонные AB_1, AB_2. Какая из двух наклонных меньше, если: а) B_1 лежит между B и B_2; б) B лежит между B_1 и B_2, $BB_1 < BB_2$?

9. Докажите, что если наклонные проведены из данной точки к данной прямой, то: а) равные наклонные имеют равные проекции; б) большая наклонная имеет большую проекцию.

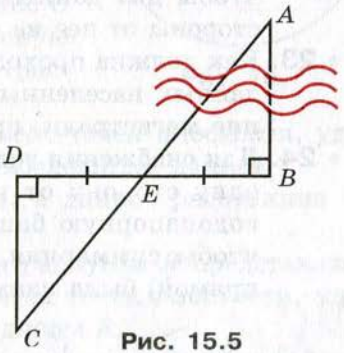


Рис. 15.5

10. Сформулируйте утверждения, обратные утверждениям задачи 9. Верны ли они? Докажите.

11. На рисунке 15.5 $AB \perp DB$ и $DC \perp DB$, $DE = BE$. Докажите, что расстояние AB равно длине отрезка DC.

12. Докажите, что треугольник является равнобедренным, если совпадают проведенные из одной вершины: а) высота и медиана; б) биссектриса и высота.

13. На рисунке 15.6 $BD = BF$, $DE \perp BC$, $FG \perp AB$. Докажите, что $DE = FG$.

14. На рисунке 15.7 $AD = DB = BF = FC$, $DE \perp \perp AB$, $FG \perp BC$. Докажите, что $DE = FG$.

15. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны. Докажите, что равны отрезки AD и CB.

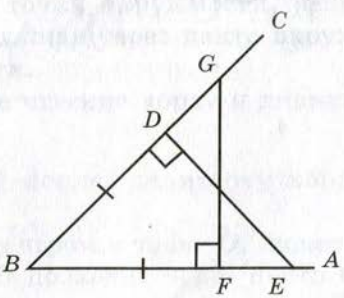


Рис. 15.6

16. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки, принадлежащей биссектрисе угла, на его стороны, равны.

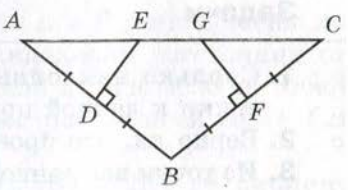


Рис. 15.7

* **17.** Докажите, что через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, перпендикулярной данной.

* **18.** Докажите, что в произвольном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

* **19.** Внутри острого угла взяты точки C_1 и C_2. Найдите на сторонах угла такие точки A и B, чтобы длина ломаной C_1ABC_2 была наименьшей.

* **20.** Внутри острого угла взята точка C. Найдите на сторонах угла точки A и B такие, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

* **21.** Докажите, что если точка C лежит внутри прямого или тупого угла, то на сторонах угла не существует точек A и B, для которых периметр треугольника ABC был бы наименьшим.

* **22.** В каком направлении через город должна проходить магистраль, чтобы два данных населенных пункта A и B лежали по разные стороны от нее на одинаковом расстоянии?

* **23.** Как должна проходить магистраль, чтобы расстояние от нее до трех данных населенных пунктов было одинаковым? Укажите положение магистрали, при котором это расстояние минимально.

* **24.** Для снабжения водой двух населенных пунктов, расположенных по одну сторону от канала, требуется на берегу канала построить водонапорную башню. В каком месте следует построить башню, чтобы суммарная длина труб от нее до каждого из пунктов (по прямой) была наименьшей?

Глава III

ОКРУЖНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

§ 16. Окружность и круг

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки на данное расстояние.

Данная точка называется ***центром окружности***, а данное расстояние — ***радиусом окружности***. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром (рис. 16.1).

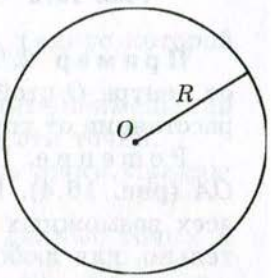


Рис. 16.1

Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек плоскости, расстояние от которых до точки O равно R.

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное.

Данная точка называется ***центром круга***, а данное расстояние — ***радиусом круга***.

Таким образом, круг с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек плоскости, удаленных от точки O на расстояние, не превосходящее R.

Круг можно представлять себе как фигуру, ограниченную окружностью.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки окружности, называется ***хордой*** этой окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром*** этой окружности.

Хордой и диаметром круга называют соответственно хорду и диаметр окружности, ограничивающей этот круг.

Теорема. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Пусть дана окружность с центром в точке O, диаметр AB перпендикулярен хорде CD. Если хорда CD проходит через центр O, то она является диаметром и делится в точке O пополам. Пусть хорда CD

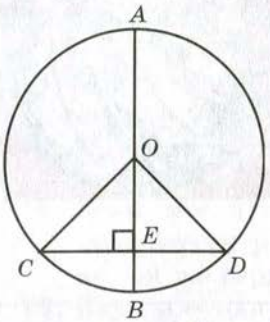


Рис. 16.2

не проходит через центр O. Обозначим точку ее пересечения с диаметром AB через E (рис. 16.2). Треугольники OEC и OED равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, $EC = ED$. ■

Пример 1. Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Решение. Пусть дана окружность с центром в точке O и радиусом R, AB — произвольная хорда, отличная от диаметра (рис. 16.3). Проведем отрезки OA и OB. В треугольнике AOB сторона AB меньше суммы двух других сторон, т. е. $AB < OA + OB = R + R = 2R$. Следовательно, хорда AB меньше диаметра.

Пример 2. Точка A расположена вне окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равно наименьшее расстояние от точки A до точек данной окружности?

Решение. Пусть B — точка пересечения окружности с отрезком OA (рис. 16.4). Покажем, что расстояние AB является наименьшим из всех возможных расстояний от точки A до точек окружности. Действительно, для любой другой точки C окружности выполняется неравенство $AB + BO < AC + CO$. Так как $BO = CO = R$, то из этого неравенства получаем неравенство $AB < AC$. Учитывая, что $AO = d$ и $BO = R$, получаем, что искомое наименьшее расстояние равно длине отрезка AB, т. е. равно $d - R$.

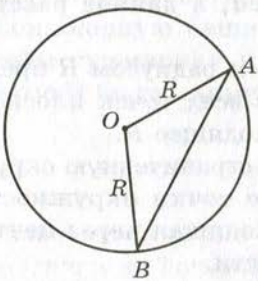


Рис. 16.3

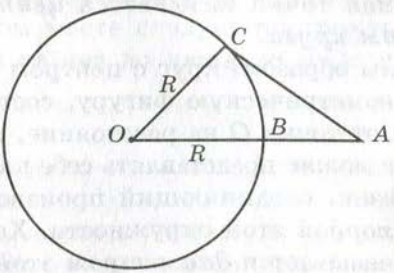


Рис. 16.4

Вопросы

1. Какая фигура называется окружностью? Что называется: а) центром окружности; б) радиусом окружности?
2. Какая фигура называется кругом? Что называется: а) центром круга; б) радиусом круга?

3. Что называется: а) хордой; б) диаметром окружности?
4. Как связаны между собой диаметр и радиус?
5. Чем является наибольшая хорда окружности?
6. В каком отношении делит диаметр перпендикулярную ему хорду?

Задачи

1. Какому неравенству удовлетворяют точки A, лежащие: а) в круге с центром в точке O и радиусом R; б) вне этого круга?
2. Сколько диаметров можно провести через центр окружности?
3. Сколько окружностей может проходить через две заданные точки?
4. Найдите диаметр окружности, если известно, что он на 55 мм больше радиуса.
5. Найдите длину наибольшей хорды в окружности, радиус которой равен 5 см.
6. Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус окружности, проходящей через эти точки.
7. Может ли окружность проходить через три заданные точки, принадлежащие одной прямой?
8. Нарисуйте окружность, которая проходит через данные точки A и B ($AB = 6$ см) и имеет радиус 3 см.
9. Точка A расположена вне окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равно наибольшее расстояние от точки A до точек данной окружности?
10. Точка A расположена внутри окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?
11. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 50 см и 20 см. Найдите радиус данной окружности.
12. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равны соответственно 20 см и 4 см. Найдите радиус данной окружности.
13. Докажите, что диаметр, проведенный через середину хорды, отличной от диаметра, перпендикулярен к этой хорде.
14. Докажите, что если две хорды перпендикулярны и одна из них в точке пересечения делится пополам, то другая является диаметром.
15. Докажите, что равные хорды окружности одинаково удалены от центра окружности и, наоборот, если хорды окружности одинаково удалены от ее центра, то они равны.

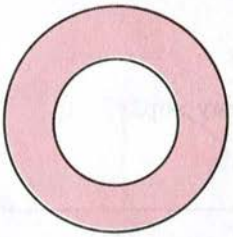


Рис. 16.5

16. На рисунке 16.5 изображена фигура, называемая ***кольцом***. Сформулируйте определение этой фигуры.

17. Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды AD и BC равны; б) $\angle BAD = \angle BCD$.

18. Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

* **19.** Докажите, что если две точки принадлежат кругу, то отрезок, соединяющий эти точки, содержится в данном круге. Справедливо ли это свойство для кольца?

§17. Взаимное расположение прямой и окружности

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямой и окружности.

Прямая и окружность могут не иметь общих точек (рис. 17.1), иметь одну общую точку (рис. 17.2) или иметь две общие точки (рис. 17.3).

Если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то говорят, что ***прямая касается окружности***, а саму прямую называют ***касательной*** к окружности (рис. 17.2).

Таким образом, ***касательная*** к окружности — это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Общая точка называется ***точкой касания***.

Если прямая и окружность имеют две общие точки, то говорят, что прямая и окружность ***пересекаются*** (рис. 17.3).

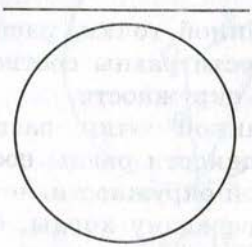


Рис. 17.1

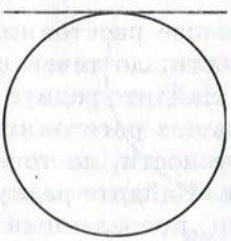


Рис. 17.2

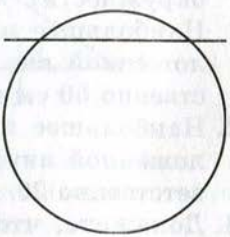


Рис. 17.3

Взаимное расположение прямой и окружности зависит от расстояния между центром окружности и данной прямой.

Теорема. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то эти прямая и окружность не имеют общих точек.

Доказательство. Пусть расстояние от центра O окружности до прямой a больше радиуса R окружности (рис. 17.4). Опустим из центра O перпендикуляр OA на эту прямую. Тогда $OA > R$. Для любой другой точки B на прямой a наклонная OB будет больше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R. Таким образом, расстояние от любой точки прямой a до центра O больше R. Значит, прямая a и окружность не имеют общих точек. ■

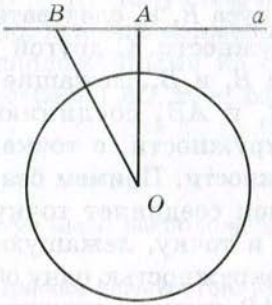


Рис. 17.4

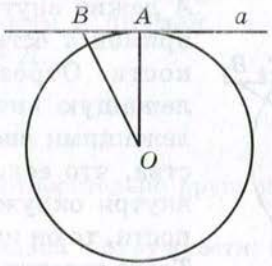


Рис. 17.5

Теорема. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к окружности.

Доказательство. Пусть расстояние от центра O окружности до прямой a равно радиусу R окружности (рис. 17.5). Опустим из центра O перпендикуляр OA на эту прямую. Тогда $OA = R$. Для любой другой точки B на прямой a наклонная OB будет больше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R. Таким образом, расстояние от любой точки прямой a, отличной от A, до центра O больше R. Значит, прямая a и окружность имеют одну общую точку A, т. е. прямая касается окружности. ■

Следствие. Касательной к окружности является прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку.

Действительно, пусть прямая a проходит через точку A окружности и перпендикулярна радиусу OA. Тогда расстояние от центра O окружности до прямой a равно радиусу OA, и, следовательно, прямая a является касательной к окружности.

Осталось рассмотреть случай, когда расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности. Пример такого расположения прямой и окружности показан на рисунке 17.3.

Теорема. Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность пересекаются.

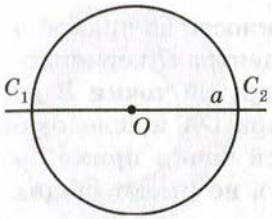


Рис. 17.6

Доказательство*. Ясно, что если прямая a проходит через центр O окружности, то она имеет с этой окружностью две общие точки C_1 и C_2 (рис. 17.6), удаленные от точки O на расстояние, равное радиусу R окружности.

Пусть прямая a не проходит через центр окружности. Опустим из центра O окружности перпендикуляр OA на прямую a (рис. 17.7). Его длина по условию меньше радиуса R, и, следовательно, точка A лежит внутри окружности. С другой стороны, на прямой a есть точки B_1 и B_2, лежащие вне окружности. Отрезки AB_1 и AB_2 соединяют точку A, лежащую внутри окружности, с точками B_1 и B_2, лежащими вне окружности. Примем без доказательства, что если отрезок соединяет точку, лежащую внутри окружности, и точку, лежащую вне окружности, то он имеет с окружностью одну общую точку. Тогда отрезки AB_1 и AB_2 имеют с окружностью общие точки C_1 и C_2, которые являются искомыми точками пересечения прямой a и окружности. ■

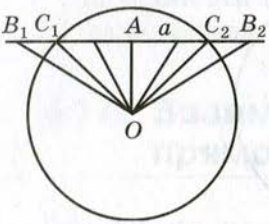


Рис. 17.7

Пример 1. Из одной точки проведены две касательные к окружности. Докажите, что отрезки касательных, заключенные между этой точкой и точками касания, равны.

Решение. Рассмотрим две касательные к окружности с центром в точке O, проведенные из точки A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 17.8). Треугольники AOB и AOC прямоугольные, $OB = OC$ и сторона AO общая. По признаку равенства прямоугольных треугольников (по катету и гипотенузе) они равны. Следовательно, $AB = AC$.

Пример 2. Расстояние d от центра окружности до прямой больше радиуса R этой окружности. Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на окружности и на прямой.

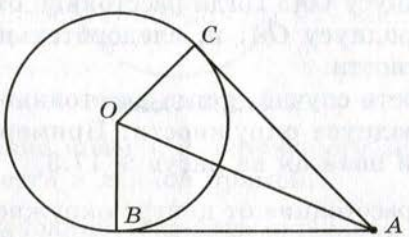


Рис. 17.8

Р е ш е н и е. Пусть O — центр окружности, OA — перпендикуляр, опущенный из O на прямую, C — точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью (рис. 17.9). Докажем, что длина отрезка AC является искомым наименьшим расстоянием. Действительно, для произвольных точек B на прямой и D на окружности будем иметь $AC + CO \leqslant BO \leqslant BD + DO$. Учитывая, что $CO = DO = R$, получаем неравенство $AC \leqslant BD$. Следовательно, искомое наименьшее расстояние между точками, расположенными на окружности и прямой, равно длине отрезка AC, т. е. равно $d - R$.

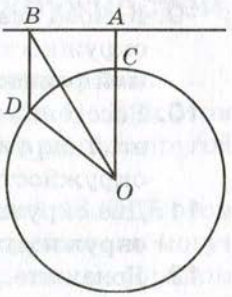


Рис. 17.9

Вопросы

1. Как могут быть расположены друг относительно друга прямая и окружность?
2. Какая прямая называется: а) касательной к окружности; б) пересекающей окружность?
3. В каком случае прямая и окружность не имеют общих точек?
4. В каком случае прямая касается окружности?
5. В каком случае прямая и окружность пересекаются?
6. Что можно сказать об отрезках касательных к окружности, проведенных из одной точки?

Задачи

1. Для данной окружности проведите прямые, пересекающие окружность, касающиеся окружности и не пересекающие окружность.

2. Сколько прямых, пересекающих окружность, можно провести через данную точку окружности?

3. Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку на окружности?

4. Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку, расположенную: а) внутри окружности; б) вне окружности?

5. Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой?

6. Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой в данной точке?

7. Сколько можно провести окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой в данной точке?

8. Может ли прямая иметь с окружностью три общие точки?

○ **9.** Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 3 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно: а) 4 см; б) 3 см; в) 2 см?

10. Расстояние d от центра окружности до прямой меньше радиуса R этой окружности. Найдите наибольшее расстояние от точек данной окружности до прямой.

11. Две окружности имеют общий центр. Докажите, что хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности, равны между собой.

12. Докажите, что отрезки AB и CD общих внутренних касательных к двум окружностям (рис. 17.10) равны.

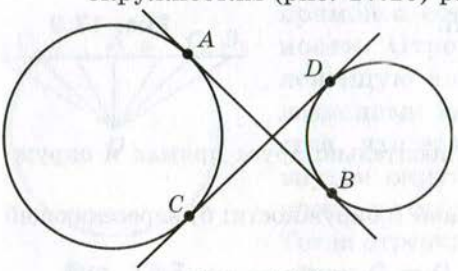


Рис. 17.10

13. Докажите, что отрезки общих внутренних касательных к двум окружностям одинакового радиуса в точке пересечения делятся пополам.

14. Докажите, что отрезки AB и CD общих пересекающихся внешних касательных к двум окружностям (рис. 17.11) равны.

* **15.** Через точку M вне окружности проведены касательные MA и MB, и через точку C на окружности проведена касательная, пересекающая отрезки MA и MB в точках K и L соответственно (рис. 17.12). Докажите, что периметр треугольника KML не зависит от положения точки C.

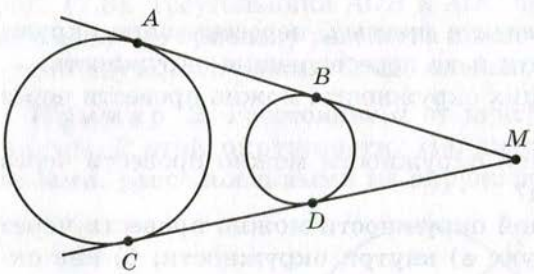


Рис. 17.11

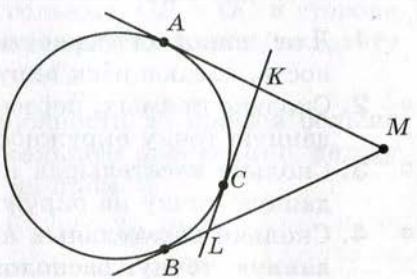


Рис. 17.12

* **16.** Докажите, что если прямая пересекает окружность в точках A и B, то отрезок AB целиком содержится в круге, ограниченном этой окружностью.

§18. Взаимное расположение двух окружностей

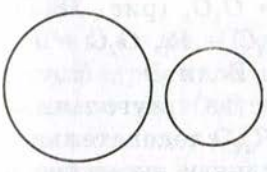
Рассмотрим случаи взаимного расположения двух окружностей.

1) Две окружности могут не иметь общих точек (рис. 18.1). При этом они могут находиться вне друг друга (рис. 18.1, а) или одна внутри другой (рис. 18.1, б).

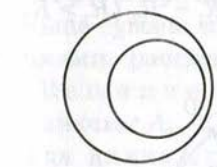
2) Две окружности могут иметь одну общую точку (рис. 18.2). В этом случае говорят, что окружности ***касаются***. Причем окружности могут касаться внешним образом (рис. 18.2, а) или внутренним образом (рис. 18.2, б).

3) Две окружности могут иметь две общие точки (рис. 18.3). В этом случае говорят, что окружности ***пересекаются***.

Окружности, имеющие общий центр, называются ***концентрическими*** (рис. 18.4).

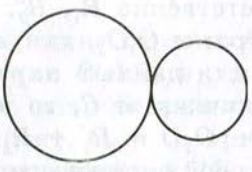


а)

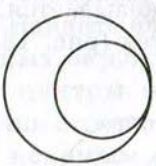


б)

Рис. 18.1



а)



б)

Рис. 18.2

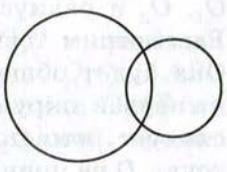


Рис. 18.3

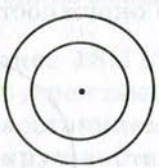


Рис. 18.4

Взаимное расположение двух окружностей зависит от их радиусов и расстояния между центрами.

Теорема. Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности, то эти окружности не имеют общих точек.

Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2, $R_1 + R_2 < O_1O_2$ (рис. 18.5). Рассмотрим точку C на первой окружности, $O_1C = R_1$. Тогда $O_2C \geqslant O_1O_2 - O_1C > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$, и, следовательно, точка C не принадлежит второй окружности. Значит, эти окружности не имеют общих точек.

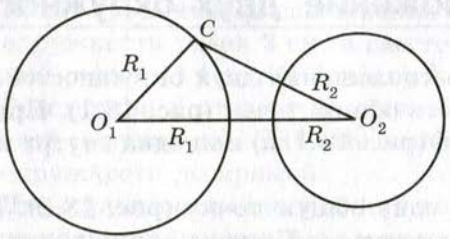


Рис. 18.5

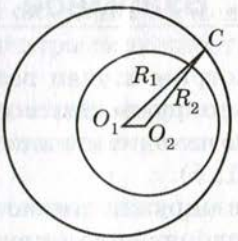


Рис. 18.6

Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2 < R_1 - R_2$ $(R_1 > R_2)$, то окружности также не имеют общих точек (рис. 18.6). ■

Теорема. Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме или разности их радиусов, то эти окружности касаются.

Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2, $R_1 + R_2 = O_1O_2$ (рис. 18.7). Рассмотрим точку C на отрезке O_1O_2, для которой $O_1C = R_1$, $O_2C = R_2$. Она будет общей точкой для данных окружностей. Если D — точка на первой окружности, отличная от C, то из неравенства треугольника следует, что $O_2D > O_1O_2 - O_1D = R_1 + R_2 - R_1 = R_2$, следовательно, точка D не принадлежит второй окружности. Значит, данные окружности имеют только одну общую точку, т. е. касаются.

Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2 = R_1 - R_2$ $(R_1 > R_2)$, то окружности также касаются (рис. 18.8). ■

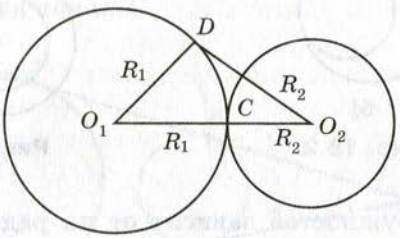


Рис. 18.7

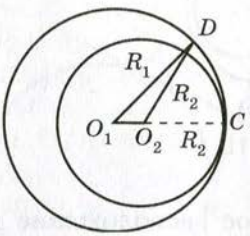


Рис. 18.8

Таким образом, мы рассмотрели случаи, когда расстояние между центрами двух окружностей: а) больше суммы радиусов; б) меньше разности радиусов; в) равно сумме радиусов; г) равно разности радиусов.

Осталось рассмотреть случай, когда расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разности. Пример взаимного расположения таких окружностей показан на рисунке 18.3.

Теорема. Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разности, то эти окружности пересекаются.

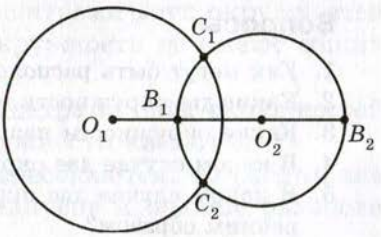


Рис. 18.9

Доказательство*. Рассмотрим окружности с центрами O_1 и O_2 (рис. 18.9), радиусами R_1 и R_2 соответственно ($R_1 \geqslant R_2$, $R_1 - R_2 < O_1O_2 < R_1 + R_2$). Прямая O_1O_2 пересекает вторую окружность в точках B_1 и B_2. Причем $O_1B_1 = O_1O_2 - R_2 < R_1$, $O_1B_2 = O_1O_2 + R_2 > R_1$. Таким образом, точка B_1 лежит внутри первой окружности, а B_2 — вне ее. Примем без доказательства, что в этом случае окружности пересекаются. ■

Пример 1. Две окружности с центрами в точках O_1, O_2 пересекаются в точках A и B (рис. 18.10). Докажите, что O_1O_2 перпендикулярна AB.

Решение. Пусть C — середина отрезка AB. Тогда O_1C — медиана равнобедренного треугольника O_1AB, и, следовательно, $O_1C \perp AB$. Аналогично, O_2C — медиана равнобедренного треугольника O_2AB и, следовательно, $O_2C \perp AB$. Значит, O_1 и O_2 принадлежат прямой, проходящей через точку C и перпендикулярной AB.

Пример 2. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.

Решение. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей (рис. 18.11). Обозначим A_1, A_2 — точки пересечения отрезка O_1O_2 с этими окружностями. Тогда длина отрезка A_1A_2 будет искомым наименьшим расстоянием. Действительно, для любых других точек C_1, C_2 этих окружностей выполняется неравенство $O_1A_1 + A_1A_2 + A_2O_2 < O_1C_1 + C_1C_2 + C_2O_2$. Учитывая, что $O_1A_1 = O_1C_1$ и $A_2O_2 = C_2O_2$, получаем неравенство $A_1A_2 < C_1C_2$. Поэтому наименьшее расстояние равно $A_1A_2 = d - R_1 - R_2$.

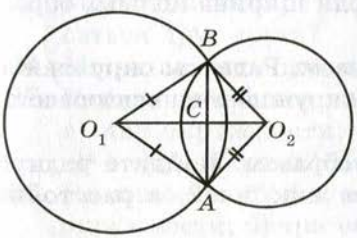


Рис. 18.10

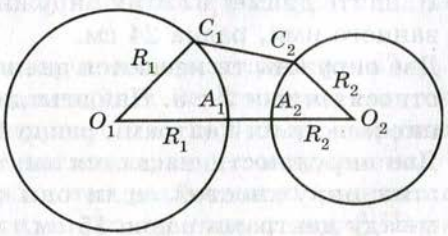


Рис. 18.11

Вопросы

1. Как могут быть расположены друг относительно друга две окружности?
2. Какие две окружности называются: а) касающимися; б) пересекающимися?
3. Какие окружности называются концентрическими?
4. В каком случае две окружности не имеют общих точек?
5. В каком случае две окружности касаются: а) внешним образом; б) внутренним образом?
6. В каком случае две окружности пересекаются?

Задачи

1. Нарисуйте две окружности: а) не имеющие общих точек; б) концентрические; в) касающиеся внешним образом; г) касающиеся внутренним образом; д) пересекающиеся.

2. Дана окружность радиуса 3 см и точка A на расстоянии, равном 5 см, от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A.

3. Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см?

4. Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 3 см и 5 см; б) 2 см и 5 см?

5. Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 см и 6 см, если окружности: а) касаются внешне; б) касаются внутренне?

6. Какую фигуру образуют центры окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку?

7. Какую фигуру образуют центры окружностей различных радиусов, проходящих через две данные точки?

8. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 3 : 7. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 24 см.

9. Две окружности касаются внешним образом. Радиусы окружностей относятся как 2 : 3. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 10 см.

10. Две окружности касаются внутренним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если они относятся как 5 : 2, а расстояние между центрами равно 15 см.

11. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей меньше разности их радиусов, то эти окружности не имеют общих точек.

12. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей равно разности их радиусов, то эти окружности касаются.

13. Докажите, что если две окружности пересекаются, то расстояние между их центрами меньше суммы радиусов и больше разности радиусов.

14. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наибольшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.

15. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и меньше разности $R_1 - R_2$ их радиусов. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между точками, расположенными на данных окружностях.

16. Две окружности с центрами в точках O_1, O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$.

17. Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.

18. Даны две окружности. Чему равен радиус окружности, касающейся данных и имеющей центр на прямой, проходящей через их центры, если радиусы данных окружностей и расстояние между их центрами соответственно равны: а) 1, 3, 5; б) 5, 2, 1; в) 3, 4, 5? Сколько имеется решений?

* **19.** Точка A лежит внутри круга с центром в точке O и радиусом R. Расстояние AO равно a. Докажите, что круг с центром в точке A и радиусом $R - a$ содержится в исходном круге.

* **20.** Нарисуйте три окружности, попарно касающиеся друг друга.

* **21.** Три окружности одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.

* **22.** Могут ли четыре окружности попарно касаться друг друга?

* **23.** Могут ли четыре окружности одинакового радиуса попарно касаться друг друга?

* **24.** Могут ли пять окружностей попарно касаться друг друга?

* **25.** Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности; г)* n окружностей? Нарисуйте соответствующие окружности.

* **26.** На какое наибольшее число областей разбивают плоскость: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности? Нарисуйте соответствующие области.

§19. Геометрические места точек

Один из основных способов задания фигур на плоскости заключается в указании свойства, которому удовлетворяют точки этой фигуры.

Вспомним определение окружности. Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки на данное расстояние. Свойством здесь является удаленность от данной точки на данное расстояние.

Фигуры, состоящие из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству, получили особое название «геометрические места точек». Таким образом, ***геометрическим местом точек*** называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Поясним смысл слов «всех точек, удовлетворяющих заданному свойству» в этом определении. Они означают, что все точки, принадлежащие фигуре, удовлетворяют заданному свойству и, наоборот, все точки, удовлетворяющие заданному свойству, принадлежат фигуре. Другими словами, точка принадлежит фигуре в том и только том случае, когда для нее выполняется заданное свойство.

Рассмотрим еще несколько геометрических мест точек.

Серединным перпендикуляром к заданному отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

Выясним, каким геометрическим местом точек является серединный перпендикуляр.

Теорема. Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от концов этого отрезка.

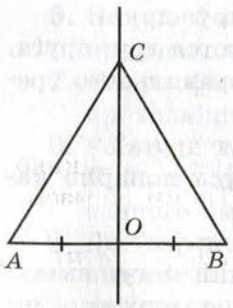


Рис. 19.1

Доказательство. Пусть дан отрезок AB и точка O — его середина. Покажем, что геометрическим местом точек, одинаково удаленных от точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 19.1). Действительно, очевидно, что точка O одинаково удалена от точек A, B и принадлежит серединному перпендикуляру. Если точка C одинаково удалена от точек A и B и не совпадает с точкой O, то треугольник ABC равнобедренный и CO — медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру. Обратно, пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с O, тогда прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по катетам). Следовательно, $AC = BC$.■

Теорема. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, лежащих внутри данного угла и одинаково удаленных от его сторон.

Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной в точке O и сторонами a, b. Пусть точка C лежит внутри данного угла. Опустим из нее перпендикуляры CA и CB на стороны a и b (рис. 19.2). Если $CA = CB$, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, углы AOC и BOC равны. Значит, точка C принадлежит биссектрисе угла. Обратно, если точка C принадлежит биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AC = BC$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного угла. ■

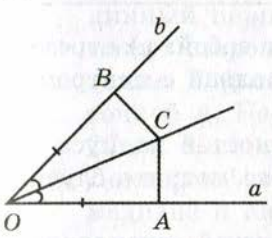


Рис. 19.2

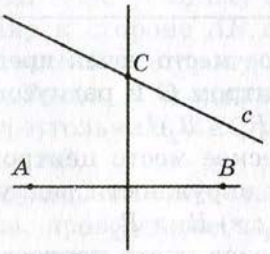


Рис. 19.3

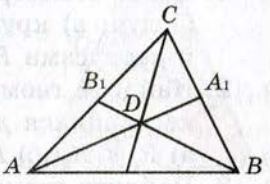


Рис. 19.4

Пример 1. На данной прямой найдите точку, одинаково удаленную от двух заданных точек.

Решение. Пусть c — данная прямая, A, B — данные точки (рис. 19.3). Геометрическим местом точек, одинаково удаленных от точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB. Если серединный перпендикуляр и прямая c пересекаются, то искомой точкой C будет их точка пересечения. Если они не пересекаются, то задача не имеет решения.

Пример 2. Найдите точки треугольника ABC, одинаково удаленные от прямых, на которых лежат его стороны.

Решение. Геометрическим местом точек треугольника ABC, одинаково удаленных от прямых AB и AC, будет биссектриса AA_1 (рис. 19.4). Геометрическим местом точек этого треугольника, одинаково удаленных от прямых AB и BC, будет биссектриса BB_1. Таким образом, геометрическим местом точек этого треугольника, одинаково удаленных от прямых AB, BC и AC, будет точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1.

Заметим, что так как эта точка одинаково удалена от AC и BC, то она будет принадлежать и биссектрисе угла C. Значит, все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Точка пересечения биссектрис является одной из замечательных точек треугольника, которые будут рассмотрены в § 38.

Вопросы

1. Что означают слова «фигура состоит из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству»?
2. Что называется геометрическим местом точек?
3. Определите окружность через понятие геометрического места точек.
4. Какая прямая называется серединным перпендикуляром?
5. Каким геометрическим местом точек является: а) серединный перпендикуляр; б) биссектриса угла?

Задачи

1. Какое геометрическое место точек представляет собой: а) отрезок; б) луч; в) круг с центром O и радиусом R; г) кольцо с центром O и радиусами R_1, R_2 ($R_1 < R_2$)?

2. Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса R_1, касающихся данной окружности радиуса R_2. Рассмотрите случаи: а) $R_1 < R_2$; б) $R_1 = R_2$; в) $R_1 > R_2$.

3. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

4. Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB.

5. Пусть A и B — точки плоскости. Найдите геометрическое место точек C, для которых: а) $AC \leqslant BC$; б) $AC < AB$.

6. Даны три точки: A, B, C. Найдите точки, которые одинаково удалены от точек A и B и находятся на расстоянии R от точки C.

7. На данной прямой a найдите точки, удаленные от данной точки C на заданное расстояние R. Какие при этом возможны случаи?

8. Пусть A и B — точки плоскости, c — прямая. Найдите геометрическое место точек прямой c, расположенных ближе к A, чем к B. В каком случае таких точек нет?

9. Пусть a и b — пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек: а) одинаково удаленных от a и b; б) расположенных ближе к a, чем к b.

10. Пусть A, B, C — три точки, не принадлежащие одной прямой. Найдите геометрическое место точек M таких, что: а) прямая CM пересекает отрезок AB; б) луч CM пересекает отрезок AB; в) отрезок CM пересекает отрезок AB.

11. На прямой, пересекающей стороны угла, найдите точку, одинаково удаленную от этих сторон.

12. Дан угол ABC и точки M, N на его сторонах. Внутри угла найдите точку, одинаково удаленную от точек M и N и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла.

13. В треугольнике ABC $AB = BC = 14$ см. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E (рис. 19.5). Точка E соединена с точкой B. Найдите сторону AC треугольника ABC, если периметр треугольника BEC равен 40 см.

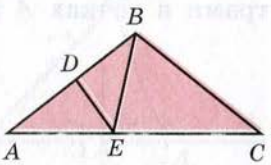


Рис. 19.5

14. В треугольнике ABC $AB = BC = 18$ см. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E (рис. 19.6). Точка E соединена с точкой A. Периметр треугольника AEC равен 27 см. Найдите сторону AC.

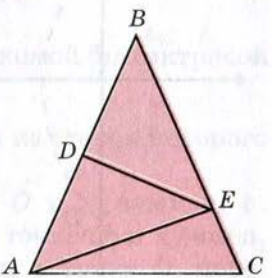


Рис. 19.6

* **15.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из вершины острого угла, не совпадают.

* **16.** Две окружности касаются внешним образом. Найдите геометрическое место точек, для которых отрезки касательных, проведенных из них к окружностям, равны.

* **17.** Невдалеке от двух населенных пунктов проходит шоссе. В каком месте этого шоссе нужно построить автозаправочную станцию, чтобы расстояния от нее до обоих пунктов были одинаковыми?

* **18.** Жители трех домов решили совместными усилиями вырыть колодец. В каком месте следует расположить колодец, чтобы расстояния от него до домов были одинаковыми?

§20. Задачи на построение

Основными чертежными инструментами, с помощью которых производятся геометрические построения, являются линейка и циркуль.

С помощью линейки через две заданные точки проводят прямую. С помощью циркуля проводят окружности с данным центром и данного радиуса. В частности, с помощью циркуля на луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному.

Рассмотрим некоторые задачи на построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки.

Задача 1. Построить серединный перпендикуляр к заданному отрезку.

Решение. Пусть AB — данный отрезок. Опишем окружности с центрами в точках A и B и радиусом, большим половины AB (рис. 20.1). Обозначим точки их пересечения, лежащие по разные стороны от прямой AB, через C и D. Точки C и D одинаково удалены от концов отрезка AB. Следовательно, они принадлежат серединному перпендикуляру, и, значит, прямая CD и будет искомым серединным перпендикуляром.

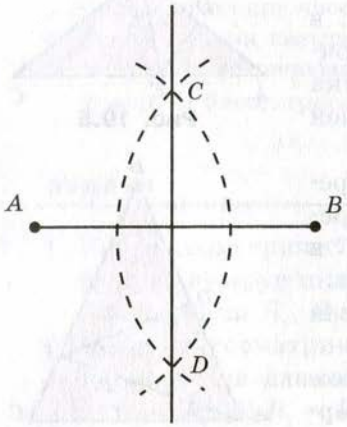


Рис. 20.1

Задача 2. Из данной точки, не принадлежащей данной прямой, опустить перпендикуляр на эту прямую.

Решение. Пусть C — данная точка, a — прямая (рис. 20.2). Отметим на этой прямой какую-нибудь точку A. Если отрезок CA перпендикулярен a, то он является искомым. В противном случае проведем окружность с центром в точке C и радиусом CA. Она пересечет прямую a в точке A и некоторой точке B. Так как $AC = BC$, то точка C принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB. Поэтому искомый перпендикуляр CO будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB. После этого можно или воспользоваться построением серединного перпендикуляра из предыдущей задачи, или поступить следующим образом. С центрами в точках A и B и радиусом AC проведем окружности и обозначим их точку пересечения, лежащую по другую сторону от точки C, через D. Тогда D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB. Проведем прямую CD и ее точку пересечения с прямой a обозначим через O. Отрезок CO будет искомым перпендикуляром.

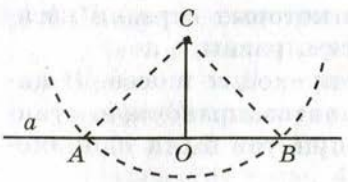


Рис. 20.2

Задача 3. Построить биссектрису данного угла.

Решение. Опишем окружность с центром в вершине O данного угла, пересекающую стороны угла в точках A и B. Затем этим же раствором циркуля с центрами в точках A и B опишем еще две окружности. Их точку пересечения, отличную от O, обозначим C и проведем луч OC. Треугольники OAC и OBC равны по третьему признаку равенства треугольников.

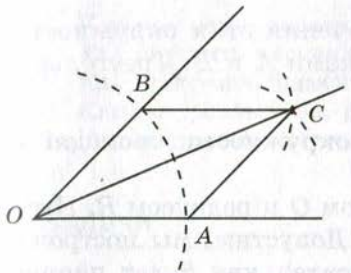


Рис. 20.3

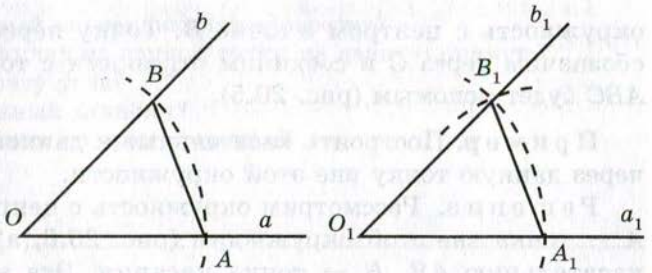


Рис. 20.4

Следовательно, $\angle AOC = \angle BOC$, т. е. луч OC является искомой биссектрисой (рис. 20.3).

Задача 4. Построить угол, равный данному, одна из сторон которого совпадает с данным лучом.

Решение. Пусть дан угол с центром в точке O и лучами a, b. Построим угол, равный данному, с вершиной в данной точке O_1 и лучом a_1 (рис. 20.4). Для этого опишем окружность с центром в точке O, пересекающую лучи a и b в точках A и B соответственно. Затем этим же раствором циркуля опишем дугу окружности с центром в точке O_1 и пересекающую луч a_1 в точке A_1. Далее раствором циркуля, равным AB, опишем дугу окружности с центром в точке A_1. Полученную точку пересечения двух дуг обозначим B_1 и проведем луч O_1B_1. Тогда треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ равны по третьему признаку. Следовательно, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, т. е. угол $A_1O_1B_1$ является искомым.

Задача 5. Построить треугольник ABC с данными сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Решение. Заметим, что три отрезка будут служить сторонами треугольника, если каждый из них меньше суммы двух других. Пусть даны отрезки a, b и c, удовлетворяющие этому условию. Проведем прямую и отметим на ней точку A. Раствором циркуля величины c отложим на этой прямой отрезок AB, равный c. Раствором циркуля величины b опишем окружность с центром в точке A, раствором циркуля величины a опишем

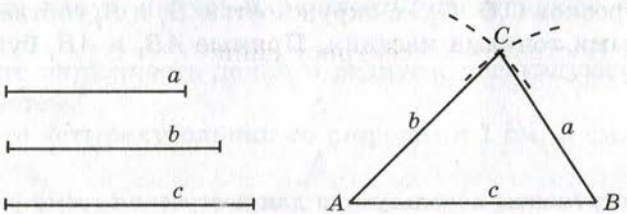


Рис. 20.5

окружность с центром в точке B. Точку пересечения этих окружностей обозначим через C и соединим отрезками с точками A и B. Треугольник ABC будет искомым (рис. 20.5).

Пример. Построить касательные к данной окружности, проходящие через данную точку вне этой окружности.

Решение. Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R. Пусть A — точка вне этой окружности (рис. 20.6, а). Допустим, мы построили касательную AB, B — точка касания. Эта касательная будет перпендикулярна радиусу OB. Продолжим OB и отложим отрезок $BC = OB$. Тогда касательная будет серединным перпендикуляром к отрезку OC. Таким образом, если мы сможем построить точку C, то сможем построить и касательную.

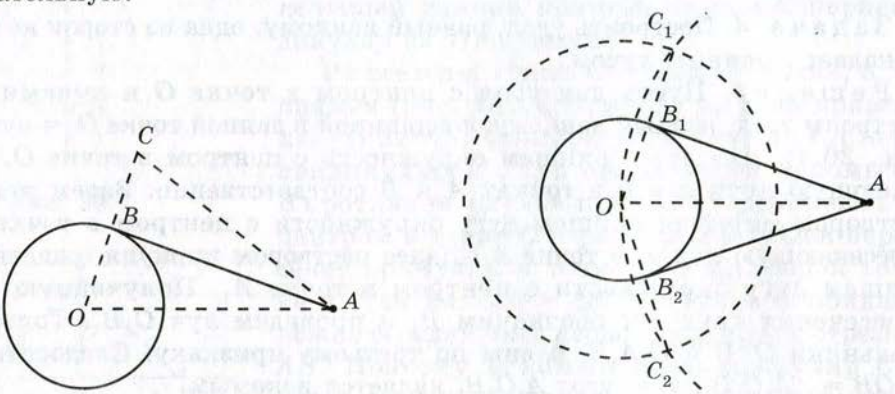


Рис. 20.6

Точка C, с одной стороны, принадлежит окружности с центром O и радиусом $2R$, а с другой стороны, она принадлежит окружности с центром A и радиусом AO. Отсюда следует построение точки C. Сначала строим окружность с центром O и радиусом $2R$ и окружность с центром A и радиусом AO. Эти окружности пересекаются в двух точках C_1 и C_2 (рис. 20.6, б). Затем соединяем эти точки с центром O и обозначаем точки пересечения отрезков C_1O, C_2O с окружностью B_1 и B_2 соответственно. Они и будут искомыми точками касания. Прямые AB_1 и AB_2 будут искомыми касательными.

Вопросы

1. Какие инструменты используются для построения геометрических фигур?
2. Какие построения производятся с помощью: а) линейки; б) циркуля?

3. Как построить серединный перпендикуляр к отрезку?
4. Как опустить перпендикуляр из данной точки на данную прямую?
5. Как построить биссектрису угла?
6. Как построить угол, равный данному?
7. Как построить треугольник по трем сторонам?

Задачи

1. Постройте середину заданного отрезка.
2. Данный отрезок разделите на четыре равные части.
3. В данном треугольнике постройте медиану.
4. Постройте высоту данного треугольника.
5. Через данную точку, принадлежащую данной прямой, проведите прямую, ей перпендикулярную.
6. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки. Сколько таких окружностей можно построить? Чему равен наименьший радиус такой окружности?
7. Данный угол разделите на четыре равные части.
8. Постройте углы 90°, 45°, 22°30′.
9. Постройте угол вдвое больше данного.
10. В данном равнобедренном треугольнике постройте биссектрису угла при вершине, противолежащей основанию.
11. Постройте прямоугольный треугольник по заданным катетам.
12. Постройте треугольник со сторонами 2 см, 3 см и 4 см.
13. Постройте равносторонний треугольник со стороной 3 см.
14. Постройте равнобедренный треугольник с основанием 4 см и боковой стороной 5 см.
15. Дан треугольник ABC. Постройте треугольник ABD, равный данному.
16. На данной прямой найдите центр окружности, проходящей через две заданные точки.
17. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку этой окружности.
18. Постройте какую-нибудь окружность, касающуюся сторон данного угла.
* **19.** Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.
* **20.** Постройте четырехугольник со сторонами 1 см, 2 см, 3 см и 4 см.

КРИВЫЕ И ГРАФЫ*

§21*. Парабола

Пусть на плоскости задана прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой d и точки F, называется ***параболой***. Прямая d называется ***директрисой***, а точка F — ***фокусом*** параболы (рис. 21.1).

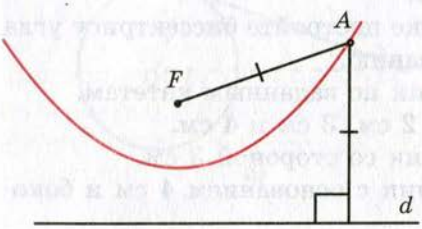


Рис. 21.1

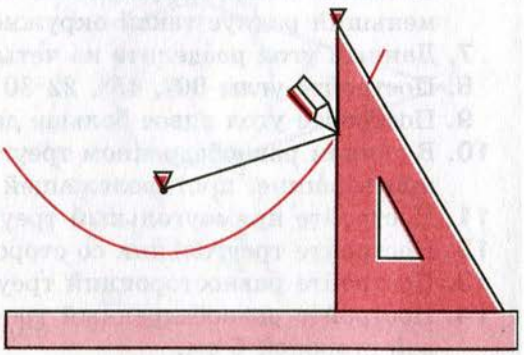


Рис. 21.2

Для того чтобы нарисовать параболу, потребуются линейка, угольник, нить длиной, равной большему катету угольника, и кнопки. Прикрепим один конец нити к фокусу, а другой — к вершине меньшего угла угольника. Приложим линейку к директрисе и поставим на нее угольник меньшим катетом. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги и прижималось к большему катету. Будем перемещать угольник и прижимать к его катету карандаш так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге параболу (рис. 21.2).

Осью параболы называется прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Точка пересечения параболы с ее осью называется ***вершиной*** параболы.

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная ее директрисе, называется ***касательной*** к параболе. Общая точка называется ***точкой касания***.

Заметим, что ось параболы имеет с параболой одну общую точку, однако не является касательной, так как перпендикулярна директрисе.

Теорема. Пусть A — точка на параболе с фокусом F и директрисой d, AD — перпендикуляр, опущенный на директрису (рис. 21.3). Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A, будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD.

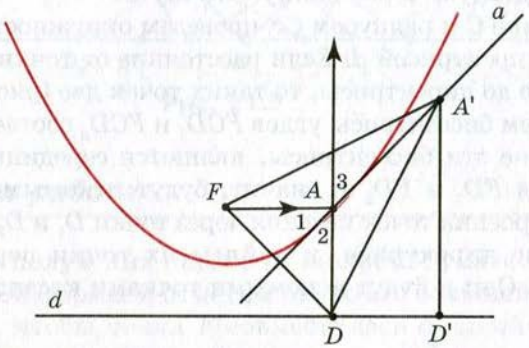


Рис. 21.3

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла FAD, будет касательной к параболе (рис. 21.3). Действительно, треугольник FAD равнобедренный. Следовательно, прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку FD. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, опустим перпендикуляр $A'D'$ на прямую d. Тогда

$$A'F = A'D > A'D'.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит параболе, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с параболой, т. е. является касательной. ■

Фокальное свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F параболы, a — касательная, AD — прямая, перпендикулярная директрисе (рис. 21.3). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла FAD.

Углы 2 и 3 равны как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 1, то угол отражения будет равен углу 3, т. е. направление отраженного луча будет перпендикулярно директрисе.

Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.

Построение касательной к параболе. Пусть парабола задана фокусом F и директрисой d. Используя циркуль и линейку, построим касательную к параболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF проведем окружность и найдем ее точки пересечения с директрисой d. Если расстояние от точки C до фокуса больше, чем расстояние до директрисы, то таких точек две (рис. 21.4). Обозначим их D_1 и D_2. Проведем биссектрисы углов FCD_1 и FCD_2 соответственно. Прямые a_1 и a_2, содержащие эти биссектрисы, являются серединными перпендикулярами к отрезкам FD_1 и FD_2 и, значит, будут искомыми касательными к параболе. Для построения точек касания через точки D_1 и D_2 проведем прямые, перпендикулярные директрисе, и найдем их точки пересечения A_1 и A_2 с прямыми a_1 и a_2. Они и будут искомыми точками касания.

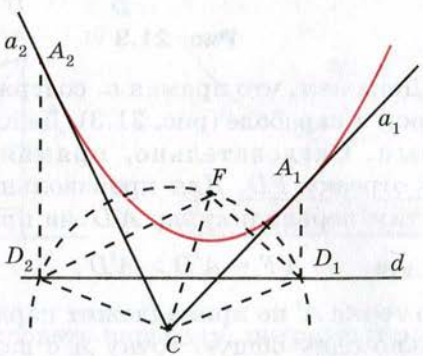


Рис. 21.4

Может случиться, что расстояние от точки C до фокуса равно расстоянию до директрисы. В этом случае точка C будет лежать на параболе, окружность с центром в точке C и радиусом CF будет касаться директрисы в некоторой точке D и, следовательно, через точку C будет проходить одна касательная — биссектриса угла FCD.

В случае, если расстояние от точки C до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, точек пересечения окружности с директрисой нет, и, следовательно, нет касательных к параболе, проходящих через эту точку.

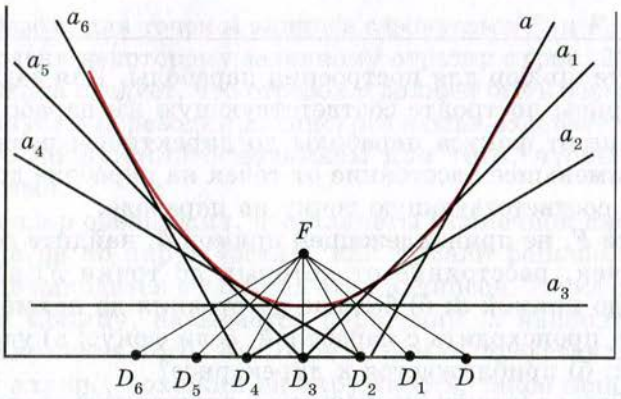


Рис. 21.5

Лабораторная работа

Укажем способ получения параболы из листа бумаги. Возьмем лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большой стороны точку F. Сложим лист так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой D на большой стороне и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 21.5). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FD и, следовательно, касательной к параболе. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку F с другой точкой большой стороны. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к параболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму параболы.

Вопросы

1. Что называется параболой?
2. Что называется: а) директрисой; б) фокусом параболы?
3. Что называется: а) осью; б) вершиной параболы?
4. Что называется касательной к параболе?
5. Какая прямая является касательной к параболе?
6. В чем состоит фокальное свойство параболы?
7. Как построить касательную к параболе с помощью циркуля и линейки?
8. Как получить параболу на листе бумаги?

Задачи

1. Изготовьте прибор для построения параболы. Для заданных фокуса и директрисы постройте соответствующую им параболу.
2. Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек на параболе до директрисы? Укажите соответствующую точку на параболе.
3. Для точки F, не принадлежащей прямой d, найдите геометрическое место точек, расстояние от которых до точки F: а) меньше расстояния до прямой d; б) больше расстояния до прямой d.
4. Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?
5. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, проходящую через данную точку: а) на параболе; б) вне параболы.
6. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, перпендикулярную оси параболы.
7. Докажите, что две касательные к параболе, проведенные из точки, принадлежащей директрисе, перпендикулярны.
8. Найдите геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.
9. Для заданных фокуса и директрисы параболы с помощью циркуля и линейки постройте несколько точек параболы.
10. Даны фокус параболы и две касательные. Постройте директрису этой параболы.
11. Даны фокус, касательная и на ней точка касания. Постройте директрису параболы.
12. Даны директриса параболы и две касательные. Постройте фокус параболы.
13. Даны директриса, касательная и на ней точка касания. Постройте фокус.
14. Даны две пересекающиеся прямые. Нарисуйте какую-нибудь параболу, касающуюся этих прямых. Сколько таких парабол? Какие точки плоскости могут быть фокусами таких парабол?
15. Дана парабола. Укажите способ нахождения ее фокуса и директрисы.

§22*. Эллипс

Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется ***эллипсом***. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** эллипса.

http://vk.com/school_ipad

Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 сумма $AF_1 + AF_2$ постоянна и равна некоторому заданному отрезку c (рис. 22.1). Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть больше отрезка F_1F_2.

Слово «фокус» в переводе с латинского языка означает «очаг», «огонь», и именно это послужило основанием для того, чтобы назвать точки F_1 и F_2 фокусами.

Еще И. Кеплер обнаружил, что планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причем Солнце находится в фокусах этих эллипсов. Точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу, называется перигелий, а наиболее удаленная — афелий. Однако из-за того, что орбита Земли представляет собой очень мало сжатый эллипс, похожий на окружность, такое приближение и удаление от Солнца незначительно сказывается на температуре. Гораздо большее значение для температуры на поверхности Земли имеет угол падения солнечных лучей. Например, когда Земля бывает в перигелии, в нашем полушарии зима, а когда в афелии — в нашем полушарии лето. Луна, искусственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Для того чтобы нарисовать эллипс, потребуются нить и кнопки. Прикрепим концы нити к фокусам. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги. Будем перемещать карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге эллипс (рис. 22.2).

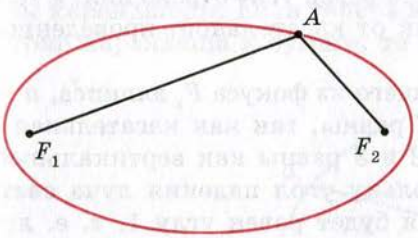


Рис. 22.1

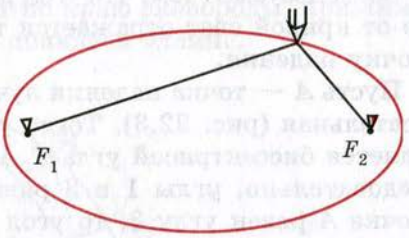


Рис. 22.2

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку. Общая точка называется ***точкой касания.***

Теорема. Пусть A — произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2, будет касательной к эллипсу (рис. 22.3).

http://vk.com/school_ipad

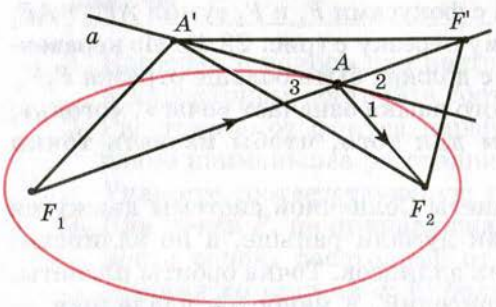


Рис. 22.3

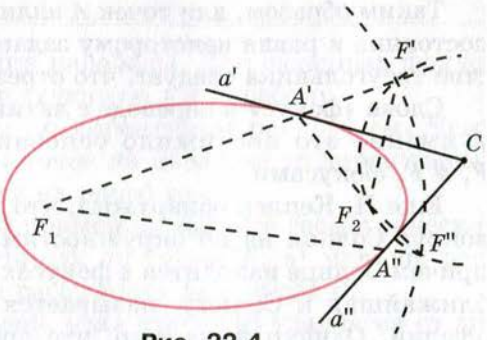


Рис. 22.4

Рассмотрим на прямой F_1A точку F', для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем:

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = F_1A + AF_2 = c.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т. е. является касательной. ■

Фокальное свойство. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом его фокусе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a — касательная (рис. 22.3). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_2AF'. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдет в направлении AF_2.

Построение касательной к эллипсу. Пусть эллипс задан своими фокусами F_1, F_2 и постоянной c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к эллипсу, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 22.4). Таких точек может быть две — F', F'', — одна или ни одной, в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a', a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$,

$F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'', соответственно CA' и CA'' будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

Лабораторная работа

Укажем способ получения эллипса из листа бумаги. Вырежем из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставим точку F. Сложим круг так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности круга и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 22.5). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FF' и, следовательно, касательной к эллипсу. Разогнем круг и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности круга. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к эллипсу. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму эллипса.

Для другого способа получения эллипса потребуется сковорода и картонный круг, диаметром вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положив круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс.

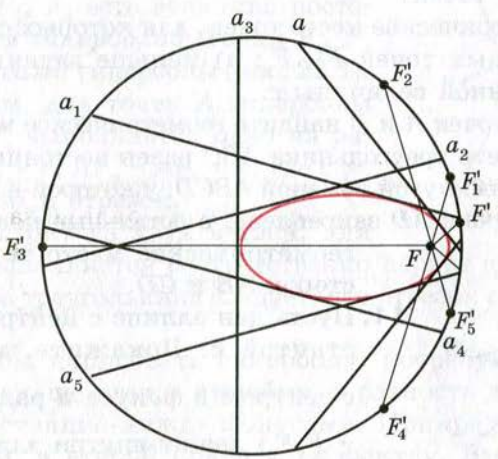


Рис. 22.5

Вопросы

1. Что называется эллипсом?
2. Какие точки называются фокусами эллипса?
3. Что называется касательной к эллипсу?
4. Какая прямая является касательной к эллипсу?
5. В чем состоит фокальное свойство эллипса?
6. Как построить касательную к эллипсу с помощью циркуля и линейки?
7. Как получить эллипс на листе бумаги?

Задачи

1. Нарисуйте эллипс с заданными фокусами F_1, F_2. Сколько таких эллипсов?

2. Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и константой c. Найдите наибольшее расстояние между точками эллипса. Укажите эти точки.

3. Расстояние между фокусами эллипса равно 4 см. Константа c равна 6 см. Найдите наименьшее расстояние от точек эллипса до фокуса.

4. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и суммой радиусов.

5. Даны фокусы эллипса и сумма расстояний до них. С помощью циркуля постройте несколько точек этого эллипса.

6. Что будет происходить с эллипсом, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

7. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c постройте точки на эллипсе, равноудаленные от фокусов. Сколько таких точек?

8. Найдите геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

9. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c.

10. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AD = BC$ и $AB = CD$ (рис. 22.6), сторона AD закреплена, а остальные подвижны. Найдите геометрическое место точек пересечения сторон AB и CD.

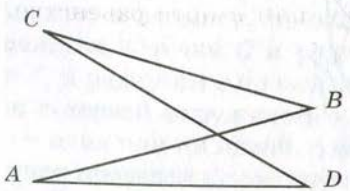


Рис. 22.6

11. Пусть дан эллипс с центрами F_1, F_2 и константой c. Докажите, что окружность с центром в фокусе и радиусом $r = \frac{1}{2}(c - F_1F_2)$ лежит внутри эллипса. Нарисуйте эти эллипс и окружность.

http://vk.com/school_ipad

12. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательные, перпендикулярные прямой F_1F_2.

13. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательную, проходящую через заданную точку: а) на эллипсе; б) вне эллипса.

14. Даны фокусы F_1, F_2 эллипса и сумма расстояний до них c. Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к эллипсу. Найдите точку касания.

15. Даны два фокуса и касательная к эллипсу. Постройте постоянную c и нарисуйте эллипс.

16. Даны две касательные, фокус и постоянная c. Постройте второй фокус эллипса.

* **17.** Возьмем сковородку и картонный круг, диаметром вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положим круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс. Докажите.

§23*. Гипербола

Геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется ***гиперболой***. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** гиперболы (рис. 23.1).

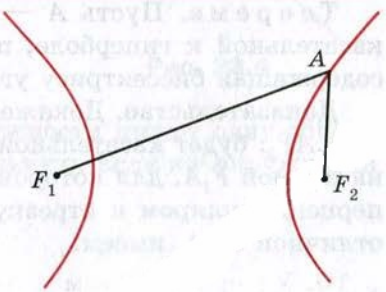


Рис. 23.1

Таким образом, для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется одно из равенств: $AF_1 - AF_2 = c$, $AF_2 - AF_1 = c$, где c — некоторый заданный отрезок.

Гипербола состоит из двух ветвей, для точек которых выполняется соответственно первое или второе равенство.

Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть меньше отрезка F_1F_2.

Для того чтобы нарисовать гиперболу, потребуются линейка, нить, длина которой меньше длины линейки, а разность длин линейки и нити меньше, чем расстояние между фокусами. Прикрепим один конец нити к концу линейки, а второй конец — к фокусу. Второй конец линейки совместим со вторым фокусом. Натянем нить, прижав ее к линейке

http://vk.com/school_ipad

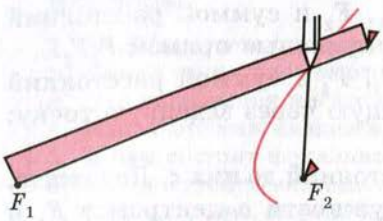


Рис. 23.2

острием карандаша (рис. 23.2). Если поворачивать линейку вокруг фокуса, прижимая к ней карандаш и оставляя нить натянутой, то карандаш будет описывать гиперболу.

Определим понятие касательной к гиперболе. Так же, как и в случае с параболой, не любая прямая, имеющая с гиперболой только одну общую точку, будет касательной. Воспользуемся тем, что касательные к параболе и эллипсу лежат во внешних областях, и, основываясь на этом свойстве касательных, определим касательную к гиперболе.

Рассмотрим ветвь гиперболы, точки которой удовлетворяют равенству $AF_1 - AF_2 = c$. Она разбивает плоскость на две области — внешнюю, для точек A' которой выполняется неравенство $A'F_1 - A'F_2 < c$, и внутреннюю, для точек A'' которой выполняется неравенство $A''F_1 - A''F_2 > c$.

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат во внешней области, т. е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 - A'F_2 < c$, называется ***касательной*** к гиперболе. Точка A называется ***точкой касания.***

Аналогичным образом определяется касательная для точки, лежащей на другой ветви гиперболы.

Теорема. Пусть A — точка гиперболы с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла F_1AF_2, будет касательной к гиперболе (рис. 23.3). Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем:

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - A'F' < F_1F' = AF_1 - AF_2 = c.$$

Следовательно, прямая a является касательной. ■

Фокальное свойство гиперболы. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от нее, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 гиперболы, a — касательная (рис. 23.3). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла F_1AF_2. Углы 2 и 3 равны как вертикальные.

Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдет в направлении AF_2.

Построение касательной к гиперболе. Пусть гипербола задана своими фокусами F_1, F_2 и постоянной c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к гиперболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 23.4). Таких точек может быть две — F', F'', — одна или ни одной, в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a', a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$, $F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к гиперболе. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'' соответственно. Они и будут искомыми.

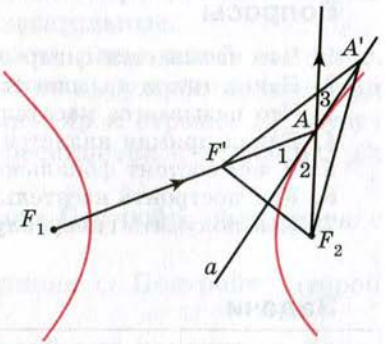


Рис. 23.3

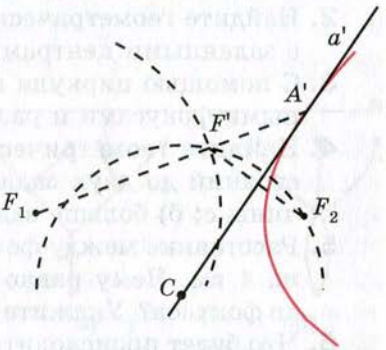


Рис. 23.4

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

Лабораторная работа

Укажем способ получения гиперболы из листа бумаги. Вырежем из листа бумаги круг и отметим точку F на оставшейся части листа. Сложим лист так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности вырезанного круга и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности. Сделаем так несколько раз. Линии сгибов будут касательными к гиперболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму гиперболы.

Вопросы

1. Что называется гиперболой?
2. Какие точки называются фокусами гиперболы?
3. Что называется касательной к гиперболе?
4. Какая прямая является касательной к гиперболе?
5. В чем состоит фокальное свойство гиперболы?
6. Как построить касательную к гиперболе с помощью циркуля и линейки?
7. Как получить гиперболу на листе бумаги?

Задачи

1. Изготовьте прибор для построения гиперболы. Нарисуйте гиперболу с заданными фокусами F_1, F_2. Сколько таких гипербол?

2. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и разностью радиусов.

3. С помощью циркуля постройте несколько точек гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них.

4. Найдите геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

5. Расстояние между фокусами гиперболы равно 6 см, константа c равна 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек гиперболы до фокусов? Укажите соответствующие точки на гиперболе.

6. Что будет происходить с гиперболой, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

7. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AB = CD$ и $AD = BC$, сторона AB закреплена, а остальные стороны подвижны (рис. 23.5). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AD и BC.

8. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.

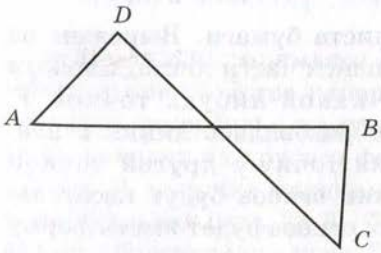


Рис. 23.5

9. Через точку гиперболы с заданными фокусами проведите касательную к гиперболе.

10. Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и разностью расстояний до них c найдите точки, касательные в которых перпендикулярны прямой F_1F_2.

11. Через точку вне гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них проведите касательную к этой гиперболе.

12. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами в точках пересечения имеют перпендикулярные касательные.

13. Даны фокусы F_1, F_2 гиперболы и разность расстояний до них c. Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к гиперболе, если он пересекается с прямой F_2C. Найдите точку касания.

14. Даны два фокуса и касательная к гиперболе. Постройте постоянную c и нарисуйте гиперболу.

15. Даны две касательные, фокус и постоянная c. Постройте второй фокус гиперболы.

16. Даны фокусы F_1 и F_2 гиперболы. Световой луч исходит из фокуса F_1 и отражается от гиперболы в точке A. Постройте отраженный луч.

§24*. Графы

Фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек, называется ***плоским графом*** или просто ***графом*** (рис. 24.1, а). Точки называются ***вершинами***, а отрезки — ***ребрами*** графа.

Рис. 24.1

Вместо отрезков в качестве ребер графов рассматриваются также кривые линии на плоскости (рис. 24.1, б).

Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы выставок и т. д.

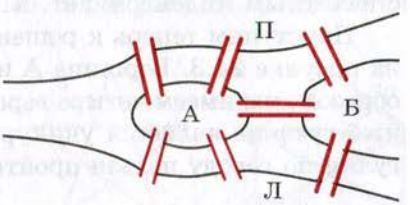


Рис. 24.2

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад.

Одной из таких задач-головоломок была задача о кёнигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707—1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 года до конца жизни).

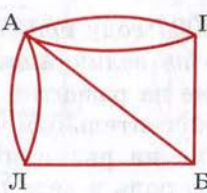


Рис. 24.3

Задача. В городе Кёнигсберге (ныне Калининграде) было семь мостов через реку Прегель (рис. 24.2, где Л — левый берег, П — правый берег, А и Б — острова). Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т. е. «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют так называемые ***уникурсальные графы***.

Задаче о кёнигсбергских мостах Л. Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую Академию наук.

На рисунке 24.3 изображен граф, соответствующий задаче о кёнигсбергских мостах. Выясним, является ли этот граф является уникурсальным.

Для этого рассмотрим понятие ***индекса вершины*** — числа ребер графа, сходящихся в данной вершине (ребра, с началом и концом в данной вершине считаются дважды), — и докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум.

Доказательство. Действительно, если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют четный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало и конец не совпадают, то они являются единственными вершинами нечетного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечетным индексом нет. ■

Приступим теперь к решению задачи. Определим четность вершин графа на рисунке 24.3. Вершина А имеет индекс 5, Б — 3, П — 3 и Л — 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечетного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Отсюда получаем, что во время прогулки по городу нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.

Исторические сведения

В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера — одного из величайших математиков, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Л. Эйлер был действительным членом Петербургской Академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и сыграл важную роль в деле подготовки кадров ученых-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие ученого. При жизни

им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причем последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжелый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский ученый П. С. Лаплас сказал: «Читайте Эйлера, он — учитель всех нас».

Вопросы

1. Какая фигура называется графом? Что называется: а) вершинами; б) ребрами графа?
2. В чем состоит задача Эйлера о кёнигсбергских мостах?
3. Какой граф называется: а) плоским; б) уникурсальным?
4. Что такое индекс вершины графа?
5. Что можно сказать об индексах вершин уникурсального графа?

Задачи

1. Нарисуйте графы, у которых имеются вершины индексов 1, 2, 3 и 4.

2. Нарисуйте граф, в котором каждая вершина имеет индекс, равный: а) двум; б) трем; в) четырем.

3. В графе 10 вершин, каждая из которых имеет индекс 3. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.

4. В графе 5 вершин, каждая из которых имеет индекс 4. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.

5. Определите, какие графы, изображенные на рисунке 24.4, являются уникурсальными.

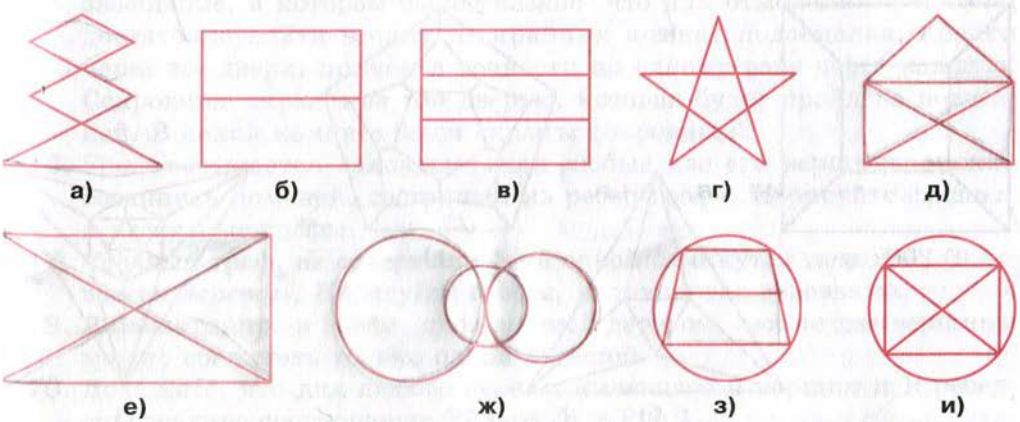


Рис. 24.4

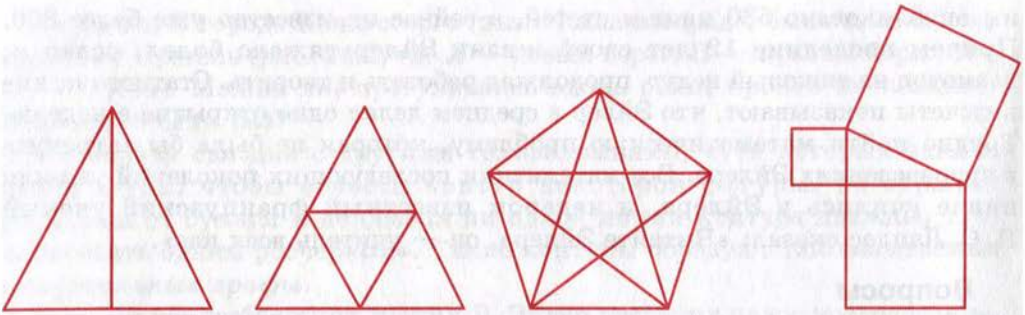


Рис. 24.5

6. Нарисуйте одним росчерком фигуры, изображенные на рисунке 24.5.
7. Может ли граф иметь только одну вершину нечетного индекса?
8. Докажите, что в любом графе сумма индексов всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа. Выведите из этого, что число вершин с нечетными индексами четно.
9. Докажите, что во всяком графе, ребрами которого являются отрезки, найдутся, по крайней мере, две вершины одинакового индекса.
10. Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придется пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?
11. Докажите, что если в задаче о кёнигсбергских мостах добавить еще один мост в любом месте реки Прегель, то полученный граф будет уникурсальным.
12. Какое наименьшее число ребер придется обвести дважды, чтобы нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, графы, изображенные на рисунке 24.6?

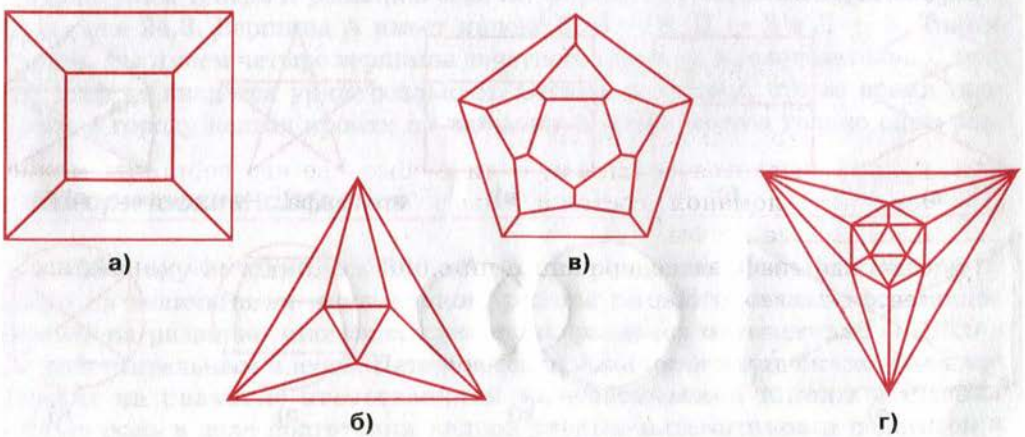


Рис. 24.6

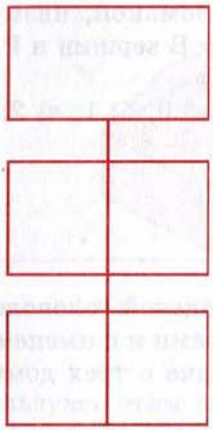


Рис. 24.7

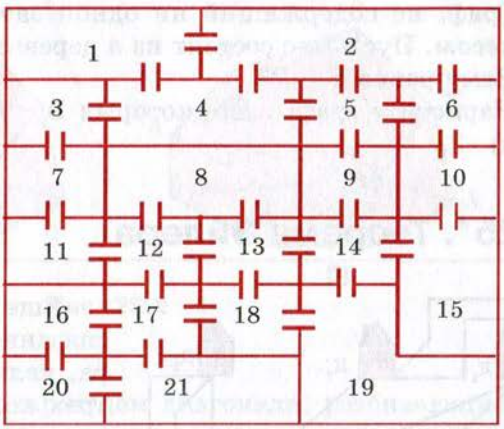


Рис. 24.8

13. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале только один раз? Соответствующий граф приведен на рисунке 24.7. Вершины графа — это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра — залы и коридоры. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

14. Возьмите карту Санкт-Петербурга и определите, можно ли, прогуливаясь по городу, обойти все дворцовые мосты ровно по одному разу.

15. На рис. 24.8 изображен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После его смерти наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

16. Граф называется ***связным***, если любые две его вершины можно соединить ломаной, состоящей из ребер графа. Нарисуйте связные и несвязные графы.

17. Связный граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется ***деревом***. Нарисуйте графы, являющиеся деревьями.

18. Докажите, что в графе, являющемся деревом, любые две вершины можно соединить только одной ломаной.

19. Докажите, что для любого дерева, имеющего В вершин и Р ребер, справедливо соотношение Эйлера: $В - Р = 1$.

20. Приведите примеры графов, для которых $В - Р \neq 1$.

21. Граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется ***лесом***. Пусть лес состоит из n деревьев и имеет В вершин и Р ребер. Чему равно В − Р?

22. Нарисуйте графы, для которых В − Р равно: а) 0; б) 1; в) 2; г) −1; д) −2.

§ 25*. Теорема Эйлера

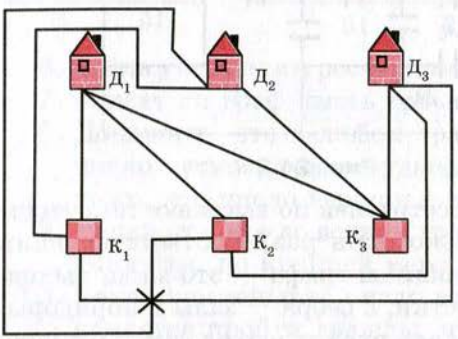


Рис. 25.1

Еще одной задачей-головоломкой, связанной с графами и с именем Эйлера, является задача о трех домиках и трех колодцах.

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу (рис. 25.1)?

Для решения этой задачи воспользуемся теоремой, доказанной Леонардом Эйлером в 1752 году.

Теорема. Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или имеют общие вершины, или имеют общие ребра, то имеет место равенство

$$В - Р + Г = 1, \qquad (*)$$

где В — общее число вершин, Р — общее число ребер, Г — число многоугольников (граней).

Заметим, что соотношение Эйлера не зависит от формы многоугольников. Многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Соотношение Эйлера при этом не изменится.

Доказательство. Докажем, что равенство (*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике данного разбиения провести диагональ, возможно кривую, целиком в нем содержащуюся (рис. 25.2, а). Действительно, после проведения такой диагонали в новом разбиении будет В вершин, Р + 1 ребер и количество многоугольников увеличится на единицу. Следовательно, имеем:

$$В - (Р + 1) + (Г + 1) = В - Р + Г.$$

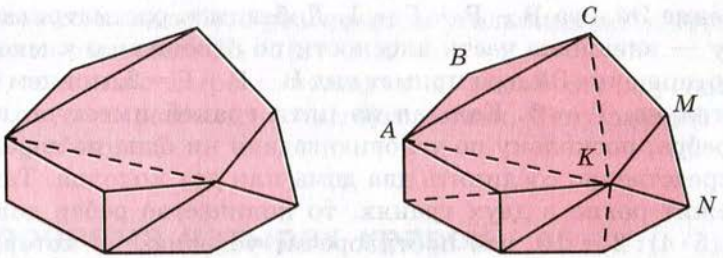


Рис. 25.2

Пользуясь этим свойством, проведем диагонали, разбивающие входящие многоугольники на треугольники, и для полученного разбиения покажем выполнимость соотношения (*) (рис. 25.2, б). Для этого будем последовательно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника ABC требуется снять два ребра, в нашем случае AB и BC;

б) для удаления треугольника MKN требуется снять одно ребро, в нашем случае MN.

В обоих случаях равенство (*) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника граф будет состоять из В − 1 вершин, Р − 2 ребер и Г − 1 многоугольника:

$$(В - 1) - (Р - 2) + (Г - 1) = В - Р + Г.$$

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет равенства (*). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придем к разбиению, состоящему из одного треугольника. Для такого разбиения В = 3, Р = 3, Г = 1 и, следовательно, В − Р + Г= 1. Значит, равенство (*) имеет место и для исходного разбиения, откуда окончательно получаем, что для данного разбиения многоугольника справедливо соотношение (*).■

Приступим теперь к решению задачи о трех домиках и трех колодцах.

Р е ш е н и е. Предположим, что это можно сделать. Обозначим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы — точками $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 25.1). Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые попарно не пересекаются.

Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники. Поэтому для этого разбиения должно выполняться

соотношение Эйлера В − Р + Г = 1. Добавим к рассматриваемым граням еще одну — внешнюю часть плоскости по отношению к многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В − Р + Г = 2, причем В = 6 и Р = 9. Следовательно, Г = 5. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше $(5 \cdot 4) : 2 = 10$, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Вопросы

1. В чем состоит задача Эйлера о трех домиках и трех колодцах?
2. Сформулируйте теорему Эйлера о числе вершин, ребер и граней разбиения многоугольника.

Задачи

1. Укажите какое-нибудь разбиение выпуклого четырехугольника на выпуклые четырехугольники.

2. Докажите, что для произвольного разбиения четырехугольника на четырехугольники выполняется равенство В − Г = 3.

3. Укажите какое-нибудь разбиение выпуклого пятиугольника на выпуклые пятиугольники.

4. Укажите какое-нибудь разбиение треугольника на семиугольники.

5. Два соседа имеют: а) три общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

6. Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

7. Внутри n-угольника взяты m точек. Эти точки и вершины многоугольника соединены отрезками так, что исходный многоугольник разбивается на треугольники. Докажите, что при этом число треугольников равно $n + 2m - 2$.

8. Многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что в каждой вершине сходится три ребра. Сколько при этом имеется вершин и граней, если число ребер равно: а) 6; б) 12; в) 15? Нарисуйте такие разбиения.

9. Докажите, что для любого разбиения n-угольника на m-угольники выполняется равенство $2В + (2 - m)Г = n + 2$.
10. В многоугольнике вырезали дырку в форме многоугольника. Оставшуюся часть разбили на многоугольники. Чему равно $В - Р + Г$ для этого разбиения?

§26*. Проблема четырех красок

Еще одной проблемой, связанной с многоугольниками и графами, является проблема четырех красок, имеющая почти 150-летнюю историю.

Задача заключается в том, чтобы раскрасить данную географическую карту (рис. 26.1, а) так, чтобы пограничные страны (т. е. страны, имеющие общую граничную линию) были окрашены в разные цвета (непограничные страны можно окрашивать одним цветом), использовав при этом наименьшее число красок.

На рисунке 26.1, б изображена карта, для раскраски которой требуется три цвета. На рисунке 26.1, в изображена карта, для раскраски которой трех цветов недостаточно и требуется четыре цвета.

В 1850 году шотландский физик Фредерик Гутри обратил внимание на то, что задачи раскрашивания карт очень популярны среди студентов-математиков в Лондоне, а сформулировал проблему четырех красок его брат Фрэнсис Гутри, который, раскрасив карту графств Англии четырьмя цветами, выдвинул гипотезу о том, что этого количества цветов достаточно для раскраски любой карты. Он привлек к проблеме внимание своего преподавателя математики А. Де Моргана, а тот сообщил о ней своему другу В. Гамильтону и тем самым способствовал ее широкому распространению.

Однако годом рождения проблемы четырех красок считается 1878 год (в некоторых изданиях указывается 1879). Именно тогда на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик А. Кэли четко сформулировал поставленную задачу: «Доказать,

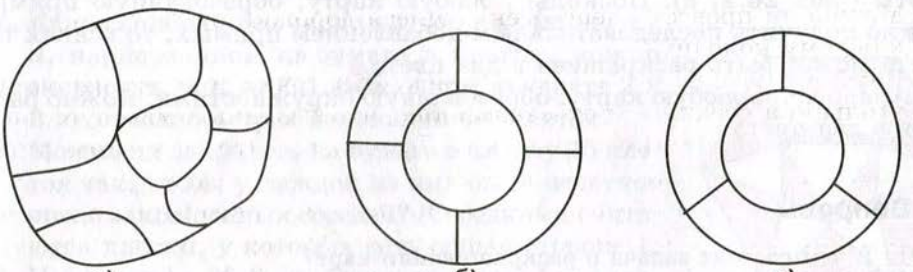


Рис. 26.1

что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками». Раскраска карты называется правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета. Именно с этого момента проблема привлекла к себе внимание многих крупных математиков.

В 1890 году английский математик П. Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Однако долгое время проблема четырех красок не поддавалась решению. В 1968 году американские математики Оре и Стемпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время для решения этой проблемы используются компьютеры, что связано с выполнением огромного количества вычислений. В 1976 году американскими учеными К. Аппелем и В. Хакеном было получено первое машинное решение. С помощью машины они просматривали различные типы карт, и для каждого из них машина решала, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается в четыре цвета. Учеными было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: «Нет», — что и позволило объявить о машинном решении проблемы четырех красок.

Теорема. (О двух красках.) Всякую карту на плоскости, образованную прямыми, можно раскрасить в два цвета.

Доказательство. Ясно, что карту, образованную одной прямой, можно раскрасить в два цвета (рис. 26.2, а). Докажем, что если карта, образованная прямыми, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из нее добавлением новой прямой, также может быть раскрашена в два цвета (рис. 26.2, б). Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причем к самой прямой примыкают пары областей, окрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты (рис. 26.2, в). Поскольку любую карту, образованную прямыми, можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета. ■

Аналогично любую карту, образованную окружностями, можно раскрасить в два цвета.

Вопросы

1. В чем состоит задача о раскрашивании карт?
2. Какой год считается годом рождения проблемы четырех красок?
3. Сколько красок достаточно для раскраски карты, образованной прямыми?

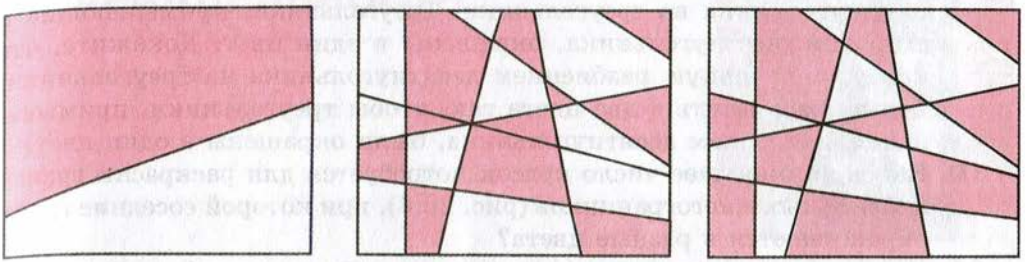


Рис. 26.2

Задачи

1. Раскрасьте карту, изображенную на рисунке 26.1, а. Какое минимальное число красок для этого потребуется?
2. Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими n перегородок (рис. 26.1, б, в)?
3. Докажите, что всевозможные карты на плоскости, образованные окружностями, могут быть раскрашены в два цвета.
4. Исследуйте вопрос о том, какие свойства прямых и окружностей используются при раскрашивании карт двумя цветами. Можно ли раскрасить двумя цветами карту, образованную: а) параболами; б) эллипсами?
5. Докажите, что если карту, заполняющую всю плоскость, можно раскрасить в два цвета, то она имеет вершины только четного индекса.
6. Используя то, что любую карту на плоскости можно раскрасить в четыре цвета, докажите , сформулированное известным астрономом и геометром Августом Мёбиусом в 1840 году: на плоскости нельзя начертить пять областей так, чтобы каждые две из них имели общую границу.
7. Какое наибольшее число клеток в квадрате $n \times n$, нарисованном на бумаге в клетку, можно закрасить так, чтобы ни в одном квадрате 2×2 не оказалось трех закрашенных клеток?
8. Можно ли закрасить на бумаге в клетку 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число закрашенных соседей? (Соседними считаются клетки, у которых есть общая сторона.)
9. На рисунке 26.3 изображена карта, раскрашенная в два цвета, полученная разбиением

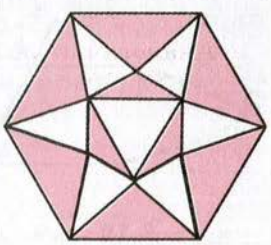


Рис. 26.3

шестиугольника на треугольники. Треугольники, примыкающие к сторонам шестиугольника, окрашены в один цвет. Докажите, что карту, полученную разбиением десятиугольника на треугольники, нельзя раскрасить в два цвета так, чтобы треугольники, примыкающие к сторонам десятиугольника, были окрашены в один цвет.

10. Какое наименьшее число красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников (рис. 26.4), при которой соседние грани окрашиваются в разные цвета?

* **11.** Докажите, что если все вершины карты имеют четный индекс, то ее можно раскрасить в два цвета.

* **12.** Приведите пример карты с двумя вершинами нечетного индекса, которую нельзя раскрасить в два цвета.

* **13.** Приведите пример карты с четырьмя вершинами нечетного индекса, которую нельзя раскрасить в три цвета.

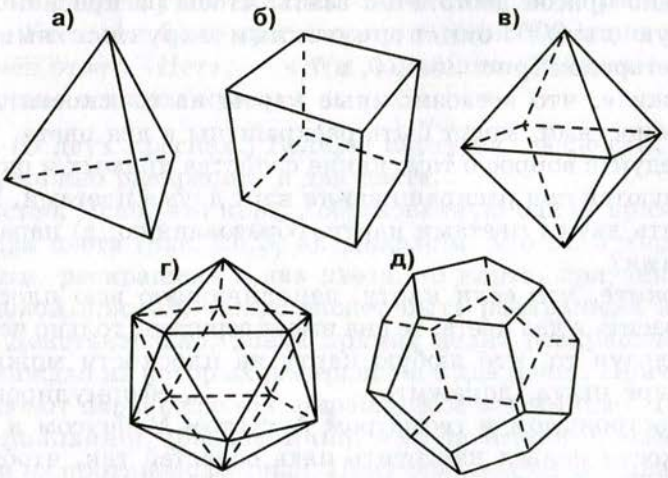
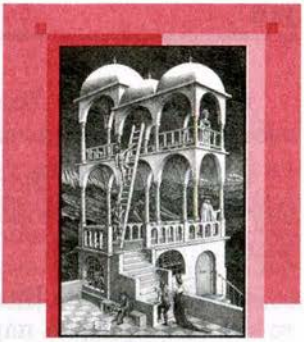


Рис. 26.4

Глава V

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ



§27. Параллельные прямые

Напомним, что две прямые на плоскости называются ***параллельными***, если они не пересекаются (рис. 27.1), т. е. не имеют общих точек.

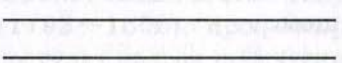


Рис. 27.1

Параллельность прямых обозначается знаком $\parallel$. Так, если прямые a и b параллельны, то пишут: $a \parallel b$.

Пусть a и b — две прямые и c — пересекающая их третья прямая, называемая ***секущей***. Обозначим углы, образованные этими прямыми, цифрами 1, ..., 8, как показано на рисунке 27.2.

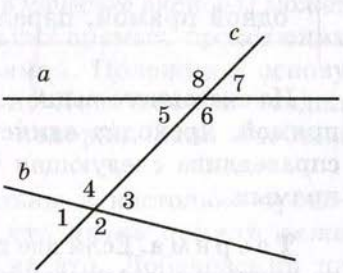


Рис. 27.2

Углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 называются ***соответственными***;

углы 3 и 5, 4 и 6 называются ***внутренними накрест лежащими***;

углы 4 и 5, 3 и 6 называются ***внутренними односторонними***.

Теорема. (Признак параллельности двух прямых.) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются прямой c в точках A и B соответственно и образуют равные внутренние накрест лежащие углы. Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекутся в некоторой точке C (рис. 27.3). Для треугольника ABC угол 5 является внешним и, следовательно, должен быть больше внутреннего угла 3, что противоречит условию равенства этих углов. Значит, прямые a и b не могут пересекаться, т. е. они параллельны. ■

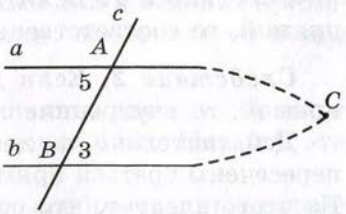


Рис. 27.3

Следствие 1. Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны.

Следствие 2. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°, то эти две прямые параллельны.

Следствие 3. Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то эти две прямые параллельны.

Действительно, в этих случаях внутренние накрест лежащие углы равны и поэтому прямые параллельны.

Основное свойство (аксиома) параллельных прямых состоит в следующем.

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Из сказанного выше следует, что через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Поэтому справедлива следующая теорема, обратная признаку параллельности двух прямых.

Теорема. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Доказательство. Пусть a и b — параллельные прямые, пересеченные прямой c в точках A и B соответственно. Проведем через точку A прямую a_1 так, чтобы внутренние накрест лежащие углы, образованные прямыми a_1, b и секущей c, были равны. Тогда по признаку параллельности прямые a_1 и b параллельны. А так как через точку A проходит единственная прямая, параллельная b, то прямая a совпадет с прямой a_1. Значит, внутренние накрест лежащие углы, образованные прямыми a, b и секущей c, равны. ■

Следствие 1. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны.

Следствие 2. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°.

Действительно, по доказанной теореме если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны. Из этого следует, что соответственные углы будут равны, а внутренние односторонние углы будут составлять 180°.

Исторические сведения

Вопрос о количестве прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой, имеет давнюю и интересную историю. Среди аксиом в «Началах» Евклида пятый по счету постулат по своему содержанию совпадает с аксиомой параллельности: «Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной этой прямой».

На протяжении двух тысячелетий после Евклида математики пытались доказать этот постулат, однако все их попытки заканчивались неудачей, рано или поздно в их рассуждениях обнаруживались ошибки. Лишь в 1826 году великий русский геометр Н. И. Лобачевский (1792—1856), профессор Казанского университета, предположил, что этот постулат нельзя логически вывести из других постулатов (аксиом) Евклида, т. е. нельзя доказать. Поэтому его можно взять в качестве аксиомы, или в качестве аксиомы может быть взято другое свойство о существовании нескольких прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой. Положив в основу геометрии эту новую аксиому параллельности, Лобачевский создал совершенно новую, неевклидову геометрию, которая была названа геометрией Лобачевского.

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и настолько противоречили так называемому здравому смыслу, что их не поняли даже крупные математики того времени. Несмотря на это, Лобачевский не отказался от своих идей. Он не только был убежден в логической непротиворечивости новой геометрии, но и твердо верил в ее применимость к исследованию реального пространства. С этой целью он проводил сложнейшие астрономические наблюдения и измерения, однако недостаточная точность измерительных приборов не позволила ему подтвердить свою гипотезу.

Признание геометрии Лобачевского пришло только после его смерти. Работы Лобачевского были переведены на другие языки и изучались математиками всего мира. В настоящее время геометрия Лобачевского является неотъемлемой частью современной математики и находит применение во многих областях человеческого знания, способствует более глубокому пониманию окружающего нас мира.

Пример 1. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов, образованных параллельными прямыми и секущей, равна 150°. Найдите эти углы.

Решение. Внутренние накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми и секущей, равны. Если их сумма равна 150°, то каждый из них равен 75°.

Пример 2. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Если бы прямые a и b пересекались в точке C, то через эту точку проходили бы две прямые, параллельные прямой c, что противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. параллельны.

Вопросы

1. Какая прямая называется секущей для двух данных прямых?
2. На рисунке 27.2 покажите соответственные, внутренние накрест лежащие и внутренние односторонние углы.
3. Какие прямые называются параллельными?
4. Сформулируйте признак параллельности двух прямых.
5. Сформулируйте аксиому параллельных.
6. Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку плоскости?

Задачи

1. Как могут располагаться на плоскости две прямые относительно друг друга?
2. При пересечении двух прямых третьей образуется 8 углов. Сколько из них могут оказаться тупыми?
3. Могут ли оба внутренних односторонних угла при пересечении двух прямых третьей быть тупыми?
4. Могут ли быть равны внутренние односторонние углы при пересечении двух прямых третьей?
5. Могут ли все углы, образованные при пересечении двух прямых третьей, быть равными между собой?
6. Найдите углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если: а) один из углов равен 150°; б) один из углов на 70° больше другого.
7. Разность двух внутренних односторонних углов, образованных параллельными прямыми и секущей, равна 30°. Найдите эти углы.
8. Угол ABC равен 80°, а угол BCD равен 120°. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными?
9. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

10. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

11. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO = OD$.

12. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.

13. Докажите, что биссектрисы внутренних односторонних углов перпендикулярны, т. е. лежат на перпендикулярных прямых.

14. Треугольники ABC и BAD равны. Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

15. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

16. Докажите, что если две прямые пересекаются, то любая третья прямая пересекает по крайней мере одну из этих прямых.

17. Две прямые касаются окружности в двух диаметрально противоположных точках. Каково взаимное расположение этих прямых?

18. Каково взаимное расположение прямых: а) a и b; б) a и c; в) b и c, если соответственно: а) $a \perp c$, $b \perp c$; б) $a \perp b$, $c \perp b$; в) $a \perp b$, $c \perp a$?

19. Противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ попарно параллельны. Найдите величины углов и длины сторон этого четырехугольника, если $\angle A = 30°$, $AB = 2$ см, $BC = 4$ см.

○ **20.** Лучи AB и CD не пересекаются. Следует ли из этого, что они параллельны?

* **21.** Докажите, что две прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.

* **22.** Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы равны или в сумме составляют 180°.

* **23.** Докажите, что если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы равны или в сумме составляют 180°.

* **24.** Укажите способ построения прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку, с помощью циркуля и линейки.

§28. Сумма углов многоугольника

Прежде всего выясним, чему равна сумма углов треугольника.

Теорема. Сумма углов произвольного треугольника равна 180°.

Доказательство. Для произвольного треугольника ABC через вершину C проведем прямую, параллельную AB (рис. 28.1). Тогда $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$ как внутренние накрест лежащие углы. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 3 = 180°$. ■

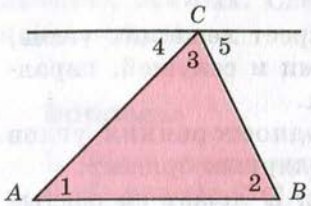


Рис. 28.1

Следствие 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

Доказательство. Обозначим внутренние углы треугольника ABC цифрами 1, 2 и 3 (рис. 28.2). Пусть 4 — внешний угол, не смежный с углами 1 и 3. Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 4 = 180° - \angle 2 = \angle 1 + \angle 3$. ■

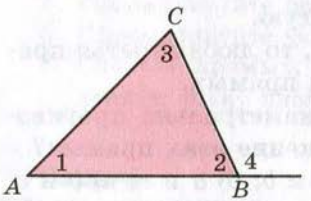


Рис. 28.2

Следствие 2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Выясним теперь, чему равна сумма углов выпуклого многоугольника.

Теорема. Сумма углов произвольного выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$.

Доказательство. Из какой-нибудь вершины выпуклого многоугольника проведем все его диагонали (рис. 28.3). Тогда многоугольник разобьется на $n - 2$ треугольника. В каждом треугольнике сумма углов равна 180°, и эти углы составляют углы многоугольника. Следовательно, сумма углов многоугольника равна $180°(n - 2)$. ■

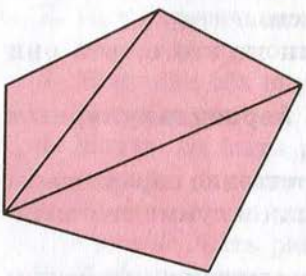


Рис. 28.3

Пример 1. На рисунке 28.4 $AB \parallel CD$, отрезки AD и CB пересекаются в точке O, $\angle A = 40°$, $\angle C = 45°$. Найдите угол BOD.

Решение. Искомый угол является внешним углом треугольника ABO. Поэтому он равен сумме углов A и B. По условию $\angle A = 40°$. Угол B является внутренним накрест лежащим по отношению к углу C. Поэтому $\angle B = \angle C = 45°$. Таким образом, $\angle BOD = \angle A + \angle C = 85°$.

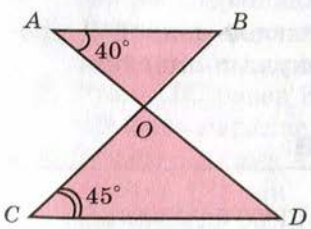


Рис. 28.4

Пример 2. Чему равны углы правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) пятиугольника; г) шестиугольника; д) n-угольника?

Решение. По доказанной теореме сумма углов произвольного выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$. Так как в правильном n-угольнике все

углы равны, то каждый из них должен равняться $\frac{180°(n-2)}{n}$. Подставляя вместо n различные значения, получим, что углы правильного треугольника равны 60°; углы правильного четырехугольника равны 90°; углы правильного пятиугольника равны 108°; углы правильного шестиугольника равны 120°.

Вопросы

1. Чему равна сумма углов треугольника?
2. Чему равен внешний угол треугольника?
3. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
4. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?

Задачи

1. Чему равны углы равностороннего треугольника?

2. Постройте угол в: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 135°.

3. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен 100°.

4. В треугольнике ABC угол B равен 70°. Из вершины угла A проведена высота AD. Найдите углы образовавшегося треугольника ABD.

5. В треугольнике ABC угол A равен 65°, угол B равен 73°. Найдите углы, которые образует высота треугольника, проведенная из вершины C, со сторонами AC и BC.

6. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то противолежащий этому катету угол равен 30°.

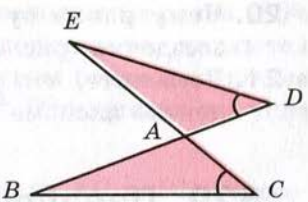


Рис. 28.5

7. На рисунке 28.5 отрезки EC и BD пересекаются в точке A, $\angle C = \angle D$. Докажите, что $\angle B = \angle E$.

8. В треугольнике ABC (рис. 28.6) проведен отрезок MN таким образом, что $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

9. Пусть D — середина стороны AB треугольника ABC. Докажите, что $CD = \frac{1}{2}AB$ тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90°$.

10. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине, противоположной основанию равнобедренного треугольника, параллельна ему.

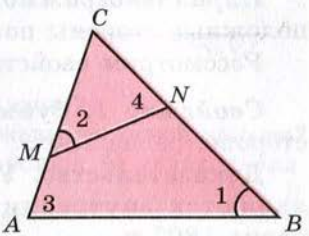


Рис. 28.6

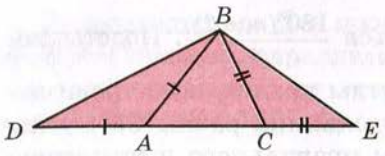


Рис. 28.7

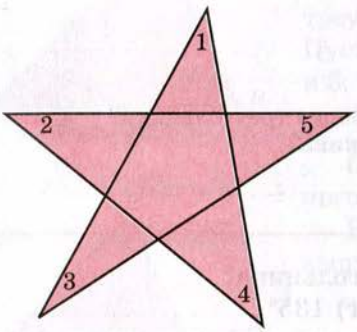


Рис. 28.8

11. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

12. В треугольнике ABC угол A равен 48°, угол B равен 56°. На продолжении стороны AC отложены отрезки $CE = BC$ и $AD = AB$ (рис. 28.7). Найдите углы треугольника DEB.

13. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

14. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900°. Сколько у него сторон?

15. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.

16. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трех острых углов.

17. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен: а) 36°; б) 24°?

* **18.** Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника, кратны $\frac{180°}{n}$.

* **19.** Докажите, что сумма углов невыпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$.

* **20.** Чему равна сумма острых углов произвольной пятиконечной звездочки (рис. 28.8)?

* **21.** Докажите, что утверждение о сумме углов треугольника эквивалентно аксиоме параллельных.

§29. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 29.1).

Рассмотрим свойства параллелограмма.

Свойство 1. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

Доказательство. Углы, прилежащие к стороне параллелограмма, являются внутренними односторонними углами. Поэтому их сумма равна 180°. ■

Свойство 2. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

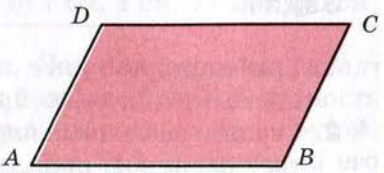


Рис. 29.1

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 29.2). Диагональ AC разбивает его на два треугольника ABC и CDA, которые равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle B = \angle D$. Кроме этого, $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$. ■

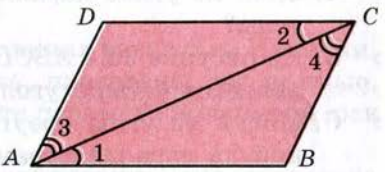


Рис. 29.2

Свойство 3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 29.3). Треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = BC$ по свойству 2, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому $AO = OC$ и $BO = OD$. ■

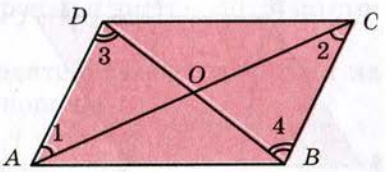


Рис. 29.3

Пример 1. Сумма двух углов параллелограмма равна 148°. Найдите его углы.

Решение. Так как сумма соседних углов параллелограмма равна 180°, то данные углы не могут быть соседними и, следовательно, являются противоположными. Поскольку противоположные углы параллелограмма равны, то в данном случае каждый из них равен 74°. Оставшиеся два угла параллелограмма равны 106°.

Пример 2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Назовите пары равных треугольников.

Ответ. AOB и COD; AOD и COB; ABC и CDA; ABD и CDB.

Вопросы

1. Какой четырехугольник называется параллелограммом?
2. Чему равна сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?
3. Что можно сказать о противоположных: а) сторонах; б) углах параллелограмма?
4. Что можно сказать о диагоналях параллелограмма?

Задачи

1. Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Сколько при этом получилось параллелограммов?

2. Сколько различных параллелограммов можно получить из двух равных треугольников, прикладывая их друг к другу различным образом?

3. У параллелограмма две стороны равны 10 см и 15 см. Чему равны две другие стороны?

4. Один из углов параллелограмма равен 30°. Чему равны остальные углы?

5. На рисунке 29.4 $ABCD$ — параллелограмм, $BE \parallel DF$. Какой фигурой является четырехугольник $BFDE$?

6. Могут ли углы треугольника быть равными трем углам какого-нибудь параллелограмма?

7. Найдите углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: а) 80°; б) 100°; в) 160°.

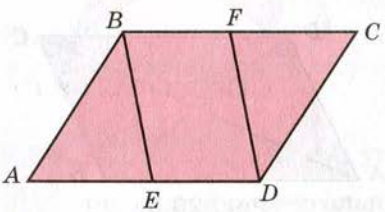


Рис. 29.4

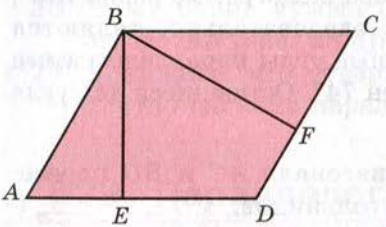


Рис. 29.5

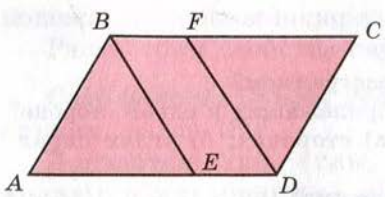


Рис. 29.6

8. Найдите углы параллелограмма, если один из его углов: а) больше другого на 40°; б) меньше другого в 5 раз.

9. Найдите углы параллелограмма, если два его угла относятся как 3 : 7.

10. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 25° и 35°. Найдите углы параллелограмма.

11. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 29.5) BE и BF перпендикулярны сторонам AD и CD соответственно. Его острый угол равен 60°. Найдите углы образовавшегося четырехугольника $BFDE$.

12. Как расположены биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?

13. Как расположены биссектрисы углов параллелограмма (с неравными смежными сторонами), противолежащих друг другу?

14. Из двух противоположных вершин параллелограмма $ABCD$ (рис. 29.6) проведены биссектрисы BE и DF. Будет ли четырехугольник $BFDE$ параллелограммом?

15. Существует ли параллелограмм, в котором две стороны и одна диагональ

соответственно равны: а) 5 см, 2 см, 2 см; б) 7 см, 4 см, 11 см; в) 2 см, 3 см, 4 см; г) 3 см, 8 см, 10 см?

16. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 2 см больше другой; б) разность двух сторон равна 7 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.
17. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны параллелограмма.
18. Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до двух его вершин равны 3 см и 4 см. Найдите расстояния от нее до двух других вершин?
19. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.
20. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что ее отрезок, заключенный между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.
21. Постройте параллелограмм: а) по двум сторонам и диагонали; б) по стороне и двум диагоналям.
22. Через точку, данную внутри угла, проведите отрезок с концами на сторонах угла, делящийся в этой точке пополам.

§30. Признаки параллелограмма

Рассмотрим признаки параллелограмма, т. е. достаточные условия, из выполнимости которых для четырехугольника следует, что он является параллелограммом.

Теорема. (Первый признак параллелограмма.) Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны. Проведем диагональ AC (рис. 30.1). Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому внутренние накрест лежащие углы 3 и 4 равны. Следовательно, прямые AD и BC параллельны. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны, и $ABCD$ — параллелограмм.

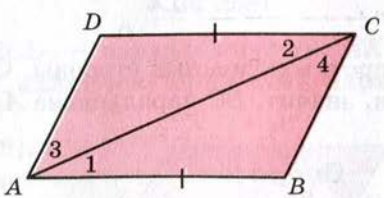


Рис. 30.1

Теорема. (Второй признак параллелограмма.) Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

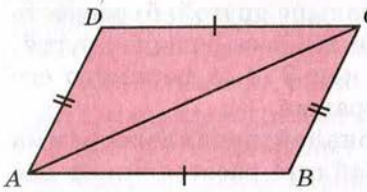


Рис. 30.2

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ имеют место равенства: $AB = CD$, $BC = AD$. Одна из диагоналей разбивает его на два треугольника. Пусть, например, это диагональ AC (рис. 30.2). Тогда треугольники ABC и CDA равны (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle CAB = \angle ACD$, и, значит, прямые AB и CD параллельны. Аналогично, $\angle ACB = \angle CAD$, и, значит, прямые BC и AD параллельны. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны, и $ABCD$ — параллелограмм.■

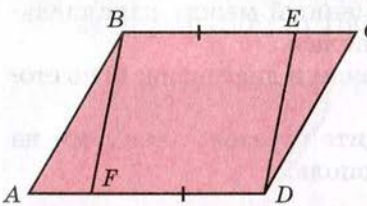


Рис. 30.3

Пример 1. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 30.3) отложены равные отрезки $BE = DF$. Является ли четырехугольник $BEDF$ параллелограммом?

Решение. Да, так как противоположные стороны BE и DF равны и параллельны.

Пример 2. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

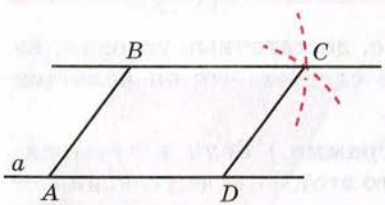


Рис. 30.4

Решение. Пусть a — прямая, B — не принадлежащая ей точка. Отметим какие-нибудь точки A и D на прямой a (рис. 30.4). С центрами в точках B и D проведем окружности радиусов AD и AB соответственно. Их точку пересечения обозначим C. Проведем прямую BC. Она и будет искомой. Действительно, в четырехугольнике $ABCD$ равны противоположные стороны. Следовательно, он является параллелограммом, и, значит, BC параллельна AD.

Вопросы

1. Какие условия называют признаками параллелограмма?
2. Сформулируйте первый признак параллелограмма.
3. Сформулируйте второй признак параллелограмма.

Задачи

1. Даны два равных и параллельных отрезка. Их концы соединены непересекающимися отрезками. Верно ли, что получившийся четырехугольник является параллелограммом?

2. Является ли равенство двух противоположных углов четырехугольника признаком параллелограмма?

3. Две стороны четырехугольника параллельны, а две другие равны. Верно ли утверждение о том, что этот четырехугольник является параллелограммом?

4. На бумаге в клетку отмечены точки A, B, C, D (рис. 30.5). Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

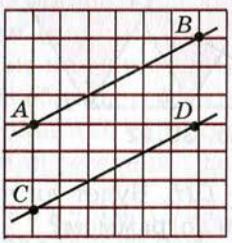


Рис. 30.5

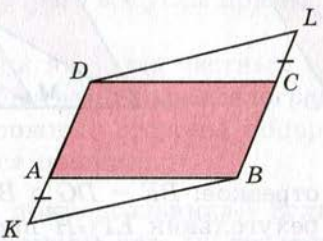


Рис. 30.6

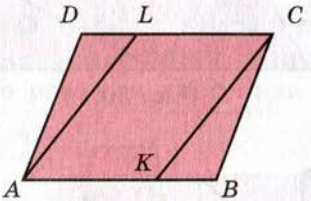


Рис. 30.7

5. Из данной точки к окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные касательные. Чему равны отрезки этих касательных, заключенные между данной точкой и точками касания?

6. Докажите, что если в четырехугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм (признак параллелограмма).

7. На продолжении противоположных сторон параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AK, CL (рис. 30.6) и проведены отрезки BK, LD. Докажите, что полученный четырехугольник $LBKD$ — параллелограмм.

8. На рисунке 30.7 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, $AK = CL$. Докажите, что точки A, K, C, L являются вершинами параллелограмма.

9. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 30.8). E, F, G, H — середины его сторон. Будет ли четырехугольник $EFGH$ параллелограммом? Почему?

10. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 30.9) отложены две пары равных

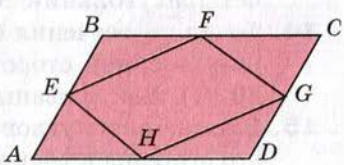


Рис. 30.8

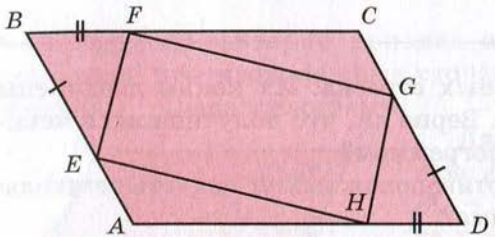


Рис. 30.9

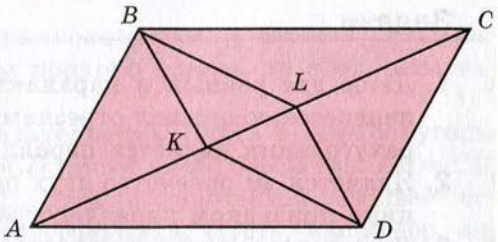


Рис. 30.10

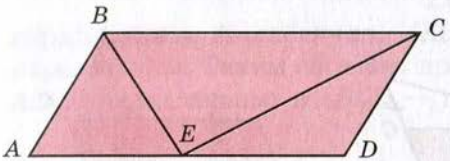


Рис. 30.11

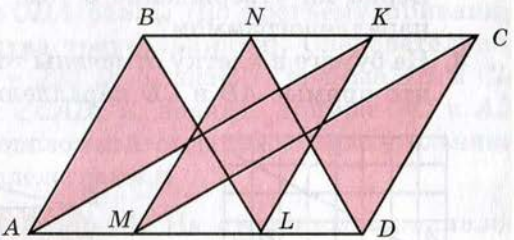


Рис. 30.12

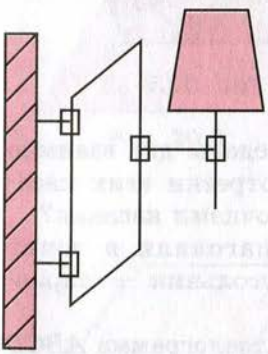


Рис. 30.13

отрезков: $BE = DG$ и $BF = DH$. Будет ли четырехугольник $EFGH$ параллелограммом?

11. На противоположных сторонах параллелограмма $KLMN$ отложены равные отрезки: $KA = MB$ и $KC = MD$. Будет ли четырехугольник $ACBD$ параллелограммом? Докажите, что точки пересечения диагоналей $KLMN$ и $ACBD$ совпадают.

12. Докажите, что биссектриса внешнего угла параллелограмма вместе с его сторонами (или их продолжениями), не проходящими через вершину этого угла, образует равнобедренный треугольник, сумма боковых сторон которого равна периметру параллелограмма.

* **13.** В параллелограмме $ABCD$ (рис. 30.10) биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках K и L, которые соединены соответственно с вершинами параллелограмма D и B. Является ли четырехугольник $KBLD$ параллелограммом?

* **14.** Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне (рис. 30.11). Как связаны между собой стороны данного параллелограмма?

* **15.** Биссектрисы углов параллелограмма $ABCD$ (рис. 30.12) пересекают его стороны в точках K, L, M и N. Определите вид четырехугольника $KLMN$.

16. Объясните, почему ось лампы, изображенной на рисунке 30.13, всегда вертикальна.

17. Восстановите параллелограмм по трем точкам — серединам его сторон.

18. Постройте параллелограмм: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне, углу и диагонали; в)* по стороне, перпендикуляру, опущенному на нее из вершины, и пересекающей его диагонали.

§31. Прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется ***прямоугольником*** (рис. 31.1).

Так как прямоугольник является частным случаем параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. В частности, в прямоугольнике противоположные стороны попарно равны и диагонали в точке пересечения делятся пополам.

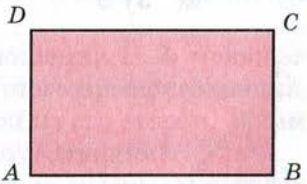


Рис. 31.1

Теорема. (Признак прямоугольника.) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$ (рис. 31.2). Тогда треугольники ABC и BAD равны по третьему признаку равенства треугольников (AB — общая, $AC = BD$, $BC = AD$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BAD$. Но эти углы в сумме составляют 180°. Значит, каждый из них равен 90°. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то и остальные его углы также равны 90°, т. е. $ABCD$ — прямоугольник. ■

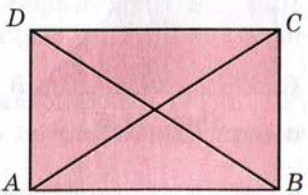


Рис. 31.2

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ***ромбом*** (рис. 31.3).

Конечно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

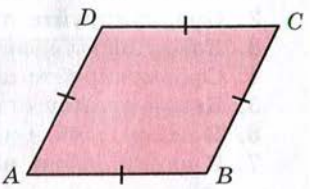


Рис. 31.3

Теорема. (Признак ромба.) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, диагонали AC и BD перпендикулярны,

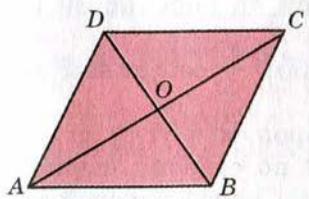


Рис. 31.4

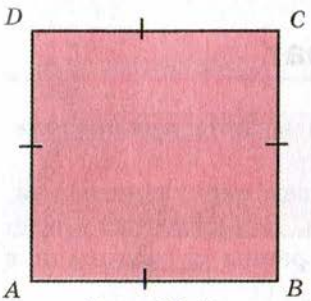


Рис. 31.5

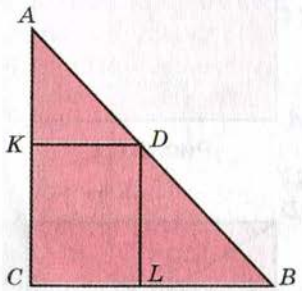


Рис. 31.6

O — точка их пересечения (рис. 31.4). Тогда прямоугольные треугольники AOB и AOD равны (по двум катетам: AO — общий, $OB = OD$). Следовательно, $AB = AD$. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то и остальные его стороны равны, т. е. $ABCD$ — ромб.■

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется ***квадратом*** (рис. 31.5).

Можно сказать, что квадратом является ромб, у которого все углы прямые.

Конечно, квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Пример 1. Из точки D, принадлежащей гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 31.6), проведены две прямые, параллельные катетам. Сумма периметров получившихся треугольников AKD и DLB равна 10 см. Найдите периметр данного треугольника ABC.

Решение. Четырехугольник $KCLD$ — прямоугольник. Поэтому $KC = DL$ и $CL = KD$. Следовательно, периметр треугольника ABC равен сумме периметров треугольников AKD и DLB, т. е. равен 10 см.

Пример 2. Докажите, что если в ромбе диагонали равны, то этот ромб является квадратом.

Решение. Так как ромб является параллелограммом, то из признака прямоугольника следует, что ромб, у которого равны диагонали, является прямоугольником, а значит, он является квадратом.

Вопросы

1. Какой параллелограмм называется прямоугольником?
2. Сформулируйте признак прямоугольника.
3. Какой параллелограмм называется ромбом?
4. Сформулируйте признак ромба.
5. Какой прямоугольник называется квадратом?
6. В каком случае ромб является квадратом?
7. В каком случае параллелограмм является квадратом?

Задачи

1. Два равных прямоугольных треугольника приложили один к другому таким образом, что их гипотенузы совпали, а неравные острые углы приложились один к другому. Какой при этом получился четырехугольник?
2. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см, диагонали пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали прямоугольника.
3. Существует ли четырехугольник, не являющийся прямоугольником, диагонали которого были бы равны?
4. Верно ли утверждение о том, что если в четырехугольнике один угол прямой, а диагонали равны, то он является прямоугольником?
5. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
6. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма с неравными соседними сторонами при пересечении образуют прямоугольник.
7. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 31.7) из вершины прямого угла C опущена высота CH, равная 3 см. Из точки H опущены перпендикуляры HK и HL на катеты треугольника. Найдите расстояние между точками K и L.
8. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 1 : 2, меньшая его сторона равна 5 см. Найдите диагонали данного прямоугольника.
9. Диагональ прямоугольника вдвое больше одной из его сторон. Какие углы образуют диагонали со сторонами прямоугольника?
10. Тупой угол между диагоналями прямоугольника равен 120°. Чему при этом будет равно отношение его меньшей стороны к диагонали?
11. Найдите диагонали прямоугольника, если его периметр равен 34 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 30 см.
12. В прямоугольнике острый угол между его диагоналями равен 50°. Найдите углы, которые образуют диагонали со сторонами прямоугольника.
13. Перпендикуляр BH (рис. 31.8), опущенный из вершины B прямоугольника $ABCD$ на его диагональ AC, делит угол B в отношении 2 : 3.

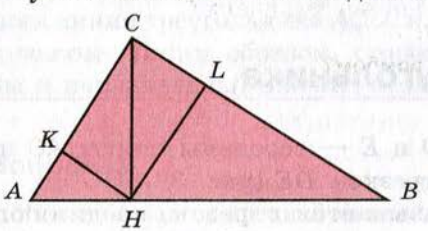


Рис. 31.7

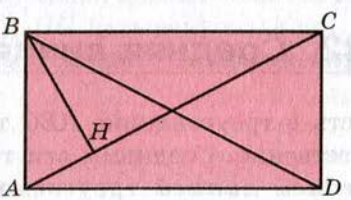


Рис. 31.8

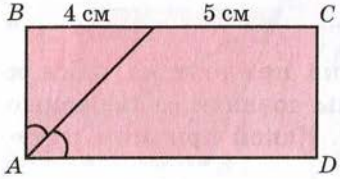


Рис. 31.9

Найдите: а) углы, которые образуют диагонали данного прямоугольника с его сторонами; б) угол между перпендикуляром BH и диагональю BD.

14. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит пересекаемую ею сторону на отрезки 4 см и 5 см (рис. 31.9). Найдите стороны данного прямоугольника.

○ **15.** Чему равна меньшая диагональ ромба со стороной a и острым углом в 60°?

16. Докажите, что у ромба диагонали перпендикулярны.

17. Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.

18. Докажите, что если у четырехугольника все стороны равны, то он является ромбом.

19. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.

○ **20.** В ромбе одна из диагоналей равна его стороне. Найдите углы ромба.

21. Постройте ромб: а) по стороне и диагонали; б) по двум диагоналям.

○ **22.** Чему равен угол между: а) диагоналями квадрата: б) диагональю и стороной квадрата?

○ **23.** В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 5 см. Найдите периметр этого квадрата.

24. Докажите, что если диагонали прямоугольника перпендикулярны, то он является квадратом.

25. На сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

* **26.** Придумайте какой-нибудь признак квадрата.

* **27.** Как нужно разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник на две части, чтобы из них можно было сложить квадрат?

§32. Средняя линия треугольника

Пусть в треугольнике ABC точки D и E — середины сторон AC и BC соответственно. Соединим эти точки отрезком DE (рис. 32.1).

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине.

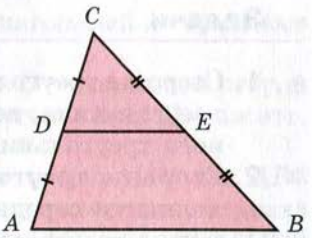


Рис. 32.1

Доказательство. Пусть DE — средняя линия треугольника ABC (рис. 32.2). Докажем, что DE параллельна AB и равна ее половине. Для этого отложим на прямой DE отрезок $EF = DE$ и соединим отрезком точки B и F. Треугольники ECD и EBF равны по первому признаку равенства треугольников ($CE = BE$ по условию, $DE = FE$ по построению, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные). Следовательно, $BF = CD$, и, значит, $BF = AD$. Угол 3 равен углу 4, и, значит, прямые AC и BF параллельны. Таким образом, по признаку параллелограмма, четырехугольник $ABFD$ — параллелограмм. Итак, сторона AB параллельна и равна стороне DF. Средняя линия DE равна половине DF и, следовательно, половине AB. ■

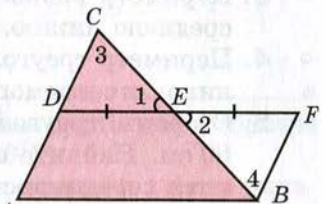


Рис. 32.2

Пример 1. Периметр треугольника равен 12 см, середины сторон соединены отрезками. Найдите периметр получившегося треугольника.

Решение. Стороны получившегося треугольника являются средними линиями исходного треугольника. Следовательно, они равны половинам соответствующих сторон. Поэтому искомый периметр равен половине периметра треугольника, т. е. равен 6 см.

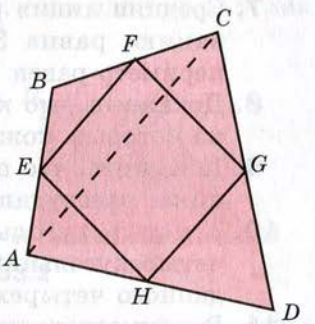


Рис. 32.3

Пример 2. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, E, F, G, H — середины его сторон (рис. 32.3). Тогда EF — средняя линия треугольника ABC и, следовательно, параллельна AC и равна ее половине. Аналогично, HG — средняя линия треугольника ACD, и, следовательно, параллельна AC и равна ее половине. Таким образом, стороны EF и HG четырехугольника $EFGH$ равны и параллельны. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм.

Вопросы

1. Что называется средней линией треугольника?
2. Сформулируйте теорему о средней линии треугольника.

Задачи

1. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
2. Стороны треугольника равны 2 см, 3 см и 4 см. Его вершины являются серединами сторон другого треугольника. Найдите периметры треугольников.
3. Периметр равностороннего треугольника равен 72 см. Найдите его среднюю линию.
4. Периметр треугольника равен 12,3 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от данного какой-нибудь его средней линией.
5. Стороны треугольника относятся как $3:4:5$, периметр его равен 60 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
6. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.
7. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.
8. Докажите, что каждый треугольник можно разрезать на две части, из которых можно составить параллелограмм.
9. Докажите, что прямая, на которой лежит средняя линия треугольника, равноудалена от его вершин.
10. У четырехугольника диагонали равны a и b. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.
11. В прямоугольнике меньшая сторона равна 20 см и образует с диагональю угол в $60°$. Середины сторон прямоугольника последовательно соединены. Найдите периметр полученного четырехугольника.
12. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. И наоборот, середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.
13. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке M. В треугольнике AMB проведена средняя линия $PQ \parallel AB$. Докажите, что четырехугольник A_1B_1PQ — параллелограмм.
14. Докажите, что вершины треугольника находятся на равном расстоянии от прямой, на которой лежит средняя линия этого треугольника.
15. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой. Как будет расположена прямая, равноудаленная от этих точек? Сколько существует таких прямых?
16. Постройте треугольник, если заданы середины его сторон.

17. Восстановите ромб по точке пересечения его диагоналей и серединам двух смежных сторон.

* **18.** В остроугольном треугольнике KLM точки N и O — середины сторон KL и KM соответственно, KH — высота треугольника. Докажите, что углы NHO и K равны.

* **19.** На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AD и BE. Докажите, что середина отрезка DE принадлежит средней линии треугольника ABC, параллельной его основанию.

§33. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 33.1).

Параллельные стороны трапеции называются ее ***основаниями***, а непараллельные стороны — ***боковыми сторонами***.

Трапеция называется ***равнобедренной***, если ее боковые стороны равны (рис. 33.2, а). Трапеция называется ***прямоугольной***, если один из ее углов прямой (рис. 33.2, б).

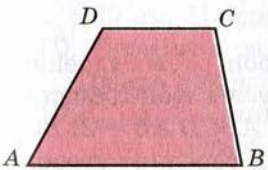


Рис. 33.1

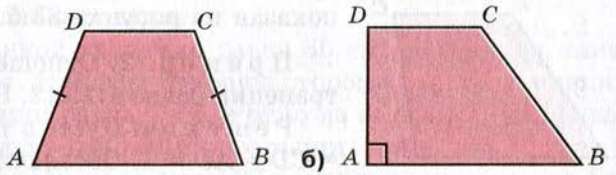


Рис. 33.2

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон (рис. 33.3).

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть EF — средняя линия трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Проведем прямую DF и ее точку пересечения с прямой AB обозначим G (рис. 33.4). Треугольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства

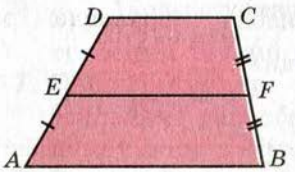


Рис. 33.3

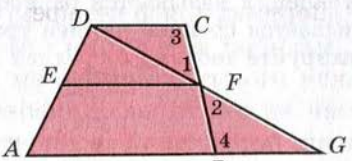


Рис. 33.4

треугольников ($CF = BF$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы). Из равенства этих треугольников следует, что $DF = GF$ и, значит, EF — средняя линия треугольника AGD. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что EF параллельна AB и $EF = \frac{1}{2}AG$. Так как $AB \parallel CD$, то EF будет параллельна обоим основаниям и, кроме того, $EF = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(AB + BG) = \frac{1}{2}(AB + CD)$. ■

Следствие. Прямая, проходящая через середину боковой стороны трапеции и параллельная основаниям, делит вторую боковую сторону пополам.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$), $AE = ED$, $EF \parallel AB$ (рис. 33.4). Так как средняя линия этой трапеции проходит через точку E и параллельна AB, то (в силу аксиомы параллельных) средняя линия содержится в EF, и, значит, прямая EF делит вторую боковую сторону трапеции пополам. ■

Пример 1. Могут ли два противоположных угла трапеции быть острыми?

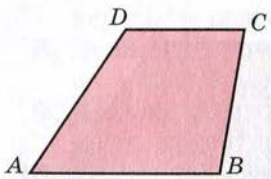


Рис. 33.5

Решение. Да, могут. Пример такой трапеции показан на рисунке 33.5.

Пример 2. Отношение сторон равнобедренной трапеции равно 1:1:1:2. Найдите углы этой трапеции.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = 2$, $BC = CD = AD = 1$. Обозначим через E середину стороны AB. В четырехугольнике $AECD$ противоположные стороны AE и CD равны и параллельны. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм, и, следовательно, $EC = AD = 1$. В треугольнике EBC все стороны равны 1, поэтому $\angle EBC = 60°$. Таким образом, в трапеции $ABCD$ $\angle A = \angle B = 60°$, $\angle C = \angle D = 120°$.

Вопросы

1. Какой четырехугольник называется трапецией?
2. Какие стороны трапеции называются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?
3. Какая трапеция называется равнобедренной; прямоугольной?
4. Что называется средней линией трапеции?
5. Сформулируйте теорему о средней линии трапеции.

Задачи

○ **1.** Могут ли углы, прилежащие к основанию трапеции, быть один острым, а другой тупым?

2. Может ли у трапеции быть: а) три прямых угла; б) три острых угла?

3. В четырехугольнике диагонали равны. Будет ли он равнобедренной трапецией?

4. Через середину боковой стороны AB трапеции $ABCD$ проведена прямая, параллельная основанию. На какие части она рассечет другую боковую сторону?

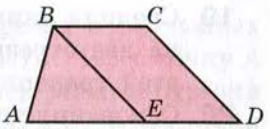


Рис. 33.6

5. Определите вид четырехугольника, который получится, если последовательно соединить отрезками середины сторон равнобедренной трапеции.

6. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 3 см (рис. 33.6), отсекает треугольник, периметр которого равен 15 см. Найдите периметр трапеции.

7. Основания трапеции относятся как 5 : 2, а их разность равна 18 см. Найдите среднюю линию трапеции.

8. Периметр трапеции равен 50 см, а сумма непараллельных сторон равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.

9. Средняя линия трапеции равна 30 см, а меньшее основание равно 20 см. Найдите большее основание.

10. Периметр равнобедренной трапеции равен 80 см, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону данной трапеции.

11. Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.

12. Основания трапеции относятся как 2 : 3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.

13. Чему равны углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°?

14. Докажите, что у равнобедренной трапеции равны: а) диагонали; б) углы при основаниях.

15. Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.

16. Докажите: 1) сумма боковых сторон трапеции больше разности оснований; 2) сумма диагоналей трапеции больше суммы оснований; 3) разность оснований больше разности боковых сторон; 4) диагонали трапеции точкой их пересечения не делятся пополам.

17. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длину 5 см и 2 см. Найдите среднюю линию этой трапеции.

18. В равнобедренной трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.

19. Средняя линия трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность которых равна 2 см. Найдите основания этой трапеции.

20. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

21. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на отрезки, равные a и b. Найдите основания трапеции.

22. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей равнобедренной трапеции и точку пересечения продолжения боковых сторон, перпендикулярна основаниям трапеции и делит их пополам.

* **23.** Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

* **24.** Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.

* **25.** Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей?

§34. Теорема Фалеса

Следующая теорема, носящая имя Фалеса, является обобщением теорем о средних линиях треугольника и трапеции.

Теорема. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла; B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения параллельных прямых с другой стороной угла (рис. 34.1). Если $A_1A_2 = A_2A_3$, то A_2B_2 — средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$, и, следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$. ■

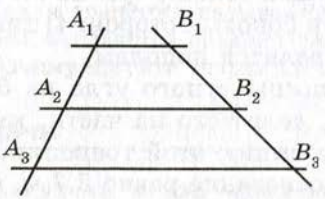


Рис. 34.1

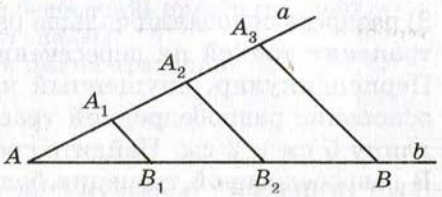


Рис. 34.2

Теорему Фалеса можно применять для деления отрезка на n равных частей. Например, разделим отрезок AB на 3 равные части. Через точку A проведем прямую a, отличную от AB, и отложим на ней равные отрезки $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ (рис. 34.2). Соединим отрезком точки A_3 и B. Через точки A_1, A_2 проведем прямые, параллельные A_3B, и их точки пересечения с отрезком AB обозначим B_1, B_2. По теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$.

Отношением $\frac{AB}{CD}$ двух отрезков AB и CD называется число, показывающее, сколько раз отрезок CD и его части укладываются в отрезке AB. Если отрезок CD принять за единичный, то отношение $\frac{AB}{CD}$ будет равно длине отрезка AB. Отношение отрезков AB и CD обозначается также $AB : CD$.

Говорят, что отрезки AB, CD *пропорциональны* отрезкам A_1B_1, C_1D_1, если равны их отношения, т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = k$. Число k называется ***коэффициентом пропорциональности.***

Теорема. (О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Доказательство. Пусть стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и E, F (рис. 34.3). Докажем, что имеет место равенство

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}.$$

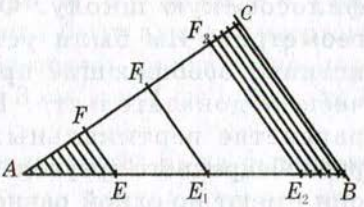


Рис. 34.3

Заметим, что отношение $\frac{AB}{AE}$ показывает, сколько раз отрезок AE и его части укладываются в отрезке AB, а отношение $\frac{AC}{AF}$ показывает, сколько раз отрезок AF и его части укладываются в отрезке AC. Теорема Фалеса позволяет установить соответствие между процессами измерения отрезков AB и AC. Действительно, прямые, параллельные BC, переводят равные отрезки на прямой AB в равные отрезки на прямой AC. Отрезок AE переходит в отрезок AF. Одна десятая часть отрезка AE переходит в одну десятую часть отрезка AF и т. д. Если отрезок AE целиком укладывается в отрезке AB n раз, то отрезок AF также будет целиком укладываться в отрезке AC n раз (на рисунке 34.3 $n = 3$). Если одна десятая часть отрезка AE целиком укладывается в остатке E_2B m раз, то одна десятая часть отрезка AF также будет целиком укладываться в остатке F_2C m раз (на рисунке 34.3 $m = 4$) и т. д. Поэтому если длина отрезка AB (с единичным отрезком AE) выражается десятичной

дробью $n,m...$, то длина отрезка AC (с единичным отрезком AF) будет выражаться той же самой десятичной дробью. Следовательно, $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$. ■

Следствие. Если стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и E, F (рис. 34.3), то имеет место равенство

$$\frac{EB}{AE} = \frac{FC}{AF}.$$

Доказательство. Заметим, что $AB = AE + EB$ и $AC = AF + FC$. Подставляя эти выражения в равенство ,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$$

получим равенство

$$1 + \frac{EB}{AE} = 1 + \frac{FC}{AF},$$

из которого следует и требуемое равенство. ■

Исторические сведения

По преданию, Фалес (около 624—547 гг. до н. э.) был родом из Милета, греческого города на берегу Эгейского моря, в котором он создал свою философскую школу. Фалес считается одним из первых ученых-геометров. Им были установлены первые теоремы геометрии как истины, обобщающие практические наблюдения и требующие логических доказательств. В частности, им были доказаны теоремы о равенстве вертикальных углов; о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; о том, что два треугольника равны, если они имеют по одной равной стороне и по два равных угла, прилежащих к этой стороне, и многое другое.

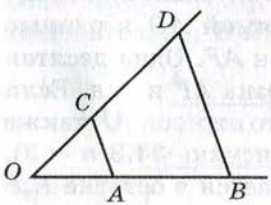


Рис. 34.4

Пример 1. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, B и C, D соответственно (рис. 34.4). Найдите OA, если $OB = 15$ см и $OC : OD = 2 : 5$.

Решение. По теореме о пропорциональных отрезках $OA : OB = 2 : 5$. Положим $OA = 2x$. Тогда $OB = 5x = 15$ см. Следовательно, $x = 3$ см, и, значит, $OA = 6$ см.

Пример 2. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Р е ш е н и е. Пусть CD биссектриса треугольника ABC (рис. 34.5). Докажем, что $AD : DB = AC : BC$. Проведем прямую BE, параллельную CD. В треугольнике BEC угол B равен углу E. Следовательно, $BC = EC$. По следствию из теоремы о пропорциональных отрезках $AD : DB = AC : CE = AC : BC$.

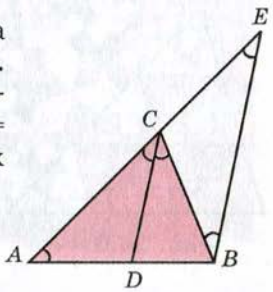


Рис. 34.5

Вопросы

1. Сформулируйте теорему Фалеса.
2. Обобщением каких теорем является теорема Фалеса?
3. Как, используя теорему Фалеса, разделить отрезок на n равных частей?
4. Что называется отношением двух отрезков?
5. Какие отрезки называются пропорциональными?
6. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.

Задачи

1. Определите, пропорциональны ли пары отрезков a, b и c, d, если:
а) $a = 0{,}8$ см, $b = 0{,}3$ см, $c = 2{,}4$ см, $d = 0{,}9$ см;
б) $a = 50$ мм, $b = 6$ см, $c = 10$ см, $d = 18{,}5$ см.

2. Среди отрезков a, b, c, d, e выберите пары пропорциональных отрезков, если $a = 2$ см, $b = 17{,}5$ см, $c = 16$ см, $d = 35$ см, $e = 4$ см.

3. Даны три отрезка: a, b и c. Какова должна быть длина четвертого отрезка d, чтобы из них можно было образовать две пары пропорциональных отрезков, если $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см и отрезок d больше каждого из этих отрезков?

4. Разделите данный отрезок: а) на 3 равные части; б) на 5 равных частей; в) на 6 равных частей.

5. Данный отрезок разделите на два отрезка, длины которых пропорциональны числам: а) 1, 2; б) 2, 3.

6. На одной из сторон угла расположены два отрезка 3 см и 4 см. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Больший из отрезков равен 6 см. Чему равен другой отрезок?

7. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, B и C, D соответственно. Найдите: а) CD, если $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см; б) OC и OD, если $OA : OB = 3 : 5$ и $OD - OC = 8$ см; в) OA и OB, если $OC : CD = 2 : 3$ и $OA + OB = 14$ см.

8. Проекции двух сторон остроугольного треугольника ABC на прямую AC имеют длину 6 см и 4 см. Какую длину имеют проекции медиан этого треугольника на ту же прямую?

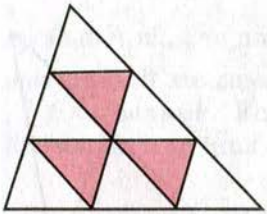


Рис. 34.6

9. Каждая из сторон треугольника разделена на три равных отрезка, и точки деления соединены отрезками. Найдите периметр образовавшейся при этом фигуры (рис. 34.6), если периметр исходного треугольника равен p.

10. Через вершины треугольника проведены прямые, параллельные его противоположным сторонам. Докажите, что стороны получившегося треугольника в два раза больше сторон исходного треугольника.

11. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E, причем $AD = \frac{3}{4}AB$, $AE = \frac{3}{4}AC$. Чему равен отрезок DE, если отрезок BC равен 5 см?

12. В треугольнике ABC сторона BC разделена на четыре равные части и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне AB, равной 18 см. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника.

13. Основания трапеции равны 14 см и 20 см. Одна из боковых сторон разделена на три равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри трапеции.

* **14.** Докажите, что биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в точке, расстояния от которой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника.

* **15.** Даны два отрезка длины a и b. Постройте отрезки длины ab, $\frac{a}{b}$.

* **16.** Докажите, что если стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и E, F (рис. 34.3), то имеет место равенство

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AE}.$$

Глава VI

МНОГОУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ

§35. Углы, связанные с окружностью

Рассмотрим различные виды углов по отношению к данной окружности.

Угол с вершиной в центре окружности называется ***центральным*** (рис. 35.1).

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется ***вписанным*** (рис. 35.2).

Каждый центральный и вписанный углы данной окружности определяют ***дуги*** окружности, которые состоят из точек окружности, принадлежащих этим углам. При этом говорят, что углы опираются на соответствующие дуги окружности.

Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Доказательство. Пусть угол ABC вписан в окружность с центром в точке O. Рассмотрим случай, когда одна из сторон угла, например AB, проходит через центр O окружности (рис. 35.3). Треугольник BOC — равнобедренный, и, следовательно, $\angle B = \angle C$. Угол AOC — внешний угол треугольника BOC и, следовательно, равен сумме углов B и C. Поэтому $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

В случае, если центр O окружности лежит внутри угла ABC (рис. 35.4), проведем диаметр BD и рассмотрим углы ABD и DBC. По доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD$, $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle DOC$. Следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

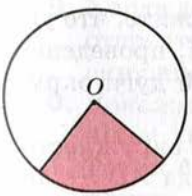


Рис. 35.1

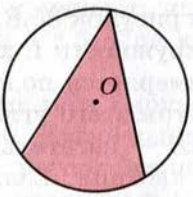


Рис. 35.2

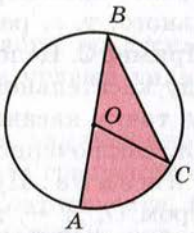


Рис. 35.3

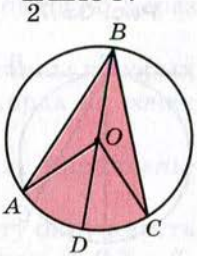


Рис. 35.4

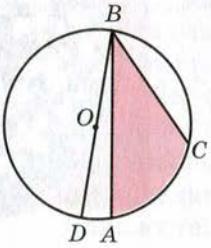


Рис. 35.5

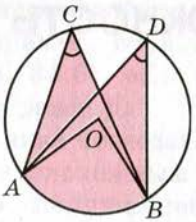


Рис. 35.6

Самостоятельно рассмотрите случай, когда центр O лежит вне угла ABC. Используйте рисунок 35.5. ■

Следствие. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны.

Доказательство. Действительно, если вписанные углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу AB (рис. 35.6), то у них один и тот же центральный угол AOB. По доказанной теореме данные вписанные углы равны половине центрального угла AOB и, следовательно, равны между собой. ■

Дуги окружности измеряют соответствующими центральными углами. Поэтому теорему о вписанном угле можно переформулировать следующим образом: вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.

Пример 1. В окружности проведена хорда, равная радиусу. Под каким углом видна эта хорда из: а) центра окружности; б) произвольной точки окружности, отличной от концов данной хорды?

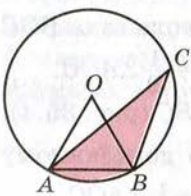


Рис. 35.7

Решение. Пусть AB — хорда окружности с центром в точке O, равная радиусу (рис. 35.7). Тогда треугольник AOB — равносторонний, и, следовательно, центральный угол (угол, под которым видна хорда AB из центра окружности) равен 60°. Для произвольной точки C окружности, отличной от A и B, вписанный угол ACB (угол, под которым видна хорда AB из точки C) равен половине центрального, т. е. равен 30°.

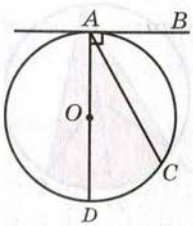


Рис. 35.8

Пример 2. Используя рисунок 35.8, докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла.

Решение. Пусть AB — касательная к окружности с центром O, A — точка касания. Если хорда AD — диаметр, то угол BAD — прямой и, следовательно, измеряет-

ся половиной дуги полуокружности. В остальных случаях для хорды AC имеем: $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$. Учитывая, что угол BAD измеряется половиной дуги ACD, а угол CAD измеряется половиной дуги CD, получаем, что угол BAC измеряется половиной дуги AC.

Вопросы

1. Какой угол называется центральным?
2. Какой угол называется вписанным?
3. Что называется дугой окружности?
4. Как связаны между собой вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
5. Чем измеряются дуги окружности?

Задачи

1. Какие из углов на рисунке 35.9 являются вписанными? На какую дугу опирается каждый из вписанных углов?

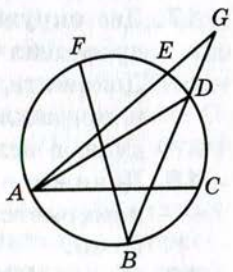


Рис. 35.9

2. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности?

3. Центральный угол на 35° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Найдите каждый из этих углов.

4. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет: а) $\frac{1}{6}$ окружности; б) 10% окружности.

5. С помощью угольника найдите центр данной окружности.

6. Найдите геометрическое место вершин B прямоугольных треугольников ABC с данной гипотенузой AC.

7. Для данных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых угол ACB: а) острый; б) тупой.

8. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне окружности.

9. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 4 : 5. Под какими углами видна эта хорда из точек окружности?

10. Докажите, что дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, имеют одинаковую градусную меру.

11. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят эту окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 7. Найдите углы треугольника ABC.

12. Окружность разделена точками на четыре части, градусные величины которых относятся как 3 : 7 : 5 : 3. Найдите углы многоугольника, полученного последовательным соединением точек деления.

13. Через концы дуги в 60° проведены касательные. Найдите угол между ними.

14. Хорда AB стягивает дугу окружности в 44°. Найдите углы, которые образует эта хорда с касательными к окружности, проведенными через ее концы.

15. Из точки пересечения двух окружностей проведены их диаметры. Докажите, что другие концы диаметров и вторая точка пересечения окружностей принадлежат одной прямой.

16. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C — точки касания). Докажите, что угол BAC — прямой.

17. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведена секущая, которая делит эти окружности на четыре дуги. Докажите, что пары дуг, расположенные по разные стороны секущей и принадлежащие разным окружностям, имеют одинаковые градусные величины.

* **18.** Докажите, что угол между двумя касательными к окружности измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

19. В угол ABC вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как 5 : 4. Найдите величину угла ABC.

* **20.** Окружность разделена точками A, B, C на дуги, градусные величины которых относятся как 11 : 3 : 4. Через точки A, B, C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.

* **21.** Докажите, что угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.

* **22.** Докажите, что угол с вершиной вне круга, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

* **23.** Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, т. е. таких точек C, для которых угол ACB равен данному углу.

* **24.** Дан отрезок AB и прямая c, ему параллельная. Найдите точку C на прямой c, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

§36. Многоугольники, вписанные в окружность

Многоугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется ***описанной*** около многоугольника (рис. 36.1).

Теорема. Около всякого треугольника можно описать окружность. Ее центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. К сторонам AB и AC проведем серединные перпендикуляры c и b соответственно (рис. 36.2). Докажем, что точка O их пересечения является центром описанной окружности. Для этого достаточно проверить, что выполняются равенства $OA = OB = OC$. Действительно, так как точка O принадлежит серединному перпендикуляру c отрезка AB, то она одинаково удалена от вершин A и B, т. е. $OA = OB$. Так как точка O принадлежит серединному перпендикуляру b отрезка AC, то она одинаково удалена от вершин A и C, т. е. $OA = OC$. Следовательно, точка O одинаково удалена от вершин A, B, C треугольника ABC, т. е. $OA = OB = OC$. Заметим, что из равенства $OB = OC$ следует, что точка O принадлежит серединному перпендикуляру a к стороне BC. Таким образом, все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке O. Окружность с центром в этой точке и радиусом $R = OA = OB = OC$ будет искомой описанной окружностью.

(*) Используя аксиому параллельных, докажем, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника действительно пересекаются. Пусть ABC — треугольник, c и b — серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC (рис. 36.3). Предположим, что прямые b и c не пересекаются, а значит, параллельны. Прямая AB перпендикулярна прямой c. Прямая AC перпендикулярна прямой b, а значит, и параллельной ей прямой c. Таким образом, прямые AB и AC перпендикулярны одной прямой c. Поэтому они должны или быть параллельными, или совпадать. Но эти прямые пересекаются. Следовательно, неверным было наше предположение о параллельности прямых b и c. Значит, они пересекаются. ■

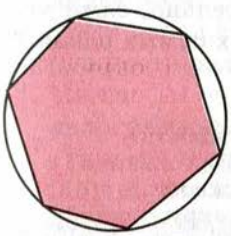


Рис. 36.1

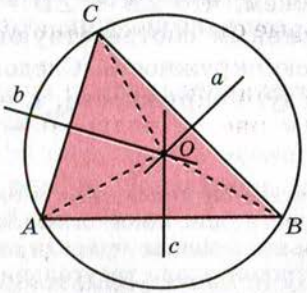


Рис. 36.2

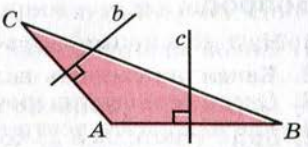


Рис. 36.3

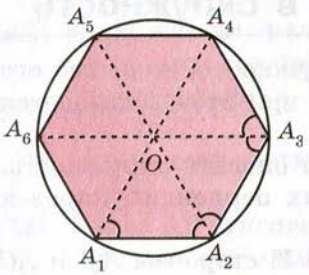


Рис. 36.4

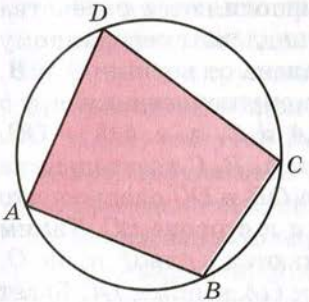


Рис. 36.5

Теорема. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

Доказательство. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — правильный n-угольник (рис. 36.4). Опишем около треугольника $A_1A_2A_3$ окружность с центром в точке O и радиусом R. Докажем, что следующая вершина A_4 также принадлежит этой окружности. Для этого достаточно проверить, что $OA_4 = R$. Имеем OA_1A_2 и OA_2A_3 — равные равнобедренные треугольники. Поэтому их углы при основаниях равны и составляют половину угла данного n-угольника. Значит, угол OA_3A_4 также составляет половину угла n-угольника. Треугольники OA_3A_2 и OA_3A_4 равны по двум сторонам и углу между ними ($A_2A_3 = A_3A_4$, OA_3 — общая, $\angle OA_3A_2 = \angle OA_3A_4$). Следовательно, $OA_2 = OA_4 = R$. Аналогично показывается, что следующие вершины A_5 и т. д. принадлежат данной окружности. Таким образом, эта окружность является искомой описанной окружностью. Ее центром является точка пересечения биссектрис углов многоугольника. ■

Пример 1. Два угла треугольника равны 60° и 40°. Под какими углами видны его стороны из центра описанной около него окружности?

Решение. Третий угол треугольника равен $180° - (60° + 40°) = 80°$. Углы треугольника являются вписанными, а искомые углы — центральными. Поэтому они равны соответственно 120°, 80° и 160°.

Пример 2. Докажите, что если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

Решение. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, около которого описана окружность (рис. 36.5). Докажем, что $\angle B + \angle D = 180°$. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг ADC и ABC, которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной дуги окружности, т. е. их сумма равна 180°.

Вопросы

1. Какой многоугольник называется вписанным в окружность?
2. Какая окружность называется описанной около многоугольника?
3. Около всякого ли треугольника можно описать окружность?
4. Где находится центр описанной около треугольника окружности?
5. Можно ли описать окружность около правильного многоугольника? Что является центром описанной окружности?

Задачи

1. Нарисуйте треугольники, вписанные в данную окружность.
2. Для данных треугольников (рис. 36.6) найдите центры описанных окружностей и постройте их.

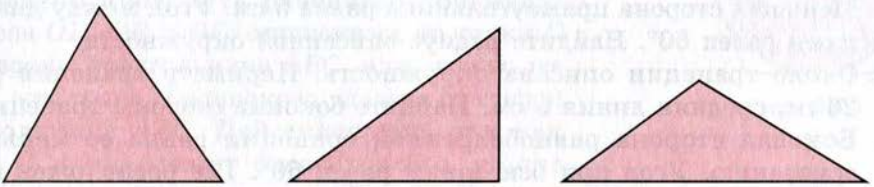


Рис. 36.6

3. Постройте окружность, проходящую через три заданные точки, не принадлежащие одной прямой.
4. Может ли центр описанной около треугольника окружности находиться: а) внутри треугольника; б) на стороне треугольника; в) вне этого треугольника? Приведите примеры.
5. Где находится центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника?
6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите радиус описанной окружности.
7. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в 24°51'.
8. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, если его основание стягивает дугу в 100°.
9. Углы треугольника равны 30°, 65° и 85°. Какая из сторон треугольника расположена дальше от центра описанной окружности?
10. Нарисуйте четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник, вписанные в данные окружности.
11. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 6 см.
12. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R?
13. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е) прямоугольной трапеции?
14. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого последовательно равны: а) 70°, 130°, 110°, 50°; б) 90°, 90°, 60°, 120°; в) 45°, 75°, 135°, 105°; г) 40°, 125°, 55°, 140°?

15. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 80° и 60°. Найдите два других угла четырехугольника.

16. Углы A, B и C четырехугольника $ABCD$ относятся как $2:3:4$. Найдите угол D, если около данного четырехугольника можно описать окружность.

17. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см. Угол между диагоналями равен 60°. Найдите радиус описанной окружности.

18. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 20 см, средняя линия 5 см. Найдите боковые стороны трапеции.

19. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Угол при основании равен 60°. Где расположен центр описанной около данной трапеции окружности?

20. Докажите, что через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная окружность.

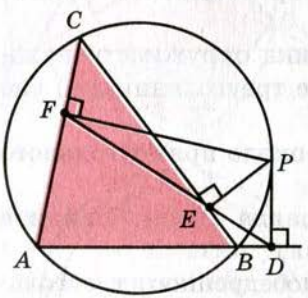


Рис. 36.7

21. Докажите, что если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, равны, то этот многоугольник правильный.

* **22.** Докажите, что если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

* **23.** Докажите, что если из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, опустить перпендикуляры на его стороны или их продолжения (рис. 36.7), то основания этих перпендикуляров будут принадлежать одной прямой (***прямая Симсона***).

* **24.** Многоугольник с четным числом сторон называется ***равноугольно полуправильным***, если все его углы равны, а стороны равны через одну. Приведите примеры равноугольно полуправильных многоугольников. Докажите, что около любого равноугольно полуправильного многоугольника можно описать окружность.

§37. Многоугольники, описанные около окружности

Многоугольник называется ***описанным*** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Сама окружность при этом называется ***вписанной*** в многоугольник (рис. 37.1).

Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность. Ее центром будет точка пересечения биссектрис этого треугольника.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и из его вершин A и B проведем биссектрисы a и b соответственно (рис. 37.2). Докажем, что точка O их пересечения является центром вписанной окружности. Для этого достаточно проверить равенство перпендикуляров OD, OE и OF, опущенных из точки O на стороны треугольника ABC, или, что то же самое, что точка O одинаково удалена от сторон треугольника ABC. Действительно, так как точка O принадлежит биссектрисе a, то она одинаково удалена от сторон AB и AC. Так как точка O принадлежит биссектрисе b, то она одинаково удалена от сторон AB и BC. Значит, точка O одинаково удалена от всех сторон треугольника ABC. Заметим, что из того, что точка O одинаково удалена от сторон BC и AC, следует, что она принадлежит биссектрисе c угла C, т. е. все три биссектрисы пересекаются в одной точке O. Окружность с центром в этой точке и радиусом $r = OD = OE = OF$ будет искомой вписанной окружностью. ■

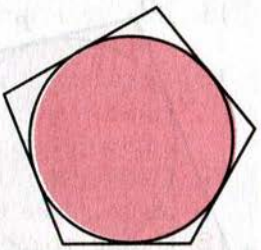


Рис. 37.1

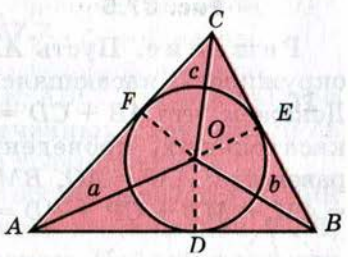


Рис. 37.2

Теорема. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — правильный n-угольник. Как было доказано в предыдущем пункте, около этого многоугольника можно описать окружность и ее центром O является точка пересечения биссектрис углов многоугольника. Точка пересечения биссектрис одинаково удалена от всех сторон многоугольника. Обозначим это расстояние через r. Окружность с центром в точке O и радиусом r будет касаться всех сторон многоугольника, т. е. будет искомой вписанной окружностью (рис. 37.3). ■

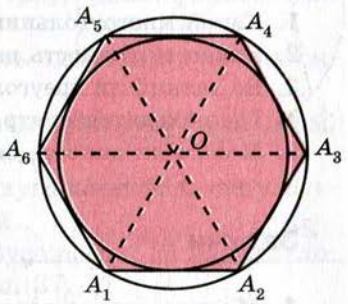


Рис. 37.3

Пример 1. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит сторону AB в точке касания D на два отрезка: $AD = 5$ см и $DB = 6$ см. Определите периметр треугольника ABC, если известно, что $BC = 10$ см.

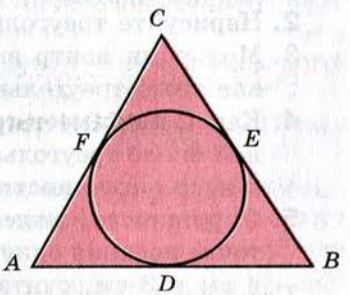


Рис. 37.4

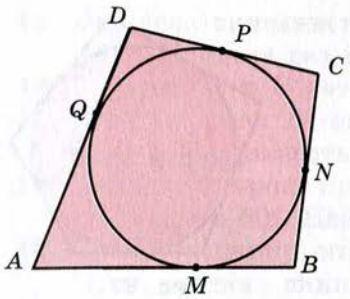


Рис. 37.5

Решение. Пусть D, E, F — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 37.4). Тогда $BE = DB = 6$ см, и, следовательно, $CE = 10 - 6 = 4$ (см). $CF = CE = 4$ см, $AF = AD = 5$ см. Отсюда $AC = AF + CF = 9$ см. Таким образом, периметр данного треугольника равен $11 + 10 + 9 = 30$ (см).

Пример 2. Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

Решение. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, в который вписана окружность, касающаяся его сторон в точках M, N, P, Q (рис. 37.5). Докажем, что $AB + CD = BC + AD$. Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следуют равенства: $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Поэтому $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC = AD + BC$.

Вопросы

1. Какой многоугольник называется описанным около окружности?
2. Какая окружность называется вписанной в многоугольник?
3. Во всякий ли треугольник можно вписать окружность?
4. Где находится центр вписанной в треугольник окружности?
5. Можно ли вписать окружность в правильный многоугольник?

Задачи

1. Можно ли вписать окружность в: а) остроугольный треугольник; б) прямоугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник?

2. Нарисуйте треугольники, описанные около данной окружности.

3. Может ли центр вписанной в треугольник окружности находиться вне этого треугольника?

4. Какой вид имеет треугольник, если: а) центры вписанной и описанной около треугольника окружностей совпадают; б) центр вписанной в него окружности принадлежит одной из его высот?

5. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, которые равны 4 см и 3 см, считая от основания. Определите периметр треугольника.

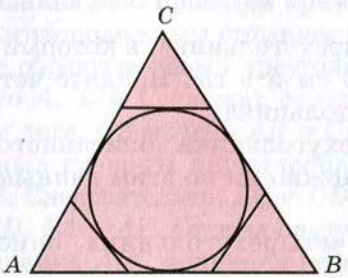


Рис. 37.6

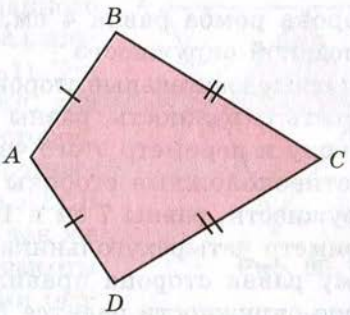


Рис. 37.7

6. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные (рис. 37.6). Периметры отсеченных треугольников равны p_1, p_2, p_3. Найдите периметр данного треугольника.
7. В равнобедренном треугольнике боковые стороны делятся точками касания вписанной в треугольник окружности в отношении 7 : 5, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника, если его основание равно 10 см.
8. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, описанный около данной окружности.
9. Докажите, что в треугольник можно вписать единственную окружность.
10. Стороны прямоугольного треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите радиус вписанной в него окружности.
11. Постройте правильные треугольник, четырехугольник и шестиугольник, описанные около данных окружностей.
12. Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) квадрат; д) дельтоид (рис. 37.7)?
13. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание и расположены по разные стороны от него. Можно ли в образованный ими выпуклый четырехугольник вписать окружность?
14. Какой вид имеет четырехугольник, если центр вписанной в него окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей?
15. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 18 см. Найдите ее среднюю линию.
16. В трапецию, периметр которой равен 56 см, вписана окружность. Три последовательные стороны трапеции относятся как 2 : 7 : 12. Найдите стороны трапеции.
17. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 1 см и 3 см. Найдите периметр и среднюю линию трапеции.

18. Сторона ромба равна 4 см, острый угол — 30°. Найдите радиус вписанной окружности.

19. Три последовательные стороны четырехугольника, в который можно вписать окружность, равны 6 см, 8 см и 9 см. Найдите четвертую сторону и периметр этого четырехугольника.

○ **20.** Противоположные стороны четырехугольника, описанного около окружности, равны 7 см и 10 см. Можно ли по этим данным найти периметр четырехугольника?

○ **21.** Чему равна сторона правильного четырехугольника, описанного около окружности радиуса R?

* **22.** Докажите, что если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

* **23.** Приведите пример невыпуклого четырехугольника, суммы противоположных сторон которого равны, но в который нельзя вписать окружность.

* **24.** Докажите, что если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, касаются другой окружности, концентрической с первой, то этот многоугольник правильный.

* **25.** Многоугольник с четным числом сторон называется ***равносторонне полуправильным***, если все его стороны равны, а углы равны через один. Приведите примеры равносторонне полуправильных многоугольников. Докажите, что в любой равносторонне полуправильный многоугольник можно вписать окружность.

§38. Замечательные точки в треугольнике

К числу замечательных точек в треугольнике относятся:

а) точка пересечения биссектрис;

б) точка пересечения серединных перпендикуляров сторон;

в) точка пересечения высот или их продолжений;

г) точка пересечения медиан.

Рассмотрим каждую из этих точек в отдельности. Как мы видели ранее, три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.

Также было доказано, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной окружности.

Рассмотрим оставшиеся точки.

Теорема. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (***ортоцентре*** треугольника).

Доказательство. Через вершины данного треугольника ABC проведем прямые, параллельные противоположным сторонам (рис. 38.1). Эти прямые образуют новый треугольник DEF, для которого A, B и C служат серединами сторон. В самом деле, $CE = AB$ и $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограммов $AECB$ и $ACDB$. Следовательно, $EC = CD$. Точно так же $FB = BD$, $FA = AE$. Отсюда следует, что высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами треугольника DEF, а поэтому пересекаются в одной точке. ■

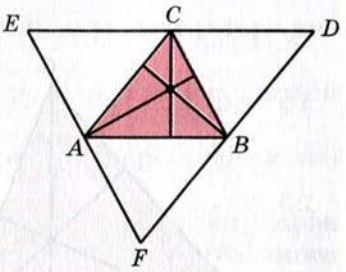


Рис. 38.1

Заметим, что высоты треугольника могут не пересекаться. На рисунке 38.2 изображен тупоугольный треугольник ABC, в котором продолжения высот AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке H, а сами высоты не пересекаются.

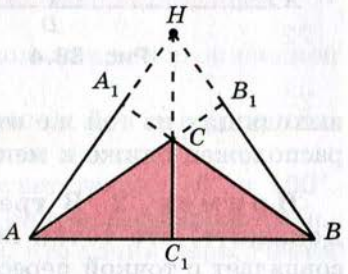


Рис. 38.2

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке (***центроиде*** треугольника) и делятся в этой точке в отношении 2 : 1, считая от вершин.

Доказательство. В треугольнике ABC проведем медианы AD и BE и их точку пересечения обозначим через O (рис. 38.3). Отрезок ED будет средней линией треугольника ABC. Проведем среднюю линию HG в треугольнике ABO. Треугольники HGO и EDO равны (по второму признаку равенства треугольников). Следовательно, $HO = OE$ и $GO = OD$. Таким образом, имеем $AG = GO = OD$, $BH = HO = OE$, т. е. медианы AD и BE в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины. Медиана, проведенная из вершины C, также должна делить медиану AD в отношении 2 : 1. Следовательно, она будет проходить через точку O, т. е. все три медианы будут пересекаться в одной точке. ■

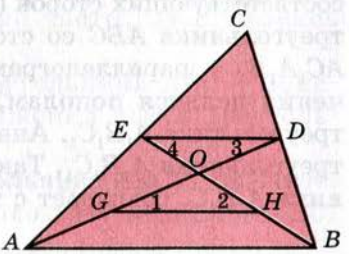


Рис. 38.3

Пример 1. К какой из сторон треугольника ближе расположен ортоцентр?

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC > BC$ (рис. 38.4). Воспользуемся тем, что для высоты CD этого треугольника будет выполняться неравенство $AD > BD$ и, следовательно, неравенство $\angle ACD > \angle BCD$. Это означает, что точки высоты расположены ближе к меньшей из сторон,

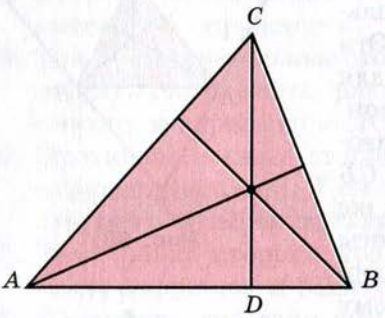


Рис. 38.4

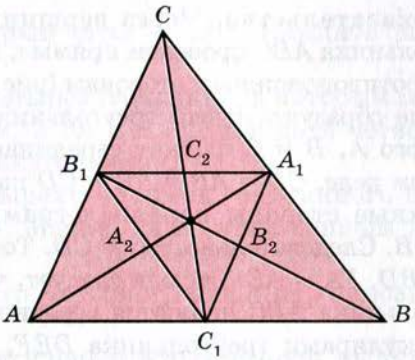


Рис. 38.5

выходящих из той же вершины. Следовательно, ортоцентр треугольника расположен ближе к меньшей стороне.

Пример 2. В треугольнике соединены середины его сторон. Докажите, что точка пересечения медиан полученного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины соответствующих сторон (рис. 38.5), A_2, B_2, C_2 — точки пересечения медиан треугольника ABC со сторонами треугольника $A_1B_1C_1$. Четырехугольник $AC_1A_1B_1$ — параллелограмм. Следовательно, его диагонали в точке пересечения делятся пополам, и, значит, $B_1A_2 = A_2C_1$, т. е. A_1A_2 — медиана треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что B_1B_2, C_1C_2 — медианы треугольника $A_1B_1C_1$. Таким образом, точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Вопросы

1. Какие точки относятся к числу замечательных точек в треугольнике?
2. Всегда ли высоты треугольника пересекаются?
3. Какой замечательной точкой является центр вписанной в треугольник окружности?
4. Какой замечательной точкой является центр описанной около треугольника окружности?
5. В каком отношении делятся медианы треугольника точкой их пересечения?

Задачи

1. Может ли точка пересечения биссектрис треугольника находиться вне этого треугольника?

2. Может ли точка пересечения медиан треугольника находиться вне этого треугольника?
3. Может ли точка пересечения высот или их продолжений находиться вне этого треугольника?
4. Может ли вершина треугольника быть точкой пересечения его высот?
5. Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров сторон для: а) прямоугольного треугольника; б) остроугольного треугольника; в) тупоугольного треугольника?
6. Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой?
7. К какой из сторон треугольника ближе расположен центр описанной окружности?
8. К какой из вершин треугольника ближе расположен центр вписанной окружности?
9. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно $10°$ и $100°$. Найдите углы BOC и COA, где O — центр описанной окружности.
10. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и DCA принадлежат диагонали BD и делят ее на три равные части.
11. Разделите данный отрезок на три равные части, не пользуясь построением параллельных прямых.
12. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что A — точка пересечения продолжения высот треугольника BHC.
13. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC, CHA, равны между собой.
14. Докажите, что если какие-нибудь из замечательных точек треугольника совпадают, то этот треугольник — равносторонний.
15. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите углы ACO и BCO, если $\angle AOB = 136°$.
16. Выясните, для каких четырехугольников биссектрисы всех углов пересекаются в одной точке.
17. Пусть CC_1, CC_2, CC_3 — соответственно высота, биссектриса и медиана, выходящие из вершины C треугольника ABC. Луч CC_2 пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Докажите, что DC_3 параллельна CC_1.
18. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Луч AO пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $OD = DB = DC$.

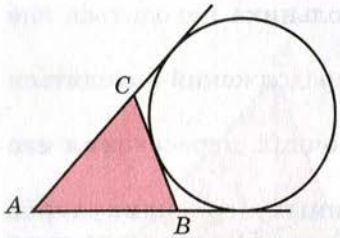


Рис. 38.6

19. Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что O является центром окружности, касающейся прямых AB, BC и AC.

* **20.** Окружность называется ***вневписанной*** по отношению к данному треугольнику, если она касается одной стороны и продолжения двух других сторон этого треугольника (рис. 38.6). Докажите, что для любого треугольника существуют вневписанные окружности. Сколько таких окружностей? Где находятся их центры?

* **21.** Для данного треугольника постройте вневписанные окружности.

* **22.** Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 обозначают середины сторон, противоположных соответствующим вершинам; H — точка пересечения высот треугольника; A_2, B_2, C_2 — основания высот, опущенных из соответствующих вершин; A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH и CH (рис. 38.7). Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 принадлежат одной окружности, называемой ***окружностью девяти точек*** или ***окружностью Эйлера***.

* **23.** Докажите, что центр описанной окружности, ортоцентр, центроид и центр окружности девяти точек треугольника принадлежат одной прямой (***прямая Эйлера***). При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между ортоцентром и центром описанной окружности (рис. 38.8).

* **24.** Докажите, что внутри произвольного треугольника ABC с углами, меньшими 120°, существует точка O (***точка Торричелли***), из которой стороны треугольника видны под углом 120°.

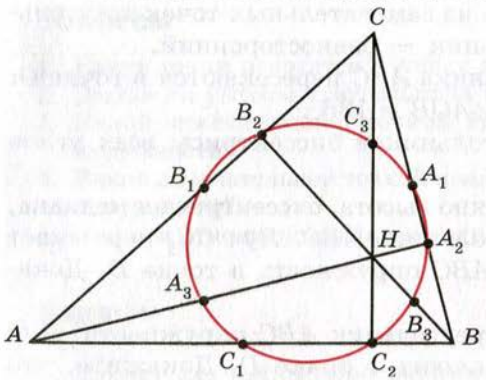


Рис. 38.7

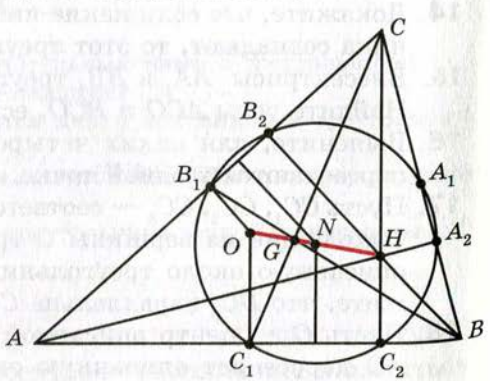


Рис. 38.8

Глава VII

ДВИЖЕНИЕ

§39. Центральная симметрия

Точки A и A' называются ***симметричными*** относительно точки O, если O является серединой отрезка AA'. Точка O считается симметричной сама себе (рис. 39.1).

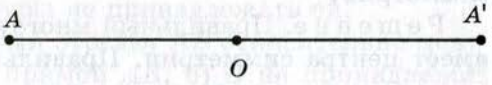


Рис. 39.1

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно точки O точка A', называется ***центральной симметрией***. Точка O при этом называется ***центром симметрии***.

Две фигуры F и F' называются ***центрально-симметричными*** относительно центра O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 39.2). Фигура F называется ***центрально-симметричной*** относительно центра O, если она симметрична сама себе (рис. 39.3).

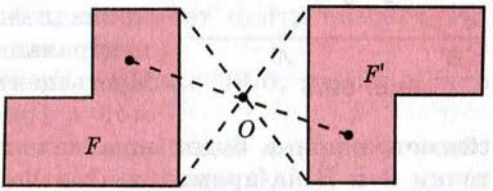


Рис. 39.2

Рассмотрим некоторые свойства центральной симметрии.

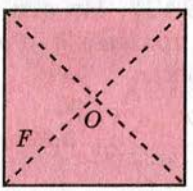


Рис. 39.3

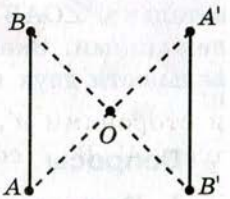


Рис. 39.4

Свойство 1. Центральная симметрия сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены центральной симметрией относительно точки O точек A, B соответственно (рис. 39.4). Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны (по первому признаку равенства треугольников), и, следовательно, $AB = A'B'$. ■

Свойство 2. Центральная симметрия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точки A, B и C принадлежат одной прямой, причем точка C лежит между точками A и B. Тогда $AC + CB = AB$. Для центрально-симметричных точек A', B', C' будет выполняться равенство $A'C' + C'B' = A'B'$. Следовательно, точка C' лежит на прямой $A'B'$ между точками A' и B'. Значит, отрезок AB переводится в отрезок $A'B'$.

Аналогичным образом доказывается, что луч AB переводится в луч $A'B'$ и вся прямая AB переходит в прямую $A'B'$. ■

Пример 1. Всякий ли правильный многоугольник имеет центр симметрии?

Решение. Правильный многоугольник с нечетным числом сторон не имеет центра симметрии. Правильный многоугольник с четным числом сторон имеет центр симметрии, совпадающий с центром описанной окружности.

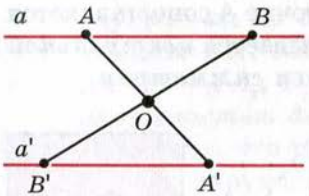


Рис. 39.5

Пример 2. Докажите, что центральная симметрия переводит прямую в параллельную ей прямую или в нее саму.

Решение. Ясно, что если центр симметрии принадлежит данной прямой, то эта прямая при центральной симметрии переходит сама в себя. Пусть центр симметрии O не принадлежит прямой a (рис. 39.5). Докажем, что прямая a', симметричная a, будет параллельна прямой a. Рассмотрим какие-нибудь точки A и B на прямой a. Они переходят в точки A' и B' на прямой a'. При этом треугольники OAB и $OA'B'$ равны (по первому признаку равенства треугольников, так как $OA = OA'$, $OB = OB'$, $\angle AOB = \angle A'OB'$). Следовательно, $\angle OAB = \angle OA'B'$. Но эти углы являются внутренними накрест лежащими. Значит, прямые a и a' параллельны (по признаку параллельности двух прямых).

Вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно точки?
2. Что называется центральной симметрией?
3. Какие фигуры называются центрально-симметричными?
4. Какая фигура называется центрально-симметричной?
5. Сформулируйте свойства центральной симметрии.

Задачи

1. Какая точка при центральной симметрии переходит в себя?
2. Какие прямые при центральной симметрии переходят в себя?
3. Что является центром симметрии отрезка?
4. Центральная симметрия переводит точку A в точку A'. Где находится центр симметрии?
5. Имеет ли луч центр симметрии?
6. Имеет ли центр симметрии пара пересекающихся прямых?
7. Имеет ли равносторонний треугольник центр симметрии?
8. Может ли фигура иметь несколько центров симметрии?
9. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?
10. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно центра O, если: а) O принадлежит прямой AB; б) O не принадлежит прямой AB.
11. Докажите, что центральная симметрия переводит окружность в окружность.
12. Докажите, что центральная симметрия сохраняет величины углов.
13. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.
14. Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то этот четырехугольник — параллелограмм.
15. Какие из фигур, изображенных на рисунке 39.6, имеют центр симметрии?
16. Постройте фигуры, центрально-симметричные фигурам, изображенным на рисунке 39.7, относительно центра O.

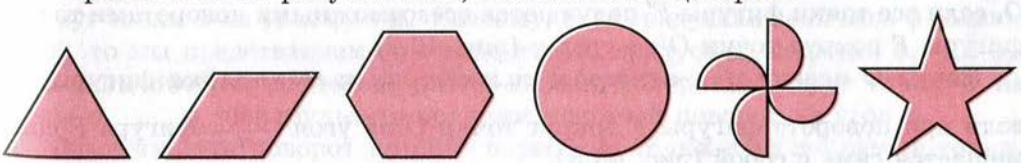


Рис. 39.6

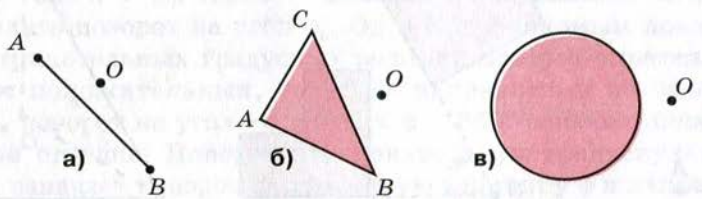


Рис. 39.7

17. На рисунке 39.8 укажите буквы латинского алфавита, имеющие центр симметрии.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Рис. 39.8

18. Постройте прямую, симметричную данной прямой относительно точки, не принадлежащей этой прямой.

19. При каком расположении трех различных прямых образованная ими фигура имеет бесконечно много центров симметрии?

* **20.** Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно два центра симметрии.

* **21.** Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разбить на многоугольники, имеющие центры симметрии, то и исходный многоугольник имеет центр симметрии.

§40. Поворот. Симметрия *n*-го порядка

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A ***поворотом*** вокруг точки O на угол φ, если $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \varphi$ (рис. 40.1).

Преобразование плоскости, при котором данная точка O остается на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол φ, называется ***поворотом*** вокруг точки O. Точка O называется центром поворота.

Говорят, что фигура F' получается ***поворотом*** фигуры F вокруг точки O, если все точки фигуры F' получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг точки O на угол φ (рис. 40.2).

Точка O называется ***центром симметрии n-го порядка*** фигуры F, если при повороте фигуры F вокруг точки O на угол $\frac{360^\circ}{n}$ фигура F совмещается сама с собой (рис. 40.3).

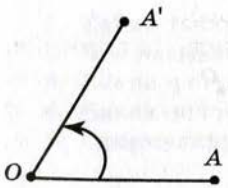


Рис. 40.1

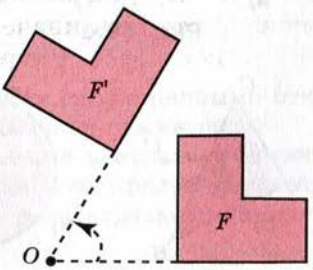


Рис. 40.2

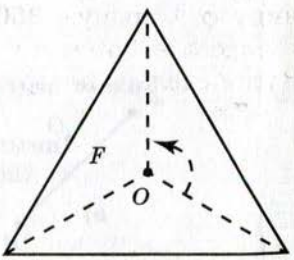


Рис. 40.3

Ясно, что центр симметрии второго порядка является просто центром симметрии.

Рассмотрим некоторые свойства поворота.

Свойство 1. Поворот сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены поворотом вокруг точки O точек A, B соответственно (рис. 40.4). Тогда $OA' = OA$, $OB' = OB$; $\angle AOA' = \varphi = \angle BOB'$, $\angle A'OB' = \angle AOB' - \angle AOA' = \angle AOB' - \angle BOB' = \angle AOB$. Треугольники AOB и $A'OB'$ равны (по первому признаку равенства треугольников), и, следовательно, $AB = A'B'$. ■

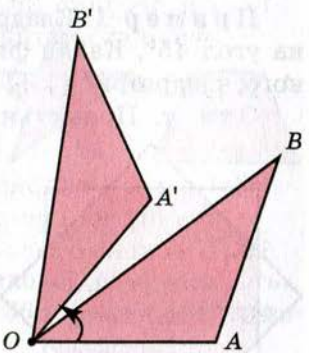


Рис. 40.4

Свойство 2. Поворот переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для центральной симметрии. ■

Хотя изначально поворот был определен для величин углов, не превосходящих 360°, тем не менее его можно определить и для произвольных градусных величин.

Считают, что поворот на 0° оставляет все точки на месте. Определим поворот для произвольных положительных градусных величин. Обычно направление поворота в этом случае выбирается против часовой стрелки. Воспользуемся тем, что, делая поворот вокруг точки O на угол φ_1, а затем вокруг той же точки на угол φ_2, мы получаем поворот вокруг точки O на угол $\varphi_1 + \varphi_2$. Поэтому, если градусная величина φ больше 360°, то мы представляем ее в виде суммы градусных величин φ_1, ..., φ_n, меньших 360°, и последовательно делаем повороты вокруг точки O на углы φ_1, ..., φ_n. В результате получим искомый поворот на угол φ.

Заметим, что поворот на 360° переводит точки в те же самые точки, т. е. оставляет их на месте. Поэтому для поворота на градусную величину φ, большую 360°, можно поступить иначе. Сначала представить φ в виде $\varphi = 360°n + \varphi_0$, где n — некоторое натуральное число, $\varphi_0 < 360°$. Затем сделать поворот на угол φ_0. Он и будет искомым поворотом.

Для отрицательных градусных величин поворот определяется так же, как и для положительных, только в направлении по часовой стрелке. А именно, поворот на угол $-\varphi$ для $0 < \varphi < 360°$ означает поворот на угол φ по часовой стрелке. Поворот на произвольную градусную величину $-\varphi$, где $\varphi > 0$, означает поворот на градусную величину φ в направлении по часовой стрелке.

Пример 1. Квадрат повернули вокруг точки пересечения диагоналей на угол 45°. Какая фигура является общей частью полученного и исходного квадратов?

Ответ. Правильный восьмиугольник (рис. 40.5).

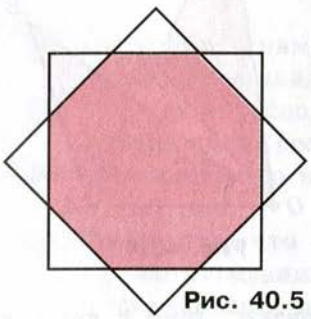


Рис. 40.5

Пример 2. Докажите, что центр окружности, описанной около правильного n-угольника, является центром симметрии n-го порядка.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности около правильного n-угольника. Тогда при повороте вокруг O на угол $\frac{360°}{n}$ многоугольник перейдет сам в себя, т. е. O является центром симметрии n-го порядка.

Вопросы

1. Что называется поворотом вокруг точки?
2. Какая точка называется центром симметрии n-го порядка фигуры?
3. Сформулируйте свойства поворота.

Задачи

1. Постройте точки, в которые переходит заданная точка A при повороте вокруг заданной точки O на углы 30°, 60°, 120°, 180°, 270°, 405°, −30°, −120°.

2. На какой угол нужно повернуть прямую, чтобы полученная прямая была: а) перпендикулярна исходной; б) параллельна исходной?

3. Постройте отрезок, в который переходит данный отрезок AB при повороте вокруг точки O на угол 30°.

4. Постройте треугольник, в который переходит данный треугольник ABC при повороте вокруг точки O на угол −45°.

5. Заданы точка A и точка A', полученная из A поворотом. Можно ли по этим данным однозначно определить угол поворота?

6. Заданы точка A и точка A', полученная из A поворотом на угол 60°. Можно ли по этим данным однозначно определить точку O, вокруг которой произведен поворот?

7. Заданы точки A, B и точки A', B', полученные соответственно из A, B поворотом. Можно ли по этим данным однозначно определить точку O, вокруг которой произведен поворот, и угол поворота?

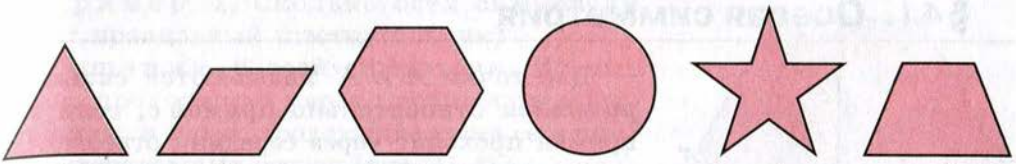


Рис. 40.6

8. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

9. Докажите, что поворот на угол $-\varphi$ для $0 < \varphi < 360°$ равносилен повороту на угол $360° - \varphi$.

10. Правильный треугольник повернули на $60°$ вокруг центра описанной окружности. Какая фигура является общей частью полученного и исходного треугольников?

11. Какие фигуры, изображенные на рисунке 40.6, при повороте переходят сами в себя? Укажите центры и углы поворота.

12. Центром симметрии какого порядка является точка пересечения диагоналей: а) параллелограмма; б) ромба; в) прямоугольника; г) квадрата?

13. Докажите, что фигура, образованная тремя равными окружностями, каждая из которых касается двух других, обладает центром симметрии 30-го порядка. Нарисуйте эту фигуру.

14. Симметрией какого порядка обладают снежинки (рис. 40.7)?

* **15.** Докажите, что при повороте сохраняются углы.

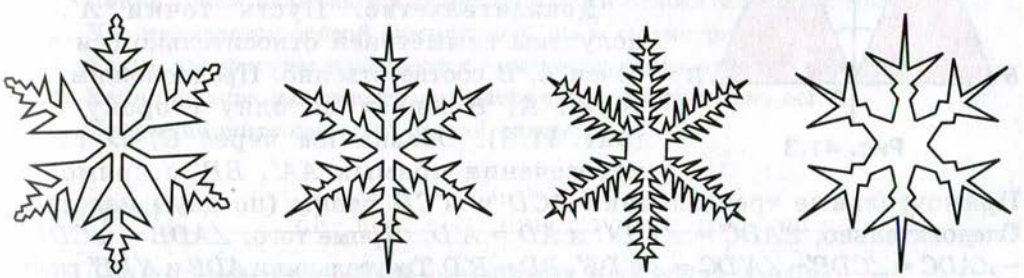


Рис. 40.7

§41. Осевая симметрия

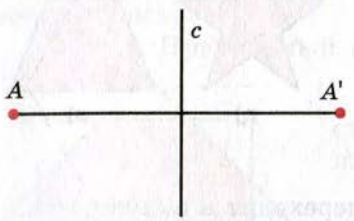


Рис. 41.1

Две точки A и A' называются ***симметричными*** относительно прямой c, если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему (рис. 41.1). Каждая точка прямой c считается симметричной самой себе.

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно прямой c точка A', называется ***осевой симметрией***. Прямая c называется ***осью симметрии***.

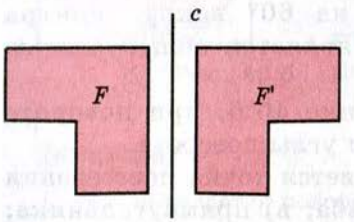


Рис. 41.2

Две фигуры F и F' называются ***симметричными*** относительно оси c, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 41.2). Фигура F называется ***симметричной*** относительно оси c, если она симметрична сама себе.

Рассмотрим некоторые свойства осевой симметрии.

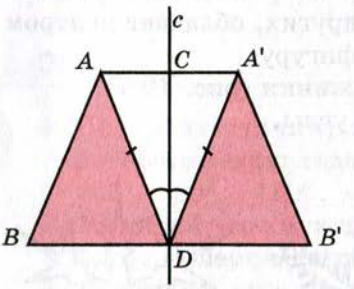


Рис. 41.3

Свойство 1. Осевая симметрия сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены симметрией относительно оси c из точек A, B соответственно. Предположим, что точки A, B лежат по одну сторону от c (рис. 41.3). Обозначим через C, D точки пересечения прямых AA', BB' с прямой c. Прямоугольные треугольники ACD и $A'CD$ равны (по двум катетам). Следовательно, $\angle ADC = \angle A'DC$ и $AD = A'D$. Кроме того, $\angle ADB = \angle CDB - \angle ADC = \angle CDB' - \angle A'DC = \angle A'DB'$, $BD = B'D$. Треугольники ADB и $A'DB'$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $AB = A'B'$.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда точки A, B лежат по разные стороны от c. ■

Свойство 2. Осевая симметрия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для центральной симметрии. ■

Пример 1. Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник?

Решение. 6 осей симметрии. Из них 3 оси, проходящие через противоположные вершины, и 3 оси, проходящие через середины противоположных сторон (рис. 41.4).

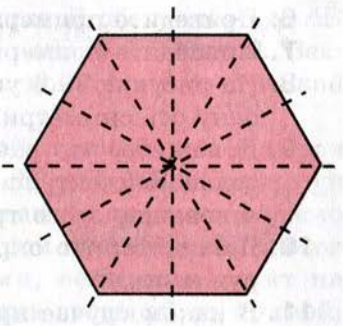


Рис. 41.4

Пример 2. Даны две пересекающиеся прямые a' и a''. Точке A сопоставляется точка A', симметричная A относительно прямой a'. Точке A' сопоставляется точка A'', симметричная точке A' относительно прямой a''. Докажите, что соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'', является поворотом. Найдите угол поворота.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых a' и a'' (рис. 41.5). Тогда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2\varphi$, где φ — угол между прямыми a' и a''. Таким образом, соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'', является поворотом вокруг точки O на угол 2φ.

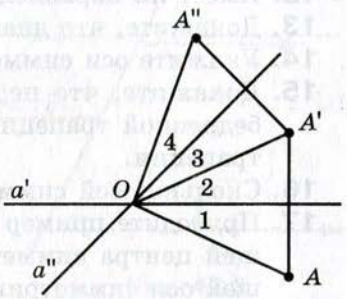


Рис. 41.5

Вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно прямой?
2. Что называется осевой симметрией, осью симметрии?
3. Какие две фигуры называются симметричными относительно оси?
4. Какая фигура называется симметричной относительно оси?
5. Сформулируйте свойства осевой симметрии.

Задачи

1. Какие точки при осевой симметрии переходят в себя?
2. Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя?
3. Осевая симметрия переводит точку A в точку A'. Где находится ось симметрии?
4. Точка A' симметрична точке A относительно оси c. Верно ли, что точка A симметрична точке A' относительно этой оси?
5. Постройте при помощи циркуля и линейки точку, симметричную данной точке относительно данной оси.

6. Приведите примеры фигур, имеющих осевую симметрию.
7. Приведите примеры фигур, не имеющих осевой симметрии.
8. На рисунке 39.8 укажите буквы латинского алфавита: а) имеющие одну ось симметрии; б) имеющие две оси симметрии.
9. Докажите, что равнобедренный треугольник симметричен относительно биссектрисы, проведенной через вершину, противолежащую основанию этого треугольника.
10. Докажите, что окружность при осевой симметрии переходит в окружность.
- ○ 11. В каком случае прямая при осевой симметрии переходит в параллельную ей прямую?
- ○ 12. Имеет ли параллелограмм оси симметрии?
13. Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.
14. Укажите оси симметрии: а) прямоугольника; б) квадрата.
15. Докажите, что перпендикуляр, проведенный к основанию равнобедренной трапеции через его середину, является осью симметрии трапеции.
16. Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник?
17. Приведите пример фигуры: а) имеющей ось симметрии и не имеющей центра симметрии; б) имеющей центр симметрии и не имеющей оси симметрии.
- * 18. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.
- * 19. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, принадлежат описанной около этого треугольника окружности.
- * 20. Как центральную симметрию можно получить с помощью двух осевых симметрий?

§42. Параллельный перенос

С понятием параллельности тесно связано преобразование плоскости, называемое ***параллельным переносом*** и характеризующееся величиной и направлением. Нестрого говоря, параллельный перенос перемещает точки плоскости в одном и том же направлении на одну и ту же величину.

Многие физические величины, например скорость, сила и т. д., также характеризуются не только своим значением, но и направлением. Такие величины называют векторными.

Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B. Векторы обозначаются также и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. д. (рис. 42.1).

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, лежащие на одной прямой, называются ***одинаково направленными***, если один из лучей AB или $A'B'$ содержится в другом (рис. 42.2). В противном случае они называются ***противоположно направленными***. Два вектора, не лежащие на одной прямой, называются ***одинаково*** (***противоположно***) направленными, если они лежат на параллельных прямых по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала (рис. 42.3).

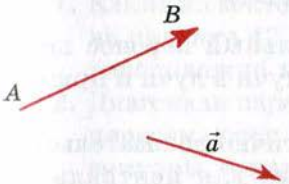


Рис. 42.1

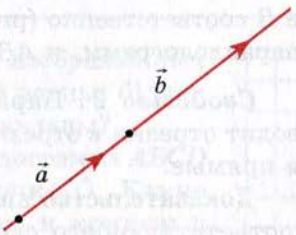


Рис. 42.2

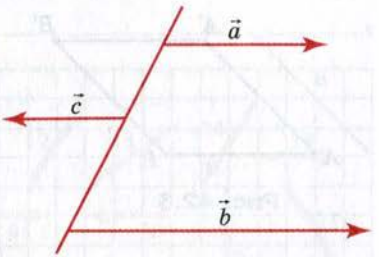


Рис. 42.3

Длиной, или ***модулем***, вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина вектора $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Рассматривают также нулевые векторы, у которых начало совпадает с концом. Все нулевые векторы считаются равными между собой. Они обозначаются $\vec{0}$, и их длина считается равной нулю.

В дальнейшем мы рассмотрим понятие вектора более подробно. Сейчас же используем это понятие для определения параллельного переноса.

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A параллельным переносом на вектор $\vec{a}$, если $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ (рис. 42.4).

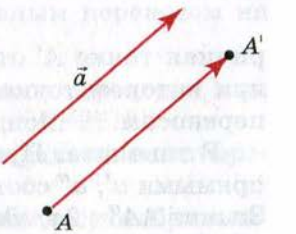


Рис. 42.4

Преобразование плоскости, при котором точкам A сопоставляются точки A' так, что вектор $\overrightarrow{AA'}$ равен заданному вектору $\vec{a}$, называется ***параллельным переносом*** на вектор $\vec{a}$.

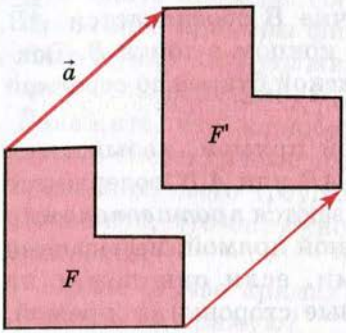


Рис. 42.5

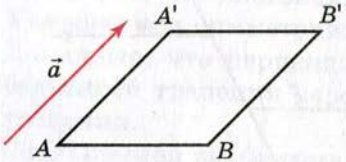


Рис. 42.6

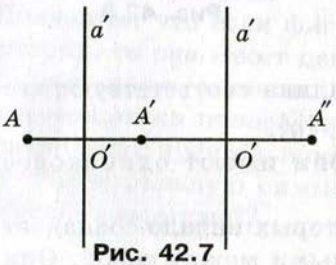


Рис. 42.7

Говорят, что фигура F' получается ***параллельным переносом*** фигуры F на вектор $\vec{a}$, если все точки фигуры F' получаются параллельным переносом всевозможных точек фигуры F на вектор $\vec{a}$ (рис. 42.5).

Рассмотрим некоторые свойства параллельного переноса.

Свойство 1. Параллельный перенос сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ точек A и B соответственно (рис. 42.6). Тогда $AA'B'B$ — параллелограмм, и $AB = A'B'$. ■

Свойство 2. Параллельный перенос переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для центральной симметрии. ■

Пример 1. Сколько различных векторов задают направленные стороны параллелограмма $ABCD$?

Ответ. 4 вектора: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$.

Пример 2. Даны две параллельные прямые a' и a''. Точке A сопоставляется точка A', симметричная A относительно прямой a'. Точке A' сопоставляется точка A'', симметричная точке A' относительно прямой a''. Докажите, что соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'', является параллельным переносом.

Решение. Пусть O', O'' — точки пересечения отрезков AA', $A'A''$ с прямыми a', a'' соответственно (рис. 42.7). Тогда $AO' = O'A'$ и $A'O'' = O''A''$. Значит $AA'' = 2d$, *где* d — *расстояние между параллельными прямыми* a' и a''. Таким образом, соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'', является параллельным переносом на вектор длины $2d$, перпендикулярный данным прямым.

Вопросы

1. Что называется вектором?
2. Какие два вектора называются: а) одинаково направленными; б) противоположно направленными?
3. Что называется длиной (модулем) вектора?
4. Какие два вектора называются равными?
5. Что называется параллельным переносом?
6. Какая фигура называется фигурой, полученной из данной параллельным переносом?
7. Сформулируйте свойства параллельного переноса.

Задачи

1. Какие из векторов, изображенных на рисунке 42.8: а) равны; б) противоположно направлены?

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие векторы с началом и концом в точках A, B, C, D, O задают один и тот же вектор? Сколько имеется различных векторов?

3. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

4. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

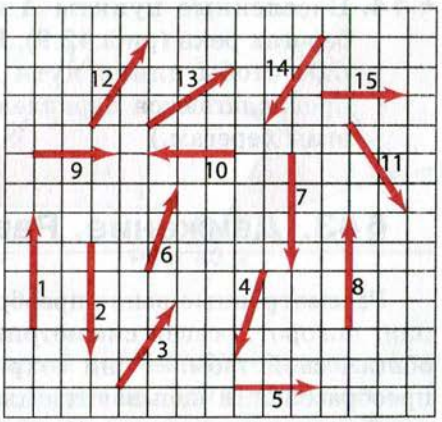


Рис. 42.8

5. Даны точки A, B, C. Постройте точку C', получающуюся из точки C параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$.

6. Докажите, что прямая при параллельном переносе переходит или сама в себя, или в прямую, параллельную исходной.

7. Докажите, что точки A и B можно перевести параллельным переносом в точки C и D, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

8. При каком условии существует параллельный перенос, отображающий один отрезок на другой?

9. Даны две параллельные прямые. Сколько существует параллельных переносов, переводящих одну из них в другую?

10. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона треугольника переходит в его другую сторону?

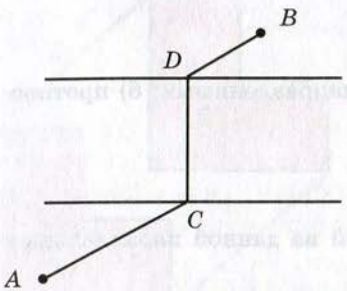


Рис. 42.9

11. Для заданного параллельного переноса постройте фигуры, в которые переходят заданные: отрезок, луч, прямая, окружность, угол, треугольник.

12. Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC параллельным переносом. Докажите, что соответствующие медианы этих треугольников или лежат на одной прямой, или на параллельных прямых.

* **13.** Докажите, что если фигура имеет две параллельные оси симметрии, то она переводится сама в себя некоторым параллельным переносом.

* **14.** Населенные пункты A и B расположены на противоположных берегах реки (рис. 42.9). В каком месте реки следует построить мост CD, чтобы длина пути $ACDB$ была наименьшей? (Берега реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам.)

§43. Движение. Равенство фигур

Рассмотренные выше преобразования плоскости (центральная симметрия, поворот, осевая симметрия, параллельный перенос) обладают одним общим свойством — они сохраняют расстояния между точками. Такие преобразования называются движениями.

Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, т. е. если точки A, B переводятся в точки A', B' соответственно, то $A'B' = AB$.

Примерами движений являются: центральная симметрия, поворот, осевая симметрия и параллельный перенос.

Пусть одно движение переводит точку A в точку A', а другое движение переводит точку A' в точку A''. Тогда преобразование плоскости, при котором точке A сопоставляется точка A'', называется ***композицией*** движений. Оно получается последовательным выполнением двух данных движений.

Рассмотрим свойства движения.

Свойство 1. Композиция движений является движением.

Доказательство. Пусть одно движение переводит точки A, B в точки A', B' соответственно, а другое движение переводит точки A', B' в точки A'', B'' соответственно. Тогда $AB = A'B' = A''B''$. Таким образом, композиция

движений сохраняет расстояние между точками и, следовательно, сама является движением.■

Свойство 2. Движение переводит прямые в прямые, лучи в лучи и отрезки в отрезки.

Доказательство. Пусть точка B принадлежит отрезку AC и движение переводит эти точки в точки A', B', C' соответственно (рис. 43.1). Тогда $AB + BC = AC$. Поскольку при движении расстояния между точками не изменяются, то для точек A', B', C' будет иметь место равенство $A'B' + B'C' = A'C'$. Следовательно, точка C' лежит на прямой $A'B'$ между точками A' и B'. Значит, отрезок AB переводится в отрезок $A'B'$.

Аналогичным образом доказывается, что луч AB переводится в луч $A'B'$ и вся прямая AB переходит в прямую $A'B'$.■

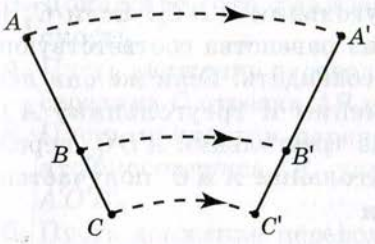


Рис. 43.1

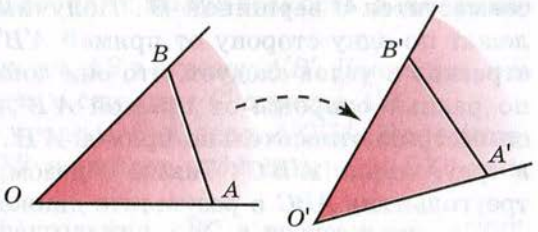


Рис. 43.2

Свойство 3. При движении сохраняются углы.

Доказательство. Пусть дан угол с вершиной в точке O и точками A, B на его сторонах. Предположим, что движением эти точки переводятся в точки O', A', B' соответственно (рис. 43.2). Поскольку при движении расстояния между точками не изменяются, то треугольник AOB будет равен треугольнику $A'O'B'$ (по третьему признаку равенства треугольников), и, следовательно, $\angle AOB = \angle A'O'B'$.■

Две фигуры называются ***равными***, если они движением переводятся одна в другую.

Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F = F'$ означает, что фигура F равна фигуре F'.

Следующая теорема устанавливает связь между понятием равенства фигур и введенным ранее понятием равенства треугольников.

Теорема. Два треугольника равны в том и только том случае, когда один из них переводится движением в другой.

Доказательство. Пусть треугольник ABC переводится движением в треугольник $A'B'C'$. Тогда, так как при движении сохраняются расстояния

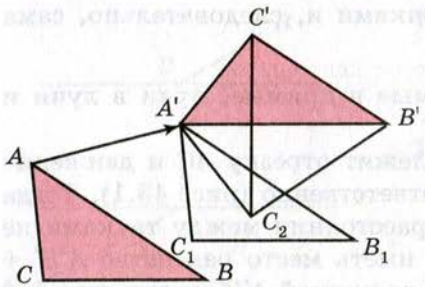


Рис. 43.3

и углы, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Значит, треугольники ABC и $A'B'C'$ равны.

Обратно, пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ равны соответствующие стороны и углы. Докажем, что треугольник ABC движением переводится в треугольник $A'B'C'$ (рис. 43.3). Действительно, если A и A' не совпадают, применим к треугольнику ABC параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$. Получим треугольник $A'B_1C_1$. Если B_1 и B' не совпадают, применим к треугольнику $A'B_1C_1$ поворот на угол $B_1A'B'$. При этом из равенства сторон $A'B_1$ и $A'B'$ следует, что вершина B_1 совместится с вершиной B'. Получим треугольник $A'B'C_2$. Если C_2 и C' лежат по одну сторону от прямой $A'B'$, то из равенства соответствующих отрезков и углов следует, что они должны совпадать. Если же они лежат по разные стороны от прямой $A'B'$, применим к треугольнику $A'B'C_2$ симметрию относительно прямой $A'B'$. Тогда треугольник $A'B'C_2$ перейдет в треугольник $A'B'C'$. Таким образом, треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC в результате движения. ■

Пример 1. Могут ли при движении разные прямые переходить в одну?

Решение. Нет. Предположим противное. Пусть прямые a и b переводятся в прямую c'. Возьмем точку A на прямой a, не принадлежащую прямой b. Она переводится в некоторую точку A' на прямой c'. Так как прямая b переводится движением в прямую c', то на ней найдется точка B, которая также переводится в точку A'. Таким образом, две точки A и B переводятся движением в одну точку A'. Это противоречит тому, что движение сохраняет расстояние между точками.

Пример 2. Докажите, что два параллелограмма $ABCD$ и $A'B'C'D'$, у которых $AB = A'B'$, $AD = A'D'$ и $\angle A = \angle A'$, равны.

Решение. Заметим, что у параллелограммов $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны все соответствующие элементы (стороны, диагонали, углы). Так как треугольники ABD и $A'B'D'$ равны, то существует движение, переводящее треугольник ABD в треугольник $A'B'D'$. Покажем, что это движение переводит точку C в точку C'. Действительно, движение сохраняет углы и расстояния. Поэтому из равенства углов BAC и $B'A'C'$ следует, что это движение переводит луч AC в луч $A'C'$ и точку C в точку C'. Таким образом, вершины параллелограмма $ABCD$ движением переводятся в соответствующие вершины параллелограмма $A'B'C'D'$, и, значит, первый параллелограмм переводится этим движением во второй. Следовательно, они равны.

Вопросы

1. Какое преобразование плоскости называется движением?
2. Приведите примеры движений.
3. Что называется композицией движений?
4. Какие фигуры называются равными?
5. Сформулируйте свойства движения.

Задачи

1. Могут ли при движении разные точки переходить в одну точку?

2. Докажите, что движение переводит окружность в окружность того же радиуса.

3. Докажите, что движение переводит полуплоскость в полуплоскость.

4. Пусть движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$. Докажите, что середина C отрезка AB перейдет в середину C' отрезка $A'B'$.

5. Пусть движение переводит угол AOB в угол $A'O'B'$. Докажите, что биссектриса OC угла AOB перейдет в биссектрису $O'C'$ угла $A'O'B'$.

6. Пусть движение переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Докажите, что при этом высоты, медианы и биссектрисы треугольника ABC перейдут в высоты, медианы и биссектрисы треугольника $A'B'C'$ соответственно.

7. Пусть движение переводит точки A, B и C соответственно в точки A', B' и C' (рис. 43.4). Постройте точки, в которые переходят точки D и E.

8. Представьте поворот как композицию осевых симметрий.

9. Представьте параллельный перенос как композицию осевых симметрий.

10. Какие из фигур, изображенных на рисунке 43.5, равны?

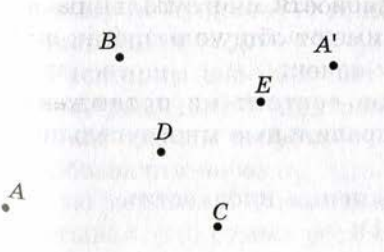


Рис. 43.4

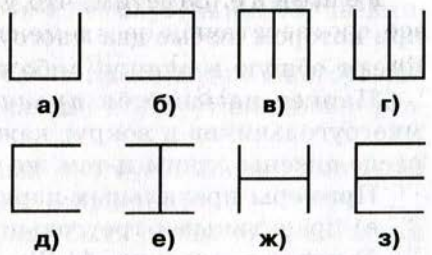


Рис. 43.5

11. Докажите, что две окружности равны, если равны их радиусы.

12. Для лучей, изображенных на рисунке 43.6, укажите движение, переводящее один луч в другой.

13. Для двух данных равных отрезков (рис. 43.7) укажите движения, переводящие один в другой.

14. Для двух данных равных углов (рис. 43.8) укажите движения, переводящие один в другой.

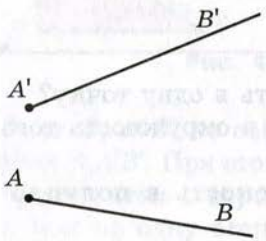


Рис. 43.6

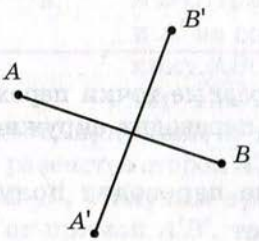


Рис. 43.7

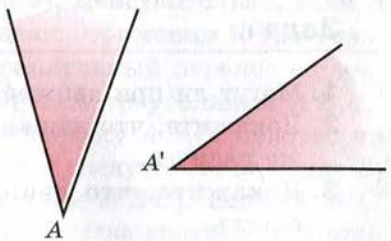


Рис. 43.8

15. Будут ли равны два четырехугольника, если у них все стороны соответственно равны?

* **16.** Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников соответственно равны все стороны и по одному углу, то такие четырехугольники равны.

* **17.** Придумайте другие признаки равенства четырехугольников.

* **18.** Докажите, что два правильных n-угольника равны тогда и только тогда, когда равны их стороны.

* **19.** Докажите, что два равных треугольника можно перевести один в другой с помощью не более трех осевых симметрий.

§44*. Паркеты

Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

Паркет называется ***правильным***, если он состоит из правильных многоугольников и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

Примеры правильных паркетов дают заполнения плоскости:

а) правильными треугольниками (рис. 44.1);

б) квадратами (рис. 44.2);

в) правильными шестиугольниками (рис. 44.3).

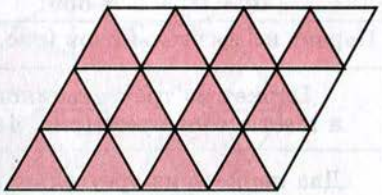


Рис. 44.1

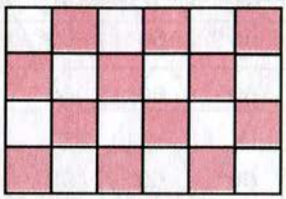


Рис. 44.2

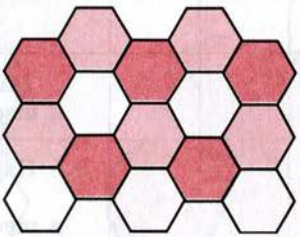


Рис. 44.3

Докажем, что другими равными правильными многоугольниками заполнить плоскость нельзя. Воспользуемся тем, что сумма углов многоугольников, сходящихся в одной вершине паркета, должна быть равна 360°.

Рассмотрим правильные пятиугольники. Углы правильного пятиугольника равны 108°. В одной вершине паркета не может сходиться три правильных пятиугольника, так как сумма углов в этом случае будет $324° < 360°$. Если же число правильных пятиугольников больше или равно 4, то сумма углов будет больше или равна $432° > 360°$. Поэтому не существует правильного паркета из пятиугольников.

Аналогично в одной вершине паркета не может сходиться три или более правильных семиугольников, восьмиугольников и т. д., так как их углы больше 120° и в сумме они будут составлять величину, бóльшую 360°. Поэтому не существует правильных паркетов из семиугольников, восьмиугольников и т. д.

Расширим способы составления паркетов из правильных многоугольников, разрешив использовать в них правильные многоугольники с различным числом сторон.

Обозначим через α_1, α_2, ... углы правильных многоугольников, имеющих общую вершину. Расположим их в порядке возрастания $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$. Учитывая, что сумма всех таких углов должна быть равна 360°, составим таблицу, содержащую возможные наборы таких углов, и укажем соответствующие паркеты.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = 360°$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Паркет из треугольников (рис. 44.2)
60°	60°	60°	60°	120°		Паркет из треугольников и шестиугольников (рис. 44.4)
60°	60°	60°	90°	90°		Два паркета из треугольников и четырехугольников (рис. 44.5, 44.6)
60°	60°	90°	150°			Нет паркета
60°	60°	120°	120°			Паркет из треугольников и шестиугольников (рис. 44.7)
60°	90°	90°	120°			Паркет из треугольников, четырехугольников и шестиугольников (рис. 44.8)
60°	150°	150°				Паркет из треугольников и двенадцатиугольников (рис. 44.9)
90°	90°	90°	90°			Паркет из квадратов (рис. 44.1)
90°	120°	150°				Паркет из четырехугольников, шестиугольников и двенадцатиугольников (рис. 44.10)
90°	135°	135°				Паркет из четырехугольников и восьмиугольников (рис. 44.11)
120°	120°	120°				Паркет из шестиугольников (рис. 44.3)

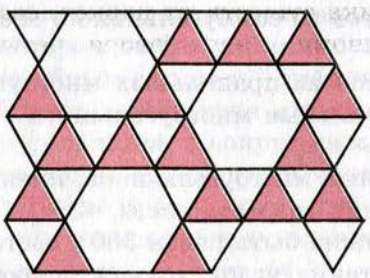


Рис. 44.4

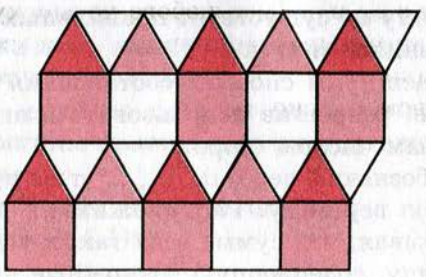


Рис. 44.5

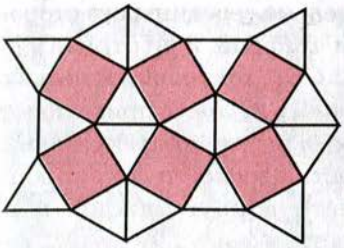


Рис. 44.6

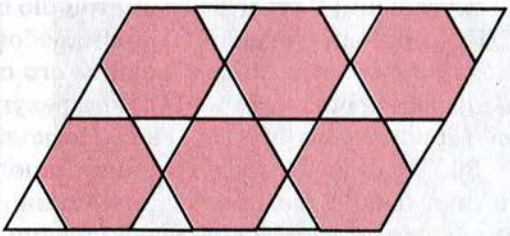


Рис. 44.7

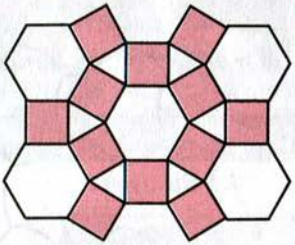


Рис. 44.8

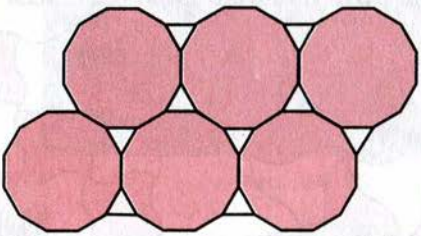


Рис. 44.9

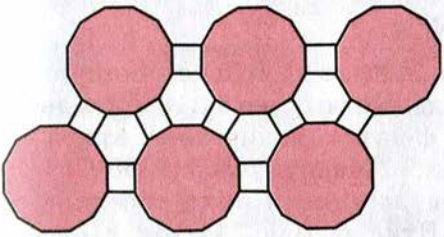


Рис. 44.10

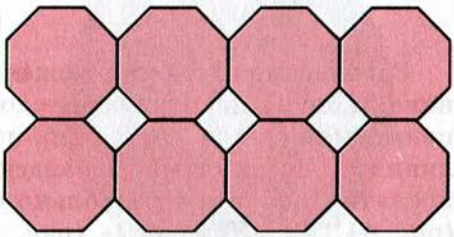


Рис. 44.11

Таким образом, мы получили 11 правильных паркетов. Можно доказать, что других правильных паркетов не существует.

Рассмотрим теперь вопрос о заполнении плоскости неправильными равными многоугольниками.

Теорема. Для любого четырехугольника существует паркет, состоящий из четырехугольников, равных исходному. Иначе говоря, четырехугольником произвольной формы можно заполнить всю плоскость.

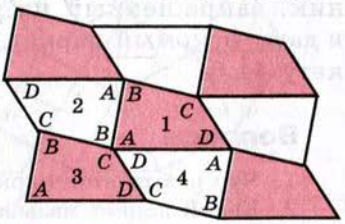


Рис. 44.12

Доказательство. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 44.12). Рассмотрим центрально-симметричный ему четырехугольник относительно середины стороны AB. Исходный четырехугольник $ABCD$ обозначим цифрой 1, а симметричный — цифрой 2. Теперь

четырехугольник 2 отразим симметрично относительно середины его стороны BC. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 3 и отразим его симметрично относительно середины его стороны CD. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 4. Четырехугольники 1, 2, 3 и 4 примыкают к общей вершине углами A, B, C и D. Поскольку сумма углов четырехугольника равна 360°, то эти четырехугольники заполнят часть плоскости вокруг общей вершины. Такое же построение можно провести вокруг каждой новой вершины, что и даст искомое заполнение плоскости. ■

Заметим, что четырехугольники, закрашенные одним цветом (рис. 44.12), получаются друг из друга параллельным переносом.

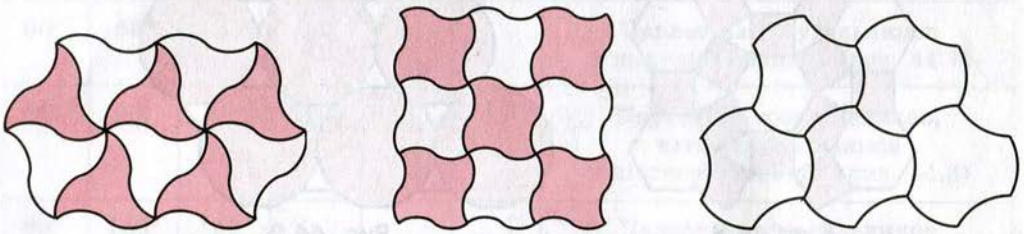


Рис. 44.13

Заполнение плоскости может быть произведено не только многоугольниками, но и фигурами более сложного вида. На рисунке 44.13 приведены примеры паркетов, состоящих из равных фигур, ограниченных кривыми линиями. Знаменитый голландский художник Мариус Эшер (1898—1972) посвятил паркетам несколько своих картин. Среди них: «Всадники» (рис. 44.14); «Ящерицы» (рис. 44.15); «Птицы» (рис. 44.16); «Предел круга III» (рис. 44.17).

Пример 1. Можно ли составить паркет из равных невыпуклых четырехугольников?

Решение. Да, соответствующий паркет приведен на рисунке 44.18.

Пример 2. Можно ли составить паркет из равных пятиугольников?

Решение. Да. Рассмотрим, например, паркет на рисунке 44.6. Центры его многоугольников с общей вершиной образуют пятиугольник, закрашенный на рисунке 44.19. Ясно, что эти пятиугольники и дают искомый паркет. Этот паркет называется ***двойственным*** к паркету 44.6.

Вопросы

1. Что называется паркетом?
2. Какой паркет называется правильным?
3. Можно ли составить паркет из равных четырехугольников?

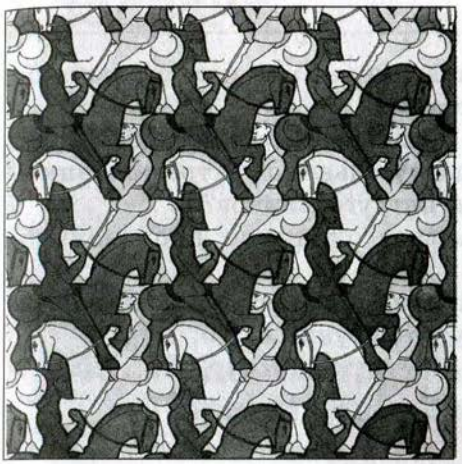


Рис. 44.14

Рис. 44.15

Рис. 44.16

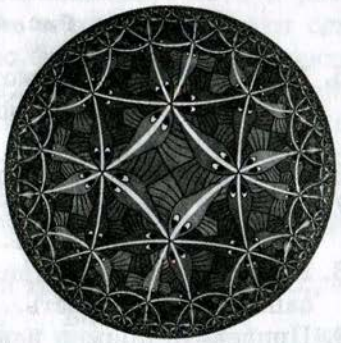


Рис. 44.17

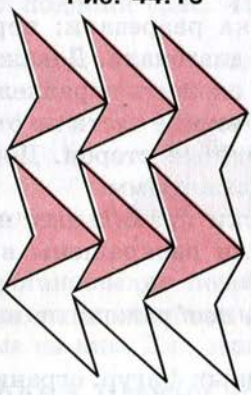


Рис. 44.18

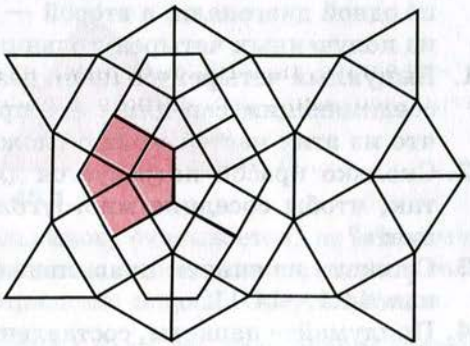


Рис. 44.19

Задачи

1. Можно ли составить паркет из правильных: а) пятиугольников; б) шестиугольников; в) семиугольников?
2. Можно ли составить паркет из: а) правильных восьмиугольников и квадратов; б) правильных двенадцатиугольников и треугольников; в) правильных десятиугольников и пятиугольников?
3. Можно ли заполнить плоскость треугольником произвольной формы?
4. Нарисуйте паркет, составленный из четырехугольников, равных четырехугольнику, изображенному на рисунке 44.20.

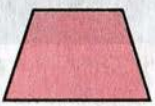


Рис. 44.20

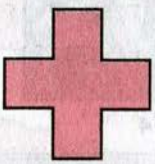
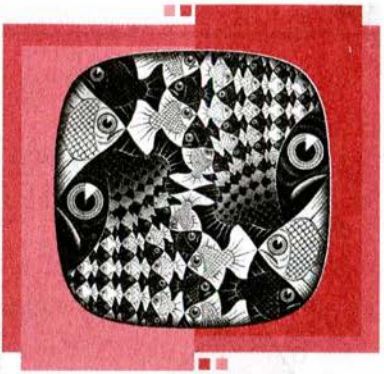


Рис. 44.21

5. Докажите, что с помощью центрально-симметричных шестиугольников произвольной формы (даже невыпуклых) можно заполнить плоскость. Приведите пример соответствующего паркета.
6. Составьте паркет из греческих крестов (рис. 44.21).
7. Нарисуйте паркеты, двойственные к паркетам, изображенным на рисунках 44.1—44.11.
8. Приведите пример невыпуклого семиугольника, которым можно заполнить плоскость.
9. Приведите пример невыпуклого восьмиугольника, которым можно заполнить плоскость.
10. Два равных выпуклых четырехугольника разрезали: первый — по одной диагонали, а второй — по другой диагонали. Докажите, что из полученных четырехугольников можно сложить параллелограмм.
11. Выпуклый четырехугольник разрезали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины его противоположных сторон. Докажите, что из этих частей можно сложить параллелограмм.
12. Сколько красок потребуется для раскраски правильных паркетов так, чтобы соседние многоугольники были раскрашены в разные цвета?
13. Сложите из спичек правильные паркеты, изображенные на рисунках 44.1—44.11.
14. Придумайте паркеты, составленные из равных фигур, ограниченных кривыми линиями.

Глава VIII

ПОДОБИЕ



§45. Подобие треугольников. Первый признак подобия треугольников

Равные фигуры можно представлять себе как фигуры, имеющие равные размеры. Помимо этого встречаются фигуры, имеющие хотя и разные размеры, но одинаковую форму. Например, все окружности имеют одинаковую форму, все квадраты имеют одинаковую форму, все равносторонние треугольники имеют одинаковую форму и т. д. Такие фигуры в геометрии принято называть подобными. Рассмотрим сначала подобные треугольники.

Два треугольника называются ***подобными***, если углы одного соответственно равны углам другого и соответствующие стороны пропорциональны. Коэффициент пропорциональности называется ***коэффициентом подобия***.

Таким образом, треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$, где k — коэффициент подобия (рис. 45.1).

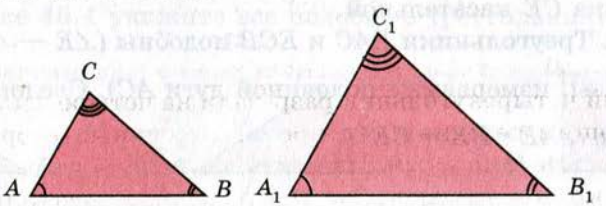


Рис. 45.1

Для установления подобия треугольников, оказывается, не обязательно проверять все перечисленные выше равенства, а достаточно проверить только некоторые из них. Для этого служат признаки подобия треугольников.

Теорема. (Первый признак подобия.) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

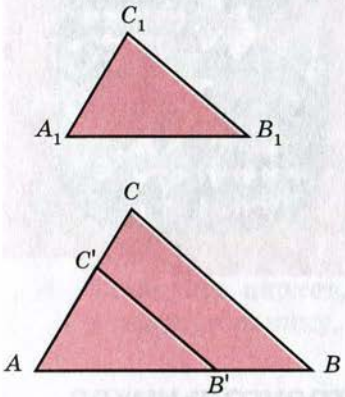


Рис. 45.2

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тогда и $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Отложим на AB отрезок AB', равный A_1B_1, и проведем прямую $B'C'$, параллельную BC (рис. 45.2). Треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ равны (по второму признаку равенства треугольников). По теореме о пропорциональных отрезках имеет место равенство $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$, и, следовательно, имеем равенство $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Аналогичным образом доказывается, что имеет место равенство $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Следовательно, треугольники подобны. ■

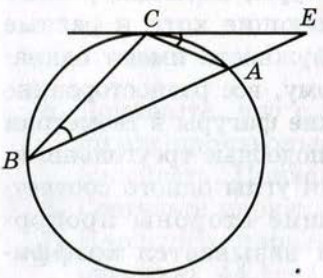


Рис. 45.3

Пример 1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведены диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O. Найдите подобные треугольники.

Решение. Треугольники AOD и BOC подобны, так как имеют соответственно равные углы.

Пример 2. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B (рис. 45.3), и касательная CE (C — точка касания). Докажите, что произведение отрезков AE и BE секущей равно квадрату отрезка CE касательной.

Решение. Треугольники EAC и ECB подобны ($\angle E$ — общий, $\angle ACE = \angle CBE$ как углы, измеряемые половиной дуги AC). Следовательно, $\frac{AE}{CE} = \frac{CE}{BE}$, и, значит, $AE \cdot BE = CE^2$.

Вопросы

1. Какие треугольники называются подобными?
2. Что называется коэффициентом подобия треугольников?
3. Сформулируйте первый признак подобия треугольников.

Задачи

1. Подобны ли любые два: а) равносторонних треугольника; б) равнобедренных треугольника; в) равнобедренных прямоугольных треугольника?

2. Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) $\frac{1}{2}$; б) 2.

3. Подобны ли прямоугольные треугольники, если у одного из них есть угол 40°, а у другого — угол 50°?

4. Два треугольника подобны. Два угла одного треугольника равны 55° и 80°. Найдите наименьший угол второго треугольника.

5. В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 5{,}6$ см, $A_1C_1 = 10{,}5$ см. Найдите AC и B_1C_1.

6. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.

7. Стороны треугольника относятся как 5 : 3 : 7. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: а) периметр равен 45 см; б) меньшая сторона равна 5 см; в) бóльшая сторона равна 7 см; г) разность большей и меньшей сторон составляет 2 см.

8. Докажите, что равнобедренные треугольники подобны, если углы при их вершинах, противолежащих основаниям, равны.

9. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если у них есть по равному острому углу.

10. Докажите, что высота прямоугольного треугольника разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

11. Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

12. На рисунке 45.4 укажите все подобные треугольники.

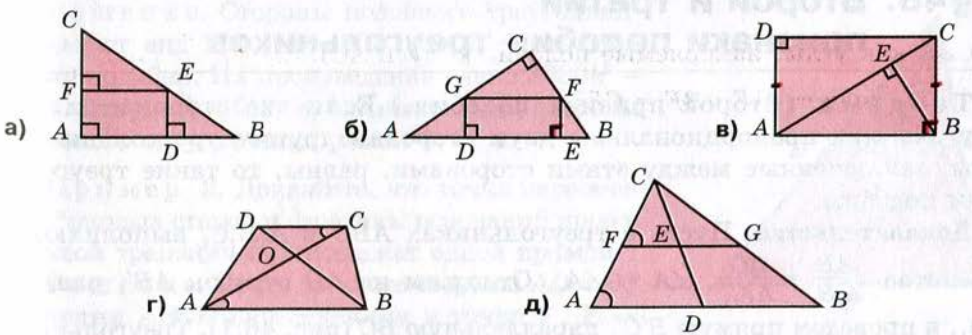


Рис. 45.4

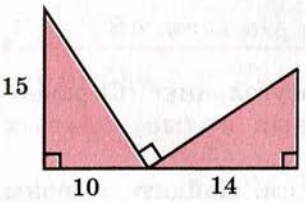


Рис. 45.5

13. На рисунке 45.5 найдите неизвестный катет.

14. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны соответственно 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.

15. Катеты одного прямоугольного треугольника на 3 см больше катетов другого прямоугольного треугольника. Подобны ли треугольники?

* **16.** В треугольник со стороной a и высотой h, опущенной на нее, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на этой стороне треугольника, а другие две — на двух других сторонах треугольника. Найдите сторону квадрата.

* **17.** В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.

* **18.** Можно ли треугольник пересечь прямой, непараллельной основанию, так, чтобы отсечь от него подобный треугольник? В каком случае это невозможно?

* **19.** В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AE и BD. Докажите, что треугольники ABC и EDC подобны.

* **20.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу. (Средним геометрическим двух положительных чисел a и b называется положительное число c, квадрат которого равен $a \cdot b$.)

* **21.** Постройте среднее геометрическое двух данных отрезков.

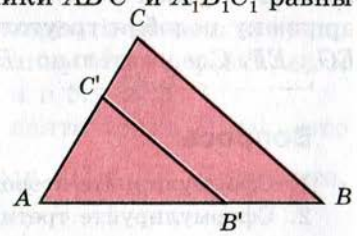
§46. Второй и третий признаки подобия треугольников

Теорема. (Второй признак подобия.) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$. Отложим на AB отрезок AB', равный A_1B_1, и проведем прямую $B'C'$, параллельную BC (рис. 46.1). Треугольники ABC и $AB'C'$ подобны (по первому признаку подобия треугольников), и име-

http://vk.com/school_ipad

ет место равенство $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$. Из этого равенства и равенства $AB' = A_1B_1$ следует равенство $AC' = A_1C_1$. Значит, треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. ■



Теорема. (Третий признак подобия.) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны пропорциональны, т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. На стороне AB отложим отрезок AB', равный A_1B_1, и проведем прямую $B'C'$, параллельную BC (рис. 46.1). Из подобия треугольников ABC и $AB'C'$ следуют равенства $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$. Из равенства $A_1B_1 = AB'$ следуют равенства $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{AC'}$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{B'C'}$.

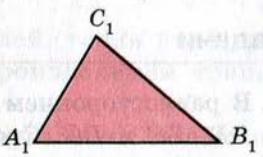


Рис. 46.1

Значит, имеем равенства $A_1C_1 = AC'$, $B_1C_1 = B'C'$. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $AB'C'$ равны (по третьему признаку равенства треугольников), и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. ■

Пример 1. Стороны треугольника равны 10, 15 и 20. Произведение сторон подобного ему треугольника равно 24. Найдите стороны второго треугольника.

Решение. Стороны подобного треугольника имеют вид $10k$, $15k$, $20k$, где k — коэффициент подобия. Их произведение равно $3000k^3 = 24$. Откуда $k = 0{,}2$, и, следовательно, стороны подобного треугольника равны 2, 3, 4.

Пример 2. Докажите, что точка пересечения боковых сторон и середины оснований произвольной трапеции принадлежат одной прямой.

Решение. Пусть боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E, F — середина AB (рис. 46.2). Докажем, что EF

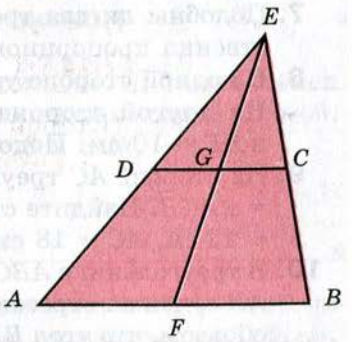


Рис. 46.2

пересекает CD в точке G, являющейся серединой CD. Треугольники EAF и EDG подобны (по первому признаку подобия треугольников), и коэффициент подобия k равен $EG : EF$. Треугольники EBF и ECG подобны (по первому признаку подобия треугольников), и коэффициент подобия k также равен $EG : EF$. Следовательно, $DG = AF \cdot k = FB \cdot k = GC$.

Вопросы

1. Сформулируйте второй признак подобия треугольников.
2. Сформулируйте третий признак подобия треугольников.

Задачи

1. В равностороннем треугольнике ABC проведены его средние линии DE, EG и DG. Среди всех образовавшихся треугольников укажите подобные.

2. Подобны ли два треугольника, если их стороны имеют длины: а) 4, 5, 6 и 8, 10, 12; б) 3, 4, 6 и 9, 15, 18; в) 1, 2, 2 и 1, 1, 0,5?

3. Стороны одного треугольника 4 дм, 3,6 дм и 1,5 дм. Найдите стороны другого треугольника, подобного данному, если коэффициент подобия равен 1,6.

4. Стороны одного треугольника равны 8 см, 6 см и 5 см. Меньшая сторона второго треугольника, подобного первому, равна 2,5 см. Найдите другие стороны второго треугольника.

5. Стороны треугольника 12,6 м, 16,5 м и 18 м. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его меньшая сторона равна большей стороне данного треугольника.

6. Сформулируйте признаки подобия: а) равнобедренных треугольников; б) прямоугольных треугольников.

7. Подобны ли два треугольника, если все их средние линии соответственно пропорциональны?

8. На одной стороне угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AE = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и ABE?

9. На стороне AC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите стороны треугольника ABD, если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см.

10. В треугольнике ABC $AB = 25$ см, $BC = 20$ см и $AC = 30$ см. На стороне AB отложен отрезок $BK = 4$ см, а на стороне BC взята точка L таким образом, что угол BKL равен углу C. Найдите периметр треугольника BKL.

http://vk.com/school_ipad

* **11.** Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к этим отрезкам.

* **12.** Отрезок, соединяющий точки на боковых сторонах трапеции, делит эти стороны в отношении $m : n$. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны соответственно a и b.

* **13.** На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP = \frac{AD}{n}$; Q — точка пересечения прямых AC и BP. Докажите, что $AQ = \frac{AC}{n+1}$.

* **14.** Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения боковых сторон и середины оснований произвольной трапеции принадлежат одной прямой.

* **15.** Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно целиком накрыть двумя меньшими подобными ему треугольниками.

* **16.** На рисунке 46.3 показано, как можно найти ширину реки AD, построив на местности два подобных треугольника — ABC и DEC. Найдите AD, если $BC = 50$ м, $EC = 16$ м и $DC = 17$ м.

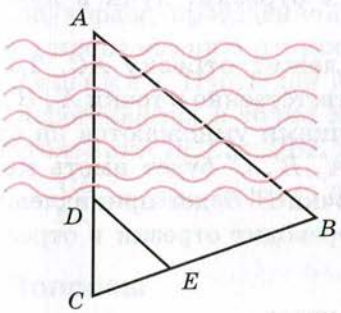


Рис. 46.3

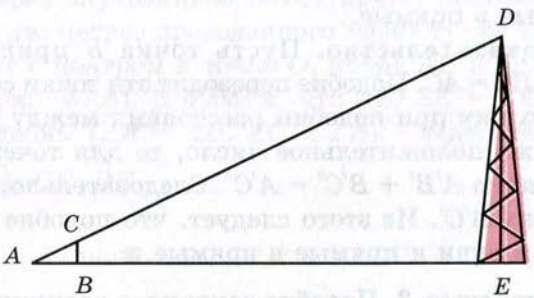


Рис. 46.4

* **17.** Наблюдатель, находящийся в пункте A (рис. 46.4), видит конец шеста C и верхнюю точку D мачты расположенными на одной прямой. Какова высота мачты, если $AE = 60$ м, $AB = 6$ м и $BC = 3$ м?

§47. Подобие фигур. Гомотетия

Преобразование плоскости, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, называется ***подобием***. Само это число называется ***коэффициентом подобия***.

Таким образом, если точки A, B при подобии переходят соответственно в точки A', B', то $A'B' = k \cdot AB$, или, что то же самое, $A'B' : AB = k$, причем k — одно и то же число для всех точек A, B.

Заметим, что при $k = 1$ подобие является движением.

Две фигуры F и F' называются ***подобными***, если одна из них переводится в другую подобием (рис. 47.1).

Рассмотрим некоторые свойства подобия.

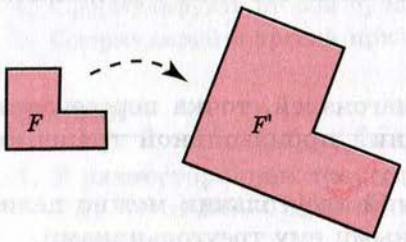


Рис. 47.1

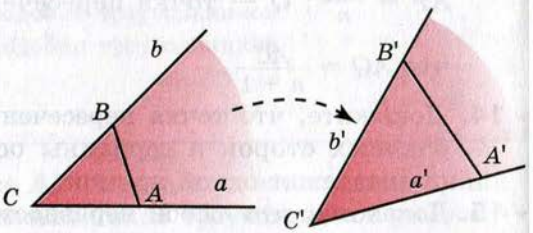


Рис. 47.2

Свойство 1. Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точка B принадлежит отрезку AC. Тогда $AB + BC = AC$. Подобие переводит эти точки соответственно в точки A', B', C'. Поскольку при подобии расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, то для точек A', B', C' будет иметь место равенство $A'B' + B'C' = A'C'$. Следовательно, точка B' будет принадлежать отрезку $A'C'$. Из этого следует, что подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые. ■

Свойство 2. Подобие сохраняет величины углов.

Доказательство. Пусть угол с вершиной C и сторонами a, b переводится подобием в угол с вершиной C' и сторонами a', b' (рис. 47.2). Возьмем на сторонах a, b точки A, B, и пусть A', B' — соответствующие им точки на сторонах a', b'. Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны (по третьему признаку подобия треугольников) и, следовательно, имеют соответственно равные углы. В частности, $\angle C = \angle C'$. ■

Приведем пример преобразования подобия. Зафиксируем точку O и положительное число k. Каждой точке A плоскости, отличной от O, сопоставим точку A' на луче OA так, что $OA' = k \cdot OA$ (рис. 47.3). Точке O сопоставим ее саму. Полученное преобразование плоскости называется ***гомотетией*** с центром в точке O и коэффициентом k.

http://vk.com/school_ipad

Теорема. Гомотетия является подобием с тем же коэффициентом.

Доказательство. Пусть при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k точки A, B переходят соответственно в точки A', B' (рис. 47.3). Тогда треугольники AOB и $A'OB'$ подобны (по второму признаку подобия треугольников), и, следовательно, $A'B' = k \cdot AB$, т. е. гомотетия является подобием с коэффициентом k. ■

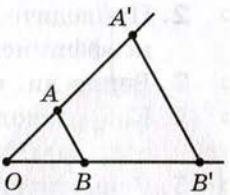


Рис. 47.3

Пример 1. Докажите, что композиция двух преобразований подобия является подобием.

Решение. Пусть даны два преобразования подобия с коэффициентами k_1 и k_2. При первом преобразовании расстояния между точками умножаются на k_1, а при втором — на k_2. Тогда при композиции этих преобразований расстояния между точками будут умножаться на $k_1 \cdot k_2$, т. е. оно будет преобразованием подобия с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$.

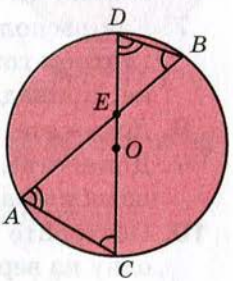


Рис. 47.4

Пример 2. Докажите, что произведение отрезков любой хорды, проведенной через внутреннюю точку круга, постоянно и равно произведению отрезков диаметра, проведенного через ту же точку.

Решение. Пусть дан круг с центром в точке O, хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке E (рис. 47.4). Докажем, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Треугольники ACE и DBE подобны ($\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle B$). Следовательно, $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$, и, значит, $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

Вопросы

1. Какое преобразование плоскости называется подобием?
2. Что называется коэффициентом подобия?
3. Подобны ли равные фигуры?
4. Сформулируйте свойства подобия.
5. Какое преобразование плоскости называется гомотетией?
6. Что называется центром и коэффициентом гомотетии?

Задачи

1. Фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом k. С каким коэффициентом фигура F подобна фигуре F'?

○ **2.** Приведите примеры фигур, которые подобны сами себе при любом коэффициенте подобия.

○ **3.** Верно ли, что если два угла подобны, то они равны?

○ **4.** Как расположены точки A и A' относительно центра гомотетии O, если: а) $0 < k < 1$; б) $k > 1$?

○ **5.** Существуют ли прямые, которые переводятся гомотетией сами в себя?

○ **6.** Даны точки A, B и гомотетичные им точки A', B' соответственно. Можно ли найти центр данной гомотетии?

7. Как расположены две окружности друг относительно друга, если их центром гомотетии является: а) центр одной из окружностей; б) точка, принадлежащая одной из данных окружностей?

8. Докажите, что любые два квадрата подобны.

9. Докажите, что любые две окружности подобны и коэффициент подобия равен отношению их радиусов.

10. Постройте треугольник, гомотетичный данному, приняв за центр одну из вершин данного треугольника, с коэффициентом гомотетии, равным: а) 3; б) $\frac{1}{3}$.

11. Стороны четырехугольника равны 14 см, 21 см, 10 см и 42 см. Найдите стороны подобного ему четырехугольника, если известно, что его меньшая сторона равна 2 см.

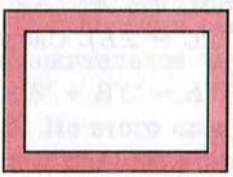


Рис. 47.5

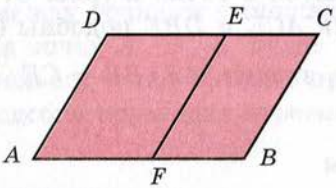


Рис. 47.6

12. Подобны ли прямоугольники, образующие рамку картины (рис. 47.5)?

13. Трапеция разделена средней линией на две трапеции. Будут ли они подобны?

14. Какие условия должны выполняться, чтобы были подобны: а) два ромба; б) два параллелограмма; в) две равнобедренные трапеции?

* **15.** Докажите, что любые два правильных многоугольника с одним и тем же числом сторон подобны.

* **16.** Докажите, что периметры правильных многоугольников с одним и тем же числом сторон относятся как радиусы описанных окружностей.

* **17.** На рисунке 47.6 изображен параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $BC = b$, от которого отсечен другой параллелограмм $FBCE$, подобный данному. Каким должен быть отрезок BF?

* **18.** Две хорды окружности пересекаются. Одна из них точкой пересечения делится на отрезки 2 см и 8 см, а другая пополам. Найдите вторую хорду.

* **19.** Как далеко видна поверхность Земли с самолета (рис. 47.7), летящего на высоте $h = 10$ км над Землей (радиус Земли $R \approx 6370$ км)?

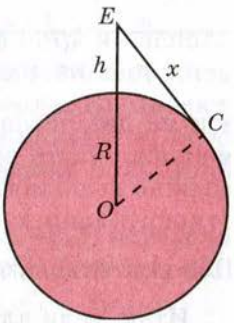


Рис. 47.7

* **20.** Докажите, что два треугольника подобны тогда и только тогда, когда существует преобразование подобия, переводящее один из них в другой.

* **21.** Докажите, что любые две параболы подобны.

* **22.** Подобны ли: а) любые два эллипса; б) любые две гиперболы?

§48*. Золотое сечение

С давних времен люди занимались поисками гармонии и совершенства. Древние греки считали, что мир устроен по законам гармонии и задачей познания мира, таким образом, является поиск гармонии.

Одним из вопросов, волновавших древних ученых, был вопрос о нахождении наилучшего соотношения неравных частей, составляющих вместе единое целое. Его решение связывают с именем Пифагора, который установил, что наиболее совершенным делением целого на две неравные части является такое, при котором меньшая часть так относится к большей, как бóльшая часть относится ко всему целому. В Древней Греции такое деление называлось ***гармоническим отношением***. Интерес к нему необычайно возрос в эпоху Возрождения (XV—XVII). В 1509 году итальянский математик, монах Лука Пачоли (1445—ок. 1514), друг Леонардо да Винчи (1452—1519), написал целую книгу «О божественной пропорции». Леонардо выполнил иллюстрации к этой книге. В ней воздействие божественной пропорции на человека называлось «существенным, невыразимым, чудесным, неизъяснимым, неугасимым, возвышенным, превосходнейшим, непостижимым». Пачоли назвал гармоническое отношение божественной пропорцией (***«Sectio Divina»***). Термин ***золотое сечение*** (***«Sectio aurea»***) появился в Германии в первой половине XIX века.

Рис. 48.1

Выясним, каким числом выражается золотое сечение. Для этого выберем произвольный отрезок и примем его длину за единицу. Разобьем этот отрезок на две неравные части и бóльшую из них обозначим через x. Тогда меньшая часть равна $1 - x$ (рис. 48.1). По определению золотого сечения должно выполняться равенство $(1 - x) : x = x : 1$. Мы получили уравнение относительно x, которое легко свести к квадратному $x^2 + x - 1 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}6$.

Итак, если длина исходного отрезка равна 1, то его бóльшая часть при золотом сечении равна примерно 0,6.

Полученное число обозначается буквой φ. Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия, который часто использовал золотое сечение в своих произведениях. Самыми знаменитыми из них были статуи Зевса Олимпийского (которая считалась одним из семи чудес света) и Афины Парфенос.

Еще раз подчеркнем, что пропорции золотого сечения создают впечатление гармонии, красоты. Поэтому скульпторы, архитекторы, художники использовали и используют золотое сечение в своих произведениях. Например, знаменитая статуя Аполлона Бельведерского состоит из частей, делящихся в золотом отношении. Причем не только вся статуя, но и отдельные ее части делятся в золотом отношении.

Одно из красивейших произведений древнегреческой архитектуры — Парфенон в Афинах (V в. до н. э.) — содержит в себе золотые пропорции (рис. 48.2). Так, отношение высоты AB здания к его длине AD равно φ. Кроме того, отношение AC к BC также равно φ.

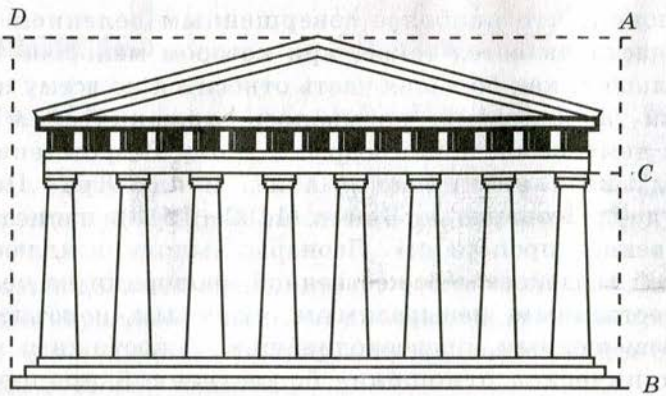


Рис. 48.2

Известный русский архитектор М. Ф. Казаков тоже широко использовал в своем творчестве золотое сечение, которое можно обнаружить, например, в архитектуре здания бывшего Сената в Кремле. По проекту М. Ф. Казакова в Москве была построена Голицынская больница, которая в настоящее время называется Первой клинической больницей им. Н. И. Пирогова.

Пропорции храма Василия Блаженного в Москве (рис. 48.3) определяются восемью членами ряда золотого сечения: 1, φ, φ^2, φ^3, φ^4, φ^5, φ^6, φ^7.

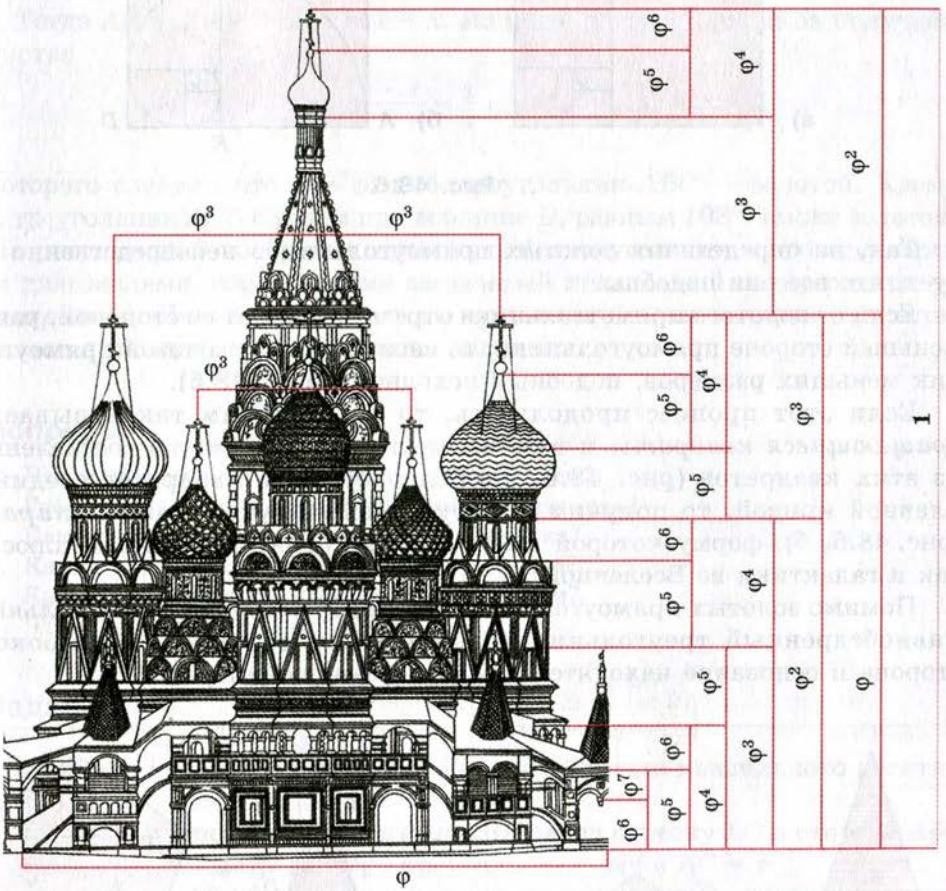


Рис. 48.3

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, называется ***золотым прямоугольником*** (рис. 48.4). Золотые прямоугольники обладают многими интересными свойствами.

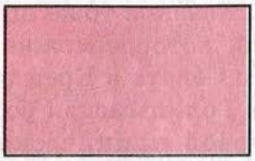


Рис. 48.4

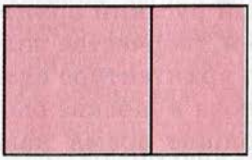
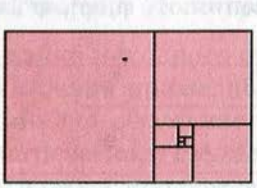


Рис. 48.5



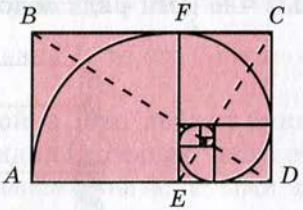


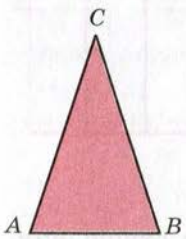
Рис. 48.6

Так, из определения золотых прямоугольников непосредственно следует, что все они подобны.

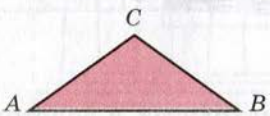
Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник меньших размеров, подобный исходному (рис. 48.5).

Если этот процесс продолжить, то мы получим так называемые ***вращающиеся квадраты*** и весь прямоугольник окажется составленным из этих квадратов (рис. 48.6, а). Если вершины квадратов соединить плавной кривой, то получим кривую, называемую ***золотой спиралью*** (рис. 48.6, б), форму которой имеют как раковины морских моллюсков, так и галактики во Вселенной.

Помимо золотых прямоугольников имеются и ***золотые треугольники***. Равнобедренный треугольник называется золотым, если его боковая сторона и основание находятся в золотом отношении.



а)



б)

Рис. 48.7

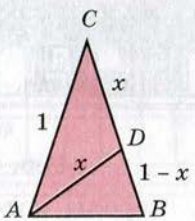


Рис. 48.8

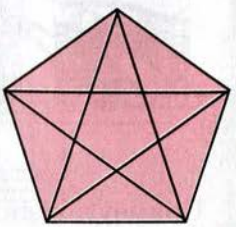


Рис. 48.9

Возможны два типа золотых треугольников (рис. 48.7, а, б). В первом случае $\frac{AB}{AC} = \varphi$. Во втором случае $\frac{AC}{AB} = \varphi$.

Докажем, что золотыми треугольниками являются равнобедренные треугольники с углами при вершинах, противолежащих основаниям, 36° и 108°. Для этого в равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине C, равным 36°, проведем биссектрису AD (рис. 48.8). Треугольники ACD и ABD равнобедренные, и треугольник BDA подобен треугольнику ABC. Примем боковую сторону треугольника ABC за единицу, а его основание за x. Тогда $AD = CD = x$, $BD = 1 - x$. Из подобия треугольников получаем равенство

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1},$$

из которого следует, что $x = \varphi$, т. е. треугольник ABC — золотой. Кроме того, треугольник ACD с углом при вершине D, равным 108°, также золотой.

На рисунке 48.9 изображен правильный пятиугольник с проведенными в нем диагоналями, образующими звездчатый правильный пятиугольник — ***пентаграмму***. Легко видеть, что все треугольники, на которые при этом разбивается пятиугольник, являются золотыми.

Вопросы

1. Что называется гармоническим отношением?
2. Где и когда появился термин «золотое сечение»?
3. Каким числом выражается золотое сечение?
4. Какой прямоугольник называется золотым?
5. Какие треугольники называются золотыми?
6. Что такое пентаграмма?

Задачи

1. Найдите радиус окружности, описанной около правильного десятиугольника со стороной 1.

2. В треугольнике ABC биссектриса BL равна отрезку LC и стороне AB. Найдите периметр данного треугольника, если $AC = b$.

3. На рисунке 48.10 окружность с центром в точке O касается прямой AB в точке B, $2OB = AB$, $AE = AC$. Докажите, что треугольники ABC и ADB подобны. Выведите из этого, что точка E делит отрезок AB в золотом отношении. Укажите способ деления данного отрезка в золотом отношении с помощью циркуля и линейки.

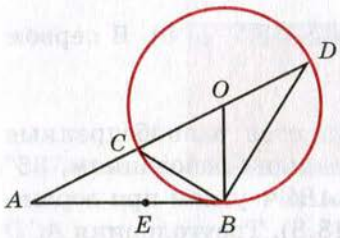


Рис. 48.10

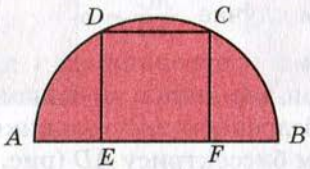


Рис. 48.11

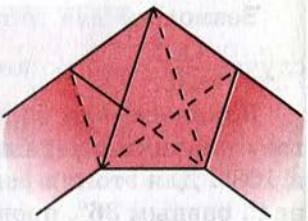


Рис. 48.12

4. Докажите, что каждый следующий виток золотой спирали подобен предыдущему. Найдите коэффициент подобия.
5. Докажите, что общей точкой вращающихся золотых прямоугольников (рис. 48.6, б) является точка пересечения диагоналей BD и EC.
6. Отсекая золотые треугольники аналогично тому, как это было сделано для золотого прямоугольника, постройте последовательность вращающихся золотых треугольников.
7. Соединяя вершины треугольников плавной кривой, нарисуйте золотую спираль.
8. Докажите, что в пентаграмме все треугольники золотые.
9. Сторона правильного пятиугольника равна 1. Найдите его диагональ.
10. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника образуют правильный пятиугольник. Найдите сторону этого пятиугольника, если сторона исходного пятиугольника равна 1.
11. С помощью циркуля и линейки постройте правильный пятиугольник с данной стороной.
12. Катет прямоугольного треугольника равен 1. Найдите его гипотенузу, если угол, противолежащий данному катету, равен: а) 18°; б) 54°.
13. В полукруг с диаметром AB вписан квадрат $CDEF$ (рис. 48.11). Докажите, что отрезок AE и сторона квадрата ED находятся в золотом отношении.
14. Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем расправлена так, чтобы узел стал плоским (рис. 48.12). Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

§49. Теорема Пифагора

Древнегреческий ученый Пифагор доказал замечательное соотношение между сторонами прямоугольного треугольника. Соответствующая теорема носит его имя.

Теорема. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

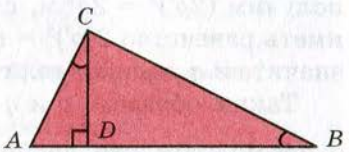


Рис. 49.1

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C (рис. 49.1). Проведем высоту CD. Треугольники ABC и ACD подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot AD = AC^2$. Аналогично треугольники ABC и CBD подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно, $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot BD = BC^2$. Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2. \blacksquare$$

Обозначим стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) соответственно $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Тогда в силу теоремы Пифагора будет иметь место формула

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.}$$

С теоремой Пифагора связано открытие Пифагором несоизмеримых отрезков. Два отрезка называются ***соизмеримыми***, если их отношение является рациональным числом. Иначе говоря, если один из них принять за единичный отрезок, то длина другого будет выражаться рациональным числом. Оказывается, что, как бы мы не выбирали единичный отрезок, всегда найдутся ***несоизмеримые*** с ним отрезки, т. е. такие, длины которых не выражаются рациональными числами.

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с катетами AC и BC, равными единичному отрезку. Докажем, что гипотенуза AB несоизмерима с катетами. Предположим противное, т. е. что она соизмерима с катетами, т. е. ее длина выражается рациональным числом $\frac{p}{q}$. При этом дробь $\frac{p}{q}$ можно предполагать несократимой. Тогда по теореме Пифагора имеет место равенство $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1 + 1 = 2$. Перепишем его в виде

$$p^2 = 2q^2. \qquad (*)$$

Из этого равенства следует, что p^2 должно делиться на 2, значит, и p должно делиться на 2, т. е. $p = 2p'$. Подставляя это выражение в равенство (*),

получим $(2p')^2 = 2q^2$ и, следовательно, $4(p')^2 = 2q^2$. Сокращая на 2, будем иметь равенство $2(p')^2 = q^2$. Из него следует, что q^2 должно делиться на 2, значит, и q должно делиться на 2.

Таким образом, p и q делятся на 2, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{p}{q}$. Полученное противоречие доказывает, что неверным было предположение о том, что гипотенуза соизмерима с катетами. Следовательно, гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника несоизмерима с его катетами.

Исторические сведения

Пифагор (580—500 гг. до н. э.) — один из величайших ученых Древней Греции, а теорема Пифагора — одна из самых красивых в геометрии. Имеется более 500 различных ее доказательств. Простейший случай теоремы Пифагора для треугольника со сторонами 3, 4 и 5 был известен до Пифагора египетским жрецам, а еще ранее — китайским ученым (около 11 000 лет до н. э.). Пифагор, долго живший в Египте, специально изучал науку египетских жрецов и ознакомился с тем, как они строили на земле прямой угол при помощи веревочного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 единиц. Пифагор обратил внимание на замечательное соотношение между числами 3, 4 и 5, а именно: $3^2 + 4^2 = 5^2$, и доказал, что такое соотношение имеет место для сторон произвольного прямоугольного треугольника. Целые числа, представляющие длины сторон прямоугольных треугольников, носят название ***пифагорейских чисел***.

В дальнейшем мы рассмотрим некоторые другие доказательства теоремы Пифагора.

Пример 1. Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 2, 3, 4?

Решение. Нет. Если бы стороны прямоугольного треугольника выражались числами $2x$, $3x$, $4x$, то в силу теоремы Пифагора должно было бы выполняться равенство $4x^2 + 9x^2 = 16x^2$, что неверно.

Пример 2. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 6 см и 8 см.

Решение. Воспользуемся тем, что диагонали ромба перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам. Тогда сторона ромба является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 см и 4 см. Следовательно, она равна 5 см.

Вопросы

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Какие отрезки называются: а) соизмеримыми; б) несоизмеримыми?
3. Приведите примеры несоизмеримых отрезков.
4. Какие тройки целых чисел называются пифагорейскими?

Задачи

○ **1.** У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу c, если: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 1$, $b = 1$; в) $a = 5$, $b = 6$.

○ **2.** У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза c и катет a. Найдите второй катет, если: а) $c = 5$, $a = 3$; б) $c = 13$, $a = 5$; в) $c = 6$, $a = 5$.

○ **3.** Точка, лежащая внутри прямого угла, удалена от его сторон на расстояния, равные a и b. Найдите расстояние от точки до вершины угла.

○ **4.** Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?

○ **5.** Укажите какие-нибудь тройки пифагорейских чисел.

6. Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором: а) гипотенуза равна 10 см, разность катетов — 2 см; б) гипотенуза равна 26 см, а отношение катетов 5 : 12.

7. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 1 больше одного из катетов, а сумма катетов на 4 больше гипотенузы. Найдите стороны этого треугольника.

8. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 опущена высота на гипотенузу. Найдите эту высоту и отрезки, на которые она делит гипотенузу.

9. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 5 м и 12 м.

10. Диагональ квадрата a. Чему равна сторона квадрата?

11. Найдите расстояние между основаниями равнобедренной трапеции, у которой основания 5 м и 11 м, а боковая сторона 4 м.

12. В правильном треугольнике со стороной 1 найдите: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.

13. В равностороннем треугольнике со стороной a найдите радиусы r и R вписанной и описанной окружностей.

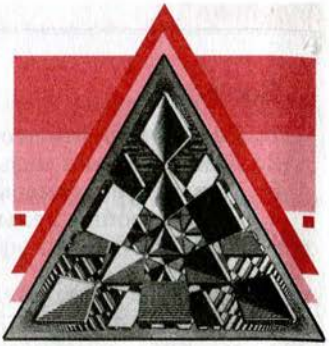
14. Найдите медиану, опущенную на основание равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

* **15.** Даны две окружности радиусов R и r. Расстояние между их центрами равно $a > R + r$. Найдите длины отрезков их общих касательных.

* **16.** Докажите, что верна теорема, обратная к теореме Пифагора: «Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то он прямоугольный».

Глава IX

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ



§50. Тригонометрические функции острого угла

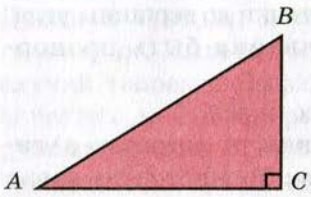


Рис. 50.1

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и его острый угол A (рис. 50.1).

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

Синус угла A обозначается $\sin A$. По определению

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Косинус угла A обозначается $\cos A$. По определению

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему.

Тангенс угла A обозначается $\operatorname{tg} A$. По определению

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему.

Котангенс угла A обозначается $\operatorname{ctg} A$. По определению

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Непосредственно из этих определений следуют равенства:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},\ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Теорема. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника зависят только от угла и не зависят от выбора прямоугольного треугольника, т. е. у двух прямоугольных треугольников с соответственно равными углами значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов равных острых углов совпадают.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника ($\angle C = \angle C_1 = 90°$), у которых $\angle A = \angle A_1$. Тогда эти треугольники подобны (по первому признаку подобия треугольников). Поэтому $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$, $B_1C_1 = k \cdot BC$. Следовательно,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1,$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \operatorname{tg} A_1,$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \operatorname{ctg} A_1.\blacksquare$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс называют ***тригонометрическими функциями острого угла***. Из определения тригонометрических функций следует:

1) катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего угла;
2) катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус прилежащего угла;
3) катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс противолежащего угла;
4) катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс прилежащего угла.

Найдем значения тригонометрических функций угла 45°. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) с углом A, равным 45°. Этот треугольник равнобедренный. Пусть $AC = BC = a$. Тогда по теореме Пифагора $AB^2 = 2a^2$, и, следовательно, $AB = \sqrt{2}a$. Поэтому

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg} 45° = \frac{BC}{AC} = 1,\ \operatorname{ctg} 45° = \frac{AC}{BC} = 1.$$

Найдем значения тригонометрических функций угла 30°. Для этого рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a и проведем в нем биссектрису AD. Тогда треугольник ADB прямоугольный и $\angle DAB = 30°$, $DB = \frac{a}{2}$. Тогда по теореме Пифагора $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и, следовательно,

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}.$$

Первое из этих равенств можно переформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Для тригонометрических функций составлены специальные таблицы. Для вычисления тригонометрических функций применяют также микрокалькуляторы.

Пример 1. Для каких острых углов A выполняется неравенство $\sin A < \cos A$?

Решение. Это неравенство выполняется, когда противолежащий катет меньше прилежащего, и, следовательно, когда угол A меньше 45°.

Пример 2*. Найдите синус угла в 18°.

Решение. Напомним, что равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным 36°, является золотым. Если его боковую сторону принять за 1, то основание будет равно $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Поэтому синус угла в 18° равен $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Вопросы

1. Что называется синусом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Что называется косинусом острого угла прямоугольного треугольника?
3. Что называется тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
4. Что называется котангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
5. Что называется тригонометрическими функциями острого угла?
6. Как связаны между собой гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника?
7. Чему равны тригонометрические функции угла: а) 45°; б) 30°?
8. Чему равен катет, лежащий против угла в 30°?

Задачи

1. Найдите значения тригонометрических функций угла в 60°.
2. Нарисуйте с помощью транспортира углы, равные: а) 24°; б) 40°; в) 75°, и найдите приближенные значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса этих углов.
3. Постройте угол, косинус которого равен: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{9}$; в) 0,5; г) 0,8.
4. Может ли синус (косинус) угла быть равен $\sqrt{2}$?
5. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 5 см. Найдите все тригонометрические функции его меньшего угла A.
6. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 8 см, основание равно 12 см. Найдите синус и косинус угла A при основании треугольника.
7. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а угол при основании 30°. Найдите боковую сторону.
8. В треугольнике ABC угол A равен 60°, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Найдите AC.
9. У прямоугольного треугольника один катет равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен 0,8. Найдите гипотенузу и второй катет.
10. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите угол между диагоналями.
11. В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны 1 и 3. Найдите его острые углы.
12. Найдите углы ромба, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и 2.
13. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите высоту h, опущенную на гипотенузу.

* 14. Найдите синус угла в 54°.

* 15. Найдите косинус угла в 18°.

* 16. Докажите, что для любого острого угла A выполняются неравенства: а) $\sin A < \operatorname{tg} A$; б) $\cos A < \operatorname{ctg} A$.

§ 51. Тригонометрические тождества

Непосредственно из определений тригонометрических функций острого угла следует, что имеют место следующие тождества:

$$\sin(90° - A) = \cos A,\ \cos(90° - A) = \sin A;$$
$$\operatorname{tg}(90° - A) = \operatorname{ctg} A,\ \operatorname{ctg}(90° - A) = \operatorname{tg} A.$$

Теорема. Синус и косинус острого угла связаны между собой основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Доказательство. По определению синуса и косинуса в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) имеем

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, следовательно, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. ■

Основное тригонометрическое тождество позволяет выразить косинус угла через его синус и наоборот, а именно:

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A},\ \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$$

Пример 1. Найдите $\operatorname{tg} A$, если $\cos A = \frac{2}{3}$.

Решение. В этом случае

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ и } \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Пример 2. Докажите тождество $1 + \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$.

Решение. Имеем

$$1 + \operatorname{tg}^2 A = 1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

Вопросы

1. Какие тригонометрические тождества непосредственно следуют из определений тригонометрических функций острого угла?
2. В чем заключается основное тригонометрическое тождество?
3. Как выражаются синус угла через его косинус и, наоборот, косинус угла через его синус?

Задачи

1. Найдите $\sin A$, если: а) $\cos A = \frac{1}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Найдите $\cos A$, если а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

○ **3.** Существует ли угол A, для которого $\sin A = \cos A$?

○ **4.** Могут ли синус и косинус одного угла равняться: а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

5. Докажите, что тангенсы острых углов прямоугольного треугольника взаимно обратны, т. е. их произведение равно единице.

6. Докажите тождество $1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.

7. Найдите $\operatorname{tg} A$, если: а) $\cos A = \frac{5}{13}$; б) $\cos A = 0{,}6$; в) $\sin A = \frac{3}{5}$; г) $\sin A = 0{,}8$.

8. Докажите, что синус большего угла больше, а косинус меньше.

9. Какой из углов больше, A или B, если: а) $\operatorname{tg} A = 2{,}1$, $\operatorname{tg} B = 2{,}5$; б) $\operatorname{tg} A = \frac{8}{3}$, $\operatorname{tg} B = \frac{5}{2}$?

10. Выразите тангенс угла через его косинус.

11. Дан равнобедренный треугольник ABC. Из середины M основания AB опущен перпендикуляр MN на сторону BC. Докажите, что: а) $CN = BC \cos^2 \frac{C}{2}$; б) $BN = BC \sin^2 \frac{C}{2}$.

12. Докажите, что если синусы острых углов равны, то и сами углы равны.

* **13.** Докажите, что углы на рисунке 51.1 равны.

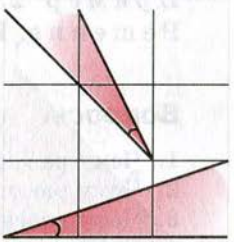


Рис. 51.1

§52. Тригонометрические функции тупого угла

Определим тригонометрические функции углов $90° \leqslant \angle A < 180°$ (рис. 52.1), положив:

$\sin 90° = 1$ и $\sin A = \sin(180° - A)$, если $90° < \angle A < 180°$;
$\cos 90° = 0$ и $\cos A = -\cos(180° - A)$, если $90° < \angle A < 180°$.

Тангенс и котангенс углов определяются как и ранее, а именно:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \angle A \neq 90°; \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Положим также $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

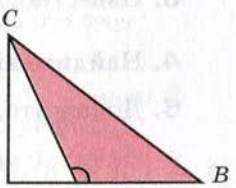


Рис. 52.1

Теорема. Для углов A, $0° < \angle A < 180°$, имеет место основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Доказательство. Для углов, меньших 90°, это тождество было доказано ранее. Если $\angle A = 90°$, то $\sin A = 1$, $\cos A = 0$. Следовательно, требуемое тождество выполняется. Если $90° < \angle A < 180°$, то для $\angle B = 180° - \angle A$ будут выполняться неравенство $0° < \angle B < 90°$ и равенства $\sin A = \sin B$, $\cos A = -\cos B$. Следовательно, $\sin^2 A + \cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 B = 1$. ■

Пример 1. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла в 135°.

Решение. Имеем: $\sin 135° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 135° = \frac{\sin 135°}{\cos 135°} = -1$; $\operatorname{ctg} 135° = \frac{\cos 135°}{\sin 135°} = -1$.

Пример 2. Упростите выражение $(1 - \cos A)(1 + \cos A)$.

Решение. Имеем: $(1 - \cos A)(1 + \cos A) = 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$.

Вопросы

1. Чему равен синус угла в 90°?
2. Чему равен синус угла A в случае $90° < \angle A < 180°$?
3. Чему равен косинус угла в 90°?
4. Чему равен косинус угла A в случае $90° < \angle A < 180°$?
5. В чем заключается основное тригонометрическое тождество для случая $0° < \angle A < 180°$?

Задачи

1. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла: а) 120°; б) 150°.

2. Найдите $\operatorname{tg} A$, если: а) $\cos A = -\frac{1}{2}$; б) $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $90° < \angle A < 180°$.

3. Известно, что $\operatorname{tg} A = -\frac{5}{12}$. Найдите $\sin A$ и $\cos A$.

4. Найдите $\sin A$ и $\cos A$, если $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = \frac{5}{2}$.

5. Докажите, что для острых углов A имеют место равенства

$$\sin(90° + A) = \cos A, \quad \cos(90° + A) = -\sin A.$$

6. Докажите, что тангенсы смежных углов противоположны, т. е. их сумма равна нулю.

7. Докажите, что для углов $90° < \angle A < 180°$ имеют место тождества

$$1 + \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}; \; 1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

8. Упростите выражение: а) $1 - \sin^2 A$; б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$; в) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A \cos^2 A$.

9. Расположите в порядке возрастания тангенсы углов: 70°, 80°, 100°.

10. Расположите в порядке возрастания котангенсы углов: 60°, 110°, 120°.

§53. Теорема косинусов

Следующая теорема является обобщением теоремы Пифагора.

Теорема. (Теорема косинусов.) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

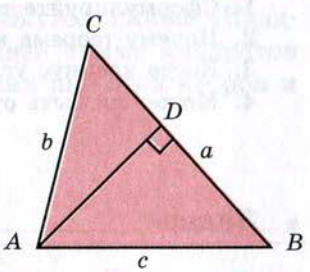


Рис. 53.1

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC с острым углом C (рис. 53.1). Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Из вершины A опустим перпендикуляр AD. Тогда

$$AD = b \sin C, \; CD = b \cos C, \; BD = a - b \cos C.$$

По теореме Пифагора имеем

$$c^2 = (a - b \cos C)^2 + (b \sin C)^2 =$$
$$= a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C + b^2 \sin^2 C =$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Итак, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. ■

Самостоятельно рассмотрите случаи прямого и тупого угла C.

Пример 1. Даны три стороны треугольника $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Найдите косинусы его углов A, B, C.

Решение. По теореме косинусов имеем $2^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos A$, откуда $\cos A = \frac{7}{8}$. Аналогичным образом, $3^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos B$, откуда $\cos B = \frac{11}{16}$; $4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos C$, откуда $\cos C = -\frac{1}{4}$.

Пример 2. Не вычисляя углов треугольника, укажите его вид (относительно углов), если стороны треугольника равны $a = 8$, $b = 10$, $c = 12$.

Решение. По теореме косинусов имеет место равенство $12^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos C$. Откуда $\cos C$ положителен, и, следовательно, угол C острый. Так как против большей стороны в треугольнике лежит больший угол, то остальные два угла этого треугольника и подавно острые.

Вопросы

1. Сформулируйте теорему косинусов.
2. Почему теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора?
3. Когда косинус угла отрицателен?
4. Может ли быть отрицательным: а) синус; б) тангенс; б) котангенс?

Задачи

1. В треугольнике ABC $AB = 12$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 60°$. Найдите третью сторону.
2. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 120°, если прилежащие к нему стороны равны: а) 6 см и 10 см; б) 14 мм и 16 мм.
3. При каких значениях угла A квадрат стороны треугольника, лежащей против этого угла: а) меньше суммы квадратов двух других сторон; б) равен сумме квадратов двух других сторон; в) больше суммы квадратов двух других сторон?
4. Не вычисляя углов треугольника, укажите его вид (относительно углов), если стороны треугольника равны: а) 7, 8, 12; б) 0,3, 0,4, 0,5; в) 13, 14, 15.
5. Как расположен центр описанной окружности относительно треугольника, стороны которого равны: а) 6, 8, 10; б) 4, 5, 6; в) 3, 4, 6?
6. Стороны треугольника 5 м, 6 м и 7 м. Найдите косинусы его углов.
7. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними φ. Найдите стороны параллелограмма.

8. Даны стороны параллелограмма a и b и один из его углов ψ. Найдите диагонали параллелограмма.

9. Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 м и 5 м на третью сторону.

* **10.** Стороны треугольника равны a, b и c. Угол C, противолежащий стороне c, равен 120°. Докажите, что выполняется равенство $c^2 = a^2 + ab + b^2$.

* **11.** Докажите, что если для сторон треугольника выполняется равенство $(b + c + a)(b + c - a) = 3bc$, то угол A, лежащий против стороны a, равен 60°.

* **12.** Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

13. Стороны параллелограмма равны 30 мм и 35 мм, одна диагональ 55 мм. Найдите другую диагональ.

* **14.** Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите медиану, проведенную к стороне c.

* **15.** Докажите аналог теоремы косинусов для четырехугольников: «Квадрат стороны выпуклого четырехугольника равен сумме квадратов трех других сторон без удвоенного произведения пар этих сторон и косинусов углов между ними».

§54. Теорема синусов

Теорема. (Теорема синусов.) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Причем отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около треугольника окружности.

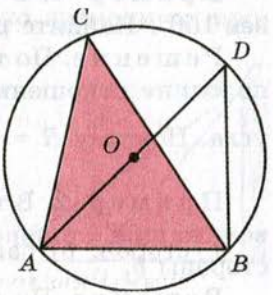


Рис. 54.1

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 54.1). Опишем около него окружность с центром O и радиусом R. Рассмотрим треугольник ABD, сторона AD которого проходит через O. Тогда углы C и D опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны. Угол ABD опирается на половину окружности и, следовательно, равен 90°. Таким образом, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = AD = 2R$. Аналогично имеют место равенства $\frac{BC}{\sin A} = 2R = \frac{AC}{\sin B}$.

Итак, имеем равенства

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R,$$

означающие, что стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов и их отношения равны диаметру описанной окружности. ■

Теорема синусов позволяет по известным углам и одной стороне треугольника найти две другие его стороны.

Действительно, пусть в треугольнике ABC известна сторона AB и углы A, B и C. Тогда стороны AC и BC выражаются формулами:

$$AC = AB \cdot \frac{\sin B}{\sin C}, \quad BC = AB \cdot \frac{\sin A}{\sin C}.$$

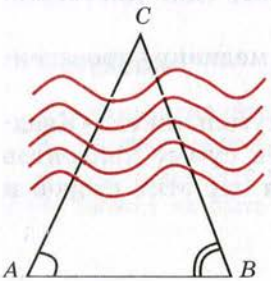


Рис. 54.2

С помощью теоремы синусов решаются практические задачи нахождения расстояний до недоступных предметов. Пусть требуется определить расстояние от данного пункта A до недоступного пункта C, т. е. такого, для которого нельзя произвести непосредственное измерение расстояния AC. В этом случае берут еще один пункт B и измеряют расстояние AB и углы A и B в треугольнике ABC (рис. 54.2). Затем, используя приведенные выше формулы, находят расстояние AC.

Пример 1. В треугольнике ABC сторона AB равна 4 см, угол C равен 150°. Найдите радиус описанной окружности.

Решение. По теореме синусов радиус R описанной окружности равен половине отношения стороны треугольника к синусу противолежащего угла. Поэтому $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sin 150^\circ} = 4$ (см).

Пример 2. В треугольнике даны две стороны $a = 3$, $b = 3\sqrt{2}$ и противолежащий стороне a угол $A = 30^\circ$. Найдите угол B, лежащий против стороны b.

Решение. По теореме синусов $3\sqrt{2} : \sin B = 3 : \sin A$. Откуда находим $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и, следовательно, угол B равен 45° или 135°.

Вопросы

1. Сформулируйте теорему синусов.
2. Как выражаются стороны треугольника через известную сторону и его углы?
3. Какую практическую задачу позволяет решить теорема синусов?

Задачи

○ **1.** Стороны треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите отношения синусов углов этого треугольника.

○ **2.** Синусы углов треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Как относятся его стороны? Какой это треугольник?

3. Найдите отношения сторон AC : BC и AB : BC в треугольнике ABC, в котором: а) $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$; б) $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$.

4. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 120°$. Найдите сторону BC.

5. Сторона AB треугольника ABC равна 10 см. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если противолежащий этой стороне угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°.

6. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3 см. Найдите сторону AB этого треугольника, если противолежащий ей угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°.

7. Диагональ параллелограмма равна c и образует со сторонами этого параллелограмма углы φ и ψ. Выразите стороны параллелограмма через c, φ и ψ.

8. Углы треугольника относятся как 1 : 2 : 3. Найдите отношение сторон.

9. Спортивный самолет летит по замкнутому треугольному маршруту с постоянной скоростью. Два угла этого треугольника равны по 30°. Бóльшую сторону он пролетел за 1 ч. За сколько времени он пролетит весь маршрут?

10. Используя рисунок 54.3, укажите способ нахождения высоты недоступного предмета.

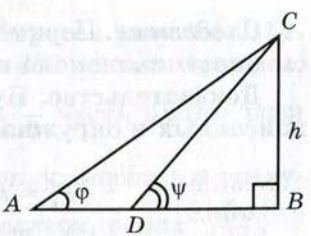


Рис. 54.3

* **11.** Докажите, используя теорему синусов, что биссектриса угла треугольника делит его противоположные стороны на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

* **12.** В треугольнике ABC проведена медиана CD. Докажите, что $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \angle DCB}{\sin \angle DCA}$.

* **13.** Докажите, что для произвольного треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ имеет место формула: $c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$.

* **14.** Докажите, что для произвольного треугольника ABC имеет место формула: $\sin C = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$.

§ 55. Длина окружности

Для нахождения длины окружности рассмотрим правильные многоугольники, вписанные в эту окружность. При увеличении числа сторон многоугольники приближаются к окружности. Поэтому длиной окружности считают число, к которому стремятся периметры правильных вписанных в эту окружность многоугольников при увеличении числа их сторон.

Теорема. Периметр P_n правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, выражается формулой

$$P_n = n \cdot 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

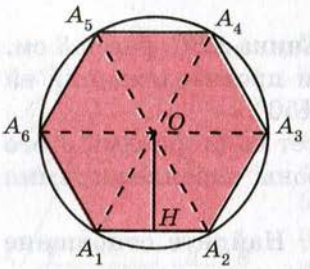


Рис. 55.1

Доказательство. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — правильный n-угольник, вписанный в окружность с центром в точке O и радиусом R (на рисунке 55.1 $n = 6$). Треугольник A_1OA_2 — равнобедренный, $OA_1 = OA_2 = R$. Проведем в нем высоту OH, которая одновременно будет биссектрисой и медианой. Угол A_1OH равен половине угла A_1OA_2, равного $\frac{360^\circ}{n}$. Следовательно, $A_1H = R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$, и, значит, $A_1A_2 = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$. Умножая это значение на n, получаем периметр правильного n-угольника $P_n = n \cdot 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$. ■

Следствие. Периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных около них окружностей.

Доказательство. Пусть P'_n, P''_n — периметры правильных n-угольников, вписанных в окружности радиусов R' и R'' соответственно. Тогда

$$P'_n = n \cdot 2R' \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P''_n = n \cdot 2R'' \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно, $\frac{P'_n}{P''_n} = \frac{R'}{R''}$. ■

Теорема. Отношение длин двух окружностей равно отношению их радиусов.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы дадим только набросок доказательства. Рассмотрим окружности радиусов R', R'' и вписанные в них правильные многоугольники. При увеличении числа сторон периметры правильных многоугольников

приближаются к длинам соответствующих окружностей. Поскольку отношение этих периметров постоянно и равно $\frac{R'}{R''}$, то и отношение чисел, к которым стремятся эти периметры, т. е. отношение длин окружностей, также будет равно $\frac{R'}{R''}$.

Половина длины окружности единичного радиуса обозначается греческой буквой π. Таким образом, длина окружности единичного радиуса равна 2π. Из рассмотренной выше теоремы следует, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Таким образом, для длины C окружности радиуса R можем записать следующую формулу

$$\boxed{C = 2\pi R.}$$

Для приближенного вычисления числа π в единичную окружность вписывают правильный многоугольник и находят его полупериметр. Чем больше число сторон вписанного многоугольника, тем более точное значение получается для числа π.

Вопрос о вычислении длины окружности и числа π занимал умы ученых на протяжении тысячелетий. Первое вычисление числа π, использующее строгие рассуждения, было сделано величайшим математиком древности Архимедом (287—212 гг. до н. э.). В своей работе «Об измерении круга» он доказал, что для числа π выполняются неравенства

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

На практике приближенное значение числа π берется равным 3,14. Центральные углы в 1° разбивают всю окружность на 360 равных секторов. Поэтому длина дуги окружности в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть длины всей окружности, т. е. равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Длина l дуги окружности в φ градусов, т. е. ограничивающая центральный угол в φ градусов, равна $\frac{\pi R\varphi}{180}$.

Равенство $l = \frac{\pi\varphi}{180}$, выражающее длину дуги единичной окружности, устанавливает соответствие между длиной дуги и ее градусной мерой. Это позволяет измерять углы не только с помощью градусов, но и с помощью длины дуги соответствующей окружности единичного радиуса. Величина длины дуги называется ***радианной мерой угла***. Единицей радианной меры углов является ***радиан***. Угол в один радиан — это угол, длина соответствующей дуги единичной окружности которого равна единице.

Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

Пример. Чему равна длина окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1?

Решение. Радиус описанной окружности равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$, значит, длина окружности равна $2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вопросы

1. Что считается длиной окружности?
2. Как выражается периметр правильного n-угольника через радиус описанной окружности?
3. Как относятся периметры двух правильных n-угольников?
4. Как относятся длины двух окружностей?
5. Что обозначает греческая буква π?
6. Чему равна длина окружности радиуса R?
7. Какие неравенства выполняются для числа π?
8. Каково приближенное значение числа π?
9. Чему равна длина дуги в 1° окружности радиуса R?
10. Чему равна длина дуги в φ градусов окружности радиуса R?
11. Чему равна градусная мера угла в один радиан?

Задачи

○ **1.** Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его углы равны: а) 90°; б) 135°; в) 150°?

○ **2.** Найдите периметры правильных: а) треугольника; б) четырехугольника; в) шестиугольника, вписанных в единичную окружность.

○ **3.** Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в три раза; б) уменьшить в два раза?

○ **4.** Найдите длину окружности, описанной около квадрата со стороной a.

5. Найдите длину дуги окружности радиуса 1, соответствующей центральному углу в: а) 30°; б) 135°; в) 240°; г) 315°.

6. Каким должен быть радиус окружности, в которой дуга в 1° имеет длину 1 м?

7. Какой длины должна быть хорда в окружности радиуса R, чтобы длины дуг, на которые она разбивает окружность, относились как 2 : 1?

8. Найдите периметр правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса R.

9. Докажите, что периметры правильных n-угольников относятся как радиусы вписанных в них окружностей.

10. Рассмотрев правильные шестиугольники, вписанный и описанный около окружности единичного радиуса, найдите нижнюю и верхнюю оценки для числа π.

11. Внутри окружности радиуса R расположены три равные окружности, которые касаются друг друга и данной окружности. Найдите их радиус.

12. Найдите радианную меру углов в: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

13. Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{8}$; г) $\frac{5\pi}{6}$; д) $\frac{7\pi}{18}$; е) $\frac{4\pi}{3}$.

* **14.** Найдите радиус земного шара, исходя из того, что 1 м составляет одну сорокамиллионную долю длины экватора.

* **15.** Вообразите, что земной шар плотно обтянут по экватору веревкой. На сколько нужно увеличить длину веревки, чтобы ее можно было поднять над поверхностью Земли по всей длине на расстояние 1 м?

§56*. Циклоидальные кривые

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки. Кривая, которая получается как траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся без скольжения по прямой, по окружности или другой кривой, называется ***циклоидальной***, что в переводе с греческого языка означает «кругообразная, напоминающая о круге».

Рассмотрим сначала случай, когда окружность катится по прямой. Кривая, которую описывает точка, закрепленная на окружности, катящейся без скольжения по прямой линии, называется ***циклоидой***.

Пусть окружность радиуса R катится по прямой a. C — точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находящаяся в положении A (рис. 56.1). Отложим на прямой a отрезок AB, равный длине окружности, т. е. $AB = 2\pi R$. Разделим этот отрезок на 8 равных частей точками A_1, A_2, ..., $A_8 = B$.

Ясно, что когда окружность, катясь по прямой a, сделает один оборот, т. е. повернется на 360°, то она займет положение (8), а точка C переместится из положения A в положение B.

Если окружность сделает половину полного оборота, т. е. повернется на 180°, то она займет положение (4), а точка C переместится в самое верхнее положение C_4.

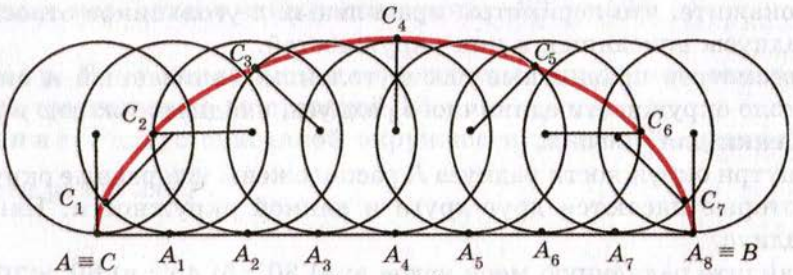


Рис. 56.1

Если окружность повернется на угол 45°, то окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1.

На рисунке 56.1 показаны также другие точки циклоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим участок циклоиды, соответствующий одному полному обороту окружности. При следующих оборотах будут получаться такие же участки, т. е. циклоида будет состоять из периодически повторяющегося участка, называемого аркой циклоиды.

Обратим внимание на положение касательной к циклоиде (рис. 56.2). Если велосипедист едет по мокрой дороге, то оторвавшиеся от колеса капли будут лететь по касательной к циклоиде и при отсутствии щитков могут забрызгать спину велосипедиста.

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564—1642). Он же придумал и ее название.

Циклоида обладает целым рядом замечательных свойств. Упомянем о некоторых из них.

Свойство 1. (Ледяная гора.) В 1696 году И. Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или, иначе говоря, задачу о том, какова должна быть форма ледяной горки, чтобы, скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время (рис. 56.3, а). Искомую кривую назвали «брахистохроной», т. е. кривой кратчайшего времени.

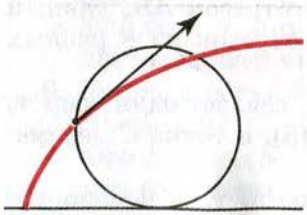


Рис. 56.2

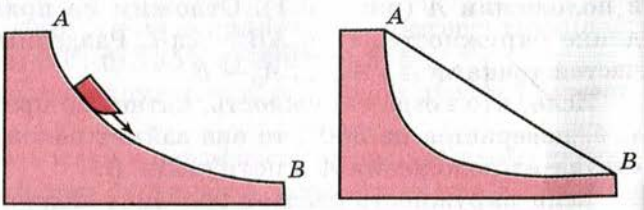


Рис. 56.3

Ясно, что кратчайшим путем из точки A в точку B является отрезок AB. Однако при таком прямолинейном движении скорость набирается медленно и затраченное на спуск время оказывается бóльшим (рис. 56.3, б).

Скорость набирается тем быстрее, чем круче спуск. Однако при крутом спуске удлиняется путь по кривой и тем самым увеличивается время его прохождения.

Среди математиков, решавших эту задачу, были: Г. Лейбниц, И. Ньютон, Г. Лопиталь и Я. Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является перевернутая циклоида (рис. 56.3, а). Методы, развитые этими учеными при решении задачи о брахистохроне, положили начало новому направлению математики — вариационному исчислению.

Свойство 2. (Часы с маятником.) Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды: чем больше амплитуда, тем больше период. Голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629—1695) задался вопросом, по какой кривой должен двигаться шарик на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды. Заметим, что в обычном маятнике кривой, по которой движется шарик, является окружность (рис. 56.4).

Искомой кривой оказалась перевернутая циклоида. Если, например, в форме перевернутой циклоиды изготовить желоб и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды (рис. 56.5). За это свойство циклоиду называют также «таутохрона» — кривая равных времен.

Гюйгенс изготовил две деревянные дощечки с краями в форме циклоиды, ограничивающие движение нити слева и справа (рис. 56.6). При этом сам шарик будет двигаться по перевернутой циклоиде и, таким образом, период его колебаний не будет зависеть от амплитуды.

Из этого свойства циклоиды, в частности, следует, что независимо от того, с какого места ледяной горки в форме перевернутой циклоиды мы начнем спуск, на весь путь до конечной точки мы затратим одно и то же время.

Пусть теперь окружность катится без скольжения не по прямой, а по окружности с внешней стороны. В зависимости от соотношения между

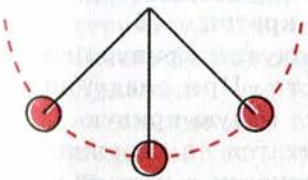


Рис. 56.4

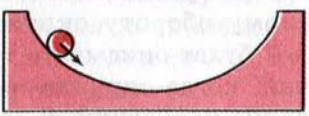


Рис. 56.5

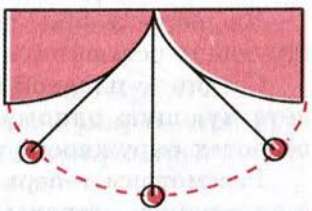


Рис. 56.6

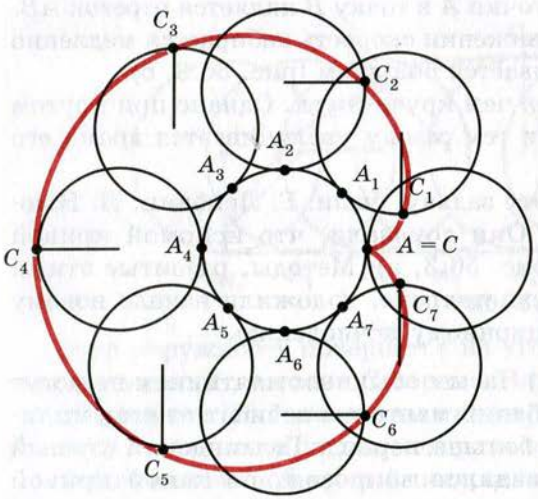


Рис. 56.7

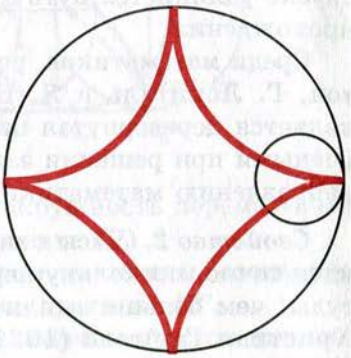


Рис. 56.8

радиусами неподвижной и катящейся окружности будут получаться различные кривые. Рассмотрим некоторые из них.

Кривая, которая получается как траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности того же радиуса, называется ***кардиоидой***.

Построим некоторые точки этой кривой. Пусть C — точка, закрепленная на окружности — в начальный момент времени находилась в положении A (рис. 56.7). Разделим неподвижную окружность на 8 равных частей точками A_1, A_2, ..., $A_8 = A$.

Ясно, что когда окружность сделает один оборот, т. е. повернется на 360°, она займет исходное положение вместе с точкой C.

Если окружность сделает половину полного оборота, т. е. повернется на 180°, то она займет положение (4), а точка C переместится в положение C_4.

Если окружность повернется на угол 45°, то окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1.

На рисунке 56.7 показаны также другие точки кардиоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим кривую, соответствующую одному полному обороту окружности. При следующих оборотах окружности точка C будет описывать ту же самую кривую.

Рассмотрим теперь случай, когда окружность катится по окружности с внутренней стороны и радиус неподвижной окружности в четыре раза больше радиуса катящейся окружности. Получаемая при этом траектория

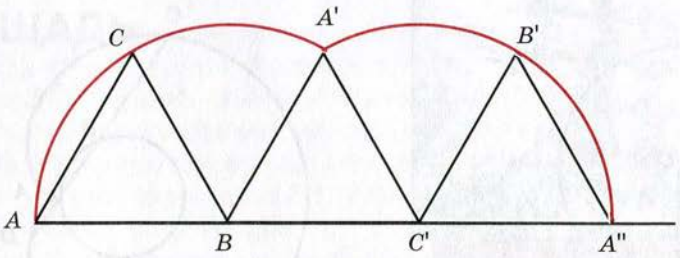


Рис. 56.9

движения точки, закрепленной на катящейся окружности, называется *астроидой* (рис. 56.8).

Пример. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного треугольника со стороной 1, катящегося по прямой аналогично окружности.

Решение. Пусть правильный треугольник ABC со стороной 1 расположен на прямой, как показано на рисунке 56.9. Выясним, какую траекторию будет описывать вершина A. Сначала вершина A описывает дугу окружности величиной 120° с центром в B и радиусом 1 и занимает самое верхнее положение A'. После этого поворот производится вокруг точки C', и точка A описывает дугу $A'A''$. Далее все повторяется сначала. Таким образом, искомая траектория будет состоять из дуг единичной окружности величиной 120°.

Вопросы

1. В чем состоит кинематический способ получения кривой?
2. Какая кривая называется циклоидой?
3. Кто первым стал изучать циклоиду?
4. Перечислите свойства циклоиды.
5. Какая кривая называется кардиоидой?
6. Какая кривая называется астроидой?

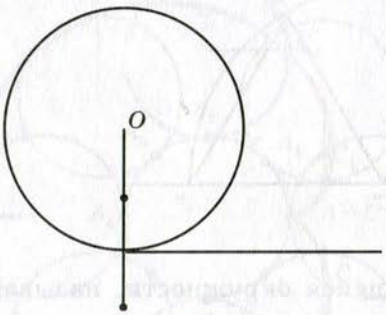
Задачи

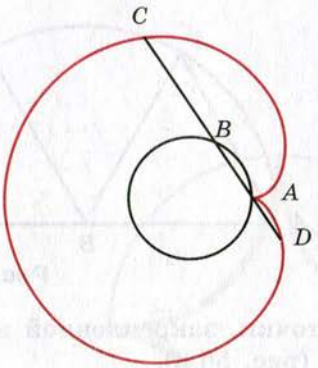
1. Окружность радиуса 2 см катится по прямой. Нарисуйте соответствующую циклоиду.

2. Имеет ли циклоида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?

3. Докажите, что касательная к циклоиде перпендикулярна отрезку, соединяющему точку касания и точку соприкосновения окружности с прямой, по которой она катится.

4. Предположим, что круг без скольжения катится по прямой. Как мы знаем, точки на его окружности будут описывать циклоиды.





Нарисуйте кривую, которую будет описывать: а) точка A, закрепленная внутри круга; б) точка B, закрепленная вне круга (рис. 56.10).

5. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного n-угольника, катящегося по прямой аналогично окружности при: а) $n = 4$; б) $n = 6$.

6. Окружность радиуса 2 см катится с внешней стороны по другой окружности того же радиуса. Нарисуйте соответствующую кардиоиду.

7. Имеет ли кардиоида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?

8. Докажите, что кардиоида обладает следующим свойством: если провести произвольную прямую через точку A (рис. 56.11) и от точки B ее пересечения с неподвижной окружностью отложить в обе стороны отрезки, равные диаметру окружности, то концы этих отрезков C и D будут принадлежать кардиоиде.

9. Окружность радиуса 1 см катится с внутренней стороны по другой окружности радиуса 4 см. Нарисуйте соответствующую астроиду.

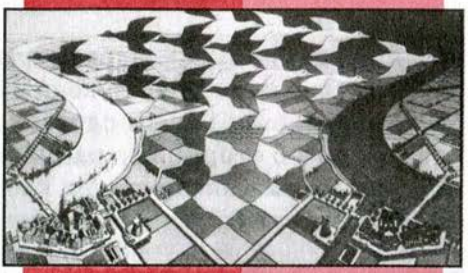
10. Имеет ли астроида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?

11. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закрепленной на окружности радиуса 2 см, катящейся с внешней стороны по окружности радиуса: а) 4 см; б) 5 см; в) 1 см.

12. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закрепленной на окружности радиуса 2 см, катящейся с внутренней стороны по окружности радиуса: а) 6 см; б) 5 см; в) 4 см.

Глава X

ПЛОЩАДЬ



§57. Измерение площадей. Площадь прямоугольника

Измерение площади фигуры, как и измерение длины отрезка, основано на сравнении этой фигуры с фигурой, площадь которой принимается за единицу.

За единицу измерения площади принимается квадрат со стороной, равной единице измерения длины. Он называется ***единичным квадратом***. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой квадрат называется квадратным миллиметром, квадратным сантиметром или квадратным метром соответственно.

Так же как и единичный отрезок, единичный квадрат можно разбивать на равные части. Например, его можно разбить на 100 равных квадратов со стороной, равной одной десятой единичного отрезка (рис. 57.1). Площадь каждого такого маленького квадрата считается равной одной сотой. Единичный квадрат можно разбить на 10 000 равных квадратов со стороной, равной одной сотой единичного отрезка. Площадь каждого такого маленького квадрата считается равной одной десятитысячной и т. д.

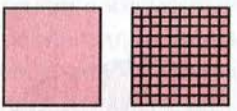


Рис. 57.1

Для измерения площади фигуры Φ рассмотрим сетку на плоскости, составленную из единичных квадратов и покрывающую фигуру Φ (рис. 57.2). Выясним, сколько единичных квадратов этой сетки целиком содержится в фигуре Φ. Если единичный квадрат укладывается n раз без остатка, то процесс измерения на этом заканчивается и полученное число n считается площадью фигуры Φ.

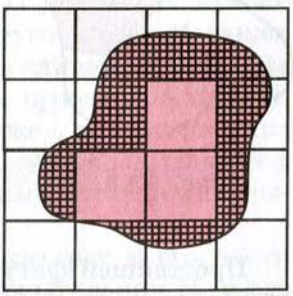


Рис. 57.2

Если единичный квадрат укладывается в фигуре Φ с остатком Φ', то число n считается приближенным значением площади. (На рисунке 57.2 число n равно 3.) В этом случае единичные квадраты разбиваются на 100 квадратов со стороной, равной одной десятой единичного отрезка. Подсчитывается число m этих квадратов, целиком содержащихся в остатке Φ'. (На рисунке 57.2 число m равно 368.) Если при этом квадраты укладываются в фигуре Φ' без остатка, то процесс измерения считается законченным и число $n + m \cdot 0{,}01$ считается площадью фигуры Φ.

Если квадраты укладываются в фигуре Φ' с остатком Φ'', то единичные квадраты разбиваются на 10 000 квадратов со стороной, равной одной сотой единичного отрезка, и повторяется описанная процедура измерения.

В результате процесс измерения площади может на некотором шаге закончиться. В этом случае площадь фигуры будет выражаться конечной десятичной дробью. Однако может случиться, что процесс измерения не закончится ни на каком шаге. В этом случае площадь фигуры может выражаться бесконечной десятичной дробью.

Можно сказать, что ***площадь фигуры*** — это число, получающееся в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре.

Две фигуры называются ***равновеликими***, если они имеют одинаковую площадь.

Площадь фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после этого числа указывают единицу измерения площади. Например, S мм^2, S см^2, S м^2.

Можно доказать, что для площадей плоских фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам длин отрезков.

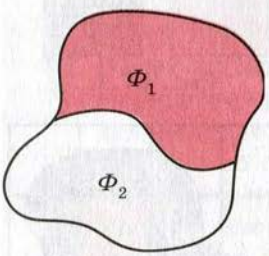


Рис. 57.3

Свойство 1. Равные фигуры имеют равные площади.

Свойство 2. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2 (рис. 57.3), то площадь фигуры Φ равна сумме площадей фигур Φ_1 и Φ_2, т. е. $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$.

Из этих свойств, в частности, следует, что если фигура Φ разбита на n равных неперекрывающихся частей, то площадь каждой части равна одной n-ой площади всей фигуры Φ.

Простейшей фигурой с точки зрения вычисления площади является прямоугольник.

Теорема. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

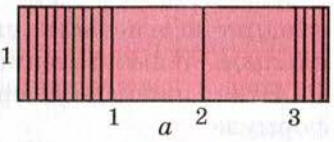


Рис. 57.4

Действительно, рассмотрим сначала случай прямоугольника Π_1, у которого одна из смежных сторон равна 1, а другая равна a (рис. 57.4). Пусть a представляется десятичной дробью $a = n,m\ldots$. Заметим, что разбиению единичного отрезка на равные части соответствует разбиение единичного квадрата на такое же число равных частей в форме прямоугольников. Откладывая на стороне прямоугольника Π_1 единичный отрезок и его части, будем одновременно откладывать в прямоугольнике Π_1 единичный квадрат и его части. Если единичный отрезок целиком укладывается в стороне прямоугольника n раз, то и единичный квадрат будет целиком укладываться в прямоугольнике n раз (на рисунке 57.4 $n = 3$), если одна десятая часть единичного отрезка укладывается в остатке m раз, то и одна десятая часть единичного квадрата будет укладываться в остатке прямоугольника m раз (на рисунке 57.4 $m = 3$) и т. д. Значит, единичный квадрат и его части укладываются в прямоугольнике столько же раз, сколько единичный отрезок укладывается в его стороне, т. е. a раз. Следовательно, площадь этого прямоугольника равна a.

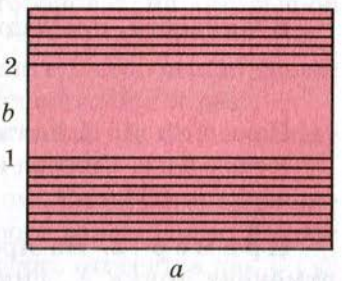


Рис. 57.5

Рассмотрим теперь случай прямоугольника П со смежными сторонами a и b (рис. 57.5). Пусть b представляется десятичной дробью $b = p,q\ldots$. Заметим, что разбиению единичного отрезка на равные части соответствует разбиение прямоугольника Π_1 со сторонами 1 и a на такое же число равных частей в форме прямоугольников. Откладывая на стороне прямоугольника П единичный отрезок и его части, будем одновременно откладывать в прямоугольнике П прямоугольник Π_1 и его части. Если единичный отрезок целиком укладывается в стороне прямоугольника П p раз, то прямоугольник Π_1 будет целиком укладываться в прямоугольнике П также p раз (на рисунке 57.5 $p = 2$), если одна десятая часть единичного отрезка укладывается в остатке q раз, то одна десятая часть прямоугольника Π_1 будет укладываться в остатке прямоугольника П также q раз (на рисунке 57.5 $q = 6$) и т. д. Значит, прямоугольник Π_1 и его части укладываются в прямоугольнике П столько же раз, сколько единичный отрезок укладывается в его стороне, т. е. b раз.

Таким образом, мы получили, что единичный квадрат и его части укладываются в прямоугольнике Π_1 a раз, а сам прямоугольник Π_1 и его части укладываются в прямоугольнике П b раз. Следовательно, единичный

квадрат и его части укладываются в прямоугольнике П ab раз, т. е. площадь прямоугольника П равна ab. ■

Итак, площадь S прямоугольника со сторонами a, b вычисляется по формуле

$$S = ab.$$

В частности, площадь квадрата со стороной a вычисляется по формуле

$$S = a^2.$$

Пример 1. Найдите площадь квадрата, если его периметр равен 80 см.

Решение. Сторона квадрата равна $80 : 4 = 20$ (см). Поэтому его площадь равна $20^2 = 400$ (см^2).

Пример 2. На продолжении стороны BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка E, симметричная точке B относительно вершины C (рис. 57.6). Докажите, что площадь треугольника ABE равна площади прямоугольника $ABCD$.

Решение. Пусть F — точка пересечения AE и CD. Треугольники ADF и ECF равны (по катету и острому углу). Прямоугольник $ABCD$ составлен из трапеции $ABCF$ и треугольника ADF. Треугольник ABE составлен из той же трапеции $ABCF$ и треугольника ECF, равного ADF. Таким образом, данные прямоугольник и треугольник составлены из соответственно равных фигур и, следовательно, равны их площади.

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения площади?
2. Что такое площадь фигуры?
3. Как измеряется площадь фигуры?
4. Сформулируйте свойства площади.
5. Какие фигуры называются равновеликими?
6. Сформулируйте теорему о площади прямоугольника.

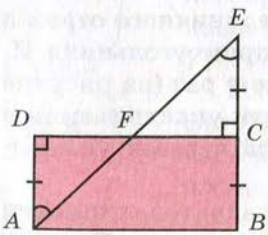


Рис. 57.6

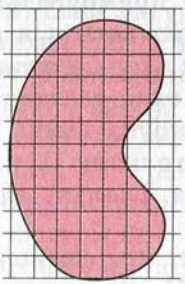


Рис. 57.7

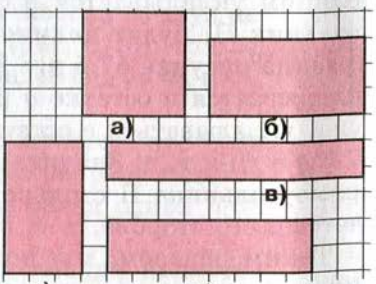


Рис. 57.8

Задачи

1. Сколько единичных квадратов целиком укладываются в фигуре, изображенной на рисунке 57.7?

2. На рисунке 57.8 укажите равновеликие фигуры.

3. Какую площадь имеют части квадрата со стороной a, на которые он разбивается своими диагоналями?

4. Как изменится площадь прямоугольника, если его стороны: а) увеличатся в 2 раза; б) уменьшатся в 3 раза; в) изменятся в k раз?

5. Докажите, что если фигура Φ' содержится в фигуре Φ'', то имеет место неравенство $S(\Phi') \leqslant S(\Phi'')$.

6. Стороны прямоугольника равны 12 см и 3 см. Нарисуйте: а) равновеликий ему прямоугольник, сторона которого равна 10 см; б) равновеликий ему прямоугольник, стороны которого относятся как 3 : 4; в) равновеликий ему квадрат.

7. Нарисуйте три прямоугольника, площади которых были бы равны 48 см^2, а стороны — 5 см, 8 см, 10 см.

8. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 72 см^2, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.

9. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м^2.

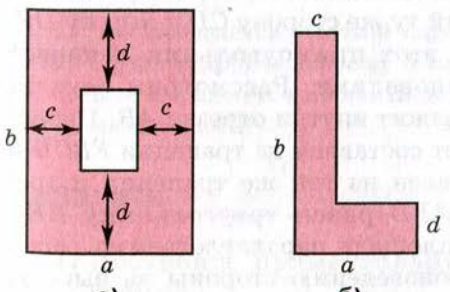
10. Найдите площади фигур, изображенных на рисунке 57.9.

11. Найдите площадь S квадрата по его диагонали a.

12. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 8 м и 18 м.

13. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?

14. Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе (рис. 57.10).



а) б) в)

Рис. 57.9

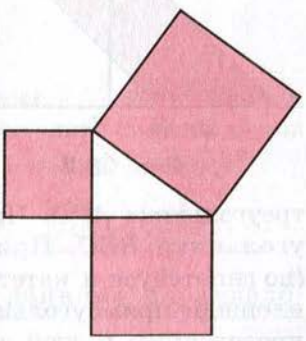


Рис. 57.10

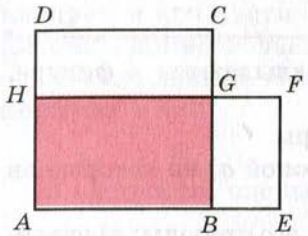


Рис. 57.11

* **15.** На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ABE так, что его стороны AE и BE пересекают отрезок CD в точках M и N, причем точка M — середина отрезка AE. Докажите, что прямоугольник $ABCD$ и треугольник ABE равновелики.

* **16.** Используя рисунок 57.11, докажите, что площадь прямоугольника меньше площади квадрата с тем же периметром. Выведите из этого, что среднее геометрическое ($\sqrt{ab}$) двух положительных чисел a и b не превосходит их среднего арифметического $\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

* **17.** Постройте квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

* **18.** Докажите, что из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

§58. Площадь параллелограмма

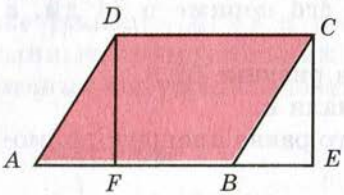


Рис. 58.1

Пусть $ABCD$ — параллелограмм. ***Высотой параллелограмма*** называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одной стороны на противоположную сторону или ее продолжение. На рисунке 58.1 CE и DF — высоты параллелограмма $ABCD$.

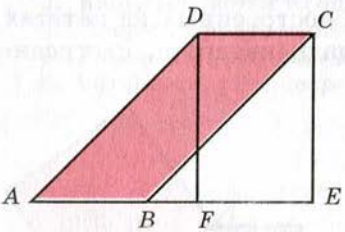


Рис. 58.2

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Доказательство. Пусть дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 58.1). Построим прямоугольник $FECD$, имеющий ту же сторону CD и высоту DF. Докажем, что этот прямоугольник и параллелограмм равновелики. Рассмотрим случай, когда точка F лежит внутри отрезка AB. Параллелограмм будет составлен из трапеции $FBCD$ и треугольника AFD. Прямоугольник составлен из той же трапеции и треугольника BEC. Причем треугольник AFD равен треугольнику BEC (по гипотенузе и катету). Следовательно, площадь параллелограмма равна площади прямоугольника, т. е. равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне. Самостоятельно рассмотрите случай, когда точка F лежит вне отрезка AB (рис. 58.2). ■

Итак, площадь S параллелограмма со стороной a и высотой h, проведенной к ней, вычисляется по формуле

$$S = a \cdot h.$$

Следствие. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

Доказательство. Высота DF параллелограмма $ABCD$ равна стороне AD, умноженной на синус угла A. Значит, площадь S параллелограмма выражается формулой

$$S = a \cdot b \cdot \sin \varphi,$$

где a, b — смежные стороны параллелограмма, φ — угол между ними. ■

Пример 1. Стороны параллелограмма равны 15 см и 9 см. Высота, опущенная на первую сторону, равна 6 см. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

Решение. Площадь S параллелограмма равна $15 \cdot 6 = 90$ (см^2). С другой стороны, $S = 9 \cdot h$. Следовательно, искомая высота h равна $90 : 9 = 10$ (см).

Пример 2. Соседние стороны параллелограмма равны a и b. Какой угол должен быть между ними, чтобы площадь параллелограмма была наибольшей?

Решение. В случае, когда угол между соседними сторонами острый или тупой, высота h, опущенная на сторону a, меньше b, и, следовательно, площадь параллелограмма меньше $a \cdot b$. Если этот угол прямой, то высота равна b, и, следовательно, площадь параллелограмма равна $a \cdot b$. Таким образом, параллелограмм со сторонами a и b имеет наибольшую площадь в случае, если угол между этими сторонами равен 90°, т. е. параллелограмм является прямоугольником.

Вопросы

1. Что называется высотой параллелограмма?
2. Сформулируйте теорему о площади параллелограмма.
3. Как выражается площадь параллелограмма через соседние стороны и угол между ними?

Задачи

1. Постройте прямоугольник, равновеликий данному параллелограмму.

2. На рисунке 58.3 укажите равновеликие параллелограммы.

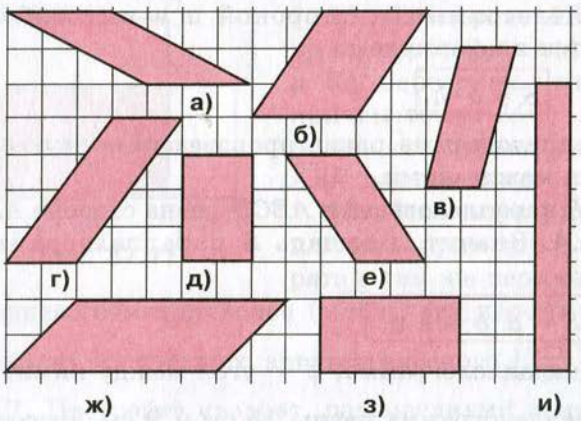


Рис. 58.3

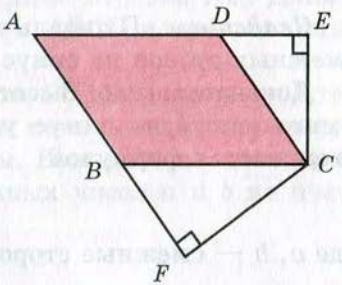


Рис. 58.4

○ **3.** Может ли площадь параллелограмма равняться одному квадратному метру, если длина каждой из его сторон меньше одного метра?

4. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 58.4) CF и CE — высоты. Докажите, что $AB \cdot CF = AD \cdot CE$.

5. Площадь параллелограмма равна 40 см^2, стороны — 5 см и 10 см. Найдите высоты этого параллелограмма.

6. Стороны параллелограмма равны 6 см и 4 см. Одна из высот равна 5 см. Найдите другую высоту. Сколько решений имеет эта задача?

7. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 4 см и 5 см, а угол между ними равен 30°.

8. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 10 см, а один из углов равен 150°.

9. Найдите площадь ромба, если его углы относятся как 1 : 5, а сторона равна a.

10. Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

11. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны. Какая из этих фигур имеет бóльшую площадь? Почему?

12. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Сравните их площади.

13. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

* **14.** Найдите площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

* **15.** Найдите геометрическое место вершин параллелограммов, равновеликих данному и имеющих с ним одну общую сторону.

* **16.** Докажите, что любая прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма, делит его на две равновеликие части.

* **17.** В параллелограмме вырезали дырку прямоугольной формы. Проведите прямую, делящую оставшуюся часть параллелограмма на две равновеликие части.

§59. Площадь треугольника

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

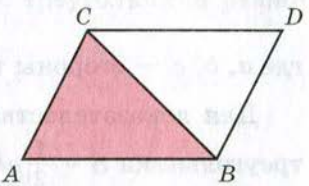


Рис. 59.1

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC. Достроим его до параллелограмма $ABDC$ (рис. 59.1). Треугольники ABC и DCB равны. Следовательно, равны и их площади. Поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$. Сторона AB этого параллелограмма равна стороне треугольника, а высота, проведенная к этой стороне, — высоте треугольника. Следовательно, площадь треугольника ABC равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне. ■

Итак, площадь S треугольника со стороной a и высотой h, проведенной к ней, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Следствие 1. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Доказательство. В треугольнике ABC проведем высоту BH (рис. 59.2). Имеем $BH = BC \cdot \sin C$. Следовательно, площадь ABC равна $\frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin C$. ■

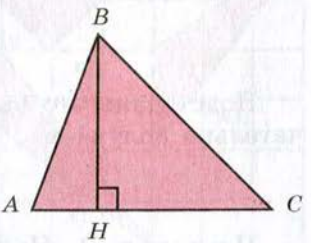


Рис. 59.2

Таким образом, площадь S треугольника со сторонами a, b и углом C между ними вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C.$$

(*) Еще одна формула, выражающая площадь треугольника через его стороны, была впервые найдена древнегреческим математиком Героном Александрийским (приблизительно I век) и носит название ***формулы Герона***

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — его полупериметр.

Для доказательства этой формулы воспользуемся формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$. Выразим $\sin C$ через стороны треугольника по теореме косинусов, тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Отсюда $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Значит,

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = (1 + \cos C)(1 - \cos C) =$$
$$= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{(a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)}{4a^2b^2}.$$

Учитывая, что $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $c + a - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, получаем

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставляя это выражение в формулу площади треугольника, окончательно получаем

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Пример 1. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a.

Решение. Высота этого треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Поэтому площадь S равностороннего треугольника со стороной a будет выражаться формулой $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Пример 2. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

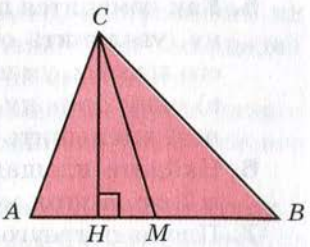


Рис. 59.3

Решение. Пусть CM — медиана треугольника ABC (рис. 59.3). Треугольники AMC и BMC имеют равные стороны $AM = BM$ и общую высоту CH. Следовательно, их площади равны, т. е. треугольники равновелики.

Вопросы

1. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
2. Чему равна площадь прямоугольного треугольника?
3. Как выражается площадь треугольника через две его стороны и угол между ними?

Задачи

1. На рисунке 59.4 укажите равновеликие треугольники.

2. Две стороны треугольника равны 6 см и 5 см. Может ли его площадь быть равна: а) 10 см^2; б) 15 см^2; в) 20 см^2?

3. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 7 см; б) 1,2 м и 35 дм.

4. В треугольнике ABC сторона AB в три раза больше стороны AC. Чему равно отношение высот, проведенных из вершин B и C?

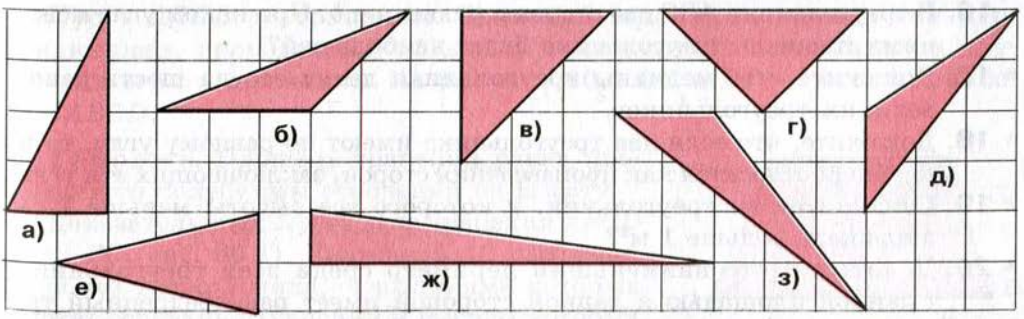


Рис. 59.4

○ **5.** Как изменится площадь треугольника, если: а) не изменяя его сторону, увеличить опущенную на нее высоту в два раза; б) не изменяя его высоты, уменьшить сторону, на которую она опущена, в три раза; в) одну сторону увеличить в четыре раза, а высоту, опущенную на нее, уменьшить в семь раз?

6. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 см и 7 см, а угол между ними равен 30°.

7. Площадь треугольника равна 48 см^2. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне, равной 32 см.

8. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 200 см^2.

9. Докажите, что если два треугольника имеют по две равные стороны, а углы, заключенные между ними, в сумме составляют 180°, то эти треугольники равновелики.

10. В параллелограмме одна из его вершин соединена с серединами противоположных сторон и с противоположной вершиной. Докажите, что образовавшиеся при этом треугольники равновелики.

11. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, отсекаемого его средней линией?

12. В треугольнике проведены все средние линии. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, образованного этими линиями?

13. Середины сторон параллелограмма последовательно соединены между собой. Какой получился четырехугольник и какова его площадь, если площадь данного параллелограмма равна 16 см^2?

14. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

15. Найдите геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному треугольнику и имеющих с ним одну общую сторону.

16. В треугольнике ABC две стороны равны a и b. При каком угле между ними площадь треугольника будет наибольшей?

* **17.** Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

* **18.** Докажите, что если два треугольника имеют по равному углу, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

* **19.** Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 м^2?

* **20.** Докажите, что наименьший периметр среди всех треугольников с данной площадью и данной стороной имеет равнобедренный треугольник, основанием которого является данная сторона.

* **21.** Будет ли площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей равносторонних треугольников, построенных на его катетах?
* **22.** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки равностороннего треугольника до его сторон постоянна и равна высоте этого треугольника.
* **23.** Постройте параллелограмм, равновеликий данному треугольнику.
* **24.** Постройте прямоугольник, равновеликий данному треугольнику.
* **25.** Постройте равнобедренный треугольник, равновеликий данному, у которого основание равно одной из сторон данного треугольника.
* **26.** Вычислите площадь треугольника по трем сторонам: а) 13, 14, 15; б) 5, 5, 6.
* **27.** Докажите, что радиус r окружности, вписанной в треугольник, выражается формулой

$$r = \frac{2S}{a+b+c},$$

где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

* **28.** Докажите, что радиус R окружности, описанной около треугольника, выражается формулой

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S},$$

где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

§60. Площадь трапеции

Пусть $ABCD$ — трапеция. ***Высотой трапеции*** называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания на другое или его продолжение. На рисунке 60.1 CE и BF — высоты трапеции $ABCD$.

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Доказательство. Пусть дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, рис. 60.1). Диагональ AC разбивает ее на два треугольника, основаниями которых служат основания трапеции и высоты которых

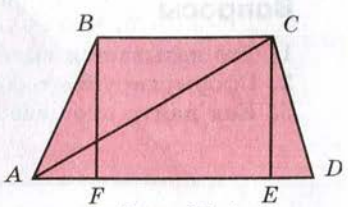


Рис. 60.1

равны высоте трапеции h. Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников, т. е.

$$S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot h. \blacksquare$$

Итак, площадь S трапеции с основаниями a, b и высотой h вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \frac{a + b}{2} \cdot h.}$$

Следствие. Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

Это следует из того, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

Пример 1. Основания трапеции равны 10 см и 35 см, площадь равна 225 см^2. Найдите ее высоту.

Решение. Средняя линия трапеции равна $\frac{10 + 35}{2} = 22{,}5$ (см). Значит, высота трапеции равна $\frac{225}{22{,}5} = 10$ (см).

Пример 2. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания, делит эту трапецию на две равновеликие части.

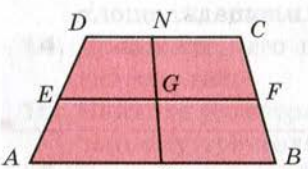


Рис. 60.2

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$), EF — средняя линия, MN — прямая, проходящая через середину G средней линии и пересекающая основания в точках M и N (рис. 60.2). Трапеции $AMND$ и $MBCN$ имеют равные средние линии EG и GF соответственно и высоты, равные высоте исходной трапеции. Следовательно, площади этих трапеций равны, т. е. они равновелики.

Вопросы

1. Что называется высотой трапеции?
2. Сформулируйте теорему о площади трапеции.
3. Как найти площадь трапеции, зная ее среднюю линию и высоту?

Задачи

1. Постройте треугольник, равновеликий данной трапеции.
2. Постройте прямоугольник, равновеликий данной трапеции.
3. Найдите площадь трапеции, основания которой 12 см и 16 см, а высота 15 см.
4. Основания трапеции равны 36 см и 12 см, боковая сторона, равная 7 см, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.
5. Основание трапеции равно 26 см, высота 10 см, а площадь 200 см^2. Найдите второе основание трапеции.
6. Высота трапеции равна 20 см, площадь — 400 см^2. Найдите среднюю линию трапеции.
7. Площадь трапеции равна 36 см^2, высота равна 2 см. Найдите основания трапеции, если они относятся как 4 : 5.
8. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 3 см и 1 см, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°.
9. Найдите площадь трапеции, у которой средняя линия равна 10 см, боковая сторона — 6 см и составляет с одним из оснований угол 150°.
10. Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.
11. В трапеции проведены диагонали (рис. 60.3). Укажите пары равновеликих треугольников.
12. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, разбивает ее на две равновеликие части.
13. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания, делит эту трапецию на две равновеликие части.
14. В треугольнике ABC через точку M пересечения его медиан проведены отрезки, параллельные сторонам треугольника (рис. 60.4). Докажите, что образовавшиеся при этом три трапеции равновелики.

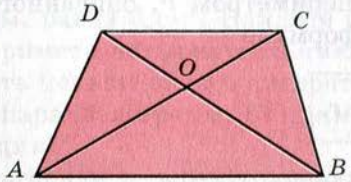


Рис. 60.3

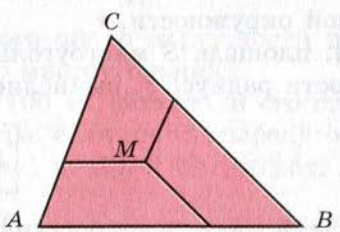


Рис. 60.4

15. В трапеции $ABCD$ точка E — середина боковой стороны AD. Докажите, что площадь треугольника BCE равна половине площади трапеции $ABCD$.

* **16.** Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найдите ее площадь, если площади треугольников, прилегающих к основаниям трапеции, равны S_1 и S_2.

* **17.** Отрезок, соединивший середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его площадь пополам. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция.

§61. Площадь многоугольника

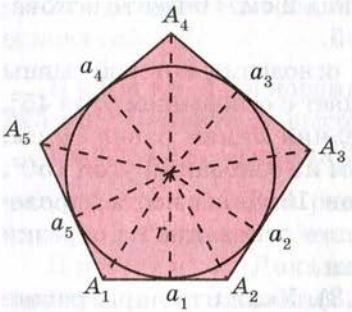


Рис. 61.1

Площадь произвольного многоугольника можно находить, разбивая его на треугольники. При этом площадь многоугольника будет равна сумме площадей этих треугольников.

Теорема. Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

Доказательство. Многоугольник, описанный около окружности, можно представить составленным из треугольников, сторонами a_1, ..., a_n которых являются стороны данного многоугольника, а высоты h_1, ..., h_n равны радиусу r вписанной окружности (рис. 61.1). Поэтому площадь S многоугольника равна сумме площадей треугольников:

$$S = \frac{1}{2}a_1 \cdot r + \ldots + \frac{1}{2}a_n \cdot r = \frac{1}{2}(a_1 + \ldots + a_n) \cdot r,$$

т. е. равна половине произведения периметра многоугольника на радиус вписанной окружности. ■

Итак, площадь S многоугольника с периметром P, описанного около окружности радиуса r, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \frac{1}{2}P \cdot r.}$$

Следствие. Площадь правильного n-угольника выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot r,$$

где a — сторона n-угольника, r — радиус вписанной окружности.

Пример 1. Докажите, что площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения его диагоналей.

Решение. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, в котором диагонали AC и BD перпендикулярны, O — точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника ABC равна половине произведения AC на OB. Площадь треугольника ACD равна половине произведения AC на OD. Значит,

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot OB + \frac{1}{2} AC \cdot OD =$$
$$= \frac{1}{2} AC(OB + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Пример 2. Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса 1 см.

Решение. Сторона правильного шестиугольника равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. Следовательно, его площадь равна $2\sqrt{3}$ см^2.

Вопросы

1. Сформулируйте теорему о площади многоугольника, описанного около окружности.
2. Чему равна площадь правильного n-угольника?

Задачи

1. Около окружности радиусом 2 см описан многоугольник периметром 4 см. Найдите его площадь.

2. Площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса 3 см, равна 6 см^2. Найдите периметр многоугольника.

3. Периметр четырехугольника равен 100 м. Может ли его площадь быть меньше одного квадратного метра, если этот четырехугольник: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат; д) трапеция?

4. Диагонали четырехугольника перпендикулярны и равны 4 см и 5 см. Найдите площадь этого четырехугольника.

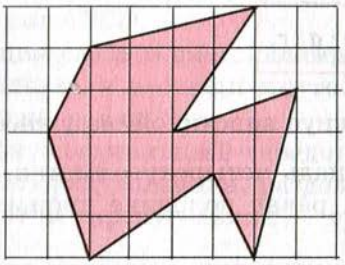


Рис. 61.2

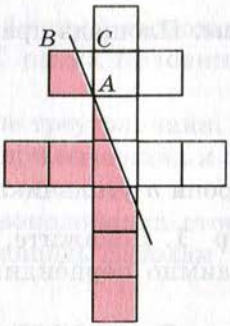


Рис. 61.3

5. На рисунке 61.2 изображены сетка, состоящая из квадратов со сторонами 1, и многоугольник с вершинами в вершинах сетки. Вычислите площадь многоугольника.

6. Около окружности описан четырехугольник. Найдите площадь четырехугольника, если две его противоположные стороны равны a и b, радиус окружности равен R.

7. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

8. Докажите, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, образованного этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника.

9. Внутри выпуклого четырехугольника площади S взята точка. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки, симметричные выбранной точке относительно середин сторон данного четырехугольника.

10. Докажите, что если в многоугольнике все стороны равны между собой, то сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри многоугольника, до его сторон есть величина постоянная.

11. Докажите, что площадь S_n правильного n-угольника со стороной a, вписанного в окружность радиуса R, вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

12. Квадрат со стороной a повернут вокруг центра симметрии на угол 45°. Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) квадратов.

* **13.** В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны равны и параллельны. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.

* **14.** Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна 1. Найдите площадь пятиугольника.
* **15.** Выпуклый многоугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел является полным квадратом.
* **16.** На рисунке 61.3 изображен лотарингский крест, служивший эмблемой «Свободной Франции» (организации, которую в годы Второй мировой войны возглавлял генерал де Голль). Он составлен из тринадцати единичных квадратов. Докажите, что прямая, проходящая через точку A и делящая площадь лотарингского креста на две равные части, делит отрезок BC в золотом отношении.
* **17.** Через вершину выпуклого четырехугольника проведите прямую, разбивающую его на две фигуры одинаковой площади.
* **18.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек M этого четырехугольника, для которых площади фигур $ABCM$ и $ADCM$ равны.
* **19.** Постройте треугольник, равновеликий данному: а) четырехугольнику; б) пятиугольнику; в) шестиугольнику.
* **20.** Предположим, что длина спички равна 1. Составьте из 12 спичек многоугольник, ограничивающий площадь, равную четырем квадратным единицам.

§62. Площадь круга и его частей

Для нахождения площади круга рассмотрим правильные многоугольники, вписанные в соответствующую окружность (рис. 62.1). При увеличении числа сторон многоугольники приближаются к окружности. Поэтому ***площадью круга*** считают число, к которому приближаются площади вписанных правильных многоугольников при увеличении числа их сторон.

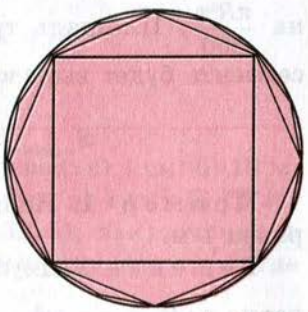


Рис. 62.1

Теорема. Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус.

Как и в случае длины окружности, доказательство данной теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы дадим только набросок доказательства. Рассмотрим правильный

многоугольник, вписанный в данную окружность (рис. 62.2). Площадь этого правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус r вписанной в него окружности. При увеличении числа сторон многоугольников их периметры стремятся к длине окружности, а радиусы r вписанных окружностей стремятся к радиусу R исходной окружности. Поэтому площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус круга.■

Таким образом, площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$

Круговым сектором, или просто ***сектором***, называется общая часть круга и его центрального угла (рис. 62.3).

Для нахождения формулы площади сектора заметим, что площадь сектора с центральным углом в 1° в 360 раз меньше площади круга и, следовательно, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому площадь сектора с центральным углом в φ градусов будет выражаться формулой

$$S = \frac{\pi R^2 \varphi}{360}.$$

Круговым сегментом, или просто ***сегментом***, называется часть круга, отсекаемая от него какой-нибудь хордой (рис. 62.4).

Площадь сегмента, ограниченного хордой AB, можно найти как разность площади сектора OAB и площади треугольника OAB. Пусть центральный угол равен φ, радиус круга — R. Тогда площадь сектора равна $\frac{\pi R^2 \varphi}{360}$. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \varphi$. Поэтому площадь сегмента будет выражаться формулой

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{OAB} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360} - \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \varphi.$$

Пример 1. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна 1 м.

Решение. Радиус круга R равен $\frac{1}{2\pi}$ м. Следовательно, площадь круга равна $\pi \cdot R^2 = \frac{1}{4\pi}$ м^2.

Пример 2. Докажите, что площадь сектора равна половине произведения длины ограничивающей его дуги на радиус окружности.

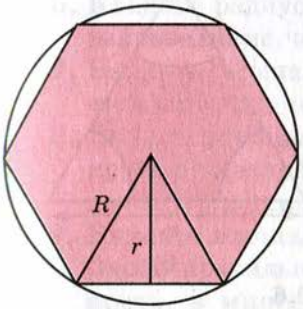


Рис. 62.2

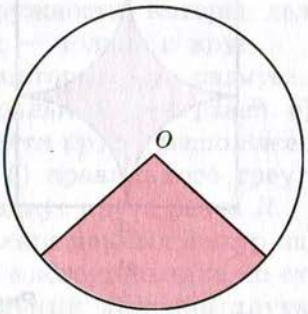


Рис. 62.3

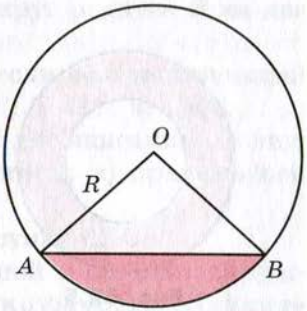


Рис. 62.4

Р е ш е н и е. Длина l дуги окружности радиуса R вычисляется по формуле

$$l = \frac{2\pi R\varphi}{360}.$$

Подставляя это выражение в формулу для площади сектора, получим

$$S_{\text{сектора}} = \frac{1}{2} l \cdot R.$$

Вопросы

1. Что считается площадью круга?
2. Чему равна площадь круга радиуса R?
3. Какая фигура называется круговым сектором?
4. Чему равна площадь кругового сектора?
5. Какая фигура называется круговым сегментом?
6. Как вычисляется площадь сегмента?

Задачи

1. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен: а) 4 см; б) 10 м.

2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна: а) 4 см^2; б) 16 м^2.

3. Найдите площадь кругового кольца (рис. 62.5), заключенного между двумя концентрическими окружностями радиусов a и b, где $a < b$.

4. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами a и b.

5. Найдите площадь круга, вписанного в равносторонний треугольник со стороной a.

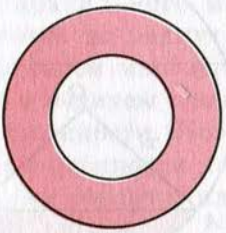
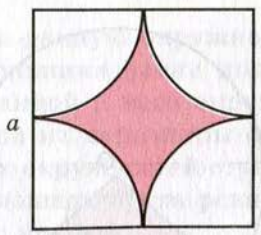
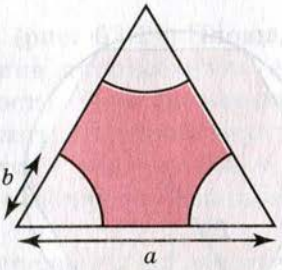


Рис. 62.5



а)



б)

Рис. 62.6

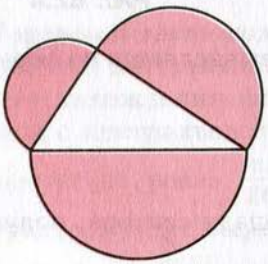


Рис. 62.7

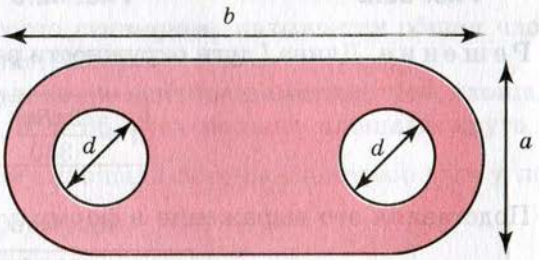


Рис. 62.8

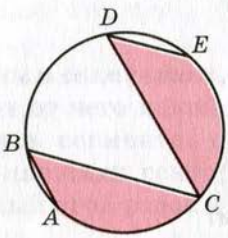
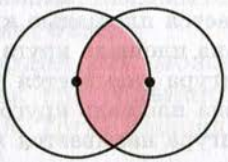


Рис. 62.9



а)

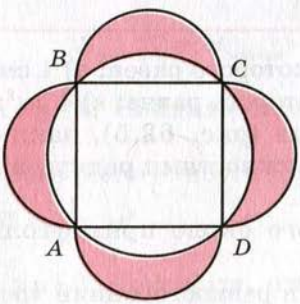
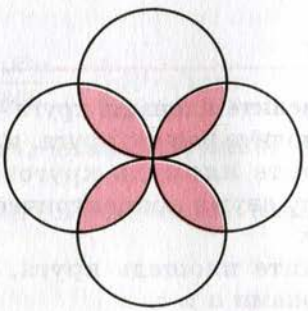


Рис. 62.10



б)

Рис. 62.11

6. Найдите радиус окружности, которая делит круг радиуса R на две равновеликие части — кольцо и круг.
7. Найдите площадь сектора круга радиуса R, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: а) 60°; б) 40°; в) 150°.
8. Найдите площадь части круга, расположенной вне вписанного в этот круг: а) квадрата; б) правильного треугольника; в) правильного шестиугольника. Радиус круга равен R.
9. Найдите площади закрашенных фигур на рисунке 62.6.
10. Около правильного многоугольника со стороной a описана окружность, в многоугольник вписана другая окружность. Найдите площадь образовавшегося кольца.
11. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 62.7), равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.
12. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 62.8, если $d = 1$ см, $a = 2$ см, $b = 6$ см.
* 13. У ломаной $ABCDE$ все вершины принадлежат окружности (рис. 62.9). Углы в вершинах B, C и D равны 45°. Докажите, что площадь закрашенной части круга равна половине его площади.
* 14. На рисунке 62.10 закрашенная фигура состоит из четырех так называемых луночек Гиппократа. Докажите, что ее площадь равна площади квадрата $ABCD$.
* 15. Найдите площади закрашенных фигур на рисунке 62.11. Радиусы окружностей равны 1.

§63. Площади подобных фигур

Теорема. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство. Пусть площадь фигуры Φ равна S и подобие с коэффициентом k переводит фигуру Φ в фигуру Φ_1 (рис. 63.1). Тогда единичный квадрат в фигуре Φ укладывается S раз. Подобие переводит единичный квадрат в квадрат со стороной k. Следовательно, квадрат со стороной k в фигуре Φ_1 укладывается S раз. Поскольку площадь квадрата со стороной k равна k^2, то площадь S_1 фигуры Φ_1 будет равна k^2S. ■

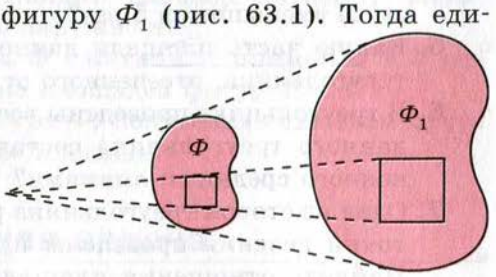


Рис. 63.1

Следствие. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты их сходственных сторон.

Пример 1. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 1 : 2. Как относятся их площади?

Решение. В этом случае соответствующие стороны подобных многоугольников также относятся как 1 : 2, и, следовательно, площади этих многоугольников относятся как 1 : 4.

Пример 2. В круге с центром O проведена хорда AB. На радиусе OA как на диаметре построена окружность. Докажите, что площади двух сегментов, отсекаемых хордой AB от обоих кругов, относятся как 4 : 1.

Решение. Заметим, что большая окружность получается из малой гомотетией с центром в точке A и коэффициентом 2. При этой гомотетии сегмент малой окружности переходит в сегмент большой окружности. Следовательно, отношение их площадей равно 4 : 1.

Вопросы

1. Чему равно отношение площадей подобных фигур?
2. Чему равно отношение площадей подобных многоугольников?

Задачи

1. Найдите отношение площадей двух квадратов, если отношение сторон этих квадратов равно: а) 2 : 3; б) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; в) 1 : 1,5.

2. Как относятся стороны двух квадратов, если отношение площадей этих квадратов равно: а) 4 : 9; б) 3 : 4; в) 0,5 : 2?

3. Стороны равносторонних треугольников равны 6 см и 7 см. Чему равно отношение их площадей?

4. Как изменится площадь круга, если его диаметр: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз?

5. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, отсеченного от него средней линией?

6. В треугольнике проведены все средние линии. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, образованного средними линиями?

7. Одна из сторон треугольника разделена на три равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные другой стороне. Найдите отношения площади данного треугольника к площадям треугольников, отсеченных построенными прямыми.

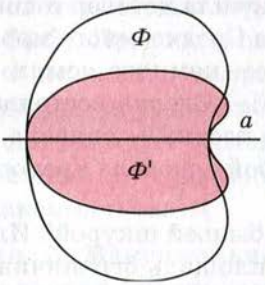


Рис. 63.2

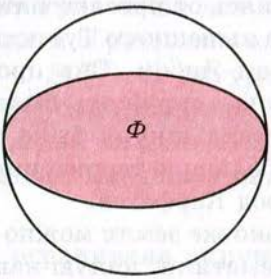


Рис. 63.3

8. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит его на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит другие стороны треугольника?

9. Площадь данного многоугольника равна 45 см^2. Чему равна площадь многоугольника, ему подобного, если сходственные стороны многоугольников равны 15 см и 10 см?

10. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3 : 5. Площадь большего многоугольника равна 40 м^2. Найдите площадь второго многоугольника.

11. Как изменится площадь многоугольника, если каждая из его сторон: а) увеличится в n раз; б) уменьшится в m раз (а величины углов не изменятся)?

12. Периметры двух правильных n-угольников относятся как $a : b$. Как относятся их площади?

13. Докажите, что отношение площадей правильных шестиугольников, вписанного и описанного около данной окружности, равно 3 : 4.

* **14.** Две окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внутренним образом. Через точку касания проведена хорда, которая отсекает от внешней окружности сегмент площади S. Найдите площадь сегмента, отсекаемого этой хордой от внутренней окружности.

* **15.** Фигура Φ' получена из фигуры Φ сжатием к прямой a в k раз (рис. 63.2). Чему равно отношение площадей фигур Φ' и Φ?

* **16.** На рисунке 63.3 изображена фигура Φ, полученная сжатием круга радиуса R в 2 раза. Чему равна ее площадь?

§64*. Изопериметрическая задача

Одной из древнейших задач, связанных с площадями, является задача Дидоны. Если верить преданию, финикийская царевна Дидона в IX веке

до н. э., спасаясь от преследователей, заключила договор о покупке земли на побережье нынешнего Тунисского залива Средиземного моря с местным предводителем Ярбом. Она просила совсем немного земли — столько, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Сделка состоялась, и тогда Дидона изрезала шкуру быка на мелкие тесемки, связала их воедино и окружила большую территорию, на которой основала крепость, а вблизи от нее — город Карфаген.

Так сколько же земли можно окружить бычьей шкурой? Или, переходя на язык математики, какую наибольшую площадь ограничивают кривые заданной длины?

Эту задачу о нахождении фигуры наибольшей площади, ограниченной кривой заданной длины (периметра), и называют ***задачей Дидоны*** или классической ***изопериметрической задачей***. (Изопериметрические фигуры — фигуры, имеющие одинаковый периметр.) Ответ на нее дает следующая теорема.

Теорема. Среди всех замкнутых кривых данной длины наибольшую площадь охватывает окружность.

Хотя это свойство окружности было известно еще до нашей эры, строгое его доказательство было дано лишь в конце XIX века. До этого в 30-е годы XIX века Якоб Штейнер дал пять доказательств этого свойства, но в каждом из них подразумевалось существование кривой данной длины, охватывающей наибольшую площадь. Мы рассмотрим первое из доказательств Штейнера.

Доказательство разобьем на несколько утверждений. Для краткости фигуру, ограниченную кривой данной длины, имеющую наибольшую площадь, будем называть ***максимальной***.

Теорема 1. Максимальная фигура является выпуклой.

Доказательство. Если фигура не выпукла, то существует хорда AB, концы которой принадлежат кривой, а ее внутренние точки находятся вне кривой (рис. 64.1). Заменим дугу исходной кривой, соединяющую точки A, B, на симметричную ей дугу относительно прямой AB. Соответствующая ей фигура будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь бóльшую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура не максимальная. ■

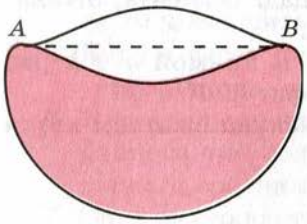


Рис. 64.1

Теорема 2. Если хорда делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру, на две части равной длины, то она и фигуру делит на две равновеликие части.

Доказательство. Пусть хорда AB делит кривую на две части равной длины (рис. 64.2). Предположим, что площади образовавшихся частей Φ', Φ'' фигуры Φ не равны, например $S(\Phi') < S(\Phi'')$. В фигуре Φ заменим фигуру Φ' на фигуру, симметричную Φ'' относительно прямой AB. Полученная фигура будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь бóльшую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура не максимальная. ■

Теорема 3. Максимальная фигура ограничена окружностью.

Доказательство. Пусть хорда AB делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру Φ, на две части равной длины (рис. 64.3). Тогда она делит фигуру Φ на две части Φ' и Φ'' равной площади. Если кривая не является окружностью, то на ней найдется точка C, для которой $\angle ACB \neq \neq 90°$. Пусть, например, C принадлежит Φ'. Построим новую фигуру. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, у которого $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, и присоединим к его катетам соответствующие части 1 и 2 исходной фигуры. Полученную фигуру Φ_1 отразим симметрично относительно A_1B_1 и соответствующую фигуру обозначим Φ_2. Фигура, состоящая из обеих частей Φ_1 и Φ_2, будет искомой. Ясно, что она ограничена кривой той же длины. Однако так как площадь треугольника $A_1B_1C_1$ больше площади треугольника ABC, то площадь фигуры Φ_1 будет больше площади фигуры Φ', а значит, площадь всей новой фигуры будет больше площади исходной фигуры Φ. Следовательно, исходная фигура не максимальная.

Таким образом, кривой данной длины, охватывающей наибольшую площадь, может быть только окружность. ■

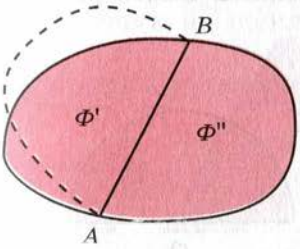
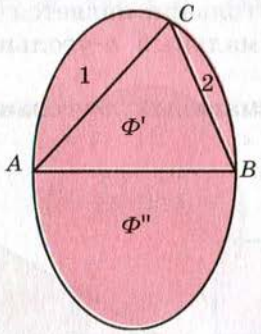
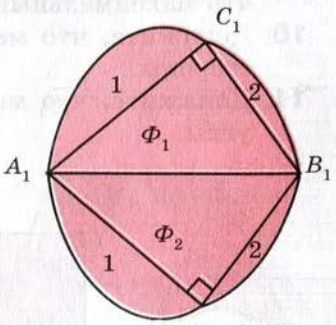


Рис. 64.2



а)



б)

Рис. 64.3

Вопросы

1. Какие фигуры называются изопериметрическими?
2. В чем заключается изопериметрическая задача?
3. Какая кривая заданной длины охватывает наибольшую площадь?
4. Какая фигура называется максимальной?
5. Сформулируйте свойства максимальных фигур.

Задачи

1. Через точку, расположенную внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади.

2. Докажите, что из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

3. Докажите, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

4. Все стороны треугольника меньше единицы. Какого числа не превосходит его площадь?

5. Изобразите треугольник, у которого все высоты меньше 1, а площадь больше 10.

6. Докажите, что из всех прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

7. Периметр прямоугольника равен 4. Какого числа не превосходит его площадь?

8. Докажите, что из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

9. Максимальным будем называть n-угольник, имеющий наибольшую площадь из всех n-угольников заданного периметра. Докажите, что максимальный n-угольник является выпуклым.

10. Докажите, что максимальный n-угольник должен иметь равные стороны.

11. Докажите, что максимальный n-угольник должен иметь равные углы.

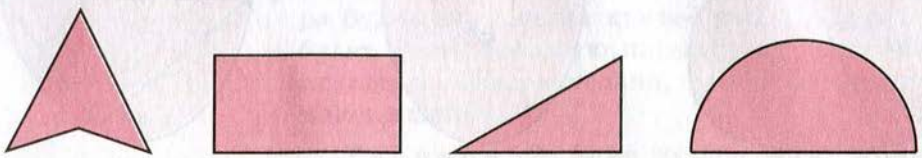


Рис. 64.4

12. Нарисуйте фигуры, имеющие периметр такой же, как и фигуры на рисунке 64.4, но большую площадь.

§65*. Равносоставленность и задачи на разрезание

Две фигуры называются ***равносоставленными***, если они могут быть разложены на одинаковое число попарно равных фигур.

Из свойств площади следует, что равносоставленные фигуры равновелики. В частности, равносоставленные многоугольники равновелики. Например, изображенные на рисунке 65.1 правильный шестиугольник и параллелограмм — равносоставленные фигуры, так как оба они составлены из шести равных равносторонних треугольников.

Естественно поставить обратный вопрос: «Всякие ли два равновеликих многоугольника равносоставлены?» Утвердительный ответ был получен в XIX веке.

Теорема. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Доказательство этой теоремы будет получено как результат применения нескольких теорем.

Теорема 1. Две фигуры, равносоставленые с одной и той же фигурой, равносоставлены.

Доказательство. Действительно, пусть фигуры Φ' и Φ'' равносоставлены с фигурой Φ. Рассмотрим линии, разбивающие фигуру Φ на части, из которых можно составить фигуру Φ', и, кроме того, линии, разбивающие фигуру Φ на части, из которых можно составить фигуру Φ'' (рис. 65.2). Те и другие линии разбивают фигуру Φ на более мелкие части, из которых можно составить как фигуру Φ', так и Φ''. Таким образом, фигуры Φ' и Φ'' равносоставлены. ■

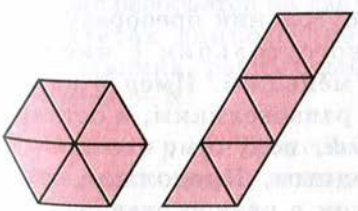


Рис. 65.1

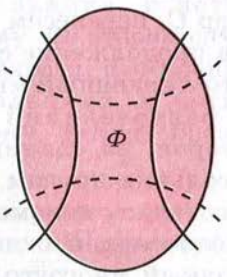


Рис. 65.2

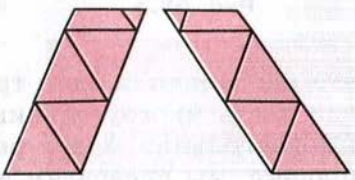


Рис. 65.3

Теорема 2. Любые два равновеликих параллелограмма равносоставлены.

Доказательство. Рассмотрим сначала два параллелограмма с равными основаниями (рис. 65.3). По условию они равновелики, значит, имеют равные высоты. Проведем внутри каждого параллелограмма отрезки, параллельные сторонам другого параллелограмма. Тогда оба параллелограмма разобьются на одинаковое число попарно равных фигур, т. е. они равносоставлены.

Пусть теперь параллелограммы не имеют равных сторон. Построим третий параллелограмм, имеющий с первым равные сторону и высоту, опущенную на нее. Поскольку при этом другую сторону третьего параллелограмма можно выбирать произвольно, сделаем ее равной одной из сторон второго параллелограмма. Тогда третий параллелограмм будет равновелик и с первым, и со вторым параллелограммами и с каждым из них будет иметь по равной стороне. Следовательно, он равносоставлен и с первым, и со вторым. В силу теоремы 1 первый и второй параллелограммы равносоставлены. ■

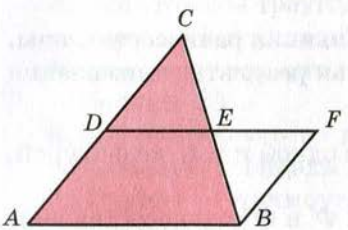


Рис. 65.4

Теорема 3. Любые два равновеликих треугольника равносоставлены.

Доказательство. Каждый треугольник продолжением средней линии преобразуется в равновеликий ему параллелограмм (рис. 65.4). Поэтому два равновеликих треугольника преобразуются в два равновеликих параллелограмма. В силу теоремы 2 эти параллелограммы равносоставлены, и, следовательно, равносоставлены исходные треугольники. ■

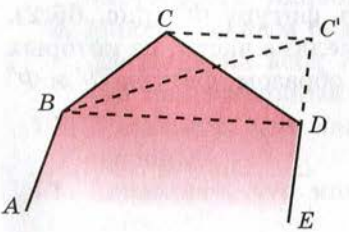


Рис. 65.5

Теорема 4. Всякий многоугольник равносоставлен с некоторым треугольником.

Доказательство. Рассмотрим многоугольник $ABCDE\ldots$, и одну из его вершин, например C, перенесем параллельно диагонали BD на продолжение стороны DE (рис. 65.5). При этом исходный многоугольник преобразуется в равновеликий многоугольник с числом сторон, на единицу меньшим. Имея в виду, что мы заменили один треугольник другим — равновеликим, а остальная часть многоугольника осталась неизменной, получим, что новый многоугольник будет равносоставлен с исходным. Продолжая этот процесс, мы превратим исходный многоугольник в равносоставленный с ним треугольник. ■

Приступим теперь к доказательству основной теоремы. Пусть M' и M'' — равновеликие многоугольники. Рассмотрим равносоставленные с ними треугольники T' и T'' соответственно. Эти треугольники равновелики, а следовательно, равносоставлены. Значит, равносоставлены и исходные многоугольники M' и M''. ■

Доказанная теорема позволяет, в принципе, разрезать один из двух равновеликих многоугольников на части и складывать из них другой многоугольник. Однако это приводит к большому числу мелких многоугольников. В конкретных примерах, как правило, можно указать гораздо более рациональный способ разрезания.

В качестве применения метода разрезания рассмотрим доказательство теоремы Пифагора. С точки зрения площадей ее можно переформулировать в следующем виде.

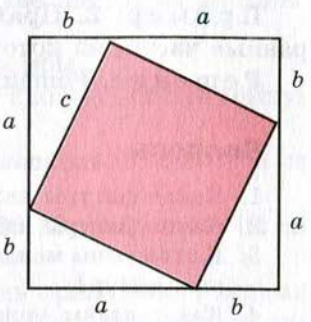


Рис. 65.6

Теорема. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

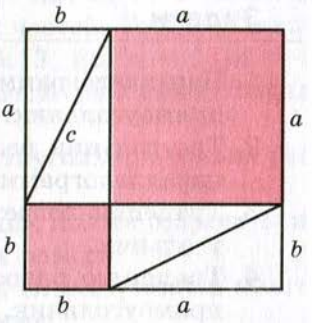


Рис. 65.7

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c. Доказательство следует из рассмотрения двух равных квадратов со стороной, равной сумме катетов данного прямоугольного треугольника, в которых проведены отрезки, как показано на рисунках 65.6, 65.7. В первом случае квадрат разобьется на квадрат, построенный на гипотенузе данного треугольника, и четыре треугольника, равных данному. Во втором случае квадрат разобьется на два квадрата, построенных на катетах данного треугольника, и четыре треугольника, равных данному. Таким образом, $c^2 = a^2 + b^2$. ■

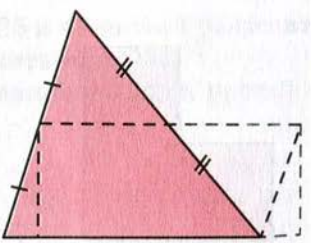


Рис. 65.8

Пример 1. Треугольник разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

Решение. Решение показано на рисунке 65.8.

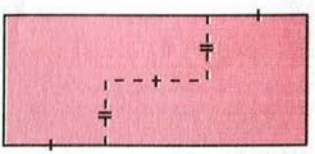


Рис. 65.9

Пример 2. Прямоугольник со сторонами 4 и 9 разрежьте на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

Решение. Решение показано на рисунке 65.9.

Вопросы

1. Какие фигуры называются равносоставленными?
2. Какие фигуры называются равновеликими?
3. Как связаны между собой равновеликость и равносоставленность произвольных фигур?
4. Как связаны между собой равновеликость и равносоставленность многоугольников?

Задачи

1. Параллелограмм разрежьте на две части, из которых можно сложить прямоугольник.

2. Треугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

3. Трапецию разрежьте на две части, из которых можно сложить треугольник.

4. Трапецию разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

5. Данный прямоугольник разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить: а) треугольник; б) параллелограмм; в) трапецию.

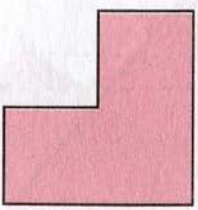


Рис. 65.10

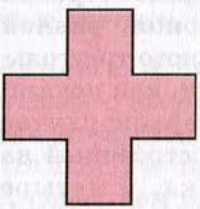


Рис. 65.11

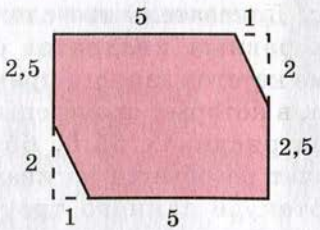


Рис. 65.12

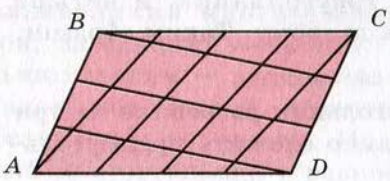


Рис. 65.13

6. Правильный шестиугольник разрежьте на две части, из которых можно составить параллелограмм.

7. Разрежьте правильный восьмиугольник на ромбы.

8. Разрежьте изображенную на рисунке 65.10 фигуру, составленную из трех квадратов, на четыре равные части.

9. Греческий крест (рис. 65.11) разрежьте на несколько частей и составьте из них квадрат.

10. Шестиугольник, изображенный на рисунке 65.12, разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.

11. Используя разрезания, докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

12. Стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ площади 1 разбиты на n равных частей, AD и BC — на m равных частей. Точки деления соединены так, как показано на рисунке 65.13, где $n = 3$, $m = 4$. Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

13. Докажите, что никакой выпуклый тринадцатиугольник нельзя разрезать на параллелограммы.

14. Докажите, что всякий правильный $2n$-угольник можно разрезать на ромбы. Чему равно наименьшее число таких ромбов?

15. Докажите, что всякий выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы.

16. Прямоугольник со сторонами 36 и 64 разрежьте на две части и сложите из них квадрат.

* **17.** Докажите, что прямоугольник со сторонами 25 и 49 нельзя разрезать на такие две части, из которых можно сложить квадрат.

* **18.** Прямоугольник со сторонами 25 и 49 разрежьте на пять частей и сложите из них квадрат.

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

§66. Прямоугольная система координат

Координатной прямой, или ***координатной осью***, называется прямая, на которой выбраны точка O, называемая ***началом координат***, и единичный отрезок OE, указывающий положительное направление координатной прямой (рис. 66.1).

Координатой точки A на координатной прямой называется расстояние x от точки A до начала координат O, взятое со знаком «+», если A принадлежит положительной полуоси, и со знаком «−», если A принадлежит отрицательной полуоси.

Теорема. Расстояние между точками A_1, A_2 на координатной прямой с координатами x_1, x_2 соответственно выражается формулой

$$A_1A_2 = |x_1 - x_2|.$$

Доказательство проводится разбором различных случаев взаимного расположения точек на координатной прямой. Например, если точки A_1, A_2 расположены на положительной полуоси и A_2 лежит между O и A_1, $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2$, то в этом случае $x_2 < x_1$ и

$$A_1A_2 = OA_1 - OA_2 = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|.$$

Другие случаи рассмотрите самостоятельно. ■

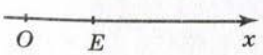


Рис. 66.1

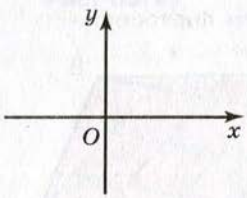


Рис. 66.2

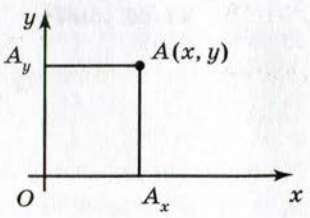


Рис. 66.3

Перейдем теперь от прямой к плоскости.

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно ***осью абсцисс*** и ***осью ординат*** (рис. 66.2). Плоскость с заданной прямоугольной системой координат называется ***координатной плоскостью***.

Пусть A — точка на координатной плоскости. Через точку A проведем прямую, перпендикулярную оси Ox, и точку ее пересечения с осью Ox обозначим A_x. Координата этой точки на оси Ox называется ***абсциссой*** точки A и обозначается x. Аналогично через точку A проведем прямую, перпендикулярную оси Oy, и точку ее пересечения с осью Oy обозначим A_y. Координата этой точки на оси Oy называется ***ординатой*** точки A и обозначается y (рис. 66.3).

Таким образом, точке A на координатной плоскости соответствует пара (x, y), называемая ***координатами точки*** на плоскости относительно данной системы координат. Точка A с координатами (x, y) обозначается $A(x, y)$.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596—1650), поэтому прямоугольную систему координат называют также ***декартовой системой координат***, а сами координаты — ***декартовыми координатами***. Введение прямоугольных координат на плоскости позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи — к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется ***методом координат***.

Исторические сведения

Рене Декарт — один из выдающихся ученых XVII века. Поражает широта его интересов. Ученым получены глубокие результаты в философии, математике, физике, биологии, медицине и других областях. Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, раскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения — картезианства (Картезий — латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определенным естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 году (когда Декарту был уже 41 год). По обычаям того времени, она имела довольно длинное название: «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». В этом сочинении Декарт сформулировал следующие «главные правила метода».

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предупреждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И *последнее*: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

«Геометрия» Декарта, являющаяся приложением к «Рассуждению о методе...», произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII века. В XVIII—XIX веках на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрия. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

Пример 1. На координатной прямой точки A_1, A_2 имеют координаты x_1 и x_2 соответственно. Найдите координату середины A отрезка A_1A_2.

Решение. Рассмотрим случай, когда точки A_1 и A_2 лежат справа от начала координат O и точка A_1 лежит между O и A_2 (рис. 66.4). По условию расстояния от точек A_1 и A_2 до начала координат равны соответственно x_1 и x_2. Длина отрезка A_1A_2 равна $x_2 - x_1$. Так как A — середина A_1A_2, то длина отрезка A_1A равна $\frac{x_2 - x_1}{2}$. Длина отрезка OA равна сумме длин

отрезков OA_1 и A_1A и, значит, равна $x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Следовательно, координата точки A равна $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи взаимного расположения точек A_1 и A_2.

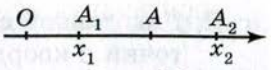


Рис. 66.4

Пример 2. Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) $x \geqslant 0$; б) $y < 0$; в) $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$; г) $xy > 0$.

Решение. а) Полуплоскость, расположенная справа от оси ординат (рис. 66.5, а); б) полуплоскость, расположенная ниже оси абсцисс, без самой оси абсцисс (рис. 66.5, б); в) левый верхний квадрант координатной плоскости (рис. 66.5, в); г) правый верхний и левый нижний квадранты координатной плоскости без осей координат (рис. 66.5, г).

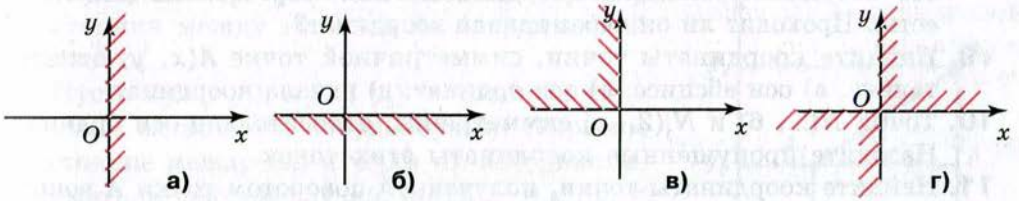


Рис. 66.5

Вопросы

1. Какая прямая называется координатной?
2. Что называется координатой точки на координатной прямой?
3. Как выражается расстояние между двумя точками на координатной прямой?
4. Что называется прямоугольной системой координат?
5. Какая плоскость называется координатной плоскостью?
6. Как называются координатные прямые на координатной плоскости?
7. Что называется абсциссой и ординатой точки на координатной плоскости?
8. Что такое координаты точки на координатной плоскости?
9. Кто впервые ввел координаты на плоскости?
10. Что позволяют сделать прямоугольные координаты на плоскости?
11. Какой метод называется методом координат?

Задачи

1. Найдите координату середины отрезка на координатной прямой, если его концы имеют координаты: а) 1, 3; б) −2, 4; в) −3, −5.

2. Для данной системы координат на плоскости (рис. 66.6) нарисуйте точки с координатами (1, 2), (2, −1), (−1, −3).

3. Для заданных точек на координатной плоскости (рис. 66.7) найдите их координаты.

4. На прямой, параллельной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них ордината равна 2. Чему равна ордината другой точки?

5. На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них абсцисса равна 3. Чему равна абсцисса другой точки?

6. Из точки $A(2, 3)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты основания перпендикуляра.

7. Через точку $A(2, 3)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты ее точки пересечения с осью ординат.

8. Для данной системы координат на плоскости нарисуйте точки $A(1, 1)$ и $B(1, -1)$. Нарисуйте отрезок AB. Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть). Проходит ли он через начало координат?

9. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(x, y)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

10. Точки $N(..., 6)$ и $N_1(2, ...)$ симметричны относительно оси ординат. Назовите пропущенные координаты этих точек.

11. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки A вокруг начала координат на угол 90° против часовой стрелки, если точка A имеет координаты: а) (2, 1); б) (−1, 3); в) (−2, −3); г) (1, −3).

12. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $A(1, 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

* **13.** Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) $x = 2$; б) $y = -1$; в) $|x| = 3$; г) $|y| \geqslant 1$; д) $x = y$; е) $x = -y$.

* **14.** Докажите, что расстояние OA от точки $A(x, y)$ до начала координат выражается формулой $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$.

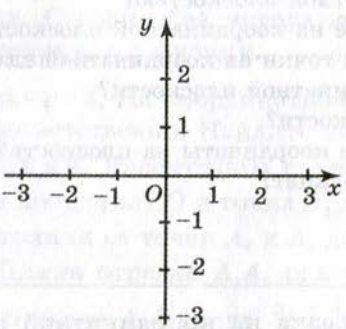


Рис. 66.6

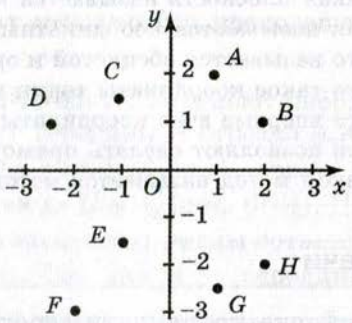


Рис. 66.7

15. Найдите расстояние от начала координат до точки с координатами: а) (1, 1); б) (−3, 4); в) (−1, −2).

16. Докажите, что середина A отрезка, соединяющего точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости имеет координаты

$$A\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

17. Найдите координаты середины отрезка AB, если: а) $A(1, -2)$, $B(5, 6)$; б) $A(-3, 4)$, $B(1, 2)$; в) $A(5, 7)$, $B(-3, -5)$.

§67. Расстояние между точками. Уравнение окружности

В данном параграфе мы выведем формулу расстояния между точками на координатной плоскости.

Пусть $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ — точки на плоскости с заданными координатами. Выразим расстояние между ними через их координаты. Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. В прямоугольном треугольнике AA_1A_2 имеем $AA_1 = |x_1 - x_2|$, $AA_2 = |y_1 - y_2|$ (рис. 67.1). По теореме Пифагора получаем следующую формулу расстояния между точками:

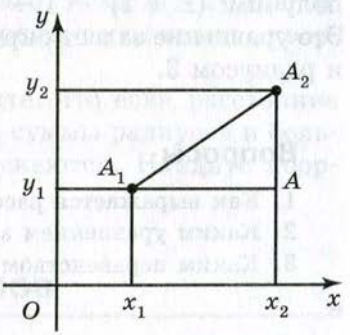


Рис. 67.1

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Легко видеть, что если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, то формула расстояния между точками на плоскости остается верной.

Непосредственно из определения окружности и круга следует, что координаты точек окружности с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R удовлетворяют равенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

а координаты точек соответствующего круга — неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2.$$

Пример 1. Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$, если она имеет координаты: а) (2, 3); б) (4, 2); в) (3, 4); г) (1, −1).

Решение. Центром данной окружности является точка $O(2, 1)$, квадрат ее радиуса равен 5. Квадрат растояния от данной точки до центра окружности равен: а) $(2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 = 4 < 5$; б) $(4 - 2)^2 + (2 - 1)^2 = 5$; в) $(3 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = 10 > 5$; г) $(1 - 2)^2 + (-1 - 1)^2 = 5$. Таким образом, в случае а) точка расположена внутри окружности; в случаях б) и г) точка принадлежит окружности; в случае в) точка расположена вне окружности.

Пример 2. Докажите, что уравнение $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ задает окружность. Найдите координаты центра и радиус окружности.

Решение. Заметим, что $x^2 + 2x$ можно записать в виде $(x + 1)^2 - 1$, а $y^2 - 4y$ в виде $(y - 2)^2 - 4$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим: $(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 4 = 0$ или $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Это уравнение задает окружность с центром в точке с координатами (−1, 2) и радиусом 3.

Вопросы

1. Как выражается расстояние между точками через их координаты?
2. Каким уравнением задается окружность на координатной плоскости?
3. Каким неравенством задается круг на координатной плоскости?

Задачи

1. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(1, 2)$ и $A_2(-1, 1)$; б) $B_1(3, 4)$ и $B_2(3, -1)$.

2. Какая из точек — $A(2, 1)$ или $B(-2, 1)$ — лежит ближе к началу координат?

3. Даны точки $M(1, -2)$, $N(-2, 3)$ и $K(3, 1)$. Найдите периметр треугольника MNK.

4. Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: $A(0, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$.

5. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(4, 1)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 0)$, $D(1, -3)$ является квадратом.

6. Найдите уравнение окружности: а) с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке $C(1, -2)$ и радиусом 4.

7. Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, если она имеет координаты: а) (1, 2); б) (3, 4); в) (−4, 3); г) (0, 5); д) (5, −1).

○ **8.** Найдите координаты центра C и радиус R окружности, заданной уравнением: а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 6)^2 = 11$.

9. Докажите, что уравнение $x^2 - 4x + y^2 = 0$ задает окружность. Найдите ее радиус и координаты центра.

10. Точка $A(0, \sqrt{2})$ принадлежит окружности с центром $C(3, 0)$. Напишите уравнение этой окружности.

11. Даны точки $A(2, 0)$, $B(-2, 6)$. Найдите уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

12. Найдите уравнение окружности с центром в точке $C(1, 2)$, касающейся оси абсцисс.

13. Составьте уравнение окружности с центром в точке $C(-3, 4)$, проходящей через начало координат.

14. Каким неравенством задается геометрическое место точек, не принадлежащих кругу с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R?

15. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек $A(1, 2)$, $B(2, 3)$.

16. Найдите точку, равноудаленную от осей координат и от точки с координатами (3, 6).

* **17.** Используя уравнение окружности, докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разности, то эти окружности пересекаются. Найдите координаты точек пересечения.

§68. Векторы. Сложение векторов

Напомним, что ***вектором*** называется направленный отрезок, т. е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B.

Длиной, или ***модулем***, вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина векторов $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковую длину и направление.

Рассматривают также нулевые векторы, у которых начало совпадает с концом. Все нулевые векторы считаются равными между собой. Они обозначаются $\vec{0}$, и их длина считается равной нулю.

Для векторов определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 68.1). Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Для операции сложения векторов справедливы следующие свойства, аналогичные свойствам сложения чисел.

Свойство 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон).

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки O. Предположим, что получившиеся векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не лежат на одной прямой. Рассмотрим параллелограмм $OACB$ (рис. 68.2). В нем $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Тогда по определению сложения векторов будем иметь:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{a}.\blacksquare$$

Свойство 2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (сочетательный закон).

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от некоторой точки A: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\vec{b}$ отложим от точки B: $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, а вектор $\vec{c}$ — от точки C: $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ (рис. 68.3). Тогда по определению сложения векторов будем иметь: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

С другой стороны,

$$\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BD},\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Следовательно, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.$\blacksquare$

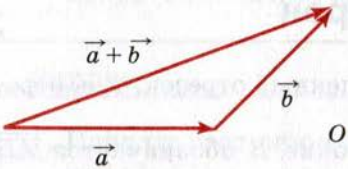


Рис. 68.1

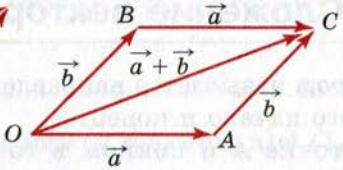


Рис. 68.2

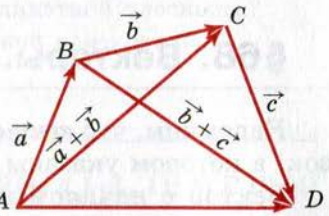


Рис. 68.3

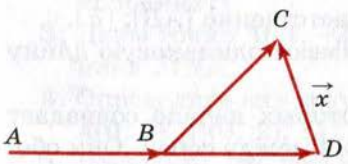


Рис. 68.4

Пример 1. Сколько различных векторов задают пары вершин параллелограмма $ABCD$?

Ответ. Восемь векторов: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

Пример 2. Для данных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ нарисуйте вектор $\vec{x}$, для которого $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{BC}$.

Решение. От точки B отложим вектор $\overrightarrow{BD}$, равный $\overrightarrow{AB}$ (рис. 68.4) Тогда вектор $\overrightarrow{DC}$ будет удовлетворять равенству $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$, т. е. вектор $\overrightarrow{DC}$ будет искомым вектором $\vec{x}$.

Вопросы

1. Что называется вектором? Как обозначается вектор с началом в точке A и концом в точке B?
2. Что называется длиной, или модулем, вектора? Как обозначается длина вектора?
3. Какие векторы называются равными?
4. Какой вектор называется нулевым? Как обозначается нулевой вектор?
5. Как определяется операция сложения векторов?
6. Сформулируйте переместительный закон сложения векторов.
7. Сформулируйте сочетательный закон сложения векторов.

Задачи

1. Сколько различных векторов задают стороны трапеции $ABCD$?

2. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{DB}$.

3. Основание AD трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB = 5$ см, $\angle D = 45°$. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$?

5. Точки S и T являются серединами боковых сторон соответственно MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; б) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; в) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{LM}$; г) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?

6. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Верно ли обратное?

7. В треугольнике ABC укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

8. На рисунке 68.5 укажите векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} + \vec{c}$.

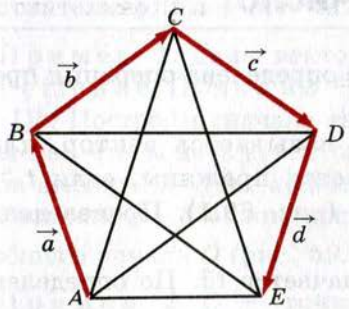


Рис. 68.5

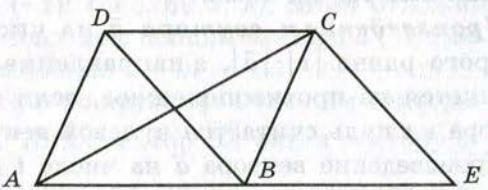


Рис. 68.6

9. Радиусы OA, OB и OC окружности образуют углы в 120°. От точки O отложите векторы: а) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$; г) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

10. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Верны ли равенства: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$; г) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$?

11. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

12. A, B, C, D — произвольные точки плоскости. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ векторы: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

13. На рисунке 68.6 изображен параллелограмм $ABCD$, $CE \parallel BD$. Докажите:
а) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;
б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$;
в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BC}$.

14. Докажите, что $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

15. Для данных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ нарисуйте вектор $\vec{x}$, для которого $\vec{x} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

16. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|$.

17. В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90°$. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

* **18.** Дан правильный пятиугольник. Докажите, что сумма пяти векторов с началом в центре этого многоугольника и концами в его вершинах равна нулю.

§69. Умножение вектора на число

Помимо операции сложения для векторов определена операция произведения вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, длина которого равна $|t| \cdot |\vec{a}|$, а направление остается прежним, если $t > 0$, и меняется на противоположное, если $t < 0$ (рис. 69.1). Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$.

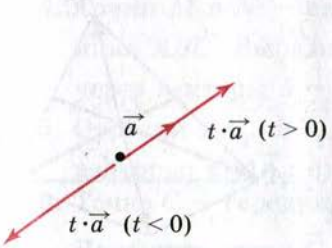
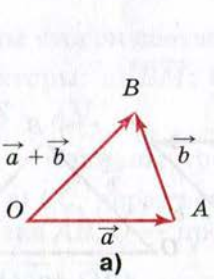


Рис. 69.1



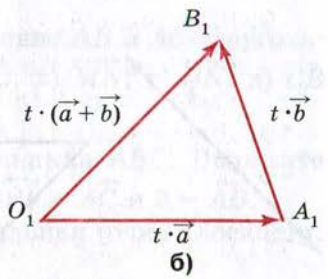


Рис. 69.2

Произведение вектора $\vec{a}$ на число -1 называется вектором, ***противоположным*** $\vec{a}$, и обозначается $-\vec{a}$.

По определению вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{a}$, и $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам умножения чисел, а именно:

Свойство 1. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$ (сочетательный закон).

Свойство 2. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (первый распределительный закон).

Свойство 3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (второй распределительный закон).

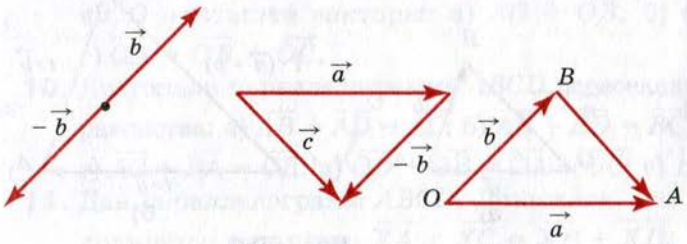
Первое и второе свойства следуют непосредственно из определения. Докажем третье свойство. Отложим вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. В треугольнике OAB (рис. 69.2, а) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$. Рассмотрим треугольник $O_1A_1B_1$, стороны которого образуют векторы $t\vec{a}$, $t\vec{b}$ и $t(\vec{a} + \vec{b})$ соответственно (рис. 69.2, б). Треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны (по третьему признаку подобия треугольников, так как их соответствующие стороны пропорциональны). С другой стороны, по определению сложения векторов $\overrightarrow{O_1B_1} = t\vec{a} + t\vec{b}$, следовательно, $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные векторы. По определению $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$. Построим сначала вектор $(-1)\vec{b}$ (рис. 69.3, а), затем отложим векторы так, чтобы начало вектора $-\vec{b}$ совпало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 69.3, б). Тогда вектор $\vec{c}$ и будет искомой разностью $\vec{a} - \vec{b}$.

Разность $\vec{a} - \vec{b}$ можно построить и по-другому. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от общего начала O (рис. 69.3, в). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ равен вектору $\vec{a} - \vec{b}$.

Пример 2. O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



а) б) в)

Рис. 69.3

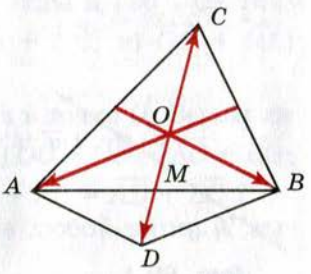


Рис. 69.4

Р е ш е н и е. Вектор $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ представляет собой диагональ OD параллелограмма $AOBD$ (рис. 69.4). Векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OC}$ противоположно направлены, и их длины равны двум третям медианы CM. Следовательно, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ и, значит, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Вопросы

1. Как определяется операция умножения вектора на число?
2. Как обозначается произведение вектора на число?
3. Какой вектор называется противоположным данному вектору? Как он обозначается?
4. Что называется разностью двух векторов? Как она обозначается?
5. Сформулируйте сочетательный закон операции умножения вектора на число.
6. Сформулируйте первый распределительный закон операции умножения вектора на число.
7. Сформулируйте второй распределительный закон операции умножения вектора на число.

Задачи

1. В треугольнике ABC укажите векторы: а) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$; д) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}$; д) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}$; е) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$.

3. Для данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постройте векторы: а) $\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$; в) $3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; г) $\frac{11}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

4. Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы: а) $\overrightarrow{BM}$; б) $\overrightarrow{NC}$; в) $\overrightarrow{MN}$; г) $\overrightarrow{BN}$; д) $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

5. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Выразите векторы: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$; в) $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.

6. Точка C — середина отрезка AB. O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

7. Точка C принадлежит отрезку OB и делит его в отношении $2 : 1$. O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

8. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ выполняются равенства: $-(-\vec{a}) = \vec{a}$; $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

9. Докажите свойства 1 и 2 умножения вектора на число.

10. В каком случае выполняются равенства: а) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} - \vec{b}$?

11. Упростите выражение:

а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$;

б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

12. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

13. В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90°$. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA}| - |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$.

* **14.** Докажите, что $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leqslant |\vec{a} - \vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

* **15.** Докажите, что отрезок AB — геометрическое место точек C плоскости, для которых $\overrightarrow{OC} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$ (O — произвольная точка плоскости).

* **16.** O — точка пересечения медиан треугольника ABC, точка X — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

§70. Координаты вектора

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Определим понятие координат вектора. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются ***координатами вектора***.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторы с координатами (1, 0), (0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы отложенными от начала координат и называть их ***координатными векторами*** (рис. 70.1).

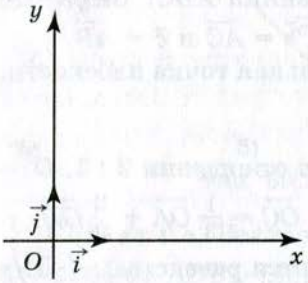


Рис. 70.1

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_x + \overrightarrow{OA}_y$ (рис. 70.2). Точка A имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA}_x = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA}_x = y\vec{j}$ и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. ■

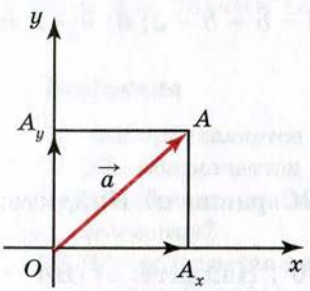


Рис. 70.2

Теорема. При сложении двух векторов их координаты складываются.

Доказательство. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2)$. Докажем, что их сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ будет иметь координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Для этого разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Тогда для суммы имеет место равенство

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$$

и, следовательно, пара чисел $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. ■

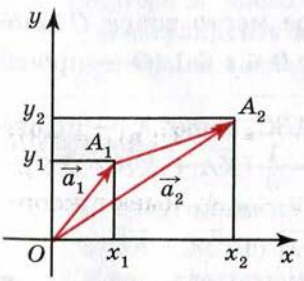


Рис. 70.3

Аналогично показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Другими словами, вектор $t\vec{a}$ имеет координаты (tx, ty), где (x, y) — координаты вектора $\vec{a}$.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$ имеет координаты $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1, y_1)$ и концом — точку $A_2(x_2, y_2)$. Тогда вектор $\vec{a}$ можно

представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$, и, следовательно, он имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (рис. 70.3).

Пример 1. Даны три вершины параллелограмма $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(1, 3)$. Найдите координаты четвертой вершины C, если известно, что они положительны.

Решение. Координаты вершины C равны координатам вектора $\overrightarrow{OC}$, который равен сумме векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Эти векторы имеют координаты $(2, 1)$ и $(1, 3)$ соответственно. Следовательно, вектор $\overrightarrow{OC}$ имеет координаты $(3, 4)$, а значит, вершина C также имеет координаты $(3, 4)$.

Пример 2. Выразите длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Решение. Длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ равна длине отрезка A_1A_2. Используя формулу длины отрезка, получаем

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Вопросы

1. Что называется координатами вектора?
2. Какие векторы называются координатными?
3. Сформулируйте теорему о разложении вектора по координатным векторам.
4. Что происходит с координатами при сложении двух векторов?
5. Что происходит с координатами при умножении вектора на число?
6. Как находятся координаты вектора по известным координатам его начала и конца?

Задачи

1. Назовите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j}$; г) $\vec{d} = -5\vec{i}$.

2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты $(-3, 5)$, $(2, 3)$ соответственно.

3. Выразите длину вектора $\vec{a}$ через его координаты (x, y).

4. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(4, -3)$ и точка M — $(1, -3)$.

5. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2, -6)$, $B(-5, 3)$; б) $A(1, 3)$, $B(6, -5)$; в) $A(-3, 1)$, $B(5, 1)$.

6. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

7. Даны точки $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(2, 1)$. Докажите равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

8. Даны три точки $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$. Найдите такую точку $D(x, y)$, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были равны.

○ **9.** Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1, 0)$, $\vec{b}(0, 3)$.

10. Даны векторы $\vec{a}(-1, 2)$ и $\vec{b}(2, -4)$. Найдите координаты вектора:

а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a} + 5\vec{b}$.

11. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-1, -2)$, $B(2, -5)$, $C(1, -2)$, $D(-2, 1)$ является параллелограммом. Найдите точку пересечения его диагоналей.

* **12.** Вершины треугольника имеют координаты (1, 2), (2, 1) и (3, 4). Найдите координаты точки пересечения медиан.

§71. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi.$$

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется ***скалярным квадратом*** и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ, а именно, имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$. Отложим эти векторы от начала координат и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно. В случае, если точки O, A_1 и A_2 не принадлежат одной прямой, рассмотрим треугольник OA_1A_2. По теореме косинусов имеем равенство

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2 \cdot OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos \varphi.$$

Заметим, что это равенство выполняется и в случае, если точки O, A_1 и A_2 принадлежат одной прямой.

Перепишем это равенство в виде $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - 2 \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами:

$$\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2;\ \vec{a}_2^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2;$$
$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Получим

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\boxed{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2,}$$

где $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$.

Пример 1. Дан вектор $\vec{m}(a, b)$. Найдите координаты перпендикулярного к нему вектора.

Решение. Для искомого вектора $\vec{n}(x, y)$ должно выполняться равенство $a \cdot x + b \cdot y = 0$. Например, этому равенству удовлетворяют $x = b$, $y = -a$. Следовательно, искомый вектор $\vec{n}$ имеет координаты $(b, -a)$. Заметим, что для любого числа x, отличного от нуля, вектор $\vec{n}$ с координатами $(b \cdot x, -a \cdot x)$ также будет перпендикулярен вектору $\vec{m}$.

Пример 2. Найдите угол A треугольника с вершинами $A(-1, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{3})$, $C(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$.

Решение. Воспользуемся определением скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Имеем $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A$. Вычислим это скалярное произведение через координаты векторов. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет

координаты $(2, -2\sqrt{3})$, вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет координаты $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Следовательно, скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равно 3. Найдем теперь длины этих векторов: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 12} = 4$, $|\overrightarrow{AC}| = \frac{3}{2}$. Подставляя эти данные в формулу скалярного произведения, получим $3 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos A$. Откуда $\cos A = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\angle A = 60°$.

Вопросы

1. Что называется скалярным произведением двух векторов? Как обозначается скалярное произведение?
2. Что называется скалярным квадратом?
3. В каком случае скалярное произведение двух векторов равно нулю?
4. Каков физический смысл скалярного произведения?
5. Как скалярное произведение векторов выражается через их координаты?

Задачи

1. Вычислите скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними равен: а) 45°; б) 90°; в) 135°.

2. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1, 2)$ и $\vec{a}_2(2, -1)$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) укажите скалярные произведения, равные нулю: а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; е) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$; ж) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

5. Охарактеризуйте угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если а) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

6. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 1. При каком угле между ними скалярное произведение будет: а) наибольшим; б) наименьшим?

7. Используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами: а) $\vec{a}_1(2, 3)$, $\vec{a}_2(1, -2)$; б) $\vec{a}_1(1, 2)$ и $\vec{a}_2(1, 0)$.

8. Используя формулу скалярного произведения, докажите, что для вектора $\vec{a}(x, y)$ имеют место равенства: $x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j}$.

9. Докажите, что, каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, справедливы следующие равенства: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Докажите, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

11. Какой угол φ образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

12. При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(4, 3)$?

13. Найдите угол A треугольника с вершинами $A(-1, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{3})$, $C(1, \sqrt{3})$.

14. Для прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ см, $AD = 8$ см найдите скалярное произведение: а) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$; б) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF}$, где E и F — середины сторон AD и CD соответственно.

15. Вычислите, какую работу A производит сила $\vec{F}(-3, 4)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $B(5, -1)$ в положение $C(2, 1)$.

§72. Уравнение прямой

Выясним, каким уравнением задается прямая на плоскости.

Теорема. Прямая на плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, причем a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой и называемого ***вектором нормали***.

Доказательство. Пусть дана прямая. Зафиксируем какую-нибудь точку $A_0(x_0, y_0)$ этой прямой и пусть $\vec{n}(a, b)$ — перпендикулярный этой прямой вектор (рис. 72.1). Тогда произвольная точка $A(x, y)$ будет принадлежать этой прямой в том и только том случае, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. скалярное произведение $\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{n}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

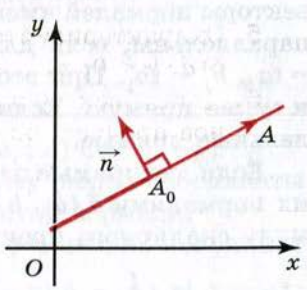


Рис. 72.1

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

которое задает искомую прямую. Обозначая $-ax_0 - by_0 = c$, получим требуемое уравнение прямой

$$ax + by + c = 0.$$

Если $b \neq 0$, то, разделив на b, это уравнение можно привести к виду $y = kx + l$.■

Коэффициент k называется ***угловым коэффициентом*** этой прямой. Выясним его геометрический смысл. Возьмем на прямой две точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Их координаты удовлетворяют уравнению прямой

$$y_1 = kx_1 + l,\ y_2 = kx_2 + l.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда выразим k:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

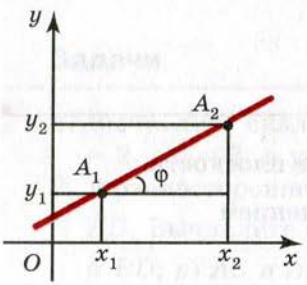


Рис. 72.2

Таким образом, угловой коэффициент k равен тангенсу угла φ, который образует прямая с осью абсцисс (рис. 72.2).

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении прямых на плоскости с точки зрения их уравнений.

Две прямые на плоскости параллельны, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ одинаково или противоположно направлены, т. е. для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2 = t\vec{n}_1$. Для прямых, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad (*)$$

векторы нормалей имеют координаты (a_1, b_1), (a_2, b_2). Значит, такие прямые параллельны, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$. При этом, если $c_2 = tc_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же прямую. Если же $c_2 \neq tc_1$, то эти уравнения определяют параллельные прямые.

Если две прямые пересекаются, то угол φ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1(a_1, b_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

В частности, прямые перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняются равенства

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Пример 1. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$.

Решение. Векторы нормалей к данным прямым имеют координаты $(1, 2)$ и $(2, -1)$ соответственно. Их скалярное произведение равно нулю и, следовательно, эти векторы перпендикулярны. Значит, угол между данными прямыми равен $90°$.

Пример 2. Найдите уравнение прямой, проходящей через заданные точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

Решение. Найдем вектор нормали $\vec{n}$ к данной прямой. Он перпендикулярен вектору $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Следовательно, в качестве такого вектора можно взять вектор с координатами $(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$. Искомым уравнением прямой будет уравнение

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0,$$

которое можно также переписать в виде

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0.$$

Вопросы

1. Каким уравнением задается прямая на плоскости?
2. Что называется угловым коэффициентом прямой? Каков его геометрический смысл?
3. В каком случае два уравнения определяют: а) параллельные прямые; б) одну и ту же прямую; в) пересекающиеся прямые?
4. Как вычисляется угол между пересекающимися прямыми?
5. В каком случае две прямые перпендикулярны?

Задачи

1. Какие уравнения имеют координатные прямые: а) Ox; б) Oy?

2. Прямая задана уравнением $x - 2y + 1 = 0$. Чему равны координаты вектора нормали? Нарисуйте эту прямую и вектор нормали.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$. Нарисуйте эти прямые.

4. Найдите угловой коэффициент прямой: а) $2x - 3y + 4 = 0$; б) $x + 2y - 1 = 0$.

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(1, 2)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1)$.

6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(3, -1)$, $N(4, 1)$. Найдите координаты вектора нормали этой прямой.

8. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1, -2)$ и параллельна: а) координатной прямой Ox; б) координатной прямой Oy; в) прямой $y = x$.

9. Точка $H(-2, 4)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. Напишите уравнение этой прямой.

10. Найдите точки пересечения прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, с осями координат.

11. Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых параллельны между собой:

а) $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$;

б) $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$;

в) $-7x + y = 0$, $7x - y - 5 = 0$;

г) $2x + 4y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

12. Приведите примеры уравнений перпендикулярных прямых.

13. Найдите угол φ между прямыми, заданными уравнениями $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Нарисуйте эти прямые.

14. Докажите, что прямые, заданные уравнениями

$$y = kx + l_1,\ y = kx + l_2,\ l_1 \neq l_2,$$

параллельны.

15. Найдите координаты точки пересечения прямых:

а) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$;

б) $3x - y + 2 = 0$, $5x - 2y + 1 = 0$.

* **16.** Докажите, что прямые, заданные уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

пересекаются в том и только том случае, когда $a_1 \cdot b_2 \neq a_2 \cdot b_1$.

* **17.** Треугольник задан своими вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$. Найдите уравнения высот этого треугольника и координаты их точки пересечения.

§73*. Аналитическое задание фигур на плоскости

Ранее было показано, что окружность с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Круг, ограниченный этой окружностью, задается неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2.$$

Прямая на плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других фигур и начнем с полуплоскости.

Пусть прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$ и проходит через точку $A_0(x_0, y_0)$. Ее вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты (a, b) и определяет полуплоскость (рис. 73.1). Точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости в случае, если угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ не превосходит 90°, т. е. в случае, если скалярное произведение этих векторов больше или равно нулю, т. е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0A} = a(x - x_0) + b(y - y_0) \geqslant 0$. При этом $-ax_0 - by_0 = c$. Следовательно, точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости, если выполняется неравенство $ax + by + c \geqslant 0$.

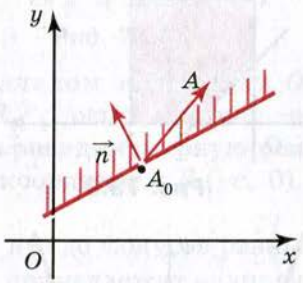


Рис. 73.1

Аналогично точка $A(x, y)$ принадлежит другой полуплоскости по отношению к данной прямой, если выполняется неравенство $ax + by + c \leqslant 0$.

Для того чтобы определить, какой из двух полуплоскостей принадлежит точка $A(x, y)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения прямой и найти знак получившегося значения.

Покажем, как с помощью неравенств можно задавать выпуклые многоугольники.

Действительно, пусть стороны выпуклого многоугольника лежат на прямых, задаваемых уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_nx + b_ny + c_n = 0.$$

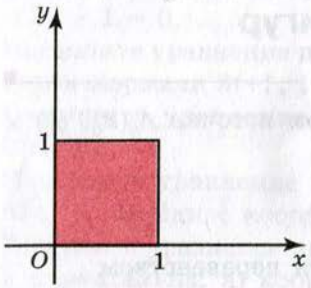


Рис. 73.2

Тогда сам многоугольник является пересечением соответствующих полуплоскостей, и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_nx + b_ny + c_n \geqslant 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многоугольник.

Например, неравенства $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leqslant 1$, $y \leqslant 1$, которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$$

определяют единичный квадрат (рис. 73.2).

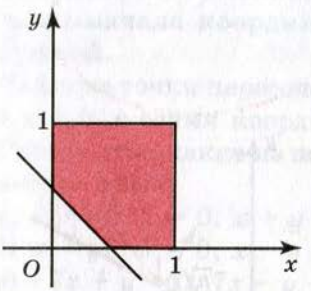


Рис. 73.3

Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство

$$x + y - \frac{1}{2} \geqslant 0,$$

то соответствующий многоугольник получается из квадрата отсечением треугольника (рис. 73.3).

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие фигуры.

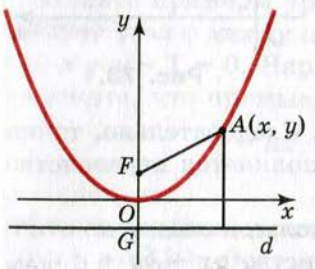


Рис. 73.4

Парабола. Напомним, что параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой d и данной точки F. Прямая d называется директрисой, а точка F — фокусом параболы (рис. 73.4).

Выведем уравнение, задающее параболу на координатной плоскости. Обозначим точку пересечения оси параболы с ее директрисой через G. Длину отрезка FG обозначим через $2a$ (рис. 73.4). Введем систему координат, считая началом координат O середину отрезка FG, осью абсцисс — прямую, параллельную директрисе и проходящую через начало координат, осью ординат — ось параболы. Тогда фокус F будет иметь координаты $(0, a)$.

Пусть $A(x, y)$ — точка плоскости. Расстояния от нее до фокуса и директрисы равны соответственно $\sqrt{x^2 + (y - a)^2}$ и $|y + a|$. Точка A принадлежит параболе в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = y + a.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные члены, будем иметь равенство

$$4ay = x^2, \qquad (1)$$

которое и будет искомым уравнением параболы.

Эллипс. Напомним, что эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса (рис. 73.5).

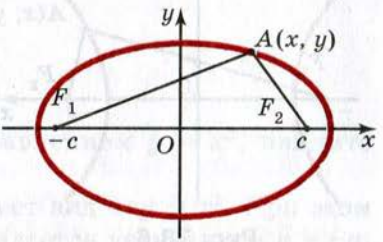


Рис. 73.5

Выведем уравнение эллипса на координатной плоскости. Пусть F_1, F_2 — фокусы эллипса. Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Введем систему координат, считая началом координат O середину отрезка F_1F_2, осью абсцисс — прямую F_1F_2, осью ординат — прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси абсцисс (рис. 73.5). Фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $A(x, y)$ — точка плоскости. Расстояния от нее до фокусов равны соответственно $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ и $\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$. Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

где a — некоторое фиксированное число ($a > 2c$).

Перенесем второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведем обе части полученного равенства в квадрат. Будем иметь

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2.$$

Приведем подобные члены

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + xc.$$

Еще раз возведем в квадрат и приведем подобные члены

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим равенство

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

которое и будет искомым уравнением эллипса.

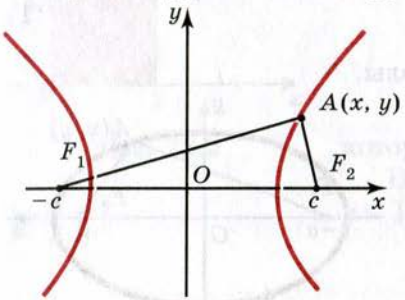


Рис. 73.6

Гипербола. Напомним, что гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть фиксированное число, взятое со знаком «+» или «−». Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы (рис. 73.6).

Выведем уравнение гиперболы. Введем систему координат, считая осью Ox прямую, проходящую через фокусы, а осью Oy прямую, перпендикулярную оси Ox, и делящую отрезок F_1F_2 пополам. Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Точка $A(x, y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AF_1 - AF_2 = \pm 2a$, где a — некоторое фиксированное число, $0 < a < c$. Перепишем это равенство в координатной форме

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Перенесем второй корень в правую часть и возведем обе части равенства в квадрат. Получим

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Еще раз возводя в квадрат и обозначая $b^2 = c^2 - a^2$, получим

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2, окончательно получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Прямые, заданные уравнениями $bx + ay = 0$, $bx - ay = 0$, называются ***асимптотами*** гиперболы.

Пример 1. Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$.

Решение. Легко видеть, что уравнения прямых AB, BC и AC имеют вид: $x + y - 1 = 0$, $y - 1 = 0$ и $x - 1 = 0$ соответственно. Подставляя координаты точки C вместо x и y в левую часть первого уравнения, получим $1 > 0$. Следовательно, точка C принадлежит полуплоскости $x + y - 1 \geqslant 0$. Аналогично, точка B принадлежит полуплоскости $x \leqslant 1$, а точка A — полуплоскости $y \leqslant 1$. Таким образом, треугольник ABC задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + y \geqslant 1, \\ x \leqslant 1, \\ y \leqslant 1. \end{cases}$$

Пример 2. Для параболы, заданной уравнением $y = x^2$, найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.

Решение. Общее уравнение параболы имеет вид $4ay = x^2$. При этом фокус имеет координаты $(0, a)$, а директриса задается уравнением $y = -a$. В нашем случае $a = \frac{1}{4}$ и, следовательно, фокус данной параболы имеет координаты $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, а ее директриса задается уравнением $y = -\frac{1}{4}$.

Вопросы

1. Как задается полуплоскость?
2. Как задается выпуклый многоугольник?
3. Каким уравнением задается парабола?
4. Каким уравнением задается эллипс?
5. Каким уравнением задается гипербола?

Задачи

1. Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 \leqslant y \leqslant 8, \\ x + y \geqslant 12. \end{cases}$$

2. Две полуплоскости задаются неравенствами

$$a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0,\ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant 0.$$

Как будет задаваться пересечение этих полуплоскостей?

3. Определите, какой полуплоскости $5x + 3y - 2 \geqslant 0$ или $5x + 3y - 2 \leqslant 0$ принадлежат точки: а) $A(1, 0)$; б) $B(0, 1)$; в) $C(0, 0)$.

4. Какую фигуру задает следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5? \end{cases}$$

5. Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ x + y - 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

6. Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$.

7. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y^2 = x$, является параболой. Нарисуйте эту кривую. Найдите фокус и директрису этой параболы.

8. Докажите, что ось параболы является ее осью симметрии.

9. Докажите, что любая прямая, проходящая через фокус параболы и не совпадающая с ее осью, пересекает параболу в двух точках.

10. Докажите, что движение переводит параболы в параболы. Какое движение переводит параболу $y = x^2$ в параболу $y^2 = x$?

11. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, является параболой. Найдите ее вершину.

12. Нарисуйте геометричекое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: а) $y > x^2$; б) $y < x^2$; в) $x > y^2$; г) $x < y^2$.

13. В каком случае уравнение эллипса дает окружность?

14. Докажите, что эллипс, заданный уравнением (2), симметричен относительно начала координат. Есть ли у него оси симметрии?

15. Для эллипса, заданного уравнением $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, найдите координаты фокусов. Нарисуйте этот эллипс.

16. Докажите, что движения переводят эллипсы в эллипсы. Каким движением эллипс, заданный уравнением $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, переводится в эллипс $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$?

17. Для гиперболы, заданной уравнением $x^2 - y^2 = 1$, найдите координаты фокусов и уравнения асимптот. Нарисуйте эту гиперболу.

18. Докажите, что движения переводят гиперболы в гиперболы. Каким движением гипербола, заданная уравнением $-x^2 + y^2 = 1$, переводится в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$?

19. Докажите, что гипербола, заданная уравнением (3), симметрична относительно начала координат. Есть ли у нее оси симметрии?

20. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y = \frac{1}{x}$, является гиперболой. Найдите фокусы и асимптоты этой гиперболы.

§74*. Задачи оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые задачи оптимизации.

В их числе:

— транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

— задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

— задача составления оптимального плана производства;

— задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность в сырье каждого вида для данных заводов указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья (в т) на складе		Потребность в сырье (в т) на заводе		
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$
20	25	10	15	20

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	5	7	10
$С_2$	3	4	6

Для решения этой задачи, в первую очередь, проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т. е. составим ***математическую модель***. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада C_1 на заводы $З_1$, $З_2$, обозначим через x и y соответственно. Тогда на третий завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y$ тонн сырья, а со второго склада на заводы нужно будет перевезти соответственно $10 - x$, $15 - y$, $x + y$ тонн сырья. Запишем эти данные в виде таблицы 3.

Таблица 3

Склады	Количество сырья (в т), перевезенное на заводы		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
C_1	x	y	$20 - x - y$
C_2	$10 - x$	$15 - y$	$x + y$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ 10 - x \geqslant 0, \\ 15 - y \geqslant 0, \\ 20 - x - y \geqslant 0, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$$

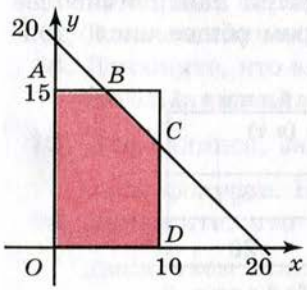


Рис. 74.1

Последнее неравенство является следствием двух первых и его можно отбросить. Оставшиеся неравенства определяют многоугольник $OABCD$, изображенный на рисунке 74.1. Назовем его ***многоугольником ограничений***.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножаем расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты складываем. Общее число тонно-километров выражается формулой

$$5x + 7y + 10(20 - x - y) + 3(10 - x) + 4(15 - y) + 6(x + y) = 290 - 2x - y.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 290 - 2x - y$ на многоугольнике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = 2x + y$. Тогда $F_{\min} = 290 - f_{\max}$.

Воспользуемся тем, что своих наименьшего и наибольшего значений линейная функция достигает в вершинах многоугольника ограничений. Это свойство является основополагающим в задачах оптимизации.

Используя геометрические соображения, покажем, например, что линейная функция $ax + by$ ($b > 0$) принимает свое наибольшее значение на многоугольнике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение c функции $ax + by$. Тогда уравнение $ax + by = c$ задает прямую на плоскости, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение c. В точках, расположенных выше этой прямой, она принимает значения, большие c, а в точках, расположенных ниже этой прямой, — значения, меньшие c. Если число c выбрать достаточно большим, то прямая $ax + by = c$ расположится выше многоугольника. Будем опускать эту прямую, уменьшая значения c, до тех пор, пока она не коснется многоугольника. Такое касание произойдет при некотором c_0 в какой-нибудь вершине многоугольника (рис. 74.2) или по какому-нибудь его ребру.

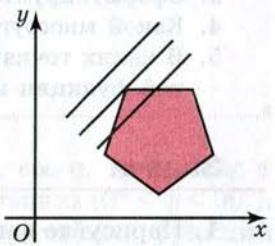


Рис. 74.2

В точках касания линейная функция принимает значение c_0, и, поскольку все остальные точки многоугольника лежат ниже прямой, значения линейной функции в этих точках меньше c_0. Таким образом, c_0 — искомое наибольшее значение. Значит, для нахождения наибольшего значения линейной функции на многоугольнике достаточно вычислить значения функции в вершинах многоугольника и выбрать из них наибольшее. Найдем значения функции $f = 2x + y$ в вершинах многоугольника ограничений, учитывая, что вершины имеют координаты $O(0, 0)$, $A(0, 15)$, $B(5, 15)$, $C(10, 10)$, $D(10, 0)$:

$$f(O) = 0,\ f(A) = 15,\ f(B) = 25,\ f(C) = 30,\ f(D) = 20.$$

Таким образом, максимальное значение функции f достигается в точке $C(10,10)$ и равно 30. Следовательно, наименьшее значение функции F достигается в точке C и равно $290 - 30 = 260$. В соответствии с этим наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

Склады	Количество сырья (в т), перевезенное на заводы		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	10	10	0
$С_2$	0	5	20

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно двум и поэтому в процессе ее решения получился многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше двух и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства с очень большим n. При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Вопросы

1. Назовите некоторые задачи оптимизации.
2. Кто разработал метод решения задач оптимизации?
3. Сформулируйте условие транспортной задачи.
4. Какой многоугольник называется многоугольником ограничений?
5. В каких точках принимаются наибольшее и наименьшее значения линейной функции на многоугольнике?

Задачи

1. Нарисуйте фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3x + 4y - 48 \leqslant 0, \\ 3x - 4y \geqslant 0, \\ x \geqslant 4,\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y \geqslant 0, \\ x - y \geqslant 1; \\ x \leqslant 7,\ y \geqslant 0. \end{cases}$

2. Найдите наибольшее значение функции $F = x + y$ при условии

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 5x + 3y \leqslant 15, \\ 2x + 6y \leqslant 12, \\ x \leqslant 3,\ y \leqslant 2. \end{cases}$$

3. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ -2 - 2x - y \leqslant 0, \\ 2 - x + y \geqslant 0, \\ 5 - x - y \geqslant 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

4. Мастерская выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида — 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора первого вида мастерская получает 120 руб., а от реализации одного трансформатора второго вида — 100 руб. Сколько трансформаторов каждого вида нужно выпустить, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если мастерская располагает 480 кг железа и 300 кг проволоки?

§75. Тригонометрические функции произвольного угла

Напомним, что тригонометрические функции $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ определялись для острого угла φ прямоугольного треугольника ($0° < \varphi < 90°$).

Нашей задачей является определение тригонометрических функций для произвольных градусных величин φ.

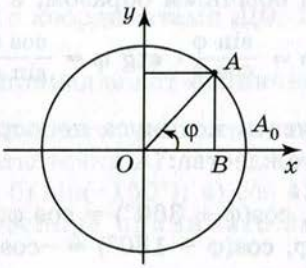


Рис. 75.1

Рассмотрим декартову систему координат и окружность единичного радиуса с центром в начале координат O (рис. 75.1). Такую окружность будем называть ***единичной***. Каждому углу φ, $0° < \varphi < 90°$, соответствует точка A на единичной окружности, полученная поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол φ против часовой стрелки. Поскольку гипотенуза OA прямоугольного треугольника OAB равна единице, то, как легко видеть, синус этого угла будет равен ординате точки A, а косинус — абсциссе точки A.

Определим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в случае $0° \leqslant \varphi < 360°$. Для этого рассмотрим точку A, получающуюся поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол φ против часовой

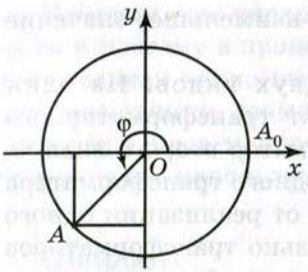


Рис. 75.2

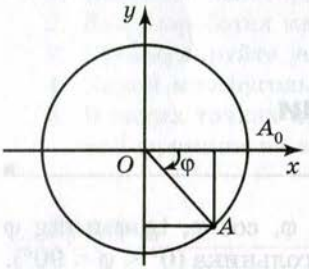


Рис. 75.3

стрелки (рис. 75.2). Ордината этой точки называется синусом φ и обозначается sin φ. Абсцисса этой точки называется косинусом φ и обозначается cos φ.

Определим теперь поворот точки $A_0(1, 0)$ на градусную величину $\varphi \geqslant 360°$. Для этого представим φ в виде суммы $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ меньше 360°. Результат последовательного выполнения поворотов на углы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ против часовой стрелки и будет искомым поворотом точки A_0 на φ. Ордината и абсцисса полученной в результате полного поворота точки A называется соответственно синусом и косинусом φ и обозначается sin φ и cos φ.

Для градусных величин $\varphi < 0°$ поворот на φ определяется аналогичным образом, но делается в направлении по часовой стрелке. В этом случае sin φ и cos φ также полагаются равными соответственно ординате и абсциссе точки A, полученной в результате поворота точки A_0 (рис. 75.3).

Тригонометрические функции tg φ и ctg φ для произвольных градусных величин φ определяются обычным образом, а именно:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Из определения синуса и косинуса непосредственно следует, что выполняются следующие тождества:

$$\sin(\varphi + 360°) = \sin\varphi, \ \cos(\varphi + 360°) = \cos\varphi; \tag{1}$$
$$\sin(\varphi + 180°) = -\sin\varphi, \ \cos(\varphi + 180°) = -\cos\varphi; \tag{2}$$
$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi, \ \cos(-\varphi) = \cos\varphi; \tag{3}$$
$$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi, \ \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi. \tag{4}$$

Теорема. Для произвольных градусных величин φ имеет место основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Доказательство. По определению пара (cos φ, sin φ) представляет собой координаты точки на единичной окружности, а $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi$ является квадратом расстояния от этой точки до начала координат. Следовательно, $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. ■

Пример 1. На какую градусную величину повернется минутная стрелка за 2 ч 15 мин?

Решение. За час минутная стрелка поворачивается на 360°. За 2 ч она повернется на 720°, и за 15 мин — на 90°. Таким образом, поворот составит 720° + 90° = 810°.

Пример 2. Найдите $\sin 390°$ и $\cos(-300°)$.

Решение. $\sin 390° = \sin(360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos(-300°) = \cos(360° - 300°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Вопросы

1. Какая окружность называется единичной?
2. Как определяются $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в случае $0° \leqslant \varphi < 360°$?
3. Как определяются $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в случае $\varphi \geqslant 360°$?
4. Как определяются $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в случае отрицательных φ?
5. Как определяются $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ в случае произвольных φ?
6. Какие тождества выполняются для синуса и косинуса в случае произвольных градусных величин?
7. В чем состоит основное тригонометрическое тождество?

Задачи

1. Проверьте, что точки с координатами $A(0, 1)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $E(-1, 0)$ принадлежат единичной окружности.

2. Точка A получена в результате поворота точки $A_0(1, 0)$ на величину φ. Чему равны координаты точки A?

3. Найдите: а) $\sin 330°$; б) $\sin(-150°)$; в) $\cos 420°$; г) $\cos(-135°)$.

4. Могут ли синус и косинус принимать значения: а) большие 1; б) меньшие −1?

5. Укажите, для каких градусных величин синус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

6. Укажите, для каких градусных величин косинус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

7. Для каких градусных величин φ не определен: а) $\operatorname{tg}\varphi$; б) $\operatorname{ctg}\varphi$?

8. Могут ли тангенс и котангенс принимать значения: а) большие 1; б) меньшие −1?

9. Для каких градусных величин тангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?

10. Для каких градусных величин котангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?

11. Докажите, что имеют место тождества:

$$\operatorname{tg}(\varphi + 180^\circ) = \operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{ctg}(\varphi + 180^\circ) = \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi.$$

12. Найдите угол между лучом OA и осью абсцисс, если точка A имеет координаты: а) (2, 2); б) (0, 3); в) $(-\sqrt{3}, 1)$; г) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

13. На какую градусную величину повернется минутная стрелка за: а) 1 ч 45 мин; б) 2 ч 30 мин; в) 3 ч 20 мин?

* **14.** Докажите, что преобразование плоскости, при котором точки $A(x, y)$ переходят в точки $A'(x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi)$, где φ — некоторый фиксированный угол, является движением. Определите вид этого движения.

§76*. Полярные координаты

Наряду с декартовыми координатами на плоскости во многих случаях более удобными оказываются так называемые ***полярные координаты***.

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например: «Вы пройдете по этой улице около 100 м, свернете направо, пройдете еще 50 м и будете у цели». При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных координат.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE. Эта прямая в данном случае будет называться ***полярной осью***. Точка O называется ***полюсом*** (рис. 76.1).

Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ), где r — расстояние от точки A до точки O, φ — угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если $\varphi > 0$, и по часовой стрелке, если $\varphi < 0$.

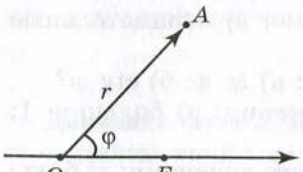


Рис. 76.1

При этом первая координата r называется ***полярным радиусом***, а вторая φ — ***полярным углом***. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат и за полярную ось — ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ) (рис. 76.2). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

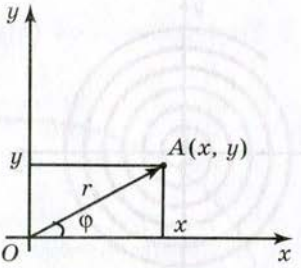


Рис. 76.2

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

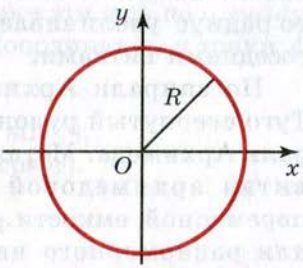


Рис. 76.3

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости, особенно для задания различных спиралей. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

1. Окружность радиуса R с центром в точке O задается уравнением $r = R$ (рис. 76.3).

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на расстояние R. Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом, если угол увеличивается, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ уменьшается, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

2. Спираль Архимеда — кривая, задаваемая уравнением

$$r = a\varphi,$$

где a — некоторое фиксированное число, угол φ задается в радианах.

Предположим, что $a > 0$, и построим график этой кривой. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам φ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при увеличении угла φ. В этом случае радиус r также будет увеличиваться. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = \frac{a\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т. е. в два

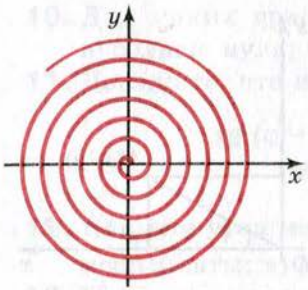


Рис. 76.4

раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса r будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь человека, ее открывшего и изучившего ее свойства (рис. 76.4).

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками, каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идет звуковая дорожка на грампластинке. Туго свернутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку — имеет форму спирали Архимеда.

3. Трилистник — кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geqslant 0$, решая которое, находим область допустимых значений углов φ:

$$0° \leqslant \varphi \leqslant 60°;\ 120° \leqslant \varphi \leqslant 180°;\ 240° \leqslant \varphi \leqslant 300°.$$

Итак, пусть $0° \leqslant \varphi \leqslant 60°$. Если угол φ изменяется от нуля до 30°, то $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до единицы и, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от 30° до 60°, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от 0° до 60° точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется в пределах от 120° до 180° и от 240° до 300° (рис. 76.5).

4. Рассмотрим **циклоиду** — кривую, которую описывает точка, закрепленная на окружности, катящейся без скольжения по прямой линии (рис. 76.6). Найдем уравнения циклоиды. Предположим, что окружность радиуса R катится по оси Ox и в начальный момент времени закрепленная точка A_0 находилась в начале координат (рис. 76.6). Предположим, что окружность повернулась на угол φ. При этом закрепленная точка

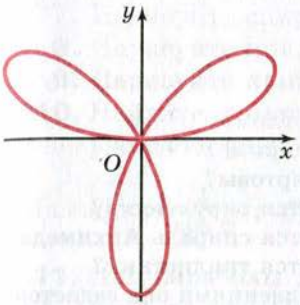


Рис. 76.5

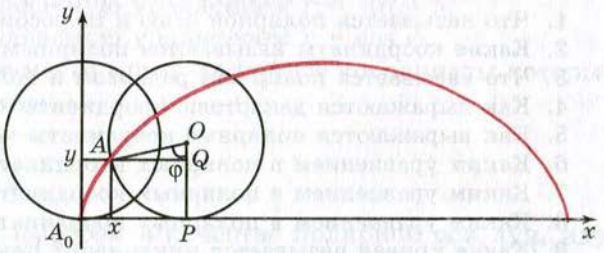


Рис. 76.6

переместилась в положение A. Поскольку дуга AP прокатилась по отрезку A_0P, то их длины равны, т. е. $AP = A_0P = R\varphi$. Для координат x, y точки A имеем:

$$x = AP - AQ = R\varphi - R\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = OP - OQ = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi).$$

Таким образом, уравнения циклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = R(\varphi - \sin\varphi), \\ y = R(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$

Пример 1. Найдите геометрическое место точек на плоскости, для которых: а) полярный радиус r удовлетворяет неравенствам $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$; б) полярный угол φ удовлетворяет неравенствам $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$.

Решение. В случае а) искомым геометрическим местом точек является кольцо, образованное окружностями с центром в полюсе и радиусами r_1, r_2. В случае б) искомым геометрическим местом точек будет угол с вершиной в полюсе, образованный лучами, составляющими с полярной осью углы φ_1 и φ_2.

Пример 2. Человек идет с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно земли?

Решение. Обозначим скорость человека V и угловую скорость карусели W. Тогда за время t человек удалится от центра карусели на расстояние $V \cdot t$, а карусель повернется на угол $W \cdot t$. Переходя к полярным координатам, будем иметь: $r = V \cdot t$, $\varphi = W \cdot t$. Выражая t из второго равенства и подставляя в первое, получим уравнение $r = \frac{V}{W}\varphi$, которое задает спираль Архимеда. Таким образом, траекторией движения человека относительно земли будет спираль Архимеда.

Вопросы

1. Что называется полярной осью и полюсом?
2. Какие координаты называются полярными?
3. Что называется полярным радиусом и полярным углом?
4. Как выражаются декартовы координаты через полярные?
5. Как выражаются полярные координаты через декартовы?
6. Каким уравнением в полярных координатах задается окружность?
7. Каким уравнением в полярных координатах задается спираль Архимеда?
8. Каким уравнением в полярных координатах задается трилистник?
9. Какая кривая называется циклоидой? Какими уравнениями она задается?

Задачи

1. На плоскости с заданной на ней полярной осью изобразите точки с полярными координатами: $(1, 0)$, $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Используя транспортир и линейку, найдите полярные координаты точек, изображенных на рисунке 76.7.

3. Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: а) $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: а) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; б) $(-10, 0)$; в) $(1, -\sqrt{3})$; г) $(-\sqrt{3}, 1)$.

5. Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?

6. Нарисуйте геометрическое место точек на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) $30° < \varphi < 60°$; б) $1 < r < 2$; в) $30° < \varphi < 60°$, $1 < r < 2$.

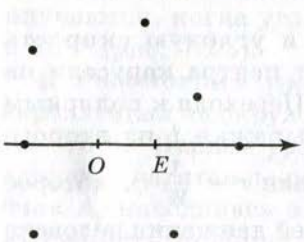


Рис. 76.7

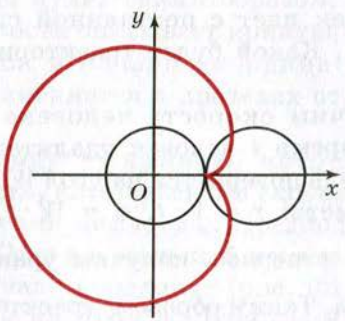


Рис. 76.8

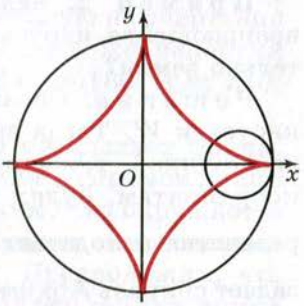


Рис. 76.9

7. Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.

8. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \sin 4\varphi$.

9. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \cos \varphi$.

10. Найдите геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = \dfrac{1}{\cos \varphi}$; б) $r = \dfrac{1}{\sin \varphi}$.

* **11.** Для параболы $x^2 = 4ay$ выберем в качестве полярной оси луч, идущий по оси Oy с началом в фокусе $F(0, a)$ параболы. Переходя от декартовых к полярным координатам, покажите, что парабола с выколотой вершиной задается уравнением

$$r = \frac{a}{1 - \cos \varphi}.$$

Почему вершину параболы нужно выкалывать?

* **12.** Докажите, что уравнение

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

задает эллипс, если $0 < \varepsilon < 1$, и гиперболу, если $\varepsilon > 1$.

* **13.** Найдите уравнение кардиоиды, которая является траекторией движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности такого же радиуса (рис. 76.8).

* **14.** Докажите, что если внутри большой окружности катится окружность вдвое меньшего диаметра, то любая точка внутренней окружности будет двигаться по диаметру внешней окружности.

* **15.** Найдите уравнение астроиды, которая является траекторией движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внутренней стороны по другой окружности в 4 раза большего радиуса (рис. 76.9).

Глава XII

НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ*

§ 77. Основные понятия стереометрии

Стереометрия, или геометрия в пространстве, — это раздел геометрии, изучающий положение, форму, размеры и свойства различных пространственных фигур.

Стереометрия — греческое слово. Оно произошло от слов «стерео» — тело — и «метрео» — измерять, — т. е. буквально стереометрия означает «теломерие».

Помимо точки, прямой и плоскости, основным понятием стереометрии является ***пространство***. Как и раньше, точки обозначаются прописными латинскими буквами A, B, C, ... Прямые обозначаются строчными латинскими буквами a, b, c, ..., или двумя большими латинскими буквами AB, CD, EF, ..., указывающими точки на этих прямых. Плоскости обозначаются греческими буквами α, β, γ, ...

Помимо аксиом планиметрии, справедливых для плоскостей в пространстве, в стереометрии требуется, чтобы выполнялись следующие аксиомы.

1. Через любые две точки пространства проходит единственная прямая.
2. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.
4. Существуют, по крайней мере, четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

Подробное изучение курса стереометрии будет проходить в 10—11 классах. Пока же мы рассмотрим только некоторые простейшие свойства фигур в пространстве.

Теорема. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a имеет с плоскостью α две общие точки A_1 и A_2 (рис. 77.1). Так как в плоскости α выполняются аксиомы планиметрии, то в этой плоскости через точки A_1, A_2 проходит единственная прямая. Если бы она не совпадала с прямой a, то мы получили бы две прямые в пространстве, проходящие через две данные точки, а это противоречит аксиоме 1. Следовательно, эти прямые совпадают, и, значит, прямая a целиком лежит в плоскости α. ■

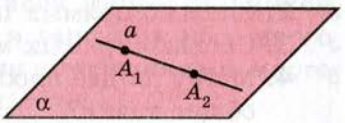


Рис. 77.1

Теорема. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a. Так как на прямой a выполняются аксиомы планиметрии, то на ней найдутся точки B, C. В силу аксиомы 2 через точки A, B, C проходит единственная плоскость α (рис. 77.2). По предыдущей теореме, прямая a лежит в плоскости α. Значит, плоскость α проходит через прямую a и точку A. Покажем, что эта плоскость единственна. Действительно, всякая плоскость, проходящая через прямую a и точку A, будет проходить также через точки B, C. По аксиоме 2 она должна совпадать с плоскостью α. ■

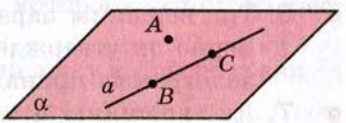


Рис. 77.2

Пример 1. В пространстве даны четыре точки A, B, C, D, не принадлежащие одной плоскости. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из этих точек?

Ответ. Четыре плоскости, которые проходят через точки A, B, C; A, B, D; A, C, D и B, C, D.

Пример 2. Верно ли утверждение: «Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, является касательной к окружности»?

Решение. Нет, не верно. Прямая может не лежать в плоскости окружности и иметь с окружностью одну общую точку.

Вопросы

1. Какой раздел геометрии называется стереометрией?
2. Что означает слово «стереометрия»?
3. Назовите основные понятия стереометрии.
4. Как обозначаются плоскости?
5. Сформулируйте аксиомы стереометрии.
6. Что можно сказать о прямой, имеющей с плоскостью две общие точки?
7. Сколько плоскостей проходит через прямую и не принадлежащую ей точку?

Задачи

○ **1.** Верно ли, что: а) всякие три точки принадлежат одной плоскости; б) всякие четыре точки принадлежат одной плоскости?

○ **2.** Сколько прямых проходит через две данные точки?

○ **3.** Сколько прямых может проходить через три заданные точки?

○ **4.** Могут ли две плоскости иметь только: а) одну общую точку; б) две общие точки?

○ **5.** Четыре точки не принадлежат одной плоскости. Могут ли три из этих точек принадлежать одной прямой?

○ **6.** Три вершины параллелограмма принадлежат некоторой плоскости. Верно ли утверждение о том, что и четвертая вершина этого параллелограмма принадлежит той же плоскости?

○ **7.** Две вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма принадлежат одной плоскости. Верно ли утверждение о том, что и две другие вершины параллелограмма принадлежат этой плоскости?

○ **8.** Могут ли три плоскости иметь только: а) одну общую точку; б) две общие точки; в) общую прямую?

○ **9.** При каком расположении трех точек через них можно провести бесконечно много плоскостей?

10. Верно ли, что все точки окружности принадлежат плоскости, если эта окружность имеет с данной плоскостью: а) две общие точки; б) три общие точки?

11. Докажите, что для любой плоскости существуют точки, ей не принадлежащие.

12. Могут ли две плоскости пересекаться по двум прямым?

13. Докажите, что через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

* **14.** В пространстве даны n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Сколько прямых можно провести через различные пары этих точек?

* **15.** В пространстве даны n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через различные тройки этих точек?

* **16.** Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку, лежат в одной плоскости.

* **17.** Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через их точку пересечения, лежат в одной плоскости.

§ 78. Фигуры в пространстве

Среди пространственных фигур выделяются ***многогранники*** — тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, называемых ***гранями*** многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ***ребрами*** и ***вершинами*** многогранника. Примерами многогранников являются:

куб — многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис. 78.1.);

параллелепипед — многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 78.2);

прямоугольный параллелепипед — параллелепипед, у которого грани — прямоугольники (рис. 78.3);

призма — многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых ***основаниями призмы***, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований, называемых ***боковыми гранями призмы*** (рис. 78.4);

прямая призма — призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники (рис. 78.5);

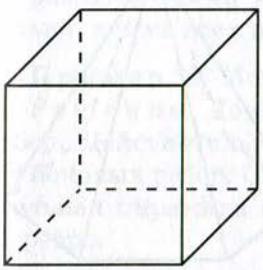


Рис. 78.1

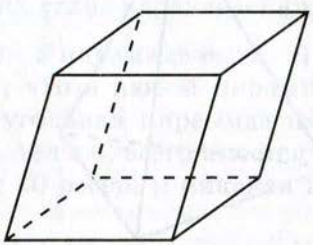


Рис. 78.2

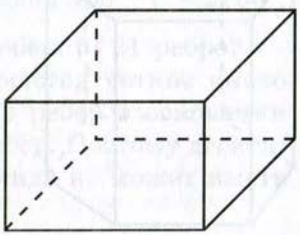


Рис. 78.3

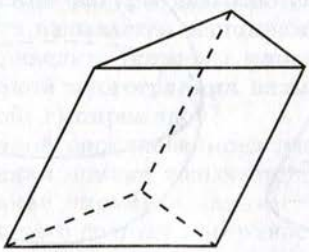


Рис. 78.4

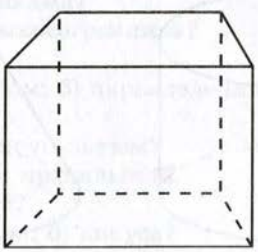


Рис. 78.5

правильная призма — прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники (рис. 78.6);

пирамида — многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого ***основанием пирамиды***, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых ***боковыми гранями пирамиды***. Общая вершина боковых граней называется ***вершиной пирамиды***. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются ***боковыми ребрами*** (рис. 78.7);

правильная пирамида — пирамида, в основании которой правильный многоугольник и все боковые ребра которой равны (рис. 78.8).

Многогранники обозначаются указанием их вершин. Например, куб и параллелепипед обозначаются $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (можно сокращенно $A...D_1$), треугольная призма обозначается $ABCA_1B_1C_1$, четырехугольная пирамида обозначается $SABCD$, где S — вершина, $ABCD$ — четырехугольник, лежащий в основании.

Примерами пространственных фигур являются также знакомые вам:

цилиндр, поверхность которого состоит из кругов — ***оснований цилиндра*** — и свернутого прямоугольника — ***боковой поверхности*** (рис. 78.9);

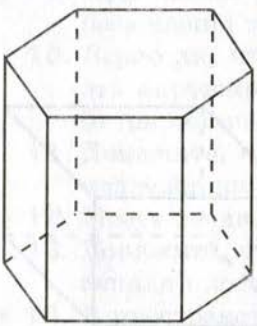


Рис. 78.6

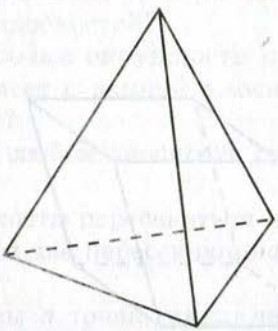


Рис. 78.7

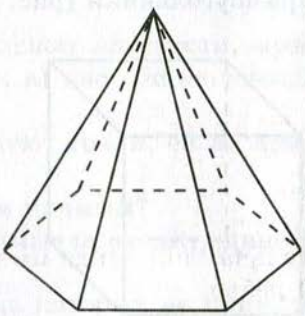


Рис. 78.8

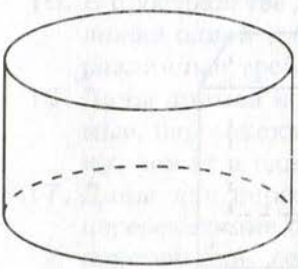


Рис. 78.9

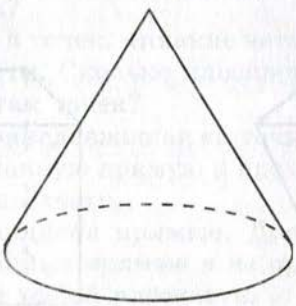


Рис. 78.10

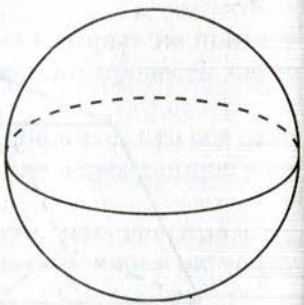


Рис. 78.11

конус, поверхность которого состоит из круга — ***основания конуса*** — и свернутого кругового сектора — ***боковой поверхности конуса*** (рис. 78.10);

шар (рис. 78.11).

Так же как и для фигур на плоскости, для пространственных фигур можно определить понятия равенства и подобия.

Две фигуры F и F' в пространстве называются ***равными***, если существует преобразование одной из них в другую, сохраняющее расстояния между точками, т. е. переводящее любые две точки A, B одной фигуры в точки A', B' другой фигуры так, что $A'B' = AB$.

Две фигуры F и F' в пространстве называются ***подобными***, если существует преобразование одной из них в другую, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, т. е. переводящее любые две точки A, B одной фигуры в точки A', B' другой фигуры так, что $A'B' = k \cdot AB$, где k — некоторое фиксированное положительное число, называемое ***коэффициентом подобия***.

Для равенства и подобия фигур в пространстве справедливы те же свойства, что и для фигур на плоскости. В частности, имеют место признаки равенства и подобия треугольников.

Пример 1. Найдите сумму всех плоских углов параллелепипеда.

Решение. Поверхность параллелепипеда состоит из шести параллелограммов. Сумма углов каждого параллелограмма равна 360°. Следовательно, сумма всех плоских углов параллелепипеда равна $360° \cdot 6 = 2160°$.

Пример 2. Может ли в пирамиде быть: а) 20 ребер; б) 21 ребро?

Решение. Докажем, что в любой пирамиде имеется четное число ребер. Действительно, n-угольная пирамида имеет n ребер в основании и n боковых ребер. Следовательно, всего имеется $2n$ ребер. Поэтому десятиугольная пирамида имеет 20 ребер, и никакая пирамида не может иметь 21 ребро.

Вопросы

1. Какие фигуры называются многогранниками?
2. Что называется вершинами и ребрами многогранника?
3. Приведите примеры многогранников.
4. Какой многогранник называется: а) кубом; б) параллелепипедом; в) призмой; г) пирамидой?
5. Какой параллелепипед называется прямоугольным?
6. Какая призма называется: а) прямой; б) правильной?
7. Какая пирамида называется правильной?
8. Из чего состоит поверхность: а) цилиндра; б) конуса?

Задачи

1. Изобразите: а) прямоугольный параллелепипед; б) треугольную призму; в) четырехугольную пирамиду.
2. Какое наименьшее число граней (ребер, вершин) может иметь: а) призма; б) пирамида?
3. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, у которой 32 ребра?
4. Может ли в призме число ребер быть равно: а) 8; б) 15; в) 13; г) 12?
5. Докажите, что число ребер произвольной призмы делится на три.
6. Какой многоугольник лежит в основании призмы, у которой 15 ребер?
7. Существует ли пирамида, которая имеет: а) 14 ребер; б) 35 ребер?
8. Докажите, что любая пирамида имеет четное число ребер.
9. Найдите сумму всех плоских углов: а) треугольной пирамиды; б) треугольной призмы.
10. Сколько прямых можно провести через различные пары вершин: а) куба; б) треугольной пирамиды; в) треугольной призмы?
11. Ребро куба равно a. Найдите длину кратчайшего пути из вершины куба в противоположную вершину по граням куба. Сколько имеется таких путей?
12. Существуют ли отличные от куба многогранники, все грани которых являются равными между собой квадратами?
13. Существует ли многогранник, все грани которого являются параллелограммами, но который не является призмой?
14. Каждая грань куба разделена на 4 квадрата, которые окрашены в один из трех цветов — синий, желтый или красный — так, что квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько при этом получилось синих, желтых и красных квадратов?
15. Сколько красок потребуется для раскраски граней: а) куба; б) n-угольной призмы; в) n-угольной пирамиды так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?
16. Возможна ли треугольная пирамида $ABCD$ с ребрами $AB = CD = 8$; $AC = BD = 10$; $AD = BC = 13$?

§79. Угол в пространстве

Для определения понятия угла в пространстве заметим, что два луча с общей вершиной лежат в одной плоскости, и поэтому можно использовать определение угла, которое было дано при изучении планиметрии.

Углом в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами (рис. 79.1).

Две пересекающиеся прямые в пространстве называются ***перпендикулярными***, если при пересечении они образуют прямые углы.

Например, в кубе пересекающиеся ребра перпендикулярны, диагональ грани куба образует с ребрами этой грани углы 45°.

Аналогично тому, как прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, плоскость разбивает пространство на два ***полупространства*** (рис. 79.2).

Если две точки принадлежат разным полупространствам относительно данной плоскости, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с плоскостью. Если две точки принадлежат одному полупространству, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с плоскостью.

Аналогичным образом, две полуплоскости с общей граничной прямой разбивают пространство на две части.

Фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями, называется ***двугранным углом*** (рис. 79.3, а). Сами полуплоскости называются ***гранями*** двугранного угла, а их общая граничная прямая — ***ребром*** двугранного угла. Точки двугранного угла, не принадлежащие его граням, называются ***внутренними***.

Фигура, образованная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, а также частью пространства, органиченной этими углами, называется ***трехгранным углом*** (рис. 79.3, б). Сами плоские углы называются ***гранями***, их стороны — ***ребрами***, а их общая вершина — ***вершиной*** трехгранного угла.

Аналогичным образом определяются понятия четырехгранного угла, пятигранного угла и т. д., а также общее понятие многогранного угла.

Существует много практических способов приближенного измерения углов в пространстве. Например, с помощью ногтя указательного пальца.

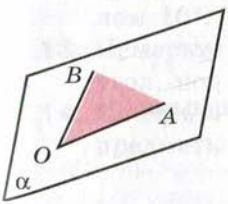


Рис. 79.1

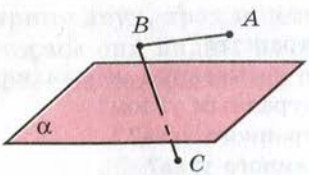
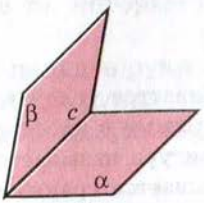
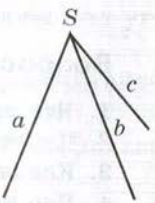


Рис. 79.2



а)



б)

Рис. 79.3

Ширина ногтя указательного пальца приближенно равна 1 см, а расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки 60 см, поэтому угол, под которым виден ноготь, приближенно равен 1°. Это следует из решения несложной геометрической задачи, в которой нужно найти угол при вершине равнобедренного треугольника, у которого основание (ширина ногтя) равно 1 см, а высота (расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки) равно 60 см. Таким образом, для того чтобы определить величину угла, под которым виден тот или иной предмет, достаточно вытянуть к нему руку и подсчитать, сколько раз в нем укладывается ноготь указательного пальца. Полученное число будет равно искомому числу градусов.

Пример 1. Докажите, что через точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую. Сколько таких прямых можно провести через данную точку?

Решение. Проведем через данную прямую какую-нибудь плоскость. В этой плоскости через данную точку проведем прямую, перпендикулярную данной прямой. Она и будет искомой. Поскольку через данную прямую в пространстве можно провести бесконечно много плоскостей, то и прямых, проходящих через точку прямой и перпендикулярных этой прямой, будет бесконечно много.

Пример 2. В правильной четырехугольной пирамиде боковыми гранями являются правильные треугольники. Найдите угол между ее несоседними боковыми ребрами.

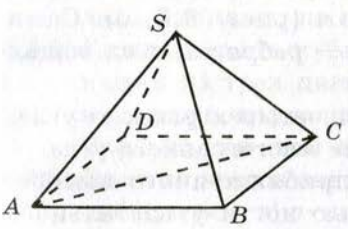


Рис. 79.4

Решение. Пусть $SABCD$ — правильная пирамида (рис. 79.4). Найдем угол ASC. Из условия следует, что все ребра пирамиды равны. Обозначим их длину a. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат, и, следовательно, $AC = \sqrt{2}a$. Таким образом, в равнобедренном треугольнике ASC две боковые стороны равны a и основание равно $\sqrt{2}a$. Значит, угол ASC равен 90°.

Вопросы

1. Что называется углом в пространстве?
2. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
3. Какая фигура называется двугранным углом?
4. Что называется гранями двугранного угла?
5. Что называется ребром двугранного угла?
6. Какая фигура называется трехгранным углом?

7. Что называется гранью, ребром и вершиной трехгранного угла?
8. Под каким углом виден ноготь указательного пальца вытянутой руки?
9. Опишите практический способ приближенного измерения углов.

Задачи

○ **1.** Чему равен угол между пересекающимися ребрами куба?

2. Докажите, что пересекающиеся диагонали двух соседних граней куба образуют угол 60°.

3. В правильной треугольной пирамиде, гранями которой являются правильные треугольники, найдите угол между высотами этих треугольников, проведенными к общему ребру.

4. В правильной треугольной призме, боковыми гранями которой являются квадраты, найдите угол между пересекающимися диагоналями боковых граней.

5. В пространстве даны прямая a и не принадлежащая ей точка A. Как провести прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку A? Сколько таких прямых?

* **6.** На поверхности куба найдите точки, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом.

7. Определите понятия: а) смежных двугранных углов; б) вертикальных двугранных углов; в) развернутого двугранного угла; г) прямого двугранного угла; д) перпендикулярных плоскостей.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите двугранные углы, образованные плоскостями: а) ABC и ABC_1; б) ABC и ABA_1; в) ABC_1 и CDA_1.

○ **9.** Сколько трехгранных углов имеет: а) куб; б) треугольная пирамида; в) четырехугольная пирамида?

10. Укажите многогранники, имеющие: а) четырехгранные углы; б) пятигранные углы.

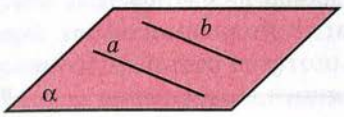
11. Измерьте ширину своего ногтя указательного пальца и расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки. Рассчитайте угол, под которым виден ваш ноготь.

12. Среди окружающих предметов найдите те, которые видны под углом 10°.

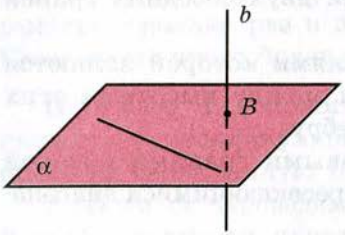
13. Измерьте ширину двух, трех и четырех пальцев руки и рассчитайте угол, под которым они видны на вытянутой руке.

14. Измерьте углы, под которыми видны какие-нибудь окружающие вас предметы.

§ 80. Параллельность в пространстве



Напомним, что две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. Аналогичным образом дается определение параллельности прямых в пространстве.



Две прямые в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 80.1).

Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$.

Заметим, что для параллельности прямых в пространстве кроме требования, чтобы прямые не пересекались, нужно, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости. Прямые в пространстве могут не пересекаться, но лежать в разных плоскостях (рис. 80.2). В этом случае они называются скрещивающимися.

Две прямые в пространстве называются ***скрещивающимися***, если они не лежат в одной плоскости.

Представим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве в виде следующей схемы:

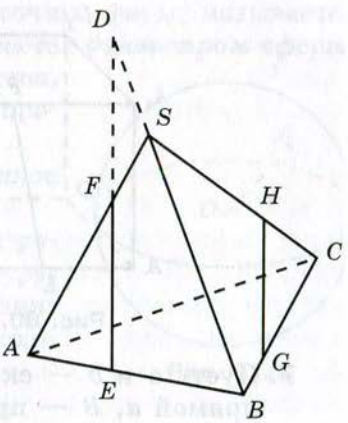
Будем также говорить, что два отрезка параллельны или скрещиваются, если они лежат на параллельных или скрещивающихся прямых соответственно.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB и A_1B_1 параллельны, а ребра AB и A_1D_1 скрещиваются.

Так же как и на плоскости, в пространстве выполняется следующее свойство параллельных прямых: если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Пример 1. Сколько пар параллельных ребер имеется у куба?

Решение. Всего у куба 12 ребер, и у каждого имеется три параллельных ему ребра. Однако при таком подсчете пар параллельных ребер куба мы каждую пару посчитаем дважды, сначала для одного ее ребра, а потом для другого. Значит, число пар параллельных ребер куба будет равно $\frac{12 \cdot 3}{2} = 18$.



Пример 2. Определите взаимное расположение прямых EF и GH на рисунке 80.3

Решение. Прямые EF и GH кажутся параллельными, однако на самом деле они скрещиваются. Действительно, прямая EF лежит в плоскости SAB и пересекает плоскость SBC в точке D прямой SB. Прямая GH лежит в плоскости SBC и пересекает прямую SB в другой точке. Таким образом, прямые EF и GH не лежат в одной плоскости, значит, они скрещиваются.

Вопросы

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2. Как обозначается параллельность прямых?
3. Какие прямые называются скрещивающимися?
4. Сформулируйте свойство параллельных прямых.

Задачи

1. Укажите количество пар параллельных ребер в: а) параллелепипеде; б) треугольной призме; в) правильной четырехугольной пирамиде.

2. Сформулируйте, какие две прямые в пространстве являются непараллельными.

3. Верно ли, что если две прямые лежат в разных плоскостях, то они скрещиваются?

4. Укажите количество пар скрещивающихся ребер в: а) параллелепипеде; б) треугольной призме; в) правильной четырехугольной пирамиде.

5. Определите взаимное расположение прямых EF и GH на рисунке 80.4.

6. Пусть a и b — пересекающиеся или параллельные прямые. Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2 — прямой b. Что можно сказать о взаимном расположении прямых A_1B_1, A_2B_2?

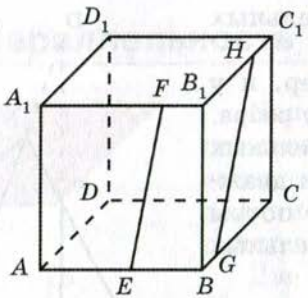


Рис. 80.4

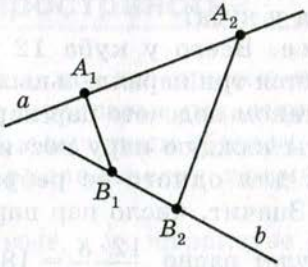


Рис. 80.5

7. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Точка A принадлежит прямой a, B — прямой b. Через прямую a и точку C на прямой AB проведена плоскость α; через прямую b и эту же точку C проведена плоскость β. Укажите линию пересечения плоскостей α и β.

8. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 80.5). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают прямые a и b. Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

9. В пространстве даны n параллельных между собой прямых. Сколько плоскостей можно провести через различные пары этих прямых, если известно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости?

10. Докажите, что через точку пространства, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная этой прямой.

11. Сформулируйте определения параллельности: а) прямой и плоскости; б) двух плоскостей.

12. В кубе $A...D_1$ укажите параллельные: а) прямые и плоскости; б) плоскости.

§ 81. Сфера и шар

Пространственными аналогами окружности и круга на плоскости являются соответственно сфера и шар.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на данное расстояние.

Данная точка называется ***центром сферы***, а данное расстояние — ***радиусом сферы*** (рис. 81.1).

Таким образом, сфера с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек A пространства, удаленных от точки O на расстояние R.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки сферы, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром сферы***.

Фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное, называется ***шаром***.

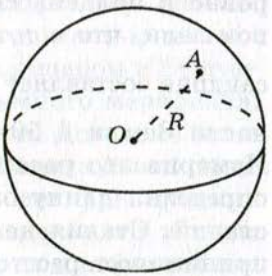


Рис. 81.1

Данная точка называется центром шара, а данное расстояние — ***радиусом шара***.

Таким образом, шар с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек пространства, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее R.

Исторические сведения

Представления людей о форме и размерах Земли складывались постепенно на протяжении многих веков. Первые мысли о шарообразности Земли возникли в VI—V веках до нашей эры. Они появились в результате астрономических наблюдений. Было замечено, в частности, что при лунных затмениях тень на Луне имеет форму круга. Это объяснили тем, что, встав между Солнцем и Луной, Земля отбрасывает свою тень на Луну, следовательно, Земля круглая или шарообразная. Мысль о шарообразности Земли подтверждали наблюдения мореплавателей за появлением из-за горизонта кораблей: сначала показывалась верхняя часть мачты, а затем постепенно, по мере приближения корабля, появлялись и остальные его части. Такой эффект объясняли тем, что корабль двигается по дуге шаровой поверхности Земли и его более высокие части раньше выступают из-за наивысшей точки дуги, расположенной между кораблем и наблюдателем.

Заметим, что когда говорят о шарообразности Земли, не имеют в виду реальную земную поверхность. Поверхность Земли неровная, на ней имеются высокие горы и глубокие ущелья, океанские впадины. Речь идет о некоторой идеальной поверхности, часть которой составляет поверхность Мирового океана. Там, где нет океанов или морей, такую поверхность представляют мысленно и относительно нее считают высоту рельефа местности. Именно эта высота и указывается на географических картах.

После того как была высказана гипотеза о шарообразности Земли, возник вопрос о нахождении ее размеров. Первый дошедший до нас способ измерения размеров Земли был предложен и осуществлен ученым из Александрии Эратосфеном в III веке до нашей эры. Из рассказов путешественников

Эратосфену было известно, что в городе Сиене (ныне Асуан), находящемся к югу от Александрии, имеется колодец, дно которого освещается Солнцем ровно в полдень самого длинного дня в году. Измерения Эратосфена показали, что в тот же день и час отклонение солнца от зенита в Александрии составляет $\frac{1}{50}$ часть окружности, и, следовательно, длина окружности Земли в 50 раз больше расстояния от Александрии до Сиены. Измерив это расстояние с помощью посланного им гонца, Эратосфен определил длину окружности Земли. Она оказалась равна 250 тысячам стадий. Стадия не была точно определенной мерой длины. За стадию принималось расстояние, которое проходит человек за время, нужное для подъема Солнца над горизонтом. Учитывая среднюю скорость человека и то, что подъем солнца над горизонтом происходит за 2 минуты, можно заключить, что стадия составляет примерно 160—185 м. Если за стадию принять 160 м, то получится точный результат 40 000 км. Однако ясно, что измерения Эратосфена не могли быть такими точными хотя бы потому, что Сиена расположена не строго на юге от Александрии и точность измерения расстояния шагами не очень велика.

Более точные измерения Земли, использующие астрономические наблюдения, были проведены только в XVII веке. Для этого на поверхности Земли выбирались два пункта, расположенные на одном меридиане. Наблюдая из них за Солнцем или звездами, например за Полярной звездой, определяли величину φ дуги этого меридиана. Измерив затем расстояние d между этими пунктами, находили длину всей окружности Земли по формуле $l = \frac{360^\circ}{\varphi} d$.

Измерение больших расстояний на поверхности Земли оказывается не таким простым делом, как может показаться на первый взгляд. Как уже отмечалось, земная поверхность не ровная. Одни ее точки расположены выше, другие ниже. На пути могут встретиться препятствия: горы, болота, реки и т. д. Преодолеть эти трудности измерения расстояний позволяет способ Фалеса Милетского (IV в. до н. э.). В начале XVII века его усовершенствовал голландский математик В. Снеллиус (1580—1626). Для нахождения расстояния между значительно удаленными друг от друга пунктами Снеллиус строил сеть треугольников с началом в одном и концом в другом пункте, которую он назвал триангуляцией. Сеть строилась таким образом, чтобы из каждой вершины были видны соседние с ней вершины. Измерив расстояние между какими-нибудь соседними вершинами и углы, образованные сторонами треугольников, с помощью тригонометрических формул можно найти расстояние между исходными пунктами.

Похожая задача возникает при нахождении расстояния между вершинами многогранника, а именно: по известным плоским углам многогранника и одному из ребер найти расстояние между заданными вершинами.

Для вычисления земного меридиана Снеллиус с помощью метода триангуляции измерил расстояние между городами Алькмааром и Берген-оп-Зоомом в Голландии и по нему вычислил длину земного меридиана. В пересчете на километры она оказалась равна 38 605 км. Довольно большая ошибка объясняется тем, что для измерения углов Снеллиус использовал недостаточно точные приборы. Через несколько лет французский ученый Пикар, используя метод Снеллиуса и гораздо более точные приборы, снова измерил длину меридиана. В пересчете на километры она оказалась равна 40 036 км.

После этого многие ученые в разных странах мира стали заниматься вычислением длин дуг меридианов. Оказалось, что длина дуг меридианов в 1° различна в зависимости от места расположения этих дуг. Разница могла быть за счет погрешности вычислений, а также в случае, если поверхность Земли не является в точности шаровой поверхностью.

Используя физические соображения, основанные на учете вращения Земли, И. Ньютон высказал предположение, что Земля сжата у полюсов, как мандарин, и имеет форму эллипсоида вращения. С другой стороны, немецкий ученый И. Эйзеншмидт, основываясь на таблицах измерений дуг меридианов, утверждал, что Земля не только не сплюснута у полюсов, но, наоборот, вытянута, как лимон. Между учеными разгорелись споры по поводу этих двух точек зрения. Каждая из сторон приводила аргументы в пользу своей правоты.

Для того чтобы разобраться с этим вопросом, в 1735 году Парижская академия решила послать две экспедиции: одну на экватор в Перу, другую на север в Лапландию. Преодолев значительные трудности, жару и холод, экспедиции произвели измерения, убедительно доказавшие правоту Ньютона. Длина дуги меридиана в 1° в Лапландии составила 111,95 км, во Франции — 111,21 км, в Перу — 110,61 км. Сжатие поверхности Земли у полюсов составило около 20 км с каждой стороны.

Мы привели данные в километрах, однако в то время ни метра, ни километра еще не существовало. Все измерения проводились в других единицах, большое число и неточное определение которых вносили существенную путаницу в вычисления. Для того чтобы унифицировать измерения, Национальное собрание Франции в 1791 году решило ввести единую меру длины, в качестве которой была принята одна десятимиллионная часть дуги парижского меридиана от Северного полюса до экватора. Она была названа «метром», от греческого слова «метрос», что значит «мера». Тогда же были учреждены две экспедиции для точного измерения

этого меридиана. Экспедициями была построена сеть треугольников от Барселоны до Дюнкерка на северном берегу Франции. Шесть лет заняли измерения и вычисления, пришедшиеся как раз на годы Французской революции. В результате работ был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве и называется архивным метром.

Анализ проведенных измерений длины дуги парижского меридиана позволил П. Лапласу (1749—1827) в начале XIX века сделать еще один важный вывод о форме Земли. Оказалось, что форма Земли не совпадает точно с эллипсоидом. Поверхность Земли имеет неровности. Конечно, речь идет не о неровностях рельефа, а о неровностях мыслимой поверхности Мирового океана. В одних местах эта поверхность имеет большую выпуклость — бугры, в других — она более плоская. Высота этих бугров по сравнению с размерами Земли очень небольшая и не превосходит 150 м. Их расположение на поверхности Земли хаотично и зависит от плотности Земли на соответствующих участках.

После открытия Лапласа стало ясно, что измерение только очень длинных дуг дает правильное значение длин меридианов. Россия обладала достаточными просторами для проведения таких измерений, и в начале XIX века они начались под руководством В. Я. Струве. Работа продолжалась в течение сорока лет. В результате была измерена дуга меридиана длиной в $25° 20'$ (около 2820 км). Погрешность на всем протяжении дуги не превысила 13 м, т. е. одной двухсоттысячной всей дуги.

В XX веке использование компьютера, искусственных спутников Земли дало возможность еще более точных измерений. Определяя с помощью радаров расстояния от станции наблюдения до спутников и обрабатывая их на ЭВМ, находят траекторию движения спутника, а по ней уточняют и форму Земли.

Пример 1. Докажите, что две сферы, для которых расстояние между их центрами больше суммы радиусов, не имеют общих точек.

Решение. Пусть даны две сферы с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2, $R_1 + R_2 < O_1O_2$ (рис. 81.2). Рассмотрим точку C на первой сфере, $O_1C = R_1$. Тогда $O_2C \geqslant O_1O_2 - O_1C > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$ и, следовательно, точка C не принадлежит второй сфере. Значит, эти сферы не имеют общих точек.

Пример 2. Точка A расположена вне сферы радиуса R и удалена от центра O этой сферы на расстояние d ($d > R$). Чему равно наименьшее расстояние от точки A до точек данной сферы?

Решение. Пусть B — точка пересечения сферы с отрезком OA (рис. 81.3). Покажем, что расстояние AB является наименьшим из всех

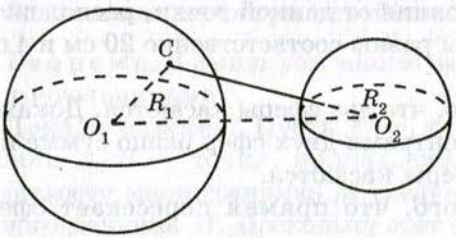


Рис. 81.2

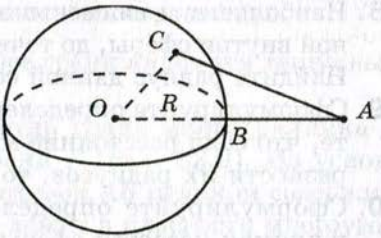


Рис. 81.3

возможных расстояний от точки A до точек сферы. Действительно, для любой другой точки C сферы выполняется неравенство $AB + BO < AC + CO$. Так как $BO = CO = R$, то из этого неравенства получаем неравенство $AB < AC$. Учитывая, что $AO = d$ и $BO = R$, получаем, что искомое наименьшее расстояние равно длине отрезка AB, т. е. равно $d - R$.

Вопросы

1. Какая фигура в пространстве называется сферой?
2. Что называется центром и радиусом сферы?
3. Какая фигура в пространстве называется шаром?
4. Что называется центром и радиусом шара?

Задачи

1. Какому неравенству удовлетворяют точки A, принадлежащие шару с центром в точке O и радиусом R? Какому неравенству удовлетворяют точки вне этого шара?

2. Через центр сферы провели плоскость. Докажите, что в сечении получится окружность.

3. Докажите, что диаметр сферы есть наибольшая хорда.

4. Докажите, что если расстояние между центрами двух сфер меньше разности их радиусов, то эти сферы не имеют общих точек.

5. Точка A расположена вне сферы радиуса R и удалена от центра O этой сферы на расстояние d ($d > R$). Чему равно наибольшее расстояние от точки A до точек данной сферы?

6. Точка A расположена внутри сферы радиуса R и удалена от центра O этой сферы на расстояние d ($d < R$). Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной сферы?

7. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне сферы, до точек сферы равны соответственно 50 см и 20 см. Найдите радиус данной сферы.

8. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри сферы, до точек сферы равны соответственно 20 см и 4 см. Найдите радиус данной сферы.

9. Сформулируйте определение того, что две сферы касаются. Докажите, что если расстояние между центрами двух сфер равно сумме или разности их радиусов, то эти сферы касаются.

10. Сформулируйте определения того, что прямая пересекает сферу и прямая касается сферы.

11. Сколько касательных прямых к данной сфере можно провести через данную точку? Рассмотрите различные случаи расположения точки.

12. Докажите, что если расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса сферы, то прямая и сфера не имеют общих точек.

13. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку сферы и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, будет касательной к сфере.

14. Докажите, что отрезки касательных к сфере, проведенных из одной точки, равны.

15. Сформулируйте определение касательной плоскости к сфере.

§82. Выпуклые многогранники

Фигура в пространстве называется ***выпуклой***, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок.

Многогранник называется ***выпуклым***, если он является выпуклой фигурой.

Выше (§ 78) были приведены примеры выпуклых многогранников. На рисунке 82.1 приведены примеры невыпуклых многогранников.

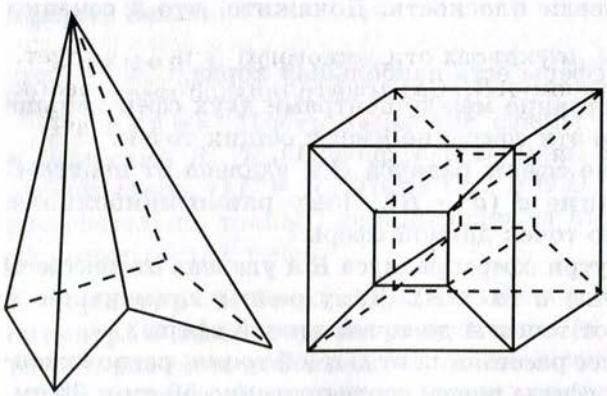


Рис. 82.1

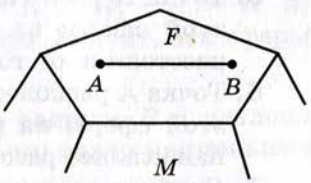


Рис. 82.2

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.

Теорема. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Доказательство. Пусть F — какая-нибудь грань многогранника M, и точки A, B — точки, принадлежащие грани F (рис. 82.2). Из условия выпуклости многогранника M следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. F — выпуклый многоугольник.■

Теорема. Выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Доказательство. Пусть M — выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M. Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками (рис. 82.3). Заметим, что в силу выпуклости многогранника M все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника M. Эти пирамиды целиком содержатся в M и все вместе составляют многогранник M.■

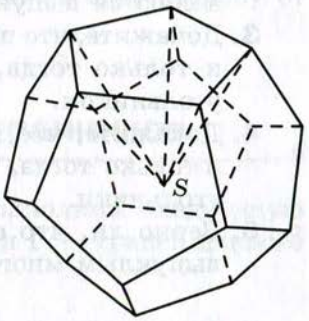


Рис. 82.3

Пример 1. Докажите, что пересечение выпуклых многогранников является выпуклой фигурой.

Решение. Пусть M_1 и M_2 — выпуклые многогранники, M — их пересечение. Если точки A и B принадлежат M, то они принадлежат многогранникам M_1 и M_2. Из выпуклости этих многогранников следует, что в них содержится и отрезок AB. Следовательно, этот отрезок содержится и в пересечении этих многогранников. Значит, пересечение многогранников M_1 и M_2 является выпуклой фигурой.

Пример 2. Как связано число плоских углов многогранника с числом его ребер?

Решение. В каждой грани многогранника число плоских углов равно числу сторон соответствующего многоугольника. Каждое ребро многогранника является стороной ровно двух многоугольников. Поэтому при подсчете всех плоских углов многогранника каждое ребро будет подсчитано дважды. Следовательно, число плоских углов многогранника равно удвоенному числу его ребер.

Вопросы

1. Какая фигура в пространстве называется выпуклой?
2. Какой многогранник называется выпуклым?
3. Приведите примеры выпуклых и невыпуклых многогранников.
4. Может ли гранью выпуклого многогранника быть невыпуклый многоугольник?
5. Из каких многогранников может быть составлен выпуклый многогранник?

Задачи

1. На рисунке 82.4 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

2. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

3. Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основание является выпуклым многоугольником.

4. Докажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основаниями являются выпуклые многоугольники.

5. Верно ли, что объединение выпуклых многогранников является выпуклым многогранником?

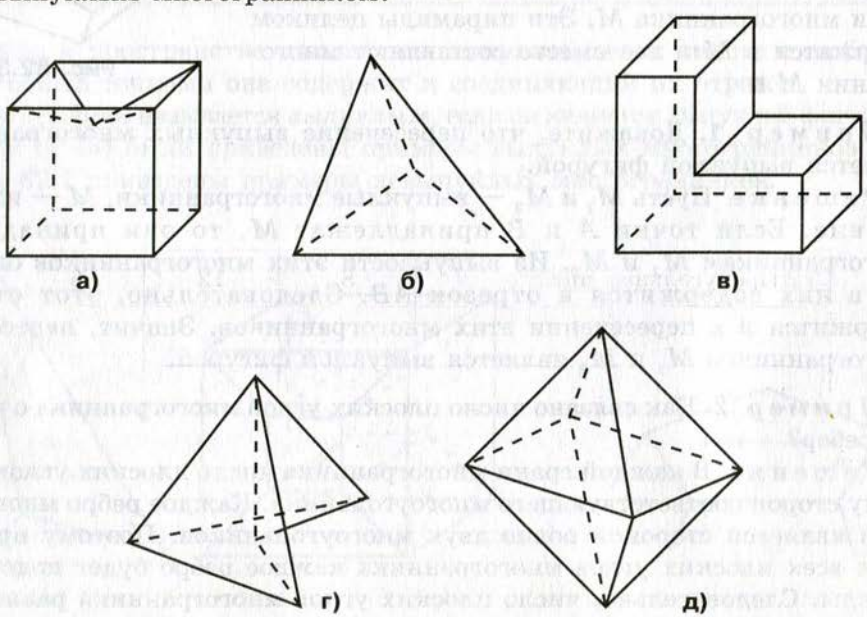


Рис. 82.4

6. Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

7. Может ли в многограннике быть 21 плоский угол?

8. Может ли выпуклый многогранник иметь 21 ребро? Приведите пример такого многогранника. Сколько у него плоских углов?

9. Может ли число вершин многогранника равняться числу его граней?

10. Приведите пример выпуклого многогранника, у которого: а) 5 вершин; б) 7 вершин.

* **11.** Докажите, что утроенное число вершин многогранника меньше или равно удвоенному числу его ребер.

* **12.** Докажите, что утроенное число граней многогранника меньше или равно удвоенному числу его ребер.

* **13.** Докажите, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от каждой своей грани.

§ 83. Теорема Эйлера для многогранников

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В — число вершин, Р — ребер и Г — граней данного многогранника.

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n + 2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство $В - Р + Г = 2$. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$В - Р + Г = 2,$$

где В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней данного многогранника.

Для доказательства этого равенства представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку, содержащую $Г' = Г - 1$ многоугольников (которые по-прежнему будем называть гранями), В вершин и Р ребер.

Для этой сетки, как было показано ранее (см. § 25), справедливо равенство

$$В - Р + Г' = 1.$$

Следовательно, для многогранника справедливо требуемое равенство. ■

Пример 1. Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

Решение. Пусть В — число вершин, Р — число ребер, Г — число граней данного многогранника. Тогда $2Р = 4Г$, и, следовательно, $Г = 6$. По формуле Эйлера $В - Р + Г = 2$, значит, $В = 2 + 12 - 6 = 8$. Примером такого многогранника является параллелепипед.

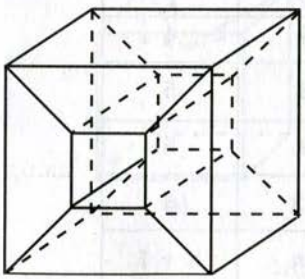


Рис. 83.1

Пример 2. Приведите пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера.

Решение. Пример соответствующего многогранника показан на рисунке 83.1. Этот многогранник имеет 16 вершин, 32 ребра и 16 граней. Таким образом, для этого многогранника выполняется равенство $В - Р + Г = 0$.

Вопросы

1. Чему равно число вершин, ребер и граней: а) n-угольной призмы; б) n-угольной пирамиды?
2. Сформулируйте теорему Эйлера.

Задачи

○ **1.** Опишите все выпуклые многогранники с пятью вершинами.

2. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер?

3. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.

* **4.** Докажите, что не существует выпуклого многогранника с семью ребрами.

5. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней и в каждой из них по 13 ребер?

6. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте эти многогранники.

* **7.** Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходится три ребра.

* **8.** Докажите, что в любом выпуклом многограннике число трехгранных углов плюс число треугольных граней больше или равно 8.

* **9.** Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 ребер и в каждой вершине сходится по три ребра. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

* **10.** Подумайте, где в рассуждениях, показывающих справедливость соотношения Эйлера, использовалась выпуклость многогранника.

* **11.** В кубе вырезали одну грань и оставшиеся грани растянули на плоскости. Образовавшийся при этом граф изображен на рисунке 83.2. Нарисуйте соответствующие графы:

а) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной пирамид, у которых вырезается основание;

б) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной призм, у которых вырезается основание;

в) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной пирамид, у которых вырезается боковая грань;

г) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной призм, у которых вырезается боковая грань.

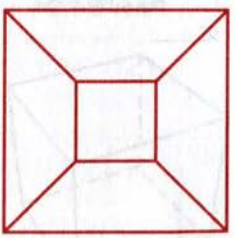


Рис. 83.2

§ 84. Правильные многогранники

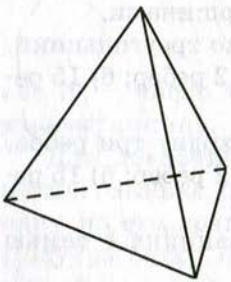


Рис. 84.1

Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Доказано, что существует только пять типов правильных многогранников. Наиболее простым правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. 84.1). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также ***тетраэдром***, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

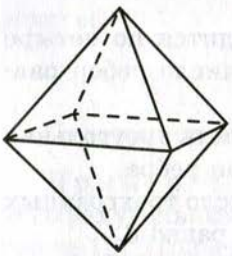


Рис. 84.2

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 84.2. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется ***октаэдром***.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 84.3. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется ***икосаэдром***.

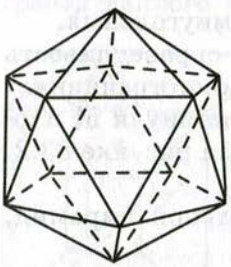


Рис. 84.3

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 84.4), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также ***гексаэдром***.

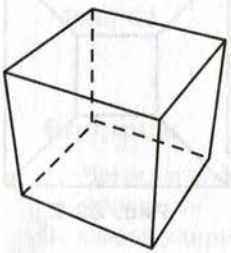


Рис. 84.4

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 84.5. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется ***додекаэдром***.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует. Таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

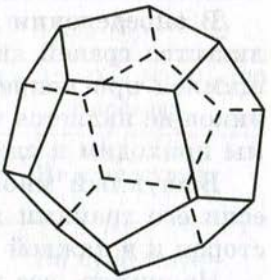
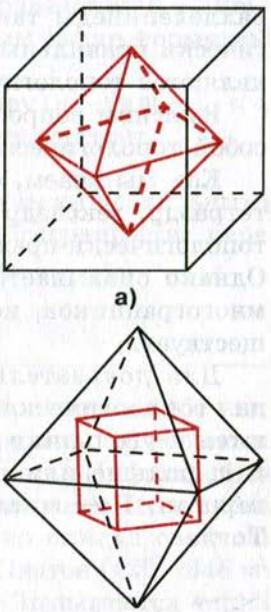


Рис. 84.5

Правильные многогранники можно вписывать друг в друга так, что вершины одного многогранника будут находиться в центрах граней другого. Такие многогранники называются **двойственными**. Например, куб и октаэдр являются двойственными многогранниками. Центры граней куба служат вершинами октаэдра, и, наоборот, центры граней октаэдра являются вершинами куба (рис. 84.6, а, б). Аналогично икосаэдр и додекаэдр являются двойственными многогранниками (рис. 84.7, а, б).

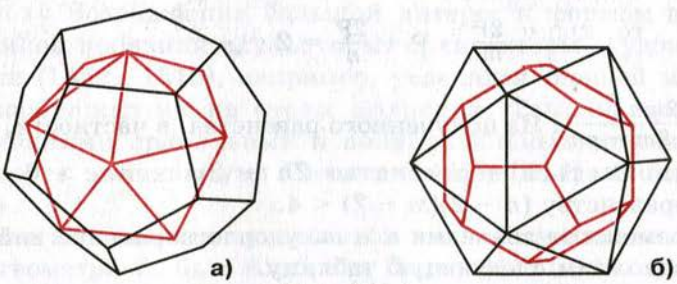


а) б)

Рис. 84.6

Рассмотрим понятие правильного многогранника с точки зрения топологии — науки, изучающей свойства фигур, не зависящих от различных деформаций без разрывов. С этой точки зрения, например, все треугольники эквивалентны, так как один треугольник всегда может быть получен из любого другого соответствующим сжатием или растяжением сторон. Вообще все многоугольники с одинаковым числом сторон эквивалентны по той же причине.

Как в такой ситуации определить понятие топологически правильного многогранника? Иначе говоря, какие свойства в определении правильного многогранника являются топологически устойчивыми и их следует оставить, а какие не являются топологически устойчивыми и их следует отбросить?



а) б)

Рис. 84.7

В определении правильного многогранника количество сторон и количество граней являются топологически устойчивыми, т. е. не меняющимися при непрерывных деформациях. Правильность же многоугольников не является топологически устойчивым свойством. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Выпуклый многогранник называется ***топологически правильным***, если его гранями являются многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Например, все треугольные пирамиды являются топологически правильными многогранниками, эквивалентными между собой. Все параллелепипеды также являются эквивалентными между собой топологически правильными многогранниками. Четырехугольные пирамиды не являются топологически правильными многогранниками.

Выясним вопрос о том, сколько существует не эквивалентных между собой топологически правильных многогранников.

Как мы знаем, существует только пять правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Казалось бы, топологически правильных многогранников должно быть гораздо больше. Однако оказывается, что никаких других топологически правильных многогранников, не эквивалентных уже известным правильным, не существует.

Для доказательства этого воспользуемся теоремой Эйлера. Пусть дан топологически правильный многогранник, гранями которого являются n-угольники и в каждой вершине сходится m ребер. Ясно, что n и m больше или равны трем. Обозначим, как и раньше, В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней этого многогранника. Тогда

$$\Г \cdot n = 2\text{Р};\ \Г = \frac{2\text{Р}}{n};\ \text{В} \cdot m = 2\text{Р};\ \text{В} = \frac{2\text{Р}}{m}.$$

По теореме Эйлера $\text{В} - \text{Р} + \Г = 2$, и, следовательно,

$$\frac{2\text{Р}}{m} - \text{Р} + \frac{2\text{Р}}{n} = 2.$$

Откуда $\text{Р} = \dfrac{2nm}{2n + 2m - nm}$. Из полученного равенства, в частности, следует, что должно выполняться неравенство $2n + 2m - nm > 0$, которое эквивалентно неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$.

Найдем всевозможные значения n и m, удовлетворяющие найденному неравенству, и заполним следующую таблицу.

n / m	3	4	5
3	В = 4, Р = 6, Г = 4 Тетраэдр	В = 6, Р = 12, Г = 8 Октаэдр	В = 12, Р = 30, Г = 20 Икосаэдр
4	В = 8, Р = 12, Г = 4 Куб	Не существует	Не существует
5	В = 20, Р = 30, Г = 12 Додекаэдр	Не существует	Не существует

Например, значения $n = 3$, $m = 3$ удовлетворяют неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$. Вычисляя значения Р, В и Г по приведенным выше формулам, получим Р = 6, В = 4, Г = 4.

Значения $n = 4$, $m = 4$ не удовлетворяют неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$, и, следовательно, соответствующего многогранника не существует.

Самостоятельно проверьте остальные случаи.

Из этой таблицы следует, что возможными топологически правильными многогранниками являются только правильные многогранники, перечисленные выше, и многогранники, им эквивалентные.

Исторические сведения

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон (429—348 гг. до н. э.). Именно поэтому правильные многогранники называются также ***телами Платона***. Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых «Начал» Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи (1452—1519), например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Так, он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445—1514) «О божественной пропорции».

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер (1471—1528). В его известной гравюре «Меланхолия» (рис. 84.8) на переднем плане изображен доде-

Рис. 84.8

каэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Иоганн Кеплер (1571—1630) в своей работе «Тайна мироздания» в 1597 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем:

«Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия». Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера (рис. 84.9).

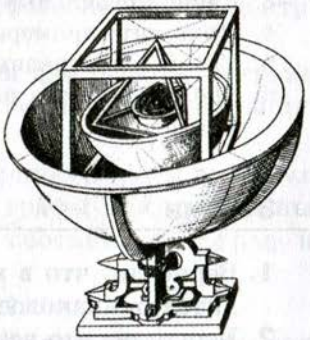


Рис. 84.9

Пример 1. Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением двух их граней. Будет ли он правильным многогранником? Почему?

Решение. Соответствующий многогранник изображен на рисунке 84.10. Его гранями являются правильные треугольники. В двух его вершинах сходится по три треугольника и в трех — по четыре треугольника. У правильного многогранника в каждой вершине должно сходиться одинаковое число граней. Значит, этот многогранник не является правильным.

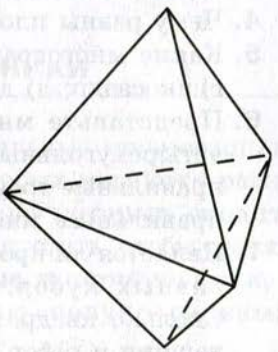


Рис. 84.10

Пример 2. Докажите, что вершины B, D, A_1, C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются вершинами правильного тетраэдра.

Решение. Соответствующий многогранник изображен на рисунке 84.11. Все его ребра равны. Значит, его гранями являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится по три грани. Следовательно, этот многогранник — правильный тетраэдр.

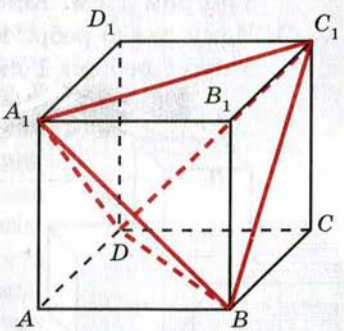


Рис. 84.11

Вопросы

1. Какой многогранник называется правильным?
2. Назовите правильные многогранники.

3. Какие правильные многогранники называются двойственными?
4. Приведите примеры двойственных правильных многогранников.
5. Какой многогранник называется топологически правильным?
6. Сколько имеется различных типов топологически правильных многогранников?

Задачи

1. Верно ли, что в каждой вершине правильного многогранника сходится одинаковое число ребер?

2. Верно ли, что все ребра правильного многогранника равны?

3. Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) куб; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

4. Чему равны плоские углы додекаэдра?

5. Какие многогранные углы имеют: а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

6. Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух четырехугольных пирамид, боковыми гранями которых являются правильные треугольники, совмещением их оснований. Будет ли он правильным многогранником?

7. Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов, рисунок 84.12) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивают его поверхность? Сколько у него вершин и ребер?

8. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется?

9. Чему равно ребро наибольшего тетраэдра, который можно поместить в куб с ребром 1 дм?

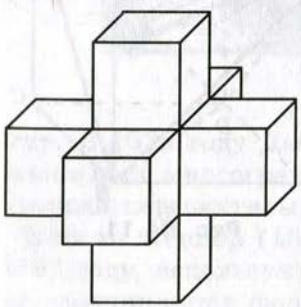


Рис. 84.12

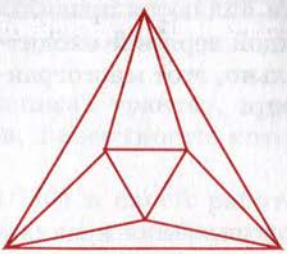


Рис. 84.13

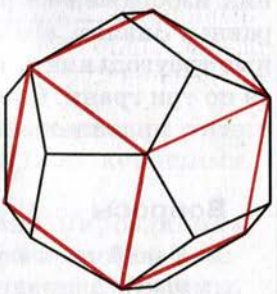


Рис. 84.14

10. Найдите ребро октаэдра, вершинами которого являются центры граней куба, если ребро куба равно 1.

* **11.** Какое наименьшее число красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников так, чтобы грани, имеющие общую вершину, были окрашены в разные цвета?

* **12.** В многограннике вырезали одну грань и оставшиеся грани растянули на плоскости. Нарисуйте соответствующие графы для правильных многогранников. Какому многограннику соответствует граф на рисунке 84.13?

13. Какой многогранник двойственен тетраэдру?

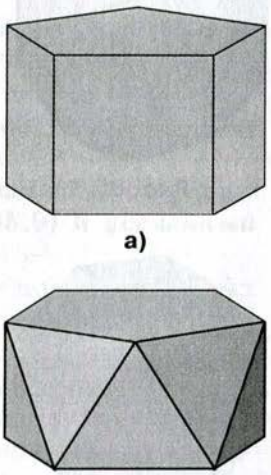
14. В додекаэдр вписан куб (рис. 84.14). Чему равно ребро куба, если ребро додекаэдра равно 1?

§ 85. Полуправильные многогранники

В предыдущем параграфе мы рассмотрели правильные многогранники, т. е. такие выпуклые многогранники, гранями которых являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине которых сходится одинаковое число граней. Если в этом определении допустить, чтобы гранями многогранника могли быть различные правильные многоугольники, то получим многогранники, которые называются полуправильными (равноугольно полуправильными).

Полуправильным многогранником называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники, возможно и с разным числом сторон, причем в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы, все ребра которых равны. Например, правильная пятиугольная призма на рисунке 85.1, а имеет своими гранями два правильных пятиугольника — основания призмы — и пять квадратов, образующих боковую поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и так называемые ***антипризмы***. На рисунке 85.1, б мы видим пятиугольную антипризму, полученную из пятиугольной призмы поворотом одного из оснований относительно другого на угол 36°. Каждая вершина



а) б)

Рис. 85.1

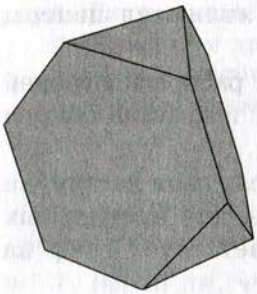


Рис. 85.2

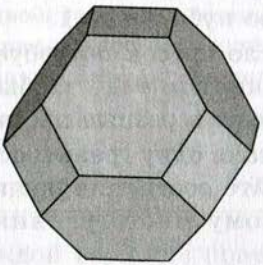


Рис. 85.3

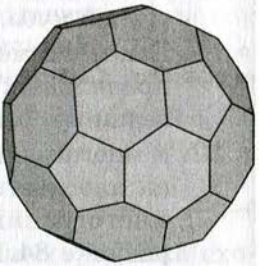


Рис. 85.4

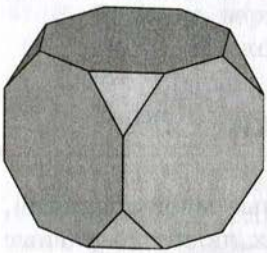


Рис. 85.5

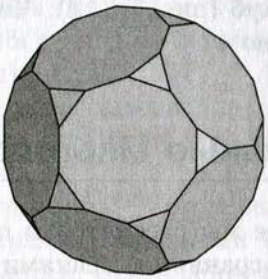


Рис. 85.6

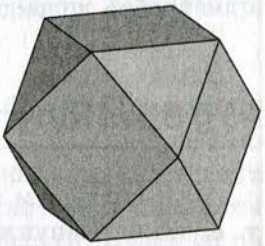


Рис. 85.7

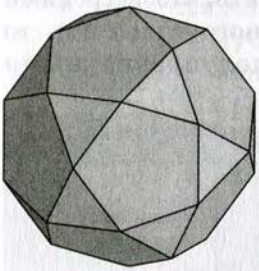


Рис. 85.8

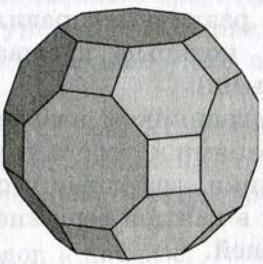


Рис. 85.9

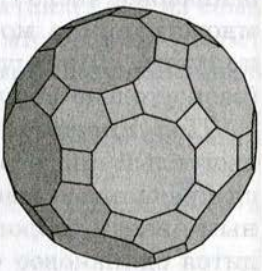


Рис. 85.10

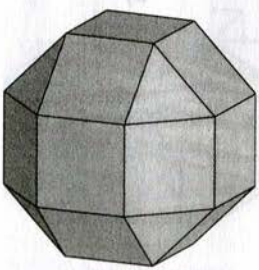


Рис. 85.11

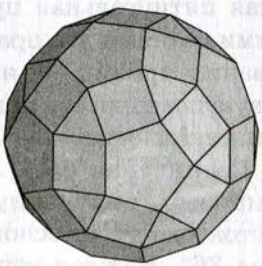


Рис. 85.12

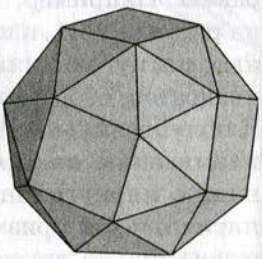


Рис. 85.13

верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется еще 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед — это ***тела Архимеда***.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией «усечения», состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим ***усеченный тетраэдр***, имеющий восемь граней (рис. 85.2). Из них четыре — правильные шестиугольники и четыре — правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно ***усеченный октаэдр*** (рис. 85.3) и ***усеченный икосаэдр*** (рис. 85.4). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить ***усеченный куб*** (рис. 85.5) и ***усеченный додекаэдр*** (рис. 85.6).

Для того чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется ***кубооктаэдром*** (рис. 85.7). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название — кубооктаэдр.

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется ***икосододекаэдром*** (рис. 85.8). У него двадцать граней — правильные треугольники и двенадцать граней — правильные пятиугольники, т. е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

К последним двум многогранникам снова можно применить операцию усечения. Получим ***усеченный кубооктаэдр*** (рис. 85.9) и ***усеченный икосододекаэдр*** (рис. 85.10).

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся — многогранники более сложного типа.

На рисунке 85.11 мы видим ***ромбокубооктаэдр***. Его поверхность состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов.

На рисунке 85.12 изображен ***ромбоикосододекаэдр***, поверхность которого состоит из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов. На рисунках 85.13 и 85.14 представлены соответственно так называемые ***плосконосый*** (иногда называют ***курносый***) ***куб*** и ***плосконосый*** (***курносый***)

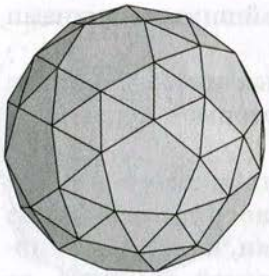


Рис. 85.14

додекаэдр, поверхности которых состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками. Поверхности этих многогранников состоят из двух типов граней: квадраты и треугольники; пятиугольники и треугольники.

Модели полуправильных многогранников будут особенно привлекательны, если при их изготовлении грани каждого типа раскрасить в свой особый цвет.

Исторические сведения

Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287—212 гг. до н. э.). Убедившись в том, что нельзя построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноименные многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число ребер. Так он получил 13 равноугольно полуправильных многогранников. До нас дошла работа самого ученого «О многогранниках», в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь ученого телами Архимеда.

Сам Архимед был уникальным ученым — механиком, физиком, математиком, инженером. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение трудов Архимеда интересным и полезным для историков современной математики, для ученых многих специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погруженными в жидкость. Эта теорема находится в трактате «О плавающих телах», и в современных учебниках по физике она называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений ученого известна катапульта — «архимедов винт» (иногда его называют также «кохлея», т. е. улитка) — для поднятия наверх воды. Это оборонное сооружение. Архимед участвовал в защите своего родного города Сиракузы, при осаде которого и погиб. Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на могиле начертить цилиндр и содержащийся в нем шар и указать соотношение их объемов. Позже именно по этому памятнику и была найдена могила великого ученого.

Пример 1. Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча? Сколько у него вершин, ребер и граней?

Р е ш е н и е. Этот многогранник получается усечением икосаэдра (рис. 85.4). При этом вместо одной вершины икосаэдра получается пятиугольник с пятью вершинами. Следовательно, число вершин усеченного икосаэдра равно $5 \cdot 12 = 60$. Для нахождения числа граней заметим, что каждая грань икосаэдра дает грань усеченного икосаэдра и отсечение каждой вершины икосаэдра также дает грань усеченного икосаэдра. Следовательно, общее число граней будет равно $20 + 12 = 32$. Для нахождения числа ребер можно воспользоваться формулой Эйлера $В - Р + Г = 2$. Из нее следует, что число ребер усеченного икосаэдра равно 90.

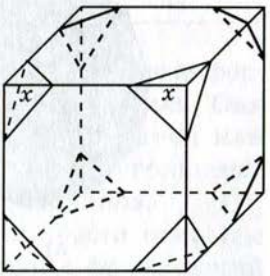


Рис. 85.15

П р и м е р 2. Какую часть ребер куба, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный куб был полуправильным многогранником?

Р е ш е н и е. Пусть ребро куба равно 1 и от каждой вершины отсекается часть ребра, равная x (рис. 85.15). Для того чтобы получившийся в результате усеченный многогранник был усеченным кубом, нужно, чтобы оставшиеся от граней куба многоугольники были правильными восьмиугольниками. Это будет в случае, если $1 - 2x = \sqrt{2}x$. Решая это уравнение, находим $x = \dfrac{1}{2 + \sqrt{2}} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Вопросы

1. Какой многогранник называется полуправильным?
2. Назовите две бесконечные серии полуправильных многогранников.
3. Сколько всего имеется тел Архимеда? Назовите их.
4. Как получаются простейшие из тел Архимеда?
5. Какие многогранники называются двойственными?

Задачи

1. Какие грани имеют усеченный тетраэдр и усеченный куб?

2. Назовите полуправильные многогранники, у которых имеются: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

3. Какую часть ребер: а) правильного тетраэдра; б) октаэдра; в) икосаэдра; г) додекаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате многогранник стал усеченным?

4. Найдите число вершин, ребер и граней усеченного: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) додекаэдра.

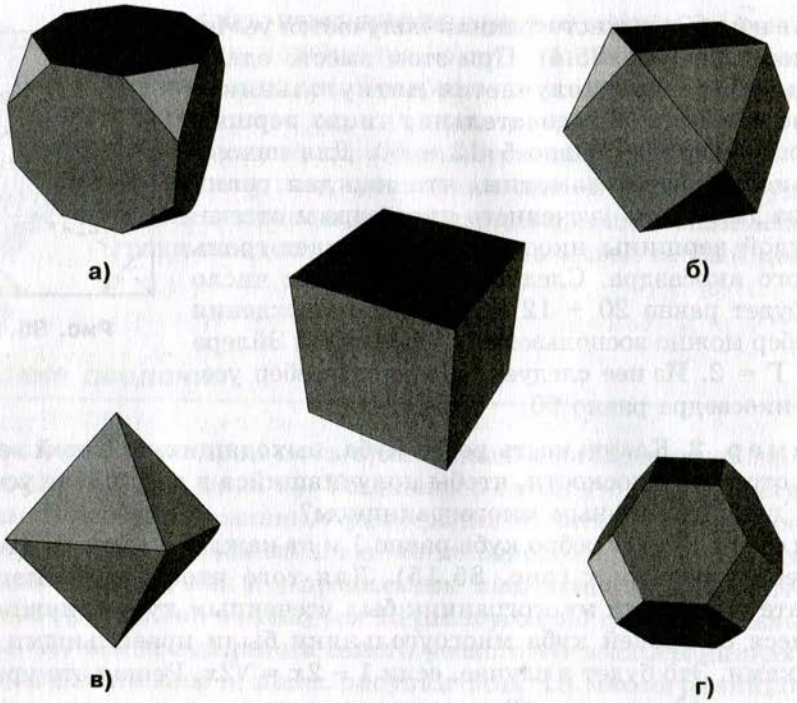


Рис. 85.16

5. На рисунке 85.16 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией. Что это за операция? Как называются все изображенные многогранники?

6. Какую часть ребер куба, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате многогранник стал: а) октаэдром; б) усеченным октаэдром?

7. Кубооктаэдр получен усечением куба. Найдите его ребро, если ребро куба равно 1.

8. Икосододекаэдр получен усечением додекаэдра. Найдите его ребро, если ребро додекаэдра равно 1.

9. Сколько треугольных граней имеет: а) курносый куб; б) курносый додекаэдр?

10. Приведите пример многогранника, не являющегося полуправильным, гранями которого являются правильные многоугольники.

§ 86. Звездчатые многогранники

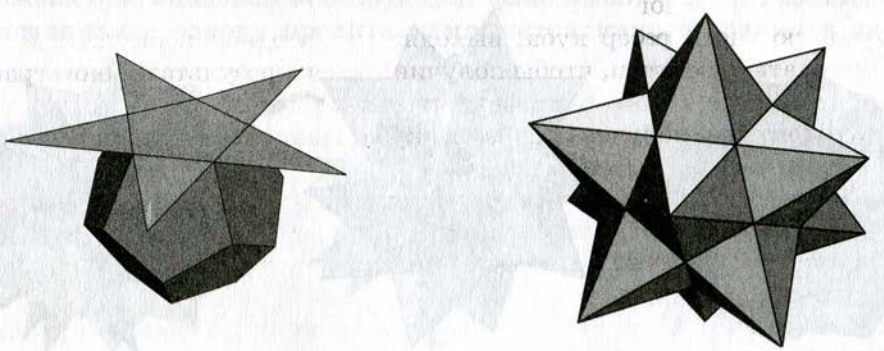
Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют так называемые ***правильные звездчатые многогранники***. Они получаются из правильных многогранников продолжением граней или ребер аналогично тому, как правильные звездчатые многоугольники получаются продолжением сторон правильных многоугольников.

Первые два правильных звездчатых многогранника были открыты И. Кеплером, а два других почти 200 лет спустя построил французский математик и механик Л. Пуансо (1777—1859). Именно поэтому правильные звездчатые многогранники называются ***телами Кеплера — Пуансо***.

В работе «О многоугольниках и многогранниках» (1810) Пуансо описал четыре правильных звездчатых многогранника, но вопрос о существовании других таких многогранников оставался открытым. Ответ на него был дан год спустя, в 1811 году, французским математиком О. Коши (1789—1857). В работе «Исследование о многогранниках» он доказал, что других правильных звездчатых многогранников не существует.

Рассмотрим вопрос о том, из каких правильных многогранников можно получить правильные звездчатые многогранники. Из тетраэдра, куба и октаэдра правильные звездчатые многогранники не получаются. Возьмем додекаэдр. Продолжение его ребер приводит к замене каждой грани звездчатым правильным пятиугольником (рис. 86.1, а), и в результате возникает многогранник, который называется ***малым звездчатым додекаэдром*** (рис. 86.1, б).

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Во-первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится



а) б)

Рис. 86.1

большой додекаэдр (рис. 86.2). Если же, во-вторых, в качестве граней рассматривать звездчатые пятиугольники, то получается ***большой звездчатый додекаэдр*** (рис. 86.3).

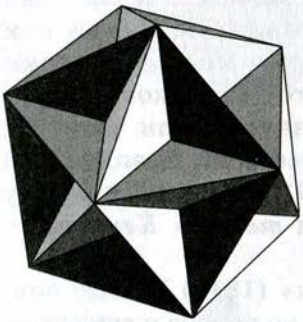


Рис. 86.2

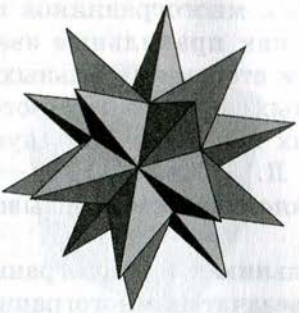


Рис. 86.3

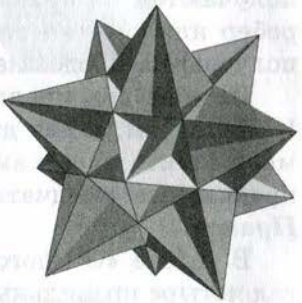
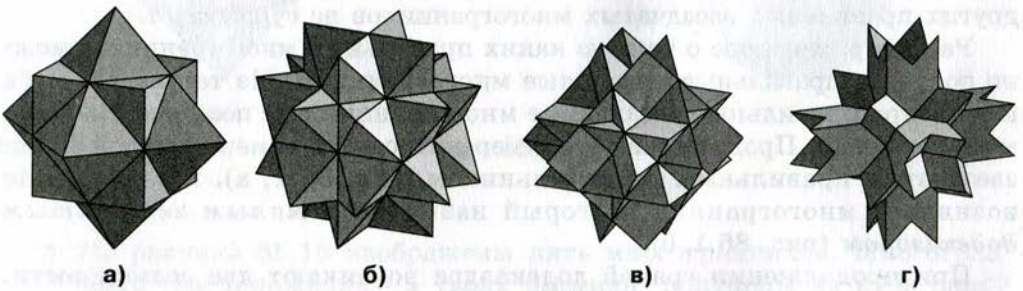
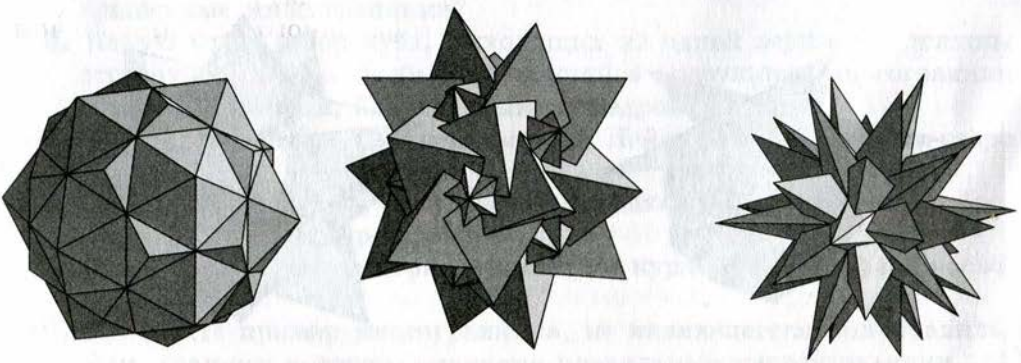


Рис. 86.4



а) б) в) г)

Рис. 86.5



а) б) в)

Рис. 86.6

Икосаэдр имеет одну звездчатую форму. При продолжении граней правильного икосаэдра получается ***большой икосаэдр*** (рис. 86.4).

Таким образом, существуют 4 типа правильных звездчатых многогранников.

Кроме правильных звездчатых многогранников существуют и другие звездчатые формы, получающиеся продолжением граней правильных и полуправильных многогранников.

Так, продолжения граней кубооктаэдра приводят к четырем звездчатым многогранникам. Первый из них (рис. 86.5, а) получается достраиванием на гранях кубооктаэдра треугольных и четырехугольных пирамид и представляет собой соединение куба и октаэдра.

Следующая звездчатая форма кубооктаэдра представлена на рисунке 86.5, б. Она образована из соединения куба и октаэдра добавлением 24 бипирамид.

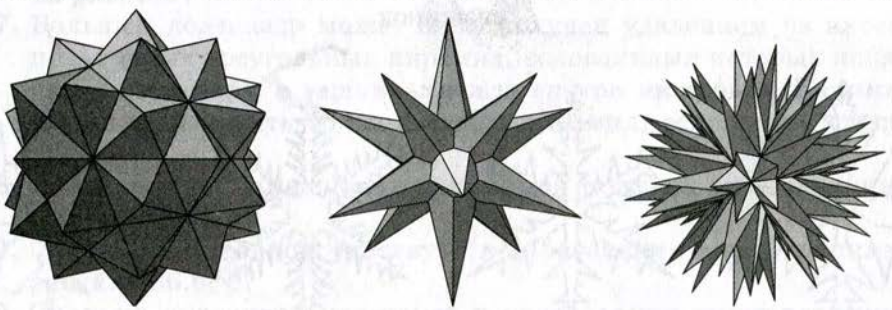
Третья звездчатая форма кубооктаэдра (рис. 86.5, в) представляет собой соединение шести четырехугольных пирамид, основаниями которых служат квадраты.

Последняя звездчатая форма кубооктаэдра (рис. 86.5, г) является соединением звезды Кеплера (рис. 86.12) и трех правильных четырехугольных призм, общей частью которых служит исходный куб.

Икосододекаэдр имеет 19 звездчатых форм, некоторые из которых представлены на рисунке 86.6.

Наконец, икосаэдр имеет 59 звездчатых форм, некоторые из которых представлены на рисунке 86.7.

Звездчатые многогранники очень декоративны, что позволяет широко применять их в ювелирной промышленности при изготовлении всевозможных украшений. Применяются они и в архитектуре. На рисунке 86.8 изображена оригинальная конструкция, выполненная В. Н. Гамаюновым и положенная в основу проекта административного здания в одном



а) б) в)

Рис. 86.7

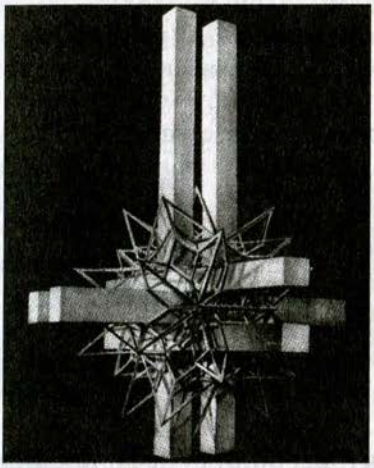


Рис. 86.8

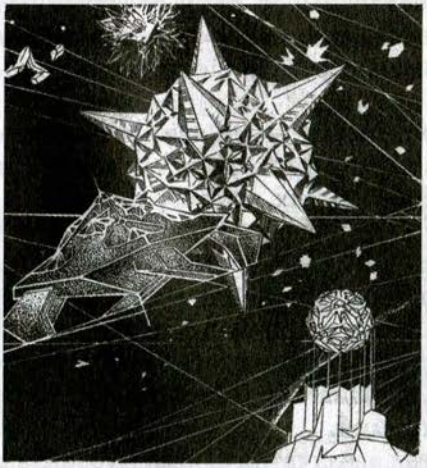


Рис. 86.9

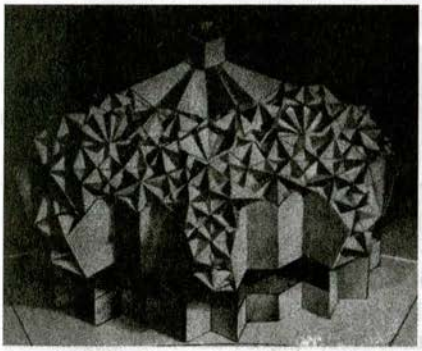


Рис. 86.10

из итальянских городов. Необычный многогранник, «Звезда» В. Н. Гамаюнова (рис. 86.9), вдохновил архитектора В. А. Сомова на создание проекта Национальной библиотеки в Дамаске (рис. 86.10).

Многие формы звездчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки — это звездчатые многогранники (рис. 86.11). С древности люди пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

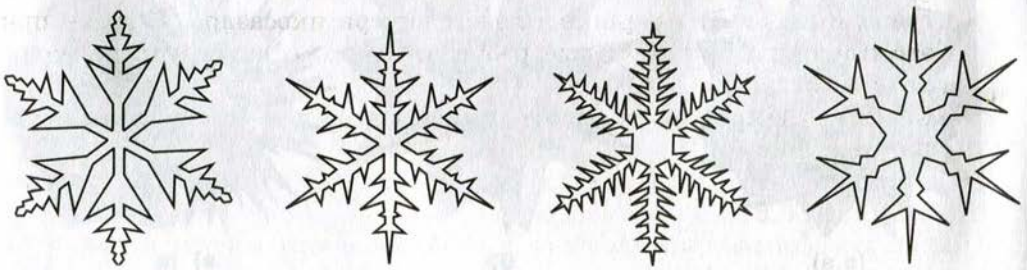


Рис. 86.11

Вопросы

1. Сколько всего правильных звездчатых многогранников?
2. Кем были открыты правильные звездчатые многогранники?
3. Как получаются правильные звездчатые многогранники?
4. Назовите правильные звездчатые многогранники.

Задачи

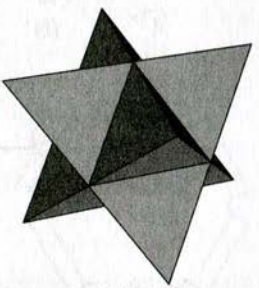
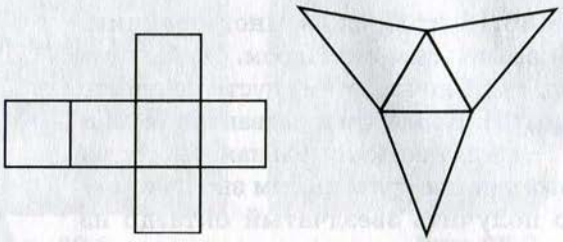


Рис. 86.12

1. На рисунке 86.12 изображен многогранник, называемый звездчатым октаэдром. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И. Кеплером и назван им «*Stella octangula*» — звезда восьмиугольная. Является ли этот многогранник правильным звездчатым?
2. Как можно получить звездчатый октаэдр из куба?
3. Звездчатый октаэдр является объединением двух правильных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров.
4. Звездчатый октаэдр может быть получен добавлением правильных треугольных пирамид к граням октаэдра. Какими при этом должны быть боковые ребра пирамид, если ребра октаэдра равны 1?
5. Сколько вершин, ребер и граней имеет малый звездчатый додекаэдр?
6. Малый звездчатый додекаэдр может быть получен добавлением правильных пятиугольных пирамид к граням додекаэдра. Какими при этом должны быть боковые ребра пирамид, если ребра додекаэдра равны 1?
7. Большой додекаэдр может быть получен удалением из икосаэдра правильных треугольных пирамид, основаниями которых являются грани икосаэдра, а вершины лежат внутри икосаэдра. Какими при этом должны быть боковые ребра пирамид, если ребра икосаэдра равны 1?
8. Соединением каких многогранников получен многогранник на рисунке 86.6, а?
9. Сколько тетраэдров участвует в образовании многогранника на рисунке 86.6, б?
10. Сколько октаэдров участвует в образовании многогранника на рисунке 86.7, а?

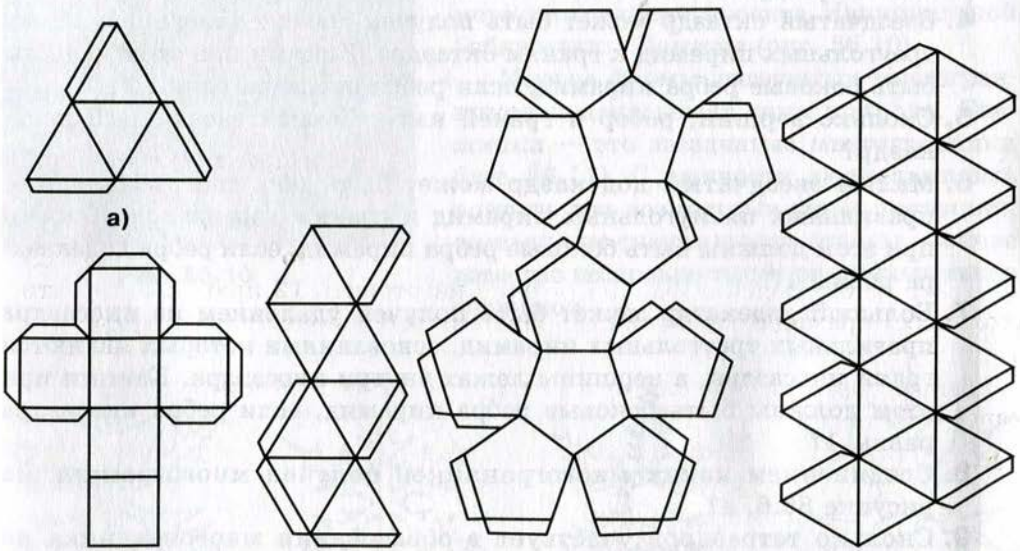
§87. Моделирование многогранников

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется ***развёрткой*** многогранника. Например, на рисунке 87.1 изображены развертки куба и треугольной пирамиды.



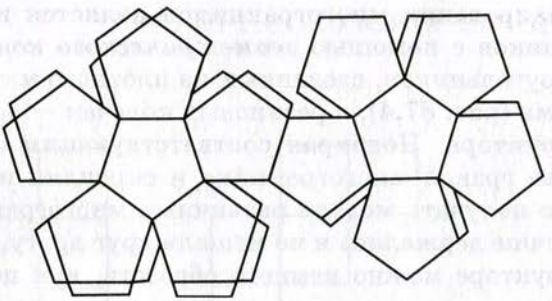
а) б)

Рис. 87.1



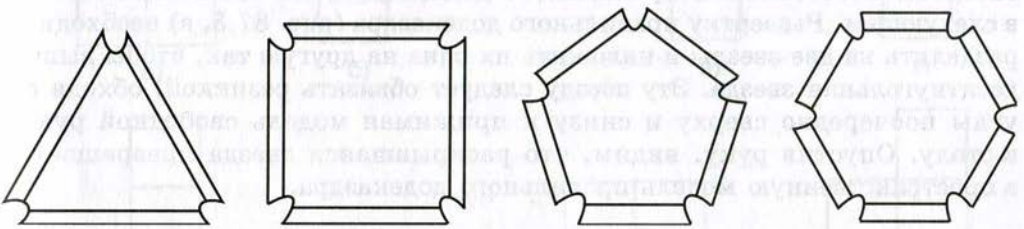
а) б) в) г) д)

Рис. 87.2



а) б)

Рис. 87.3



а) б) в) г)

Рис. 87.4

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка. На рисунке 87.2 изображены развертки с клапанами всех правильных многогранников.

Модель малого звездчатого додекаэдра очень просто изготовить из модели правильного додекаэдра. Достаточно изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид с основаниями, равными ребру правильного додекаэдра, и наклеить их на все грани правильного додекаэдра.

Таким образом, сначала нужно изготовить модель правильного додекаэдра. Ее можно склеить из развертки. На рисунке 87.3, а представлена развертка правильного додекаэдра с нарисованными клапанами для склеивания.

После того как модель правильного додекаэдра готова, строится модель соответствующей правильной пирамиды, развертка которой показана на рисунке 87.3, б. Необходимо изготовить 12 таких пирамид по числу граней правильного додекаэдра и наклеить их на его грани. Модель малого звездчатого додекаэдра готова.

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей многогранников с помощью ***геометрического конструктора***, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами (рис. 87.4), и резиновых колечек — основной крепежной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 87.4.

Можно воспользоваться другим очень интересным и необычным способом изготовления правильного додекаэдра, который заключается в следующем. Развертку правильного додекаэдра (рис. 87.3, а) необходимо разделить на две звезды и наложить их одна на другую так, чтобы вышла десятиугольная звезда. Эту звезду следует обвязать резинкой, обходя ею углы поочередно сверху и снизу и прижимая модель свободной рукой к столу. Опустив руку, видим, что раскрывшаяся звезда превращается в пространственную модель правильного додекаэдра.

Вопросы

1. Что называется разверткой многогранника?
2. Как можно изготовить модель многогранника с помощью его развертки?
3. Как можно изготовить модель малого звездчатого додекаэдра?
4. В чем состоит способ изготовления моделей многогранников из конструктора?

Задачи

1. Нарисуйте развертки прямоугольного параллелепипеда и правильной четырехугольной пирамиды.

○ **2.** Какие из изображенных на рисунке 87.5 фигур являются развертками куба?

○ **3.** На рисунке 87.6 укажите фигуры, которые являются развертками призм. Определите вид этих призм.

○ **4.** Среди данных на рисунке 87.7 разверток определите развертки пирамид. Выясните их вид.

* **5.** Может ли разверткой пирамиды быть квадрат?

6. Изготовьте развертки и склейте из них модели куба и тетраэдра.

○ **7.** Какие из представленных на рисунке 87.8 фигур можно считать развертками октаэдра?

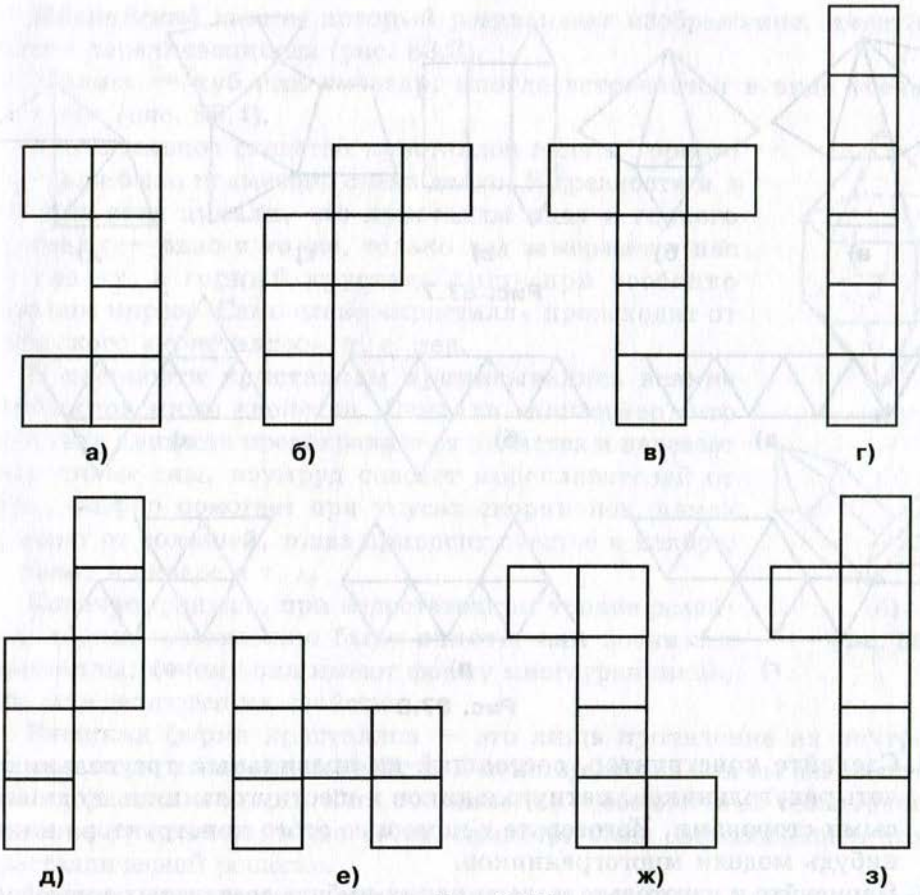


Рис. 87.5

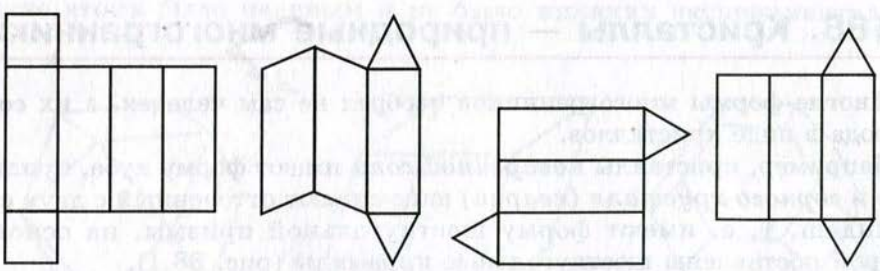


Рис. 87.6

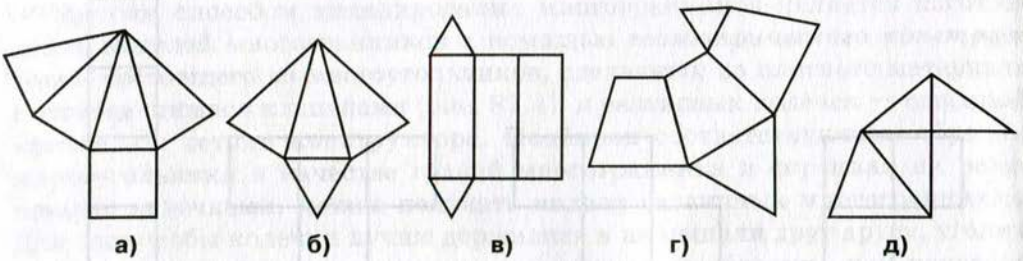


Рис. 87.7

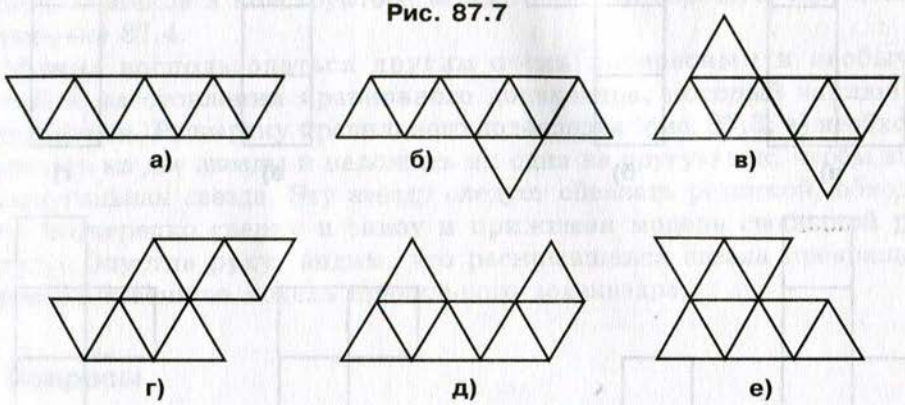


Рис. 87.8

8. Сделайте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников и шестиугольников с одинаковыми сторонами. Изготовьте с помощью этого конструктора какие-нибудь модели многогранников.

9. Нарисуйте и изготовьте модели каких-нибудь звездчатых многогранников.

§88. Кристаллы — природные многогранники

Многие формы многогранников изобрел не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов.

Например, кристаллы ***поваренной соли*** имеют форму куба, кристаллы ***льда*** и ***горного хрусталя*** (***кварца***) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды (рис. 88.1).

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра (рис. 88.2).

Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда (рис. 88.3).

Пирит — куб или октаэдр, иногда встречается в виде усеченного октаэдра (рис. 88.4).

Удивительное сходство кристаллов льда и горного хрусталя было подмечено очень давно. В древности и в средние века думали, что кристаллы льда и горного хрусталя — одно и то же, только лед замерзает у нас на глазах, а горный хрусталь лишь при особенно сильном морозе. Само слово «кристалл» происходит от греческого «кристаллос», т. е. лед.

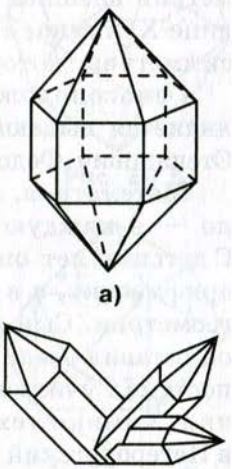


Рис. 88.1

В древности кристаллам приписывались всякие необыкновенные свойства. Считали, например, что кристалл аметиста предохраняет от пьянства и навевает счастливые сны, изумруд спасает мореплавателей от бурь, сапфир помогает при укусах скорпионов, алмаз бережет от болезней, топаз приносит счастье в ноябре, а гранат в январе и т. д.

Конечно, раньше, при недостаточном уровне развития науки, невозможно было понять, как возникли кристаллы, почему они имеют форму многогранников, чем определяются их свойства.

Внешняя форма кристаллов — это лишь проявление их внутренних физических и химических свойств. С некоторыми из них вы знакомитесь на уроках физики и химии. Они объясняются особенностями геометрического строения кристаллов, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Первые, еще смутные предположения о том, что атомы в кристаллах расположены правильным, закономерным, симметричным строем, высказывались в трудах различных естествоиспытателей уже в те времена, когда само понятие атома было неясным и не было никаких экспериментальных

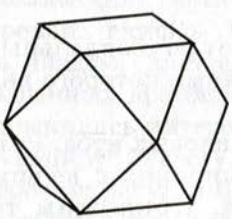


Рис. 88.2

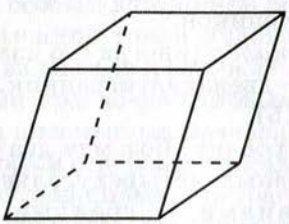


Рис. 88.3

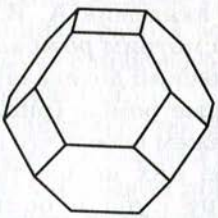


Рис. 88.4

доказательств атомного строения вещества. Симметричная внешняя форма кристаллов невольно наводила на мысль о том, что внутреннее строение кристаллов должно быть симметричным и закономерным. Законы симметрии внешней формы кристаллов были полностью установлены в середине XIX века, а к концу этого века были четко и точно выведены законы симметрии, которым подчинены атомные постройки в кристаллах.

Основоположником математической теории строения кристаллов является выдающийся российский математик и кристаллограф Евграф Степанович Федоров (1853—1919).

Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело — в каждую из этих областей Е. С. Федоров внес немалый вклад. С детских лет он увлекался точными науками. В пять лет хорошо знал арифметику, а в семь лет «для удовольствия» за два дня изучил учебник геометрии. Сын военного инженера и сам в молодости военный инженер, он оставил военную службу, чтобы посвятить свою жизнь науке. Он снова поступил учиться, сначала в Военно-медицинскую академию, затем окончил Химико-технологический институт, наконец, в 27 лет поступил в Петербургский горный институт.

В 1890 году Е. С. Федоров строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Федоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии в честь ученого были названы федоровскими. Это был исполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, за 27 лет до того, как с их помощью доказали существование самой кристаллической решетки. Существование 230 федоровских групп является одним из важнейших геометрических законов современной структурной кристаллографии. «Гигантский научный подвиг Е. С. Федорова, сумевшего подвести под единую геометрическую теорию весь природный "хаос" бесчисленных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. "Царство кристаллов" является незыблемым памятником и конечной вершиной классической федоровской кристаллографии», — сказал академик А. В. Шубников.

Рассмотрим ***ромбододекаэдр*** (иногда его называют ромбоидальный или ромбический додекаэдр) — двенадцатигранник, гранями которого являются равные ромбы (рис. 88.5).

Укажем способ его построения. Возьмем два одинаковых куба. Разобьем один из них на шесть равных четырехугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями — гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго куба так, чтобы основания пирамид

совместились с гранями куба (рис. 88.6). Образовавшийся при этом многогранник будет ромбододекаэдром.

Форму этого многогранника создала природа в виде кристалла граната. Причем для граната настолько типичны двенадцатигранные кристаллы, что форма такого многогранника получила даже название гранатоэдра.

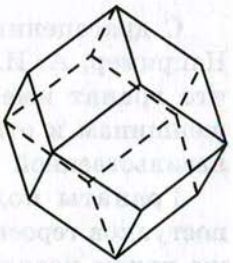


Рис. 88.5

Гранат — один из основных породообразующих минералов. Встречаются огромные скалы, которые сложены гранатовыми породами, называемыми скарнами. Однако драгоценные, красиво окрашенные и прозрачные камни встречаются далеко не часто. Несмотря на это, как раз именно гранат — кроваво-красный пироп — археологи считают самым древним украшением, так как он был обнаружен в Европе в древнем неолите на территории современных Чехии и Словакии, где он и в настоящее время пользуется особой популярностью.

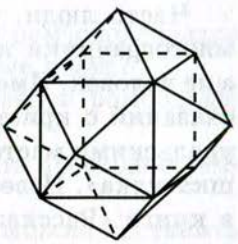


Рис. 88.6

О том, что гранат и ромбододекаэдр были известны с глубокой древности, можно судить по истории происхождения его названия, которое в переводе в древнегреческого языка означало «красная краска». При этом название связывалось с красным цветом — наиболее часто встречающейся окраской гранатов.

Гранат высоко ценится знатоками драгоценных камней. Он применяется для изготовления первоклассных ювелирных изделий. До нас дошло описание древнейшего из известных крупных исторических ювелирных изделий — эфуда, нагрудника древнееврейских первосвященников (ок. 2000 лет до н. э.), украшенного двенадцатью камнями, среди которых был и гранат.

Художественные изделия из гранатов были обнаружены в неополите Египта и в могилах додинастического периода (свыше двух тысячелетий до н. э.).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украшения древних скифов. Необычайно тонка художественная работа золотых венков, диадем, сплетенных из листьев и веточек с плодами оливкового дерева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Сохранились интересные письменные материалы, например, так называемый «папирус Эберса», который содержит описание методов лечения камнями с особыми ритуалами и заклинаниями, где драгоценным камням приписываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит счастье в январе. Это камень-талисман для людей, родившихся в этом месяце.

С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А. И. Куприн в повести «Гранатовый браслет» говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжелые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

Гранаты подчеркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, подчеркивают чистоту и возвышенность их чувств. Тот же прием использован и в повести И. С. Тургенева «Вешние воды», где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик.

Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах. Несколько таких легенд, рассказанных старыми уральскими мастерами, собраны П. П. Бажовым в сборнике «Малахитовая шкатулка». Известный любитель и знаток камня академик А. Е. Ферсман в книге «Рассказы о самоцветах» тоже поведал много народных легенд о драгоценных камнях. Он ярко и красочно повествует о том, какие красивые самоцветы находят у нас в России, в частности, о месторождениях граната на Урале.

Вопросы

1. Какую форму имеют кристаллы поваренной соли, льда и горного хрусталя?
2. Форму каких многогранников чаще всего имеет алмаз?
3. Форму какого многогранника имеет: а) исландский шпат; б) пирит?
4. Чем определяются свойства кристаллов?
5. Форму какого многогранника имеет гранат?

Задачи

1. Изготовьте модель ромбододекаэдра, используя геометрический конструктор, состоящий из двенадцати одинаковых ромбов. Длину ребра ромба возьмите равной 6 см, острый угол приблизительно равен 71°, ширина клапана — 0,8 см (рис. 88.7, а). Модель лучше сделать двуцветной так, как показано на рисунке 88.7, б.

2. Найдите число вершин, ребер и граней ромбододекаэдра.

3. Найдите углы ромбов, являющихся гранями ромбододекаэдра.

4. Ребро куба равно 1. Найдите ребро соответствующего ромбододекаэдра.

5. Используя модель ромбододекаэдра, найдите двугранные углы, образованные гранями ромбододекаэдра.

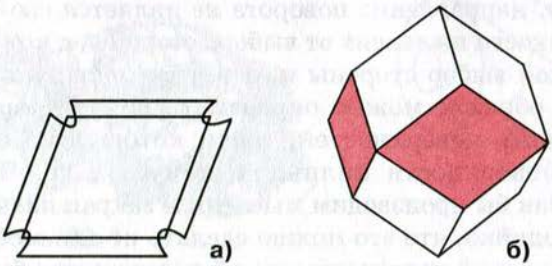


Рис. 88.7

6. Сколько красок потребуется для раскраски граней ромбододекаэдра так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?
7. Какому полуправильному многограннику двойственен ромбододекаэдр?
8. Покажите, что из ромбододекаэдров можно составить пространственный паркет, заполняющий все пространство.
9. Из какого еще полуправильного многогранника можно составить пространственный паркет?

§ 89. Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса

Ранее мы говорили о поворотах в направлениях по часовой или против часовой стрелки. Выясним более детально, что означают слова «поворот против часовой стрелки».

Пусть в пространстве задана плоскость и поворот в этой плоскости вокруг точки O на угол φ. На рисунке 89.1,а мы смотрим на плоскость сверху, и этот поворот выглядит как поворот против часовой стрелки. Однако если мы будем смотреть на плоскость снизу, то этот же поворот будет выглядеть как поворот по часовой стрелке (рис. 89.1, б).

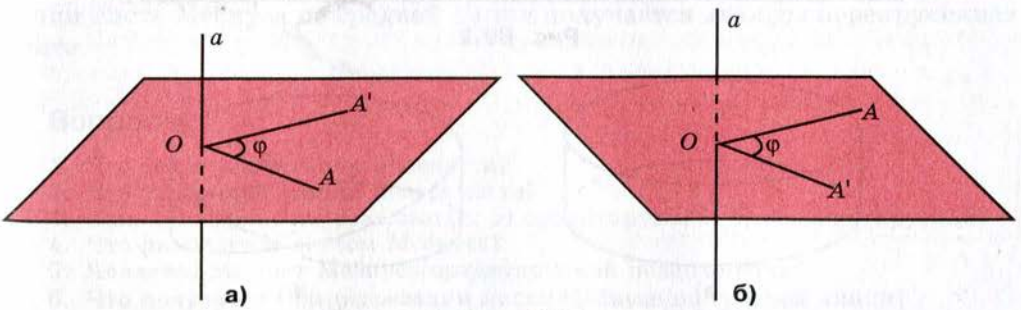


Рис. 89.1

Таким образом, направление поворота не является свойством изначально присущим плоскости и зависит от выбора стороны, с которой мы смотрим на плоскость. Такой выбор стороны называется ***ориентацией плоскости***.

Аналогичным образом можно определить понятие ориентации и для других двусторонних поверхностей, среди которых: сфера, поверхность многогранника, поверхности цилиндра, конуса и др. Выбирая сторону поверхности, мы как бы производим мысленное закрашивание этой стороны.

Оказывается, однако, что это можно сделать не для любой поверхности. Первым примером такой неориентируемой поверхности была поверхность, называемая ***листом***, или ***лентой***, ***Мёбиуса***, открытая в 1858 году немецким астрономом и математиком А. Ф. Мёбиусом (1790—1868). Изготовить модель листа Мёбиуса очень просто. Возьмем бумажную полоску в форме прямоугольника $ABCD$ (рис. 89.2). Если склеить противоположные стороны AB и CD, совместив точку A с точкой D, а точку B с точкой C, то получим боковую поверхность цилиндра (рис. 89.3, а). Если же перед склеиванием противоположных сторон одну из них повернуть на 180° и соединить точку A с точкой C, точку B с точкой D, то получим лист Мёбиуса (рис. 89.3, б).

Несмотря на свою простоту, лист Мёбиуса обладает рядом неожиданных свойств. Например, попытаемся ответить на вопрос: «Сколько краев имеет лист Мёбиуса?» В отличие от боковой поверхности цилиндра, краями которой являются две окружности, лист Мёбиуса имеет один край. Чтобы убедиться в этом, нужно выбрать в любом месте края точку и перемещать ее вдоль края. В результате мы придем в то же самое выбранное место.

Кроме этого, лист Мёбиуса имеет только одну сторону. До сих пор мы имели дело с поверхностями, у которых две стороны: плоскость, сфера,

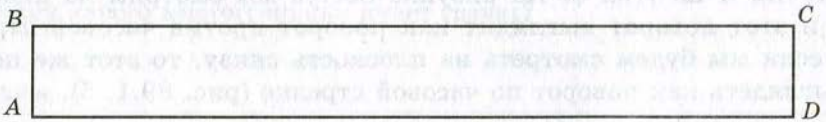
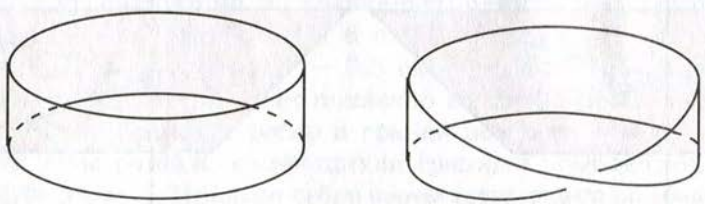


Рис. 89.2



а) б)

Рис. 89.3

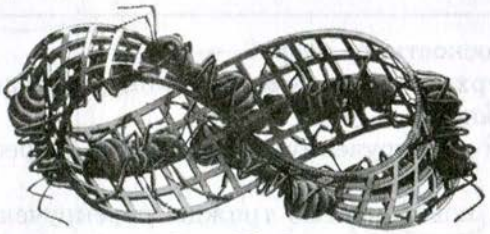


Рис. 89.4

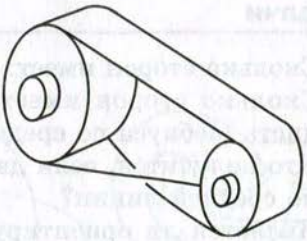


Рис. 89.5

тор, цилиндрическая и конические поверхности. Убедиться в односторонности листа Мёбиуса можно следующим образом. Начнем закрашивать лист с любого места, постепенно перемещаясь по поверхности. В результате вся поверхность окажется закрашенной. Отметим, что если то же самое мы проделаем с боковой поверхностью цилиндра, то, начав закрашивание с внешней стороны, мы закрасим эту внешнюю сторону, а внутренняя сторона останется незакрашенной. Наоборот, начав закрашивание с внутренней стороны, мы закрасим эту внутреннюю сторону, а внешняя сторона окажется незакрашенной.

Муравью, ползущему по листу Мёбиуса, не надо переползать через его край, чтобы попасть на противоположную сторону, как это видно на гравюре М. Эшера (рис. 89.4)

Свойство односторонности листа Мёбиуса используется при изготовлении ременных передач. Если ремень сделать в виде ленты Мёбиуса, то он будет изнашиваться вдвое медленнее, чем обычный. Это объясняется тем, что в работе ремня, изготовленного в виде ленты Мёбиуса, принимает участие вся поверхность, а не только внутренняя ее часть, как у обычной ременной передачи (рис. 89.5).

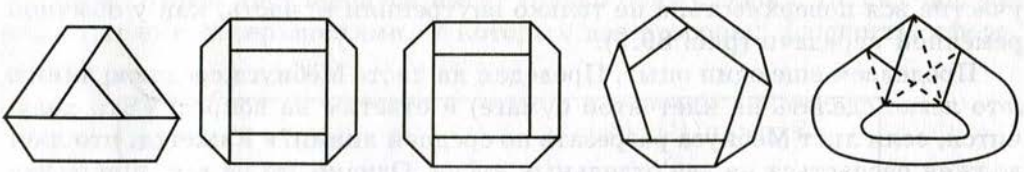
Проделаем еще один опыт. Проведем на листе Мёбиуса среднюю линию (это легко сделать на клетчатой бумаге) и ответим на вопрос: «Что получится, если лист Мёбиуса разрезать по средней линии?» Кажется, что лист должен распасться на два отдельных куска. Однако это не так, при разрезании листа Мёбиуса по средней линии получается дважды перекрученная лента.

Вопросы

1. Что такое ориентация плоскости?
2. Что такое ориентация поверхности?
3. Какая поверхность называется: а) ориентируемой; б) неориентируемой?
4. Что называется листом Мёбиуса?
5. Является ли лист Мёбиуса ориентируемой поверхностью?
6. Что получится при разрезании листа Мёбиуса по средней линии?

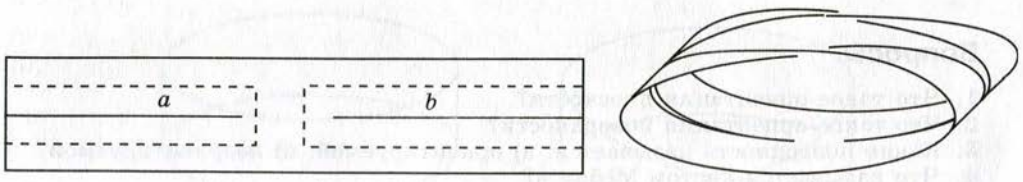
Задачи

1. Сколько сторон имеет: а) плоскость; б) сфера?
2. Сколько сторон имеет поверхность, полученная при разрезании листа Мёбиуса по средней линии?
3. Что получится, если дважды перекрученную ленту опять разрезать по средней линии?
4. Является ли ориентируемой поверхностью трижды перекрученная лента?
5. Сколько сторон имеют ленты, изображенные на рисунке 89.6?
6. Какая поверхность получится, если у прямоугольника склеить противоположные стороны (без перекручивания)?
7. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать не по средней линии, а отступив от края на треть ширины ленты?
8. Возьмите полоску бумаги и сделайте два параллельных разреза (рис. 89.7, а). Соедините между собой верхнюю и нижнюю пары концов как у листа Мёбиуса, перекручивая их в разных направлениях. В результате получится фигура, изображенная на рисунке 89.7, б, называемая сиамским листом Мёбиуса. Что получится, если разрезать ее вдоль пунктирной линии? Сколько будет частей, краев и сторон?
9. Покажите, что «домики» и «колодцы», расположенные на листе Мёбиуса, можно соединить непересекающимися дорожками.
10. Являются ли ориентируемыми поверхности, изображенные на рисунке 89.8?



а) б) в) г) д)

Рис. 89.6



а) б)

Рис. 89.7

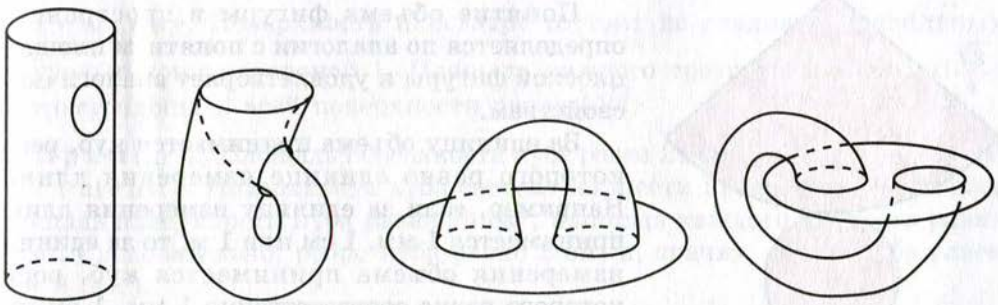


Рис. 89.8

§ 90. Площадь поверхности и объём

Площадь поверхности произвольного многогранника определяется как сумма площадей входящих в эту поверхность многоугольников.

Рассмотрим цилиндр, радиус основания которого равен R и образующая равна b. Его поверхность состоит из поверхностей оснований и боковой поверхности. Разверткой боковой поверхности является прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и b (рис. 90.1). Поэтому площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rb$, а площадь полной поверхности S вычисляется по формуле

$$S = 2\pi R(R + b).$$

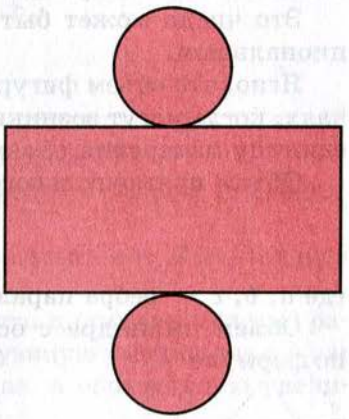


Рис. 90.1

Рассмотрим конус, радиус основания которого равен R и образующая равна b. Его поверхность состоит из поверхности основания и боковой поверхности конуса. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор (рис. 90.2), радиус которого равен образующей, а длина дуги — длине окружности основания конуса. Поэтому площадь боковой поверхности конуса равна $\frac{1}{2}2\pi Rb = \pi Rb$, а полная поверхность S вычисляется по формуле

$$S = \pi R(R + b).$$

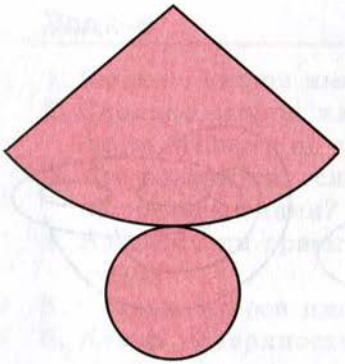


Рис. 90.2

Понятие объема фигуры в пространстве определяется по аналогии с понятием площади плоской фигуры и удовлетворяет аналогичным свойствам.

За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Можно сказать, что ***объем фигуры*** — это число, получающееся в результате измерения и показывающее, сколько раз единица измерения объема и ее части укладываются в данной фигуре.

Это число может быть натуральным, рациональным или даже иррациональным.

Ясно, что объем фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после этого числа указывают единицу измерения объема. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

где a, b, c — ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины.

Объем цилиндра с основанием радиуса R и высотой h вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 h.$$

Объем конуса с основанием радиуса R и высотой h вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример 1. Чему равна площадь поверхности икосаэдра с ребром 1?

Решение. Поверхность икосаэдра состоит из двадцати правильных треугольников со стороной 1. Площадь каждого треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Поэтому площадь всей поверхности равна $5\sqrt{3}$.

Пример 2. Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите его объем.

Решение. Поверхность куба состоит из шести квадратов. Поскольку площадь поверхности куба равна 24 см^2, площадь каждого квадрата равна 4 см^2. Следовательно, ребро куба равно 2 см, и, значит, объем куба равен $2^3 = 8$ (см^3).

Вопросы

1. Как определяется площадь поверхности многогранника?
2. Как определяется площадь поверхности цилиндра?
3. Как вычисляется площадь поверхности цилиндра?
4. Как определяется площадь поверхности конуса?
5. Как вычисляется площадь поверхности конуса?

Задачи

1. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?

2. Чему равна площадь поверхности: а) тетраэдра с ребром 1; б) октаэдра с ребром 1?

3. Радиус основания цилиндра равен 2 м, образующая — 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

4. Как изменится площадь боковой поверхности цилиндра, если: а) радиус основания увеличить в 2 раза, а образующую уменьшить в 4 раза; б) радиус основания уменьшить в 2 раза, а образующую увеличить в 3 раза?

5. Нарисуйте развертку поверхности конуса, у которого образующая больше радиуса основания в: а) 1,5 раза; б) 2 раза; в) 3 раза; г) 4 раза.

6. Радиус основания конуса равен 3 м, образующая — 4 м. Найдите площадь полной поверхности конуса.

7. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.

8. Найдите площадь поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.

9. Как изменится объем прямоугольного параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2, 3, n раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

http://vk.com/school_ipad

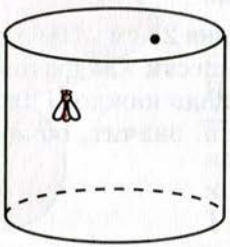


Рис. 90.3

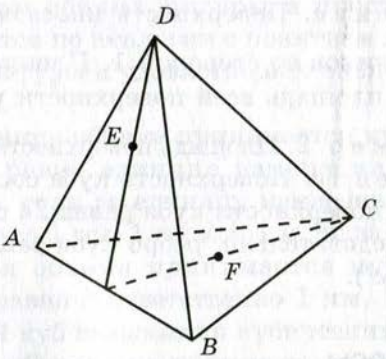


Рис. 90.4

10. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

* **11.** Найдите площади поверхностей правильных многогранников с ребром a.

* **12.** Докажите, что поверхность куба со стороной 1 можно оклеить двенадцатью квадратами, площадь каждого из которых равна 0,5.

* **13.** Докажите, что поверхность куба со стороной 1 можно оклеить шестью греческими крестами, площадь каждого из которых равна 1.

* **14.** Два разных цилиндра имеют одинаковую площадь боковой поверхности, равную 100 см^2. Докажите, что существует параллелограмм площадью 100 см^2, которым можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндров.

15. Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 40π см^3.

16. Радиусы трех шаров 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

17. Во сколько раз объем Земли больше объема Луны? (Диаметр Земли 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км.)

* **18.** На внутренней стенке цилиндрической банки в трех сантиметрах от верхнего края висит капля меда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке, сидит муха (рис. 90.3). Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до меда. Радиус основания банки равен 10 см.

* **19.** Найдите кратчайший путь по поверхности правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 90.4), соединяющий точки E и F, расположенные на высотах граней в 7 см от соответствующих вершин тетраэдра. Ребро тетраэдра равно 20 см.

http://vk.com/school_ipad

§ 1

1. Одну. **2.** Нет. **3.** Три. **4.** а) Одна, если точки принадлежат одной прямой; три, если они не принадлежат одной прямой; б) одна, если все точки принадлежат одной прямой; четыре, если три точки принадлежат одной прямой; шесть, если никакие три точки не принадлежат одной прямой. **5.** Пять прямых, десять точек попарных пересечений. **6.** Все точки принадлежат одной прямой. **7.** Все прямые пересекаются в одной точке. **14.** Четыре. **15.** Три, четыре, пять или шесть. **16.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **17.** а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **20.** а), б) Да.

§ 2

2. а) Две; б) три; в) четыре; г) $n + 1$. **3.** Два. **4.** Два луча могут не иметь общих точек, иметь общую вершину, или один из них может целиком содержать другой. **5.** AB и AC, BA и BC. **7.** OA, OB, OC, OD. **8.** 6. **9.** AB. **10.** C. **15.** а), б), в), г) Отрезки равны.

§ 3

1. а) 6 см; б) 7,7 дм; в) 18,1 м. **2.** а) 20,5 см; б) 8 см; в) 4,5 см; г) 12,5 см. **3.** B. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** $AB = 2CD$. **9.** а) 9 м и 6 м; б) 10 м и 5 м; в) 6 м и 9 м. **11.** 6 см. **12.** 6 см. **13.** 8,5 см. **14.** а) 40 мм; б) 80 мм; в) 20 мм. **16.** $a + b - c$. **17.** 4 см, 8 см и 16 см. **20.** В любом месте между вторым и третьим домами.

§ 4

1. Точки A и E, A и B, B и E, C и D лежат по одну сторону; точки A и C, A и D, B и C, B и D, E и C, E и D лежат по разные стороны. **2.** а) 4; б) 7; в) 11. **4.** а), г), е) Да; б), в), д) нет. **5.** а) 6; б) 4. **8.** 12. **9.** а) AOB, BOC, COD; б) AOC; в) AOD, BOD. **10.** Два. **11.** а), в) Нет; б) да. **12.** а) AOB и EOD, AOF и DOC, BOC и EOF, BOF и COE; б) AOB и BOD, AOB и AOE, AOF и AOC, AOF и FOD, BOC и BOF, BOC и COE. **14.** $\angle 3 = \angle 4$. **15.** Развернутый. **17.** $(\angle AOB + \angle BOC) : 2$. **21.** В 3 часа и в 9 часов. **22.** 24.

§ 5

4. а) 110°; б) 137°; в) 179°. **5.** а) Да; б), в) нет. **6.** а) 45° и 15°; б) 40° и 20°; в) 24° и 36°. **7.** 142. **8.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{4}{5}$; е) $\frac{5}{3}$. **9.** 120° и 60°. **10.** а) 105° и 75°; б) 110° и 70°; в) 45° и 135°; г) 90° и 90°. **11.** а) 72° и 108°; б) 54° и 126°; в) 55° и 125°; г) 88° и 92°. **12.** 30°, 150°, 150°. **13.** 144° и 36°. **15.** Нет. **16.** 135° и 45°. **17.** $\varphi + \psi - \gamma$. **18.** а) 90°; б) 180°; в) 270°; г) 150°. **19.** а) 120°; б) 60°. **20.** а) 60°; б) 7° 30′; в) 0° 15′. **21.** 22° 30′.

§ 6

1. 9. **2.** 20. **3.** 1, 2, 3, 5, 7. **6.** Внутри лежат точки B, D и F, снаружи — A, C и E. **9.** Многоугольники изображены на рисунках б) и г). **10.** Число вершин равно числу сторон. **11.** г) $n - 2$. **12.** а) 9; б) $\frac{n(n-3)}{2}$. **13.** а), в) Нет; б) да. **14.** а) Да, пятиугольник; б) да, четырехугольник; в) да, многоугольник с числом сторон, большим пяти. **16.** а) 1; б) 5; в) $\frac{n(n-3)}{2}$. **18.** Да. **19.** Нет.

§ 7

1. ABC, ADC, BDC, BDE, CDE. **2.** а), б), в) **3.** **3.** Да. **4.** Нет. **8.** а), б) Нет; в) да. **9.** $EF = 5$ см, $FG = 6$ см, $EG = 7$ см. **10.** $\angle E = 40°$, $\angle F = 60°$, $\angle G = 80°$. **11.** $PQ = XY = 5$ см, $BC = YZ = 6$ см, $AC = PR = 7$ см. **12.** 75 см. **13.** 17,3 см и 12,7 см. **14.** 12 см, 18 см и 24 см. **15.** 49 см.

http://vk.com/school_ipad

§ 8

1. Да. **2.** $\Delta KLN = \Delta NMK$. **3.** $\Delta AHB = \Delta CHB$. **4.** 10 м. **9.** 96°. **11.** $\Delta ABD = \Delta CBE$.

§ 9

1. Да. **2.** Нет. **6.** AB = 11 см; BC = 19 см. **9.** 13 см. **16.** а) ABC и ADC; б) ABD и CDB; в) ABD и CBE; г) AOD и BOC, ACD и BDC; д) ACD и BCE, ABE и BAD, AOE и BOD; е) AOD и BOC, ABD и BAC.

§ 10

1. 0,8 м. **2.** 3,5 м. **3.** а) 3,2 м; 6,2 м; 6,2 м; б) 7,2 м; 4,2 м; 4,2 м. **4.** 6 см; 16 см; 16 см. **5.** 15 м.

§ 11

1. Да. **2.** а) ADC и BDC; б) EFH и GFH; в) KLN и MNL; г) POR и QOR, POS и QOS, PRS и QRS; д) AOD и BOC, ABD и BAC, ACD и BDC; е) KLS и NMS, KMS и NLS; ж) $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = \Delta AOD$; $\Delta ABD = \Delta BCD = \Delta ADC = \Delta DAB$. **3.** Да. **13.** Нет. **14.** Нет.

§ 12

1. а), б) Да. **2.** а), б) Наибольшая. **3.** а), б) A; в) B. **4.** а) $BC > AC > AB$; б) $BC > AC = AB$. **5.** а) Равнобедренный; б) равносторонний. **6.** а), б) Нет. **10.** Нет. **12.** а), б) Нет; в) да. **13.** Тупые. **14.** а) A и B; б) острым, прямым или тупым. **21.** Нет.

§ 13

1. а), б) Нет. **2.** а), б), в) Нет. **3.** 10 см. **4.** а) 6 см; б) 8 см. **5.** 29 см. **6.** 4 см, 8 см и 8 см. **8.** 11 см, 7 см, 7 см. **11.** Нет. **13.** Нет. **15.** $2a < p < 2(a + b)$, где $a \geqslant b$. **16.** 4 см. **20.** В точке пересечения диагоналей четырехугольника.

§ 14

2. Да. **3.** Да. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** Нет. **7.** а) Да; б) нет. **8.** 5 см. **16.** CBD. **17.** AE.

§ 15

1. Две или ни одной. **2.** Нет. **8.** а), б) AB_1. **22.** Через середину отрезка AB. **23.** Через середины двух сторон треугольника, вершинами которого служат данные населенные пункты. **24.** Решение аналогично решению задачи Архимеда.

§ 16

1. а) $AO \leqslant R$; б) $AO > R$. **2.** Бесконечно много. **3.** Бесконечно много. **4.** 110 мм. **5.** 10 см. **6.** 1 см. **7.** Нет. **9.** $d + R$. **10.** $R - d$ и $d + R$. **11.** 15 см. **12.** 12 см. **18.** 29 см.

§ 17

2. Бесконечно много. **3.** Одну. **4.** а) Ни одной; б) две. **5.** Бесконечно много. **6.** Бесконечно много. **7.** Две. **8.** Нет. **9.** а) Не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются. **10.** $d + R$.

§ 18

2. 2 см. **3.** а) Касаются внешним образом; б) не имеют общих точек. **4.** а) Касаются внутренним образом; б) не имеют общих точек, одна лежит внутри другой. **5.** а) 10 см; б) 2 см. **6.** Окружность. **7.** Прямую. **8.** 36 см и 84 см. **9.** 8 см и 12 см. **10.** 25 см и 10 см. **14.** $d + R_1 + R_2$. **15.** $R_1 - d - R_2$ и $R_1 + d + R_2$. **18.** а) 0,5; 1,5; 3,5; 4,5; б) 1; 2; 3; 4; в) 1; 2; 3; 6. **22.** Да. **23.** Нет. **24.** Нет. **25.** а) 2; б) 6; в) 12; г) $n(n - 1)$. **26.** а) 4; б) 8; в) 14.

§ 19

1. а) ГМТ, состоящее из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними; б) ГМТ, состоящее из данной точки прямой и всех точек, лежащих от нее по одну сторону; в) ГМТ плоскости, удаленных от точки O на расстояние, не превосходящее R; г) ГМТ плоскости, удаленных от точки O на расстояние, большее или равное R_1 и не превосходящее R_2. **2.** а) Две концентрические окружности радиусов $R_1 + R_2$ и $R_2 - R_1$; б) одна окружность радиуса $2R_1$; в) две концентрические окружности радиусов $R_1 + R_2$ и $R_1 - R_2$. **3.** Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему две данные точки. **4.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB без его середины. **5.** а) Полуплоскость, определяемая серединным перпендикуляром к отрезку AB, содержащая точку A; б) внутренность круга с центром в точке A и радиусом AB. **6.** Точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в точке C и радиусом R. **7.** Точки пересечения прямой a и окружности с центром в точке C и радиусом R. Получаются две, одна или ни одной точки в зависимости от того, расстояние от точки C до прямой a больше R, равно R или меньше R соответственно. **8.** Часть прямой c, лежащая внутри полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром к отрезку AB и точкой A. Если прямая c целиком лежит в полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром и точкой B, то таких точек нет. **9.** а) Точки, принадлежащие биссектрисам четырех углов, образованных данными прямыми; б) внутренности двух вертикальных углов, образованных биссектрисами. **10.** а) Угол ACB и вертикальный с ним угол; б) угол ACB; в) часть угла ACB, лежащая в полуплоскости, определяемой прямой AB по другую сторону от точки C. **11.** Точка пересечения данной прямой с биссектрисой данного угла. **12.** Точка пересечения серединного перпендикуляра к MN с биссектрисой угла. **13.** 26 см. **14.** 9 см. **16.** Общая касательная, проходящая через точку касания окружностей, без самой точки касания. **17.** В точке пересечения шоссе с серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему два населенных пункта. **18.** В точке пересечения серединных перпендикуляров к двум отрезкам, соединяющим населенные пункты.

§ 20

6. Бесконечно много. Наименьший радиус равен половине отрезка, соединяющего данные точки. **16.** Точка пересечения данной прямой и серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему данные точки.

§ 21*

2. 2 см. **3.** а) Точки, расположенные внутри параболы; б) точки, расположенные вне параболы. **4.** а) Ветви параболы расширяются; б) ветви параболы сжимаются. **8.** Директриса. **15.** Построим две перпендикулярные касательные. Точка их пересечения будет принадлежать директрисе. Аналогично строим вторую точку, принадлежащую директрисе, и проводим через них прямую. Она и будет директрисой параболы. С центрами в каких-нибудь двух точках параболы и радиусами, равными расстояниям от этих точек до директрисы, проводим окружности. Фокус параболы будет точкой пересечения этих окружностей.

§ 22*

2. c; точки пересечения эллипса с прямой, проходящей через фокусы. **3.** 1 см. **4.** Эллипс. **6.** а) Эллипс приближается к окружности; б) эллипс растягивается вдоль прямой, проходящей через фокусы, и сжимается вдоль перпендикулярной ей прямой. **7.** Две точки. **8.** а) Точки внутри эллипса; б) точки вне эллипса. **9.** Эллипс с фокусами A и B, за исключением двух точек, принадлежащих прямой AB. **10.** Эллипс.

§ 23*

2. Гипербола. **4.** а) Точки, расположенные между ветвями гиперболы; б) точки, расположенные внутри ветвей гиперболы. **5.** 1 см. **6.** а) Ветви гиперболы сжимаются; б) ветви гиперболы расширяются. **7.** Гипербола. **8.** Гипербола. **10.** Точки пересечения прямой F_1F_2 с гиперболой.

§ 24*

3. 15. **4.** 10. **5.** а), б), г), д), ж), з). **7.** Нет. **10.** Один. **12.** а) 3; б) 0; в) 9; г) 5. **13.** Да, в точках графа, имеющих нечетный индекс. **15.** 18. **21.** n.

§ 25*

5. а), б) Да. **6.** а) Да; б) нет. **8.** а) В = 4, Г = 3; б) В = 8, Г = 5; в) В = 10, Г = 6. **10.** 0.

§ 26*

1. Три. **2.** Три, если n четно, и четыре, если n нечетно. **7.** $\frac{n^2}{2}$, если n четно, и $\frac{n^2+n}{2}$, если n нечетно. **8.** Нет. **10.** Тетраэдр — 4; куб — 3; октаэдр — 2; икосаэдр — 4; додекаэдр — 4.

§ 27

1. Пересекаться или быть параллельными. **2.** Четыре. **3.** Да. **4.** Да. **5.** Да. **6.** а) 150°, 30°; б) 55°, 125°. **7.** 75°, 105°. **8.** Нет. **17.** Параллельны. **18.** а), б), в) Параллельны. **19.** $\angle B = 150°$, $\angle C = 30°$, $\angle D = 150°$; $CD = 2$ см, $AD = 4$ см. **20.** Нет.

§ 28

1. 60°. **3.** 100°, 40°, 40°. **4.** 20°, 70°, 90°. **5.** 25° и 17°. **12.** 24°, 38°, 118°. **13.** 36°, 72°, 108°, 144°. **14.** 7. **17.** а) 10; б) 15. **20.** 180°.

§ 29

1. 9. **2.** 3. **3.** 10 см и 15 см. **4.** 150°, 30°, 150°. **5.** Параллелограммом. **6.** Нет. **7.** а) 40°, 140°, 40°, 140°; б) 50°, 130°, 50°, 130°; в) 80°, 100°, 80°, 100°. **8.** а) 70°, 110°, 70°, 110°; б) 30°, 150°, 30°, 150°. **9.** 54°, 126°, 54°, 126°. **10.** 60°, 120°, 60°, 120°. **11.** 60°, 90°, 120°, 90°. **12.** Перпендикулярны. **13.** Параллельны. **14.** Да. **15.** а), б) Нет; в), г) да. **16.** а) 11 см, 13 см, 11 см, 13 см; б) 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см, 8 см, 16 см. **17.** 0,6 м, 0,8 м, 0,6 м, 0,8 м. **18.** 3 см и 4 см. **19.** 10 м.

§ 30

1. Да. **2.** Нет. **3.** Нет. **5.** R. **9.** Да. **10.** Да. **11.** Да. **13.** Да. **14.** Одна сторона в два раза больше другой. **15.** Параллелограмм.

§ 31

1. Прямоугольник. **2.** 10 см. **3.** Да. **4.** Нет. **7.** 3 см. **8.** 10 см. **9.** 30° и 60°. **10.** 1 : 2. **11.** 13 см. **12.** 25° и 65°. **13.** а) 36° и 54°; б) 18°. **14.** 4 см и 9 см. **15.** a. **19.** 80°, 100°, 80°, 100°. **20.** 60°, 120°, 60°, 120°. **22.** а) 90°; б) 45°. **23.** 40 см.

§ 32

1. 4 см, 5 см и 6 см. **2.** 9 см и 18 см. **3.** 12 см. **4.** 6,15 см. **5.** 7,5 см, 10 см, 12,5 см. **7.** 5 см, 5 см, 6 см. **10.** $a + b$. **11.** 80 см. **15.** Проходит через середины двух отрезков, соединяющих данные точки. Три.

§ 33

1. Да. **2.** а), б) Нет. **3.** Необязательно. **4.** Равные. **5.** Ромб. **6.** 21 см. **7.** 21 см. **8.** 15 см. **9.** 40 см. **10.** 20 см. **11.** 5 см и 9 см. **12.** 4 м и 6 м. **13.** 70°, 110°, 70°, 110°.

17. 5 см. **18.** 1,7 м. **19.** 8 см и 12 см. **20.** 2 см и 5 см. **21.** $2a$ и $2b$. **23.** 60°, 120°, 60°, 120°. **25.** Нет.

§ 34

1. а) Да; б) нет. **2.** a, e и b, d. **3.** 8 см. **6.** 4,5 см. **7.** а) 2 см; б) 12 см и 20 см; в) 4 см и 10 см. **8.** 1 см, 7 см и 8 см. **9.** p. **11.** $3\frac{3}{4}$ см. **12.** 4,5 см, 9 см, 13,5 см. **13.** 16 см и 18 см.

§ 35

1. CAD, CAE, DAE, FBD, ADB. **2.** 90°. **3.** 35° и 70°. **4.** а) 30°; б) 18°. **6.** Окружность с диаметром AC, за исключением точек A и C. **7.** а) ГМТ, лежащих вне окружности с диаметром AB и не принадлежащих прямой AB; б) ГМТ, лежащих внутри окружности с диаметром AB и не принадлежащих отрезку AB. **9.** 80° и 100°. **11.** 30°, 45° и 105°. **12.** 100°, 120°, 80°, 60°. **13.** 120°. **14.** 22°. **19.** 20°. **20.** 80°, 60°, 40°. **23.** Дуги двух окружностей одинакового радиуса, опирающихся на отрезок AB, без точек A и B. **24.** Точка пересечения прямой c и серединного перпендикуляра к отрезку AB.

§ 36

4. а), б), в) Да. **5.** На гипотенузе. **6.** 5 см. **7.** 12°25′30″, 12°25′30″, 155°9′. **8.** 50°, 65°, 65°. **9.** Против угла в 30°. **11.** 12 см. **12.** R. **13.** а), г), д) Да; б), в), е) нет. **14.** а), в) Да; б), г) нет. **15.** 100° и 120°. **16.** 90°. **17.** 5 см. **18.** 5 см. **19.** В середине большего основания.

§ 37

1. а), б), в) Да. **3.** Нет. **4.** а) Равносторонний; б) равнобедренный. **5.** 22 см. **6.** $p_1 + p_2 + p_3$. **7.** 34 см. **10.** 1 см. **12.** а), б) Нет; в), г), д) да. **13.** Да. **14.** Ромб. **15.** 4,5 см. **16.** 4 см, 14 см, 24 см, 14 см. **17.** 8 см, 2 см. **18.** 1 см. **19.** 7 см, 30 см. **20.** Да, 34 см. **21.** $2R$.

§ 38

1. Нет. **2.** Нет. **3.** Да. **4.** Да. **5.** а) В середине гипотенузы; б) внутри треугольника; в) вне треугольника. **6.** Нет. **7.** К большей стороне. **8.** К вершине, лежащей против большей стороны. **9.** 140°, 20°. **15.** 46° и 46°. **16.** Четырехугольники, в которые можно вписать окружность. **20.** Три окружности с центрами в точках пересечения биссектрис внешних углов треугольника.

§ 39

1. Центр симметрии. **2.** Прямые, проходящие через центр симметрии. **3.** Середина отрезка. **4.** В середине отрезка AA'. **5.** Нет. **6.** Да. **7.** Нет. **8.** Да. **9.** Да. **15.** б), в), г), д). **17.** H, I, N, O, S, X, Z. **19.** Две прямые параллельны третьей и находятся от нее на равном расстоянии.

§ 40

2. а) 90°; б) 180°. **5.** Нет. **6.** Нет. **7.** Да. **10.** Правильный шестиугольник. **11.** а) Центр описанной окружности, 120°; б) точка пересечения диагоналей, 180°; в) центр описанной окружности, 60°; г) центр окружности, произвольный угол; д) центр описанной окружности, 72°. **12.** а), б), в) 2-го порядка; г) 4-го порядка. **14.** 6-го порядка.

§ 41

1. Принадлежащие оси симметрии. **2.** Ось симметрии и прямые, ей перпендикулярные. **3.** Перпендикулярна отрезку AA' и проходит через его середину. **4.** Да. **8.** а) A, B, C, D, E, M, T, U, V, W, Y; б) H, I, O, X. **11.** Если она параллельна оси симметрии. **12.** Нет. **14.** а) Две оси симметрии, проходящие через середины противоположных сторон; б) две прямые, проходящие через середины противоположных сторон и две прямые, содержащие диагонали. **16.** n. **17.** а) Правильный треугольник; б) параллелограмм. **20.** Последовательное выполнение двух осевых симметрий относительно перпендикулярных прямых будет центральной симметрией относительно точки пересечения этих прямых.

§ 42

1. а) 1 и 8; 2 и 7; 3 и 12; 5, 9, и 15; б) 1 и 2; 1 и 7; 2 и 8; 3 и 14; 4 и 6; 5 и 10; 7 и 8; 9 и 10; 10 и 15; 12 и 14. **2.** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{BO}$; всего имеется 12 различных векторов. **4.** Ромб. **8.** Отрезки равны и лежат на параллельных прямых или на одной прямой. **9.** Бесконечно много. **10.** Нет.

§ 43

1. Нет. **10.** а, б, д; в, г, з; е, ж. **15.** Нет, не всегда.

§ 44*

1. а), в) Нет; б) да. **2.** а), б) Да; в) нет. **3.** Да.

§ 45

1. а), в) Да; б) нет. **2.** а) 10 см, 16 см и 20 см; б) 2,5 см, 4 см и 5 см. **3.** Да. **4.** 45°. **5.** $AC = 15$ см, $B_1C_1 = 7$ см. **6.** $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м. **7.** а) 15 см, 9 см, 21 см; б) $8\frac{1}{3}$ см, 5 см, $11\frac{2}{3}$ см; в) 5 см, 3 см, 7 см; г) 2,5 см, 1,5 см, 3,5 см. **12.** а) ABC, FEC, DBE; б) ABC, GFC, AGD, FBE; в) ABC, CDA, AEB, BEC; г) AOB, COD; д) ABC и FGC; ADC и FEC; DBC и EGC. **13.** $9\frac{1}{3}$. **14.** 13,6 см. **15.** Нет. **16.** $\frac{ah}{a+h}$. **17.** $\frac{bc}{b+c}$. **18.** Можно, если треугольник не равносторонний.

§ 46

2. а), в) Да; б) нет. **3.** 6,4 дм, 5,76 дм и 2,4 дм. **4.** 4 см, 3 см. **5.** 18 м, $23\frac{4}{7}$ м, $25\frac{5}{7}$ м. **7.** Да. **8.** Да. **9.** 8 см, $5\frac{1}{3}$ см и $3\frac{5}{9}$ см. **10.** 15 см. **12.** $\frac{na+mb}{n+m}$. **16.** $AD = 36\frac{1}{8}$ м. **17.** 30 м.

§ 47

1. $\frac{1}{k}$. **2.** Например, прямая. **3.** Да. **4.** а) A' лежит между O и A; б) A лежит между O и A'. **5.** Да, прямые, проходящие через центр гомотетии. **6.** Да. **7.** а) Имеют общий центр; б) касаются внутренним образом. **11.** 2,8 см, 4,2 см, 2 см, 8,4 см. **12.** Нет. **13.** Нет. **14.** а) Равны соответствующие углы; б) равны соответствующие углы и пропорциональны соответствующие стороны; в) равны соответствующие углы и пропорциональны соответствующие стороны. **17.** $\frac{b^2}{a}$. **18.** 8 см. **19.** $\sqrt{127\,500} \approx 357$ (км). **22.** а), б) Нет.

§ 48*

1. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **2.** $b\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **4.** $\varphi^4 = 2 - 3\varphi$. **9.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **10.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **12.** а) $\sqrt{5}+1$; б) $\sqrt{5}-1$.

http://vk.com/school_ipad

§ 49

1. а) 5; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{61}$. **2.** а) 4; б) 12; в) $\sqrt{11}$. **3.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **4.** Нет. **5.** Например, 3, 4, 5; 5, 12, 13. **6.** а) 6 см, 8 см, 10 см; б) 10 см, 24 см, 26 см. **7.** 5, 12 и 13. **8.** 2,4; 1,8 и 3,2. **9.** 6,5 м. **10.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **11.** $\sqrt{7}$ м. **12.** а), б), в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$; $R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **14.** $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$. **15.** $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$, $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

§ 50

1. $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.** Нет. **5.** $\sin A=\frac{5}{13}$; $\cos A=\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} A=\frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg} A=2{,}4$. **6.** $\sin A=0{,}8$, $\cos A=0{,}6$. **7.** $8\sqrt{3}$ см. **8.** $\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ см. **9.** 10 см и 6 см. **10.** 60°. **11.** 30°, 60°. **12.** 60°, 120°. **13.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **14.** $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. **15.** $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

§ 51

1. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **3.** Да, 45°. **4.** а) Нет; б) да. **7.** а) 2,4; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{4}{3}$. **9.** а) B; б) A. **10.** $\operatorname{tg} A=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$.

§ 52

1. а) $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos A=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} A=-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} A=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sin A=\frac{1}{2}$, $\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} A=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} A=-\sqrt{3}$. **2.** а) $-\sqrt{3}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) -1. **3.** $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos A=-\frac{12}{13}$. **4.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **8.** а) $\cos^2 A$; б) 2; в) 1. **9.** $\operatorname{tg} 100^\circ<\operatorname{tg} 70^\circ<\operatorname{tg} 80^\circ$. **10.** $\operatorname{ctg} 120^\circ<\operatorname{ctg} 110^\circ<\operatorname{ctg} 60^\circ$.

§ 53

1. $4\sqrt{7}$ см. **2.** а) 14 см; б) 26 мм. **3.** а) $\angle A<90^\circ$; б) $\angle A=90^\circ$; в) $\angle A>90^\circ$. **4.** а) Тупоугольный; б) прямоугольный; в) остроугольный. **5.** а) На стороне треугольника; б) внутри треугольника; в) вне треугольника. **6.** $\frac{1}{5}, \frac{5}{7}, \frac{19}{35}$. **7.** $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+c^2-2dc\cos\varphi}$, $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+c^2+2dc\cos\varphi}$. **8.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\psi}$; $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\psi}$. **9.** 2,25 м и 3,75 м. **13.** 35 мм. **14.** $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

§ 54

1. 2 : 3 : 4. **2.** 3 : 4 : 5, прямоугольный. **3.** а) $\sqrt{3}:3$, $\sqrt{3}:3$; б) 1 : 2 и $\sqrt{3}:2$. **4.** $2\sqrt{6}$ см. **5.** а) 10 см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см; г) 5 см; д) 10 см. **6.** а) 3 см; б) $3\sqrt{2}$ см; в) $3\sqrt{3}$ см; г) 6 см; д) 3 см. **7.** $\frac{c\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$, $\frac{c\cdot\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$. **8.** $1:\sqrt{3}:2$. **9.** $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ ч $\approx$ 2 ч 5 мин. **10.** $\frac{AD\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi}{\sin(\psi-\varphi)}$.

§ 55

1. а) 4; б) 8; в) 12. **2.** а) $3\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{2}$; в) 6. **3.** а) Увеличится в три раза; б) уменьшится в два раза. **4.** $\pi a\sqrt{2}$. **5.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $\frac{7\pi}{4}$. **6.** $\frac{180}{\pi}$ м. **7.** $R\sqrt{3}$. **8.** $2Rn \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. **10.** $3 < \pi < 2\sqrt{3}$. **11.** $(2\sqrt{3} - 3)R$. **12.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$. **13.** а) 90°; б) 45°; в) 22° 30′; г) 150°; д) 70°; е) 240°. **14.** $\approx$ 6 369 427 м. **15.** На 2π м.

§ 56*

2. а) Да; б) нет. **7.** а) Да; б) нет. **10.** а), б) Да.

§ 57

1. 40. **2.** а) и д), в) и г). **3.** $\frac{1}{4}a^2$. **4.** а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз; в) изменится в k^2 раз. **8.** 36 см. **9.** 12 дм и 25 дм. **10.** а) $2(ad + bc - 2cd)$; б) $ad + bc - cd$; в) $ab + 2cd - ad$. **11.** $\frac{a^2}{2}$. **12.** 12 м. **13.** В два раза.

§ 58

2. а), в), д), е); г), з), и). **3.** Нет. **5.** 8 см и 4 см. **6.** $3\frac{1}{3}$ см. **7.** 10 см^2. **8.** 50 см^2. **9.** $\frac{a^2}{2}$. **10.** 12 см^2. **11.** Прямоугольник. **12.** Площадь квадрата больше. **13.** 30°. **14.** 202,8 см^2. **15.** Две параллельные прямые. **17.** Прямая, проходящая через центры симметрии исходного параллелограмма и вырезанного прямоугольника.

§ 59

1. а), г), е), ж), з); б), д). **2.** а), б) Да; в) нет. **3.** а) 14 см^2; б) 2,1 м^2. **4.** 3 : 1. **5.** а) Увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 3 раза; в) уменьшится в $1\frac{3}{4}$ раза. **6.** 5,25 см^2. **7.** 3 см. **8.** $20\sqrt{2}$ см. **11.** Одну четвертую. **12.** Одну четвертую. **13.** Параллелограмм, 8 см^2. **15.** Две параллельные прямые. **16.** 90°. **19.** Да. **21.** Да. **26.** а) 84; б) 12.

§ 60

3. 210 см^2. **4.** 84 см^2. **5.** 14 см. **6.** 20 см. **7.** 16 см и 20 см. **8.** 4 см^2. **9.** 30 см^2. **10.** 4,76 см^2. **11.** *ABD* и *ABC*, *ACD* и *BCD*, *AOD* и *BOC*. **16.** $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

§ 61

1. 4 см^2. **2.** 4 см. **3.** а), б), в), д) Да; г) нет. **4.** 10 см^2. **5.** 20. **6.** $(a + b)R$. **9.** $2S$. **12.** $2a^2(\sqrt{2} - 1)$. **14.** $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

§ 62

1. а) 4π см^2; б) 25π м^2. **2.** а) $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$ см; б) $\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi}$ м. **3.** $\pi(b^2 - a^2)$. **4.** $\frac{\pi(a^2 + b^2)}{4}$. **5.** $\frac{\pi a^2}{12}$. **6.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **7.** а) $\frac{\pi R^2}{6}$; б) $\frac{\pi R^2}{9}$; в) $\frac{5\pi R^2}{12}$. **8.** а) $(\pi - 2)R^2$; б) $(4\pi - 3\sqrt{3})\frac{R^2}{4}$; в) $(2\pi - 3\sqrt{3})\frac{R^2}{2}$. **9.** а) $\frac{a^2}{4}(4 - \pi)$; б) $\frac{1}{4}(\sqrt{3}a^2 - 2\pi b^2)$. **10.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **12.** $8 + \frac{\pi}{2}$ см^2. **15.** а) $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$; б) $2\pi - 4$.

http://vk.com/school_ipad

§ 63

1. а) 4 : 9; б) 2 : 3; в) 1 : 2,25. 2. а) 2 : 3; б) $\sqrt{3}$: 2; в) 1 : 2. 3. 36 : 49. 4. а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 25 раз. 5. Четвертую часть. 6. Четвертую часть. 7. 9 : 4 : 1. 8. $(\sqrt{2}-1):1$. 9. 20 см^2. 10. 14,4 м^2. 11. а) Увеличится в n^2 раз; б) уменьшится в m^2 раз. 12. $a^2 : b^2$. 14. $\frac{r^2S}{R^2}$. 15. 1 : k. 16. $\frac{\pi R^2}{2}$.

§ 64*

4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 7. 1.

§ 65*

12. $\frac{1}{nm+1}$.

§ 66

1. а) 2; б) 1; в) −4. 3. (1, 2), (2, 1), (−1, 1,5), (−2,5, 1), (−1, −1,5), (−2, −3), (1, −2,5), (2, −2). 4. 2. 5. 3. 6. (2, 0). 7. (0, 3). 9. а) $(x, -y)$; б) $(-x, y)$; в) $(-x, -y)$. 10. $N(-2, 6)$; $N_1(2, 6)$. 11. а) (−1, 2); б) (−3, −1); в) (3, −2); г) (3, 1). 12. а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 13. а) Прямая, параллельная оси ординат; б) прямая, параллельная оси абсцисс; в) две прямые, параллельные оси ординат; г) две полуплоскости; д) прямая; е) прямая. 15. а) $\sqrt{2}$; б) 5; в) $\sqrt{5}$. 17. а) (3, 2); б) (−1, 3); в) (1, 1).

§ 67

1. а) $\sqrt{5}$; б) 5. 2. Одинаково. 3. $\sqrt{34} + \sqrt{13} + \sqrt{29}$. 4. Равнобедренный прямоугольный. 6. а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$. 7. а) Внутри окружности; б), в), г) на окружности; д) вне окружности. 8. а) (2, −5), 3; б) (0, 6), $\sqrt{11}$. 10. $(x-3)^2 + y^2 = 11$. 11. $x^2 + (y-3)^2 = 13$. 12. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. 13. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$. 14. $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > R^2$. 15. (4, 0). 16. (3, 3).

§ 68

1. 8. 2. а) 3 см; б) 4 см; в) 3 см; г) 5 см; д) 5 см. 3. а) 13 см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\sqrt{74}$ см. 4. а), в) Да; б) г) нет. 5. а), г) Да; б), в) нет. 10. а), б), в), д), е) Да; г) нет. 12. а) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{b} + \vec{c}$; в) $\vec{a} + \vec{b}$. 14. Векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых. 16. а) a; б) $a\sqrt{3}$; в) $a\sqrt{3}$. 17. а) 14; б) 10; в) 14; г) 10.

§ 69

4. а) $-\vec{a}$; б) $\vec{b}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $\vec{b} - 2\vec{a}$; д) $2(\vec{a} - \vec{b})$. 5. а) $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$; б) $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$; в) $\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$. 10. а) $\vec{a} = \vec{b}$; б) $\vec{a} = \vec{0}$. 11. а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$. 12. а), б) a. 13. а) −2; б) 10; в) −2; г) 10.

§ 70

1. а) (−2, 6); б) (1, 3); в) (0, −3); г) (−5, 0). 2. (5, −2). 3. $\sqrt{x^2 + y^2}$. 4. (5, −6). 5. а) (−7, 9); б) (5, −8); в) (8, 0). 6. $(-a, -b)$. 8. (−2, 0). 9. (1, 3) и (1, −3). 10. а) (1, −2); б) (−1, 2); в) (11, −22). 12. $\left(2, 2\frac{1}{3}\right)$.
http://vk.com/school_ipad

§ 71

1. а) $3\sqrt{2}$; б) 0; в) $-3\sqrt{2}$. 2. а) $-\frac{a^2}{2}$; б) 0; в) a^2. 3. −4. 4. б), г), д). 5. а) $0° < \varphi < 90°$; б) $90° < \varphi < 180°$; в) $\varphi = 90°$; г) $\varphi = 180°$. 6. а) 0°; б) 180°. 7. а) $\cos\varphi = -\frac{4\sqrt{65}}{65}$; б) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 11. 60°. 12. $t = 0$. 13. 60°. 14. а) 36; б) 68; в) 82; г) 50. 15. $A = 17$.

§ 72

1. а) $y = 0$; б) $x = 0$. **2.** $(1, -2)$. **3.** а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; г) $y = -x$; д) $y = -2x$; е) $y = -\frac{1}{2}x$. **4.** а) $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$. **5.** $x - y + 1 = 0$. **6.** $x + y - 1 = 0$. **7.** $2x - y - 7 = 0$; $\vec{n}(2, -1)$. **8.** а) $y = -2$; б) $x = 1$; в) $y = x - 3$. **9.** $x - 2y + 10 = 0$. **10.** $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$. **11.** а), в). **13.** 90°. **15.** а) $(-1, 2)$; б) $(-3, -7)$. **17.** h_a: $x + 2y - 7 = 0$; h_b: $3x - y - 9 = 0$; h_c: $2x - 3y - 2 = 0$; $H(3\frac{4}{7}, 1\frac{5}{7})$.

§ 73*

2. Системой данных неравенств. **3.** а), б) Первой; в) второй. **4.** Прямоугольник. **6.** $3x + 2y - 9 \geqslant 0$; $2x - y - 6 \leqslant 0$; $x + 3y - 10 \leqslant 0$. **7.** $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$; $x = -\frac{1}{4}$. **13.** $a = b$. **15.** $F_1(0, 1)$, $F_2(0, -1)$. **17.** $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$; $y = x$, $y = -x$.

§ 74*

2. 3,8. **3.** −2. **4.** 60; 60.

§ 75

2. $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. **3.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** а), б) Нет, не могут. **5.** а) $360°k < \varphi < 180° + 360°k$; б) $\varphi = 180°k$; в) $180° + 360°k < \varphi < 360° + 360°k$. **6.** а) $-90° + 360°k < \varphi < 90° + 360°k$; б) $\varphi = 90° + 180°k$; в) $90° + 360°k < \varphi < 270° + 360°k$. **7.** а) $\varphi = 90° + 180°k$; б) $\varphi = 180°k$. **8.** а), б) Да. **9.** а) $180°k < \varphi < 90° + 180°k$; б) $\varphi = 180°k$; в) $-90° + 180°k < \varphi < 180°k$. **10.** а) $180°k < \varphi < 90° + 180°k$; б) $\varphi = 90° + 180°k$; в) $90° + 180°k < \varphi < 180° + 180°k$. **12.** а) 45°; б) 90°; в) 150°; г) 135°. **13.** а) 630°; б) 900°; в) 1200°.

§ 76*

3. а) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. **4.** а) $(2, \frac{\pi}{4})$; б) $(10, \pi)$; в) $(2, -\frac{\pi}{3})$; г) $(2, \frac{5\pi}{6})$. **5.** Да. **10.** а) $r = \frac{1}{\cos\varphi}$; б) $r = \frac{1}{\sin\varphi}$. **13.** $r = 2R(1 - \cos\varphi)$. **15.** $\begin{cases} x = R\cos^3\frac{\varphi}{4}, \\ y = R\sin^3\frac{\varphi}{4}. \end{cases}$

§ 77

1. а) Да; б) нет. **2.** Одна. **3.** Одна или ни одной. **4.** а), б) Нет. **5.** Нет. **6.** Да. **7.** Нет. **8.** а), в) Да; б) нет. **9.** Если они принадлежат одной прямой. **10.** а) Нет; б) да. **12.** Нет. **14.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **15.** $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

§ 78

2. а) 5 граней, 9 ребер и 6 вершин; б) 4 грани, 6 ребер и 4 вершины. **3.** Шестнадцатиугольник. **4.** а), в) Нет; б), г) да. **6.** Пятиугольник. **7.** а) Да; б) нет. **9.** а) 720°; б) 1440°. **10.** а) 28; б) 6; в) 15. **11.** $a\sqrt{5}$, 6 путей. **12.** Да. **13.** Да. **14.** 8. **15.** а) 3; б), в) 3, если n четно, и 4, если n нечетно. **16.** Нет.

§ 79

1. 90°. **3.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **4.** $\cos\varphi = \frac{3}{4}$. **6.** Вершины куба, не принадлежащие диагонали. **8.** а) 45°; б), в) 90°. **9.** а) 8; б) 4; в) 4. **10.** а) Четырехугольная пирамида; б) пятиугольная пирамида.

§ 80

1. а) 18; б) 6; в) 2. 3. Нет. 4. а) 24; б) 12; в) 8. 5. Скрещиваются. 6. Лежат в одной плоскости. 8. Нет. 9. $\frac{n(n-1)}{2}$. 12. а) Например, A_1B_1 и ABC; б) например, ABC и $A_1B_1C_1$.

§ 81

1. $OA \leqslant R$; $OA > R$. 5. $d + R$. 6. $R - d$, $R + d$. 7. 15 см. 8. 12 см. 11. Бесконечно много, если точка принадлежит сфере или находится вне ее; ни одной, если точка находится внутри сферы.

§ 82

1. б), д) Выпуклые; а), в), г) невыпуклые. 5. Нет. 7. Нет. 8. Да, семиугольная призма. 9. Да, у тетраэдра.

§ 83

2. а) В = 6, Г = 8; б) В = 7, Г = 10. 3. а) В = 8, Г = 6; б) В = 10, Г = 7. 5. Нет. 6. В = = 6, Г = 8.

§ 84

1. Да. 2. Да. 3. а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 6, Р = 12, Г = 8; в) В = 8, Р = 12, Г = = 6; г) В = 12, Р = 30, Г = 20; д) В = 20, Р = 30, Г = 12. 4. 108°. 5. а), б), д) Трехгранные; в) четырехгранные; г) пятигранные. 6. Да. 7. Нет, 30 квадратов, В = 32, Р = 60. 8. Октаэдр. 9. $\sqrt{2}$ дм. 10. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 11. Тетраэдр — 4 краски; гексаэдр (куб) — 3; октаэдр — 4; додекаэдр — 4; икосаэдр — 5. 12. Октаэдру. 13. Тетраэдр.

§ 85

1. Треугольники и шестиугольники; треугольники и восьмиугольники. 2. а) Усеченный кубооктаэдр, усеченный икосододекаэдр; б) кубооктаэдр, икосододекаэдр, ромбокубооктаэдр, ромбоикосододекаэдр; в) плосконосый куб и плосконосый додекаэдр. 3. а), б), в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ 4. а) В = 12, Р = 18, Г = 8; б)В = 24, Р = 36, Г = 14; в) В = 24, Р = 36, Г = 14; г) В = 60, Р = 90, Г = 32. 5. Операция усечения: а) усеченный куб; б) кубооктаэдр; в) октаэдр; г) усеченный октаэдр. 6. а)1; б) $\frac{3}{4}$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 8. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ 9. а) 8; б) 20.

§ 86

1. Нет. 2. Вписать в куб два тетраэдра. 3. Октаэдром. 4. 1. 5. 12 вершин (выпуклых пятигранных углов), 30 ребер и 12 граней (звездчатых пятиугольников). 6. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 7. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

§ 87

2. в), д), ж). 3. а), б), в), г). 4. а), б), д). 5. Да. 7. в).

§ 88

2. В = 14, Р = 24, Г = 12. 3. $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi \approx 71°$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 5. 120°. 6. 3 краски. 7. Кубооктаэдру. 9. Из усеченного октаэдра.

§ 89

1. а), б) Две. 2. Две. 3. Две сцепленные дважды перекрученные ленты. 4. Нет. 5. а), г), д) Одну; б), в) две. 6. Тор. 7. Сцепленные лист Мёбиуса и четырежды перекрученная лента. 10. Нет.

§ 90

1. 6. 2. а) $\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$. 3. 12π м^2. 4. а) Уменьшится в 2 раза; б) увеличится в 1,5 раза. 6. 21π м^2. 7. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ab$. 8. $na(\frac{1}{2}a \cdot \operatorname{ctg}\frac{180°}{n} + b)$. 9. а) Увеличится в 2, 3, n раз; б) увеличится в 4, 9, n^2 раз; в) увеличится в 8, 27, n^3 раз. 10. 3 см. 11. Тетраэдр — $\sqrt{3}a^2$; гексаэдр (куб) — $6a^2$; октаэдр — $2\sqrt{3}a^2$; икосаэдр — $5\sqrt{3}a^2$; додекаэдр — $15a^2 + \operatorname{tg} 54°$. 15. 120π см^3. 16. 6 см. 17. $\left(3\frac{5}{7}\right)^3 \approx 50$ раз. 18. $2\sqrt{9 + 25\pi^2}$ см. 19. 20 см.

Абсцисса точки 259
Аксиома 8
– параллельных 118
Алмаз 346
Аналитическое задание фигур 281
Антипризма 333
Асимптоты гиперболы 284
Астроида 223
Астролябия 31

Биссектриса треугольника 39
– угла 25
Боковая грань пирамиды 304
– – призмы 304
Боковая поверхность конуса 305
– – пирамиды 305
– – призмы 305
– – цилиндра 305
Боковая сторона равнобедренного треугольника 50
– – трапеции 137
Боковое ребро пирамиды 304
– – призмы 304
Больше 12
Большой додекаэдр 338
– звездчатый додекаэдр 338
– икосаэдр 339

Вектор 170
– нормали 277
– противоположный 171
Векторы одинаково направленные 171
– противоположно направленные 171
Вершина графа 105
– конуса 305
– ломаной 33
– луча 12
– многогранника 303
– параболы 92
– пирамиды 303
– угла 22
Внешний угол треугольника 56
– – многоугольника 56
Вращающиеся квадраты 198
Высота параллелограмма 230
– трапеции 237
– треугольника 39

Гармоническое отношение 195
Гексаэдр 4
Геометрический конструктор 344
Геометрическое место точек 84
Геометрия 3
Гипербола 101
Гипотенуза 63
Гомотетия 192
Градус 28
Градусная величина угла 28
Грань двугранного угла 307
– многогранника 303
Граф 105
– плоский 105
– связный 109
– уникурсальный 106

Движение 174
Двугранный угол 307
Декартова система координат 259
Декартовы координаты 259
Деление отрезка 13
– угла 25
Дерево 109
Диагональ многоугольника 34
Диаметр круга 71
– окружности 71
– сферы 313
– шара 313
Директриса параболы 92
Длина вектора 171
– ломаной 33
– окружности 216
– отрезка 15
Додекаэдр 4
Доказательство 8
Дуга окружности 145

Единица измерения
– величины угла 28
– длины 15
– площади 225

Задача Дидоны 249
– изопериметрическая 249
– Эйлера 110
Задачи на построение 87
– на разрезание 256
– оптимизации 287

Замечательные точки
в треугольнике 156
Золотая спираль 198
Золотой прямоугольник 198
– треугольник 198
Золотое сечение 195

Измерение длины отрезка 15
– величины угла 28
– площадей 225
Икосаэдр 4
Икосододекаэдр 333
Индекс вершины графа 106
Исландский шпат 347

Кардиоида 222
Касательная прямая к окружности 74
– – к гиперболе 102
– – к параболе 93
– – к эллипсу 97
Катет 63
Квадрант 31
Квадрат 131
Композиция движений 174
Конус 305
Концентрические окружности 79
Концы отрезка 11
Координатные векторы 272
Координаты точки 258
– вектора 271
– полярные 294
Косинус угла 204
Котангенс угла 204
Коэффициент подобия 185
Кривые
– заданные уравнением
в полярных координатах 294
Кристаллы 346
– граната 348
– горного хрусталя 346
– кварца 346
– льда 346
– поваренной соли 346
Круг 71
Круговой сектор 244
Куб 303
Кубооктаэдр 333
Курносый додекаэдр 334
– куб 334

Лежать
– между 11
– по разные стороны 11
– по одну сторону 11
Лес 110
Линейка 17
Лист Мёбиуса 352
Ломаная 33
– замкнутая 34
– простая 33
Луч 12

Малый звездчатый додекаэдр 337
Медиана треугольника 39
Меньше 12
Метод координат 259
Многогранник
– выпуклый 318
– звездчатый 337
– правильный 324
– полуправильный 331
– топологически правильный 326
Многоугольник 34
– вписанный в окружность 149
– выпуклый 34
– ограничений 288
– описанный около окружности 152
– правильный 34
– равносторонне полуправильный 156
– равноугольно полуправильный 152
Моделирование многогранников 342
Модуль вектора 171

Наклонная 66
Начало координат 258
– луча 12
Неравенство треугольника 60

Объем конуса 356
– прямоугольного параллелепипеда 356
– фигуры 356
– цилиндра 356
– шара 356
Окружность 71
– вневписанная 160
– вписанная 152
– девяти точек 160
– описанная 149
– Эйлера 160

Октаэдр 4
Ордината точки 259
Ориентация плоскости 351
Ортоцентр треугольника 156
Оси координат 259
Основание конуса 304
– наклонной 66
– перпендикуляра 66
– пирамиды 304
– призмы 304
– равнобедренного треугольника 50
– трапеции 134
– цилиндра 304
Ось
– абсцисс 259
– координатная 258
– ординат 259
– параболы 92
– полярная 294
– симметрии 168
Откладывание отрезка 12
– угла 23
– треугольника 40
Отрезки 11
– несоизмеримые 201
– соизмеримые 201

Парабола 92
Параллелепипед 303
– прямоугольный 303
Параллелограмм 124
Параллельность
– прямых 117
– прямой и плоскости 312
– плоскостей 312
Параллельный перенос 170
Паркеты 178
– правильные 178
Пентаграмма 199
Периметр треугольника 34
– многоугольника 34
Перпендикуляр 66
Пирамида 303
– правильная 304
Пирит 347
Пифагорейские числа 202
Планиметрия 3
Плосконосый додекаэдр 334
– куб 334
Плоскость 7
– координатная 259
Площади подобных фигур 247
Площадь
– круга 243
– многоугольника 240
– параллелограмма 230
– поверхности 355
– – боковой 355
– – полной 355
– прямоугольника 225
– сегмента 244
– сектора 244
– трапеции 237
– треугольника 233
– фигуры 226
Поворот 164
Подобие треугольников 185
– фигур 191
Полуплоскость 21
Полупространство 307
Полупрямая 12
Полюс 294
Полярная ось 294
Полярные координаты 294
Полярный радиус 294
Правильные звездчатые многогранники 337
Правильные многогранники 334
Преобразование плоскости 174
Призма 303
– правильная 303
– прямая 303
Признак параллелограмма 127
– параллельности двух прямых 117
– прямоугольника 131
– ромба 131
Признаки подобия треугольников 185
– равенства треугольников 42
Проблема четырех красок 113
Проекция наклонной 66
Пространство 300
Прямая 7
– координатная 258
– Симсона 152
– числовая 258
– Эйлера 160
Прямоугольная система координат 258
Прямоугольник 131

Прямые параллельные 9
– перпендикулярные 24
– скрещивающиеся 310

Равенство векторов 171
– отрезков 12
– треугольников 39
– углов 23
– фигур 175
Равносоставленность 253
Радиан 217
Радианная мера угла 217
Радиус круга 71
– окружности 71
– полярный 294
– сферы 312
– шара 313
Развертка многогранника 342
Разность векторов 269
– отрезков 13
– углов 23
Расстояние между параллельными прямыми 131
– – точками 16
– от точки до прямой 66
Ребро графа 105
– двугранного угла 307
– многогранника 303
Ромб 131
Ромбододекаэдр 348
Ромбоикосододекаэдр 333
Ромбокубооктаэдр 333

Сектор 244
Серединный перпендикуляр 84
Симметрия относительно прямой 168
– – точки 161
– n-го порядка 164
– осевая 168
Синус угла 204
Скалярное произведение векторов 274
Скалярный квадрат 274
Сложение векторов 265
Спираль Архимеда 295
– Золотая 198
Средняя линия трапеции 134
– – треугольника 134
Стереометрия 3
Сторона угла 22
– ломаной 33
– многоугольника 34
Сумма отрезков 12
– векторов 265
– углов многоугольника 121
– – треугольника 121
Сфера 312

Тангенс угла 204
Тела Архимеда 333
– Кеплера-Пуансо 337
Тело 303
Теорема 8
– косинусов 211
– Пифагора 200
– синусов 213
– Фалеса 140
– Эйлера 110
Тетраэдр 4
Точка 7
– касания 74
– пересечения биссектрис 152
– – высот 156
– – медиан 157
– – серединных перпендикуляров 149
– Торричелли 160
Транспортир 29
Трапеция 134
– прямоугольная 134
– равнобедренная 134
Треугольник 34
– остроугольный 62
– прямоугольный 62
– равнобедренный 50
– равносторонний 50
– разносторонний 50
– тупоугольный 62
Тригонометрические тождества 207
– функции острого угла 204
– – тупого угла 209
– – произвольного угла 291
Трилистник 296

Угол, вписанный в окружность 145
– в пространстве 306
– двугранный 307
– между пересекающимися прямыми 24

– многоугольника 34
– острый 24
– полярный 294
– прямой 24
– развернутый 22
– треугольника 39
– – внешний 56
– тупой 24
– центральный 145
Угловой коэффициент прямой 277
Углы вертикальные 22
– внешние накрест лежащие 117
– – односторонние 117
– внутренние накрест лежащие 117
– – односторонние 117
– смежные 22
Умножение на число
– вектора 268
– отрезка 13
– угла 25
Уравнение окружности 263
– гиперболы 284
– параболы 282
– прямой 277
– эллипса 283
Усеченный додекаэдр 333
– икосаэдр 333
– икososододекаэдр 333
– куб 333
– кубооктаэдр 333
– октаэдр 333
– тетраэдр 333

Фигура
Фигуры подобные 191
– равновеликие 226
– равносоставленные 253
– равные 175
– симметричные 161
Фокальное свойство
– гиперболы 102
– параболы 93
– эллипса 98
Фокус гиперболы 101
– параболы 92
– эллипса 96
Формула Герона 234

Хорда окружности 71

Центр круга 71
– окружности 71
– симметрии 161
– – n-го порядка 164
– сферы 312
– шара 313
Центральная симметрия 161
Центроид треугольника 157
Циклоида 219
Циклоидальные кривые 219
Цилиндр 303
Циркуль 87

Четырехугольник 34
Число π 217

Шар 313

Эллипс 96

http://vk.com/school_ipad

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава I. НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Основные геометрические фигуры 7
§ 2. Отрезок и луч 11
§ 3. Измерение длин отрезков 15
§ 4. Полуплоскость и угол 21
§ 5. Измерение величин углов 28
§ 6. Ломаные и многоугольники 33

Глава II. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 7. Треугольники 39
§ 8. Первый признак равенства треугольников 42
§ 9. Второй признак равенства треугольников 46
§ 10. Равнобедренные треугольники 50
§ 11. Третий признак равенства треугольников 53
§ 12. Соотношения между сторонами и углами треугольника 56
§ 13. Соотношения между сторонами треугольника 60
§ 14. Прямоугольные треугольники 62
§ 15. Перпендикуляр и наклонная 66

Глава III. ОКРУЖНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

§ 16. Окружность и круг 71
§ 17. Взаимное расположение прямой и окружности 74
§ 18. Взаимное расположение двух окружностей 79
§ 19. Геометрические места точек 84
§ 20. Задачи на построение 87

Глава IV. КРИВЫЕ И ГРАФЫ*

§ 21*. Парабола 92
§ 22*. Эллипс 96
§ 23*. Гипербола 101
§ 24*. Графы 105
§ 25*. Теорема Эйлера 110
§ 26*. Проблема четырех красок 113

Глава V. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

§ 27. Параллельные прямые 117
§ 28. Сумма углов многоугольника 121
§ 29. Параллелограмм 124
§ 30. Признаки параллелограмма 127
§ 31. Прямоугольник, ромб, квадрат 131
§ 32. Средняя линия треугольника 134
§ 33. Трапеция 137
§ 34. Теорема Фалеса 140

Глава VI. МНОГОУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ

§ 35. Углы, связанные с окружностью 145
§ 36. Многоугольники, вписанные в окружность 149
§ 37. Многоугольники, описанные около окружности 152
§ 38. Замечательные точки в треугольнике 156

Глава VII. ДВИЖЕНИЕ

§ 39. Центральная симметрия 161
§ 40. Поворот. Симметрия n-го порядка 164
§ 41. Осевая симметрия 168
§ 42. Параллельный перенос 170
§ 43. Движение. Равенство фигур 174
§ 44*. Паркеты 178

Глава VIII. ПОДОБИЕ
§ 45. Подобие треугольников. Первый признак подобия треугольников 185
§ 46. Второй и третий признаки подобия треугольников 188
§ 47. Подобие фигур. Гомотетия 191
§ 48*. Золотое сечение 195
§ 49. Теорема Пифагора 200

Глава IX. ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ
§ 50. Тригонометрические функции острого угла 204
§ 51. Тригонометрические тождества 207
§ 52. Тригонометрические функции тупого угла 209
§ 53. Теорема косинусов 211
§ 54. Теорема синусов 213
§ 55. Длина окружности 216
§ 56*. Циклоидальные кривые 219

Глава X. ПЛОЩАДЬ
§ 57. Измерение площадей. Площадь прямоугольника 225
§ 58. Площадь параллелограмма 230
§ 59. Площадь треугольника 233
§ 60. Площадь трапеции 237
§ 61. Площадь многоугольника 240
§ 62. Площадь круга и его частей 243
§ 63. Площади подобных фигур 247
§ 64*. Изопериметрическая задача 249
§ 65*. Равносоставленность и задачи на разрезание 253

Глава XI. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ
§ 66. Прямоугольная система координат 258
§ 67. Расстояние между точками. Уравнение окружности 263
§ 68. Векторы. Сложение векторов 265
§ 69. Умножение вектора на число 268
§ 70. Координаты вектора 271
§ 71. Скалярное произведение векторов 274
§ 72. Уравнение прямой 277
§ 73*. Аналитическое задание фигур на плоскости 281
§ 74*. Задачи оптимизации 287
§ 75. Тригонометрические функции произвольного угла 291
§ 76*. Полярные координаты 294

Глава XII. НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ*
§ 77. Основные понятия стереометрии 300
§ 78. Фигуры в пространстве 303
§ 79. Угол в пространстве 306
§ 80. Параллельность в пространстве 310
§ 81. Сфера и шар 312
§ 82. Выпуклые многогранники 318
§ 83. Теорема Эйлера для многогранников 321
§ 84. Правильные многогранники 324
§ 85. Полуправильные многогранники 331
§ 86. Звездчатые многогранники 337
§ 87. Моделирование многогранников 342
§ 88. Кристаллы — природные многогранники 346
§ 89. Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса 351
§ 90. Площадь поверхности и объём 355

Ответы 359
Предметный указатель 370

МНОГОГРАННИКИ

ПОВЕРХНОСТИ