

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ЛУЧА И ОТРЕЗКА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова

Московский педагогический государственный университет (МПГУ)

e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,

i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: геометрия, определение, луч, отрезок.

Аннотация: в работе анализируются различные подходы к определениям луча и отрезка, предлагаемые в учебниках геометрии для 7 класса; устанавливается их влияние на обучение геометрии.

ABOUT THE DEFINITIONS OF A RAY AND A SEGMENT IN THE SCHOOL COURSE OF GEOMETRY

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova

Moscow State Pedagogical University (MSPU)

e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,

i-m-smirnova@yandex.ru

Keywords: geometry, definition, ray, segment.

Astract: the paper analyzes various approaches to the definitions of a ray and a segment, offered in geometry textbooks for grade 7; their influence on geometry teaching is established.

Может показаться странным, что определениям луча и отрезка посвящена целая статья. Однако древняя китайская пословица гласит: «Дорога в тысячу ли начинается с первого шага». Луч и отрезок являются одними из основных понятий геометрии, исходя из которых определяются многие другие понятия, такие как угол, ломаная, многоугольник и др. От того, как мы определяем понятия луча и отрезка, во многом зависит всё дальнейшее обучение геометрии.

Вопросам методики формирования представлений учащихся об основных математических понятиях уделяется большое внимание в учебниках по методике обучения математике. Так в книге [1] этому посвящена глава 3, в которой рассматривается методика введения математических понятий и типичные ошибки учащихся при овладении математическими понятиями. В частности, даётся формулировка определения понятия, как перечисление необходимых и достаточных признаков понятия, сведённых в связное предложение (речевое или символическое).

Здесь мы рассмотрим два основных подхода к определениям луча и отрезка, предлагаемые в учебниках геометрии для 7 класса.

Первый подход представлен в учебниках [2, 3]. В нём не даются точные определения луча и отрезка, а используются наглядные представления и рисунок.

При определении отрезка в учебнике [2] говорится:

«Проведём прямую a и отметим на ней точку O (рис. 1). Эта точка разделяет прямую на две части, каждая из которых называется лучом, исходящим из точки O . (На рисунке 1 один из лучей выделен цветной линией)».

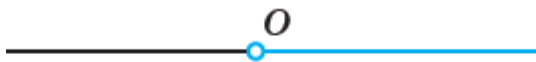


Рис. 1

(Здесь и далее нумерация рисунков приведена для данной статьи.)

При введении отрезка также используются только наглядные представления.

«На рисунке 2, а выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется отрезком».



Рис. 2

Для определения равенства отрезков используется понятие «наложения», которое имеет наглядный смысл, но не определяется.

«На рисунке 3, а изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного совместился с концом другого (рис. 3, б). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого».



Рис. 3

В учебнике [3], как и в учебнике [2], для введения луча и отрезка используются наглядные представления.

«Проведём прямую AB и отметим на ней произвольную точку O . Эта точка разделяет прямую на две части, выделенные на рисунке 4 разными

цветами. Каждую из этих частей вместе с точкой O называют лучом, или полупрямой».



Рис. 4

«На рисунке 5 изображена прямая a , проходящая через точки A и B . Эти точки ограничивают часть прямой a , выделенную синим цветом. Такую часть прямой a вместе с точками A и B называют отрезком, а точки A и B – концами этого отрезка».



Рис. 5

«Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением».

Второй подход представлен в учебниках геометрии [4-6] выдающихся отечественных учёных А. Д. Александрова, А. Н. Колмогорова и А. В. Погорелова. В них даются точные математические определения луча и отрезка, опирающиеся на аксиомы геометрии.

Так, А. Д. Александров, говоря о целях обучения геометрии в школе, в соответствии с которыми и был написан учебник [4], указывал, что «особенность геометрии, выделяющая её среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга» [7].

В этом учебнике отрезок является одним из основных неопределяемых понятий. В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

Каждые две точки соединяет отрезок, и притом только один.

Лучом AB называется объединение всех отрезков AM , содержащих точку B .

Для определения равенства отрезков используется аксиома об откладывании отрезка:

«На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один».

А. Н. Колмогоров в приложении к учебнику [5] пишет:

«Логически строгий курс геометрии строится следующим образом:

1. Перечисляются основные геометрические понятия, которые вводятся без определений.

2. Формулируются аксиомы.

3. При их помощи даются определения всех остальных геометрических понятий.

4. На основе аксиом и определений все дальнейшие геометрические предложения доказываются».

В этом учебнике одним из неопределяемых понятий является расстояние.

Отрезком AB называется множество, состоящее из точек A и B и точек, лежащих между ними.

При этом точка X называется лежащей между точками A и B , если сумма расстояний от неё до точек A и B равна расстоянию между точками A и B .

Для определения луча используется следующая аксиома.

«Любая точка O прямой p разбивает множество отличных от неё точек этой прямой на два непустых подмножества, таких, что точка O лежит между любыми двумя точками, принадлежащими разным подмножествам».

После этого луч определяется как объединение каждого из этих подмножеств с точкой O .

В учебнике А. В. Погорелова [6] для определения луча и отрезка используются отношения между точками «лежать между» и «лежать по одну сторону».

При этом для отношения «лежать между» формулируется следующая аксиома:

«Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими».

«Полупрямой, или лучом, называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной её точки».

«Отрезком называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными её точками».

Равенство отрезков определяется с помощью понятия «длина отрезка». В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

«Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой».

«Два отрезка называются равными, если они имеют одинаковую длину».

Выбор того или иного подхода, в первую очередь, зависит от отношения к геометрии и влияет на всё обучение.

Некоторые считают, что в школе не нужен курс геометрии, построенный на логической основе. Более того, иногда приходится слышать, что из математики в школе нужно оставить только то, что нужно человеку в практической жизни.

Вопрос только в том, что нужно человеку в практической жизни.

Ответ на него дал А. В. Погорелов, выдающийся геометр, который в одном из первых изданий своего учебника по геометрии для средней школы писал о том, что «главная задача преподавания геометрии в школе - научить учащихся логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать; очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами; будут и такие, которые в своей практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора; однако вряд ли найдётся хотя бы один, которому не придётся рассуждать, анализировать, доказывать».

Это особенно актуально сейчас, когда на человека обрушивается поток самой разнообразной информации. Нужно уметь отделять важную информацию от неважной, верную от неверной, опирающуюся на достоверные факты от «фейков».

Известно, какую большую роль играет геометрия в науке и образовании. На протяжении всей истории человечества она служила источником развития не только математики, но и многих других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии.

Каждая наука имеет свои определённые законы и правила. В повседневной жизни также приходится иметь дело с теми или иными правилами. Например, различные игры основываются на правилах. Фигуры шахматного слона могут быть сделаны из разных материалов, иметь разную форму, быть непохожими на настоящих слонов. Все эти признаки не являются для них существенными. Существенными являются правила (аксиомы), по которым они могут передвигаться по шахматной доске.

При работе с компьютером руководствуются определёнными правилами. Свод законов, регулирующих деятельность человека в той или иной области, также представляет собой набор правил.

Аналогичным образом аксиомы геометрии можно рассматривать как правила игры в геометрию. Используя аксиомы, определяются понятия геометрии, путём логических рассуждений выводятся (доказываются) свойства геометрических фигур, называемые теоремами. Особую роль при этом играют логические рассуждения – доказательства. Несмотря на то, что некоторые свойства геометрических фигур могут показаться вытекающими из рисунка, тем не менее, они нуждаются в доказательстве. Рисунок помогает найти доказательство, но не заменяет его.

Известно высказывание преподавателя университета, обращённое к студентам первого курса: «Забудьте всё, чему Вас учили в школе».

Действительно, многое из того, что изучается в школе, знать не нужно. Не нужно знать большинство определений и доказательств теорем.

Проблема не в том, что первокурсники не знают каких-то определений и теорем, а в том, что они не готовы к восприятию определений и теорем, которые они начинают изучать.

Для того чтобы не только успешно учиться в университете, но и быть успешным в жизни, нужно обладать развитым мышлением, иметь представление о научном мышлении.

Нужно понимать, что такое определение. Уметь:

- формулировать определения;
- распознавать верные и неверные определения;
- устанавливать объект по его определению;
- по данному объекту формулировать его определение.

Нужно понимать, что такое доказательство. Уметь:

- проводить доказательства утверждений, используя различные методы;
- распознавать верные и неверные утверждения;
- находить ошибки в доказательствах;
- приводить примеры и контрпримеры.

Всему этому учит школьный курс геометрии, построенный на научной основе.

Приведём определения луча и отрезка, опирающиеся на аксиомы геометрии, реализованные в учебнике [8], а также упражнения для учащихся на закрепление этих определений.

Первые аксиомы относятся к взаимному расположению точек и прямых на плоскости.

Аксиома 1. Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, ей не принадлежащие.

Аксиома 2. Через любые две точки проходит единственная прямая.

Учащимся можно предложить дать определения: а) двух пересекающихся прямых; б) двух параллельных (не пересекающихся) прямых (рис. 6).

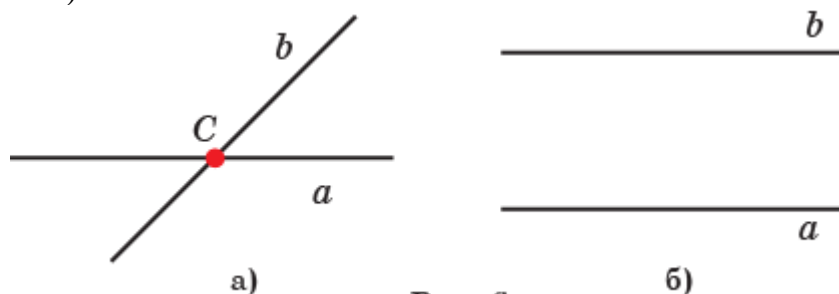


Рис. 6

Ответ: а) две прямые называются пересекающимися, если они имеют одну общую точку; б) две прямые называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Для определения понятий луча и отрезка потребуется ещё одна аксиома.

Аксиома 3. Каждая точка прямой разбивает эту прямую на две части. Сама точка не принадлежит этим частям.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

Отметим на прямой какую-нибудь точку C . Определите следующие отношения:

- а) точки B и D лежат по одну сторону от точки C ;
- б) точки A и B лежат по разные стороны от точки C ;
- в) точка C лежит между точками A и B .

Ответ: а) точки B и D лежат по одну сторону от точки C , если они принадлежат одной из частей прямой, на которые эта прямая разбивается точкой C ; б) точки A и B лежат по разные стороны от точки C , если они принадлежат разным частям прямой, на которые эта прямая разбивается точкой C ; в) точка C лежит между точками A и B , если точки A и B лежат по разные стороны от точки C (рис. 7).

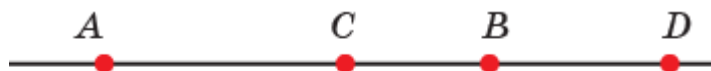


Рис. 7

Используя определённые отношения, можно определить понятия луча и отрезка.

Определение. Лучом называется часть прямой, состоящая из данной точки прямой и всех точек этой прямой, лежащих от этой точки по одну сторону. Сама данная точка называется началом, или вершиной, луча.

Определение. Отрезком называется часть прямой, состоящая из двух данных точек прямой и всех точек, лежащих между ними. Сами данные точки называются концами отрезка.

Учащимся можно предложить следующие вопросы.

1. Можно ли сказать, что отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками?

2. Определите отрезок AB , используя понятие луча.

Ответы. 1. Нет. На рисунке 8 закрашена часть прямой, ограниченная точками A , B , которая не является отрезком.



Рис. 8

Ответ 2. Отрезком AB называется общая часть лучей AB и BA .

Для определения равенства двух отрезков воспользуемся следующей аксиомой.

Аксиома 4. На любом луче от его начала можно отложить только один отрезок, равный данному.

Определение. Отрезки AB и A_1B_1 называются равными, если при откладывании отрезка AB от луча A_1B_1 мы получаем отрезок A_1B_1 (рис. 9).

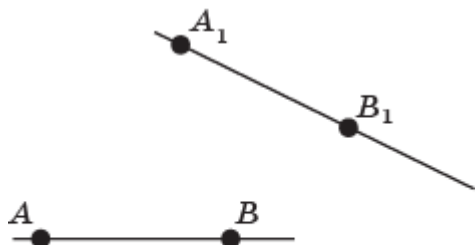


Рис. 9

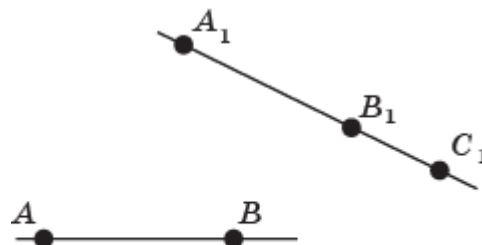


Рис. 10

Можно подумать, что операция откладывания отрезка аналогична наложению. Однако это не так. На самом деле, эта аксиома означает, что на любом луче с вершиной A_1 существует единственный отрезок A_1B_1 , равный данному отрезку AB .

Учащимся можно предложить, используя операцию откладывания отрезка, определить для отрезков отношения «меньше», «больше».

Ответ. Отрезок AB меньше отрезка A_1C_1 (отрезок A_1C_1 больше отрезка AB), если при откладывании отрезка AB от луча A_1C_1 мы получаем отрезок A_1B_1 , для которого точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1 (рис. 10).

Литература

1. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебн. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. – М.: Просвещение, 1975.
2. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2013.
3. Мерзляк А.Г. и др. Геометрия. 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. – М.: Вентана-Граф, 2015.
4. Александров А. Д. и др. Геометрия. 7 класс: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2013.
5. Колмогоров А. Н. и др. Геометрия. Учебное пособие для 6-8 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1979.
6. Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2013.
7. Александров А. Д. О геометрии // Математика в школе. – 1980. - № 3. – С. 56.
8. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2019.