

О НОВОЙ КОНЦЕПЦИИ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

Московский педагогический государственный университет

e-mail: v-a-smirnov@mail.ru

В работе предлагается концепция обучения геометрии в школе, ориентированная на результаты обучения. Приводятся примеры задач базового уровня для контроля за достижением этих результатов.

Ключевые слова: концепция обучения геометрии, результаты обучения, ГИА, ЕГЭ, открытый банк.

Известно, какую большую роль играет геометрия в науке и образовании. На протяжении всей истории человечества она служила источником развития не только математики, но и многих других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии.

Многие геометрические задачи способствовали появлению новых научных направлений. Наоборот, решение многих научных проблем получено с использованием геометрических методов.

Вообще современная наука и её приложения немыслимы без геометрии и её разделов, таких как топология, теория графов, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, компьютерная геометрия и др.

Появление информационных технологий не только не снижает, но и усиливает роль геометрии, поскольку при этом существенно расширяются возможности графического представления материала, компьютерного моделирования.

Огромна роль геометрии и в школьном математическом образовании. Известен вклад, который она вносит в развитие пространственного воображения и логического мышления школьников.

Об этом говорили и говорят многие видные учёные-математики. Например, Н.Ф. Четверухин подчёркивал важность развития пространственных представлений для всех учащихся вне зависимости от направления их дальнейшего образования и выбора будущей профессии. «Хорошее пространственное воображение нужно конструктору, создающему новые машины, геологу, разведывающему недра земли, архитектору, сооружающему здания современных городов, хирургу, производящему тончайшие операции среди кровеносных сосудов и нервных волокон, скульптору, художнику и т.д.» [1].

А.Д. Александров, говоря о целях обучения геометрии, указывал, что «особенность геометрии, выделяющая её среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга» [2]. В соответствии с этим в статье делается вывод

о том, что преподавание геометрии в школе должно включать в себя три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление и применение к реальным вещам. Задача геометрии заключается в развитии у учащихся трёх соответствующих качеств: логического мышления, пространственного воображения и практического понимания.

В.Г. Болтянский говорил о том, что природа геометрии предоставляет богатые возможности для воспитания у школьников эстетического чувства красоты в самом широком значении этого слова. Красота геометрии заключается в её проявлениях в живой природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т.д., а также в смелых, оригинальных, нестандартных доказательствах, выводах и решениях [3].

Многие удивительно красивые пространственные формы придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы - природные многогранники. Свойства кристаллов, которые изучаются на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решётке. Формы правильных, полуправильных и звёздчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: "Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса - немой трактат по геометрии, а греческая архитектура - внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора".

Великий Анри Пуанкаре считал, что отличительной чертой математического ума является не логичность, а эстетичность. Он также полагал, что чувство эстетического у нас врожденное, но его непрерывно нужно совершенствовать в себе. Люди, которые способны совершенствовать в себе умение ценить красоту математики, становятся теоретиками-математиками. "Единственными фактами, способными обратить на себя внимание и быть полезными, являются те, которые приводят нас к познанию математического закона. Таким образом, мы приходим в следующем выводу: полезные комбинации это в точности наиболее красивые, т.е. те, которые больше всего воздействуют на это специальное чувство математической красоты, известное всем математикам" [4].

Отечественной школой накоплен уникальный опыт преподавания геометрии. Учебник по геометрии А.П. Киселёва под редакцией Н.А. Глаголева на протяжении десятилетий оставался образцом строгости, чёткости и доступности изложения геометрии.

Однако за последние 30 лет интерес и эффективность обучения школьников геометрии неуклонно снижались. Одной из причин этого

явилось то, что обучение геометрии заменялось на изучение учебника геометрии, а достижение результатов обучения – на «прохождение» учебника.

До конца 60-х годов прошлого века недостатки такого обучения компенсировались высокой мотивацией школьников к изучению математики и наличием единого учебника геометрии А.П. Киселёва.

С появлением нескольких учебников геометрии и снижением мотивации школьников к изучению математики, произошедшим во второй половине прошлого века, такое обучение стало давать сбои.

Разные учебники геометрии содержали «разную» геометрию, разные определения, формулировки свойств и теорем и их доказательства. Школьники, обучавшиеся по одному учебнику геометрии, переходившие в другой класс или другую школу, где обучение геометрии велось по другому учебнику, не понимали этой «новой» для них геометрии и имели серьёзные проблемы с её изучением.

Конечно, речь не идёт о возврате в школу единого учебника геометрии. Вопрос не в том, какой учебник лучше. Каждый учебник, входящий в Федеральный перечень учебной литературы, имеет свои достоинства и недостатки. Учитель, исходя из особенностей учеников данного класса, может выбрать тот или иной учебник, более полно отвечающий этим особенностям.

Задача состоит в том, чтобы, опираясь на достигнутый отечественной школой уровень геометрического образования, сделать обучение геометрии современным и интересным, учитывающим склонности и способности учеников, направленным на формирование математической культуры, интеллектуальное развитие личности каждого ученика, его творческих способностей, формирование представлений учащихся о математике, её месте и роли в современном мире.

Выпускнику школы необходимо не только уметь решать задачи и доказывать теоремы. Математическое образование школьника должно включать в себя знакомство с историей становления и развития математики, именами учёных-математиков, временем их жизни, сделанными ими открытиями, доказанными теоремами и решёнными проблемами.

История математики позволяет проникнуть в мировоззренческий смысл науки, в процесс основных её идей, эволюцию методов. Сведения о научных поисках, открытиях помогают увидеть по-новому то, что кажется привычным и обыденным. Исторический материал может продемонстрировать учащимся, каким может быть трудным и длительным путь учёного к истине, которая сегодня формулируется в виде короткого утверждения.

Исторические сведения способствуют развитию познавательных интересов и творческих способностей учащихся, так как включение сведений о творчестве крупных ученых, о том, как они приходили к постановке своих исследований, находили метод решения,

формулировали окончательный результат, позволяет создать творческую атмосферу на уроках математики, помогает понять, что в процессе творчества нет ничего необычного, сверхъестественного, что цели достигаются в результате упорного труда.

Элементы истории служат средством нравственного воспитания учащихся, воспитания чувства гордости за достижения отечественной математики. История науки обладает множеством впечатляющих фактов о благородных социальных и гражданских мотивах деятельности учёных. Пренебрежение этим материалом или умалчивание о нём обедняет познавательный и нравственный опыт учащихся. Лишённые конкретных доказательств об единстве науки и нравственности школьники могут считать, что существует чистая наука, далёкая от реальной жизни, несвязанная с судьбами людей и общества.

Наконец, "история математики важна не только потому, что она необходима для решения ряда методологических и педагогических проблем. Она важна и сама по себе как памятник человеческому гению, позволившему человечеству пройти великий путь от полного незнания и полного подчинения силам природы до великих замыслов и свершений в познании законов развития природы и общества" [5].

Помимо истории математики учащиеся старших классов живо интересуются современными проблемами математики и её приложениями. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, появление большого количества научно-популярной литературы, научно-популярных телевизионных и радиопередач, современных информационных технологий. Неправильной является точка зрения, согласно которой считается, что школьникам недоступно познание современного состояния науки и, в частности геометрии, поэтому вводить элементы современной геометрии в школе не нужно. Знакомство с основными направлениями развития современной науки необходимо каждому выпускнику школы, независимо от его будущей деятельности, для ориентации в современном мире, правильному представлению о процессах, происходящих в природе и обществе. Главное здесь найти "золотую середину", т.е. такой метод изложения материала, при котором, не вдаваясь в трудные детали, познакомить учащихся с некоторыми современными вопросами геометрии.

По выражению академика А.Д. Александрова, «ученику нужно показать реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрёжке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в её связях с реальными вещами». Показ прикладных аспектов геометрии совершенно необходим, особенно для учащихся старших классов, которых нужно убедить в полезности того, что они изучают в школе.

Предлагаемая концепция обучения геометрии в школе призвана сделать геометрию современным, интересным и полезным предметом. Она предусматривает:

- ориентацию обучения геометрии не на конкретный учебник, а на результаты обучения;
- повышение мотивации и интереса школьников к обучению геометрии;
- привлечение школьников к исследовательской и проектной деятельности;
- проведение текущего и рубежного контролей за результатами обучения в 6-м, 9-м (ГИА) и 11-м (ЕГЭ) классах.

При этом изменяется роль самого учебника. Сегодня учебник – это уже не просто набор определений, свойств, теорем, которые нужно выучить, задач, которые нужно решить. Учебник, с одной стороны, должен создавать базу, основу обучения геометрии, реализуя программу школьного математического образования, а с другой стороны, способствовать интеллектуальному развитию личности каждого ученика, формированию представления о геометрии, как науке, её истории, современном состоянии и приложениях.

Уровень освоения учебника у разных школьников, в зависимости от их способностей, может быть разным. Не следует требовать от всех учеников заучивания всех определений, свойств, теорем и их доказательств. Тем более, что простое заучивание формулировок определений или доказательств теорем не приближает ученика к формированию геометрических представлений о соответствующем понятии или к пониманию доказательства соответствующей теоремы.

В некотором смысле геометрические представления о понятии важнее заученной формулировки его определения. Заученные формулировки забываются, а геометрические представления остаются. Формулировки можно посмотреть в справочной литературе, а геометрические представления нет.

То же самое относится и к доказательствам свойств и теорем. Заучивание школьниками доказательств теорем учебника не является эффективным средством обучения доказательствам, а сами теоремы не имеют своей основной целью обучение доказательствам.

Доказательства теорем расположены в учебниках не в порядке возрастания их сложности, а следуя логике построения учебника. Для каждой теоремы, как правило, применяется свой метод доказательства. При этом сложное доказательство может предшествовать простому, а при обучении доказательствам нужно иметь серии однотипных доказательств, двигаться постепенно от простых доказательств к более сложным.

Кроме того, некоторые доказательства теорем учебников геометрии или не являются таковыми, или выходят за рамки школьного курса математики. Так, например, в некоторых учебниках геометрии для доказательства признаков равенства треугольников используется понятие

наложения, которое носит интуитивный характер и не является математическим понятием. Следовательно, и доказательство, использующее это понятие, не является таковым. Доказательство формулы площади прямоугольника обычно проводится рассмотрением различных случаев, когда стороны выражаются: а) натуральными; б) рациональными; в) иррациональными числами. Доказательство последнего случая выходит за рамки школьного курса математики.

Таким образом, доказательства учебника, в основном, предназначены не для обучения доказательствам, а для объяснения того, почему верно то или иное утверждение. При этом уровень понимания школьниками этого объяснения может быть различным. Одни школьники просто поверят объяснению учителя. Другие поймут общую идею доказательства. Третьи поймут не только идею, но и ход доказательства. Четвёртые смогут ответить на дополнительные вопросы по ходу доказательства. Наконец, пятые окажутся способными предложить своё доказательство. Все эти уровни понимания являются вполне допустимыми и зависят не только от способностей учащихся, но и от уровня сложности доказательства теорем. Для учителя очень важно понимать и то, и другое, и в зависимости от этого строить процесс обучения.

Изменяется и роль задач, включённых в учебник. Задачи учебника ориентированы, в основном, на освоение содержания данного учебника. Среди них, как правило, имеются задачи на:

- подведение учащихся к восприятию нового материала;
- раскрытие содержания новых понятий;
- закрепление рассмотренного теоретического материала;
- применение изученных формул, свойств и теорем к решению задач.

Однако учебник не может содержать весь перечень задач, которые должен уметь решать школьник. Более того, смысл обучения решению задач состоит в том, чтобы в результате обучения школьники могли решать задачи, не встречавшиеся им ранее. Поэтому задачи для текущего и рубежного контролей за результатами обучения следует брать отличными от задач учебника. Они могут быть представлены в открытом банке задач или специальных учебных пособиях.

Возрастает роль и значение задач, включаемых в содержание ГИА и ЕГЭ по математике.

Государственная итоговая аттестация (ГИА) в 9-м классе и Единый государственный экзамен (ЕГЭ) в 11-м классе не только осуществляют контроль за результатами обучения школьников, полученными ими знаниями, выработанными умениями и навыками, сформированными компетенциями. Структура и содержание этих экзаменов задают ориентиры всего математического образования, влияют на отбор содержания, выбор форм и методов обучения.

Особую роль играет контроль за результатами обучения геометрии в конце 6-го класса, поскольку именно в 5-6-х классах закладываются

основы геометрических представлений учащихся, от которых во многом зависит успешность изучения систематического курса геометрии в 7-11-х классах.

Среди результатов обучения геометрии, достижение которых необходимо контролировать уже в 6-м классе, отметим следующие.

1. Распознавание геометрических фигур, их элементов и конфигураций: а) на плоскости; б) в пространстве.

2. Изображение геометрических фигур, проведение дополнительных построений: а) на плоскости; б) в пространстве.

3. Нахождение величин углов: а) на плоскости; б) в пространстве.

4. Нахождение длин и расстояний: а) на плоскости; б) в пространстве.

5. Нахождение площадей фигур: а) на плоскости; б) в пространстве.

6. Нахождение объёмов фигур в пространстве.

7. Знакомство с историей геометрии, именами учёных, внёсших вклад в развитие геометрии.

8. Знакомство с некоторыми современными направлениями геометрии и её приложениями.

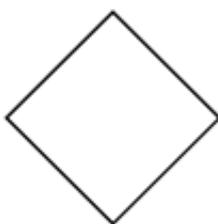
Осуществлению контроля за перечисленными результатами обучения будет способствовать открытый банк задач по геометрии для 5-6-х классов, аналогичный открытым банкам задач ГИА и ЕГЭ по математике.

Приведём вариант диагностической работы, направленной на контроль за результатами обучения геометрии в 5-6-м классе.

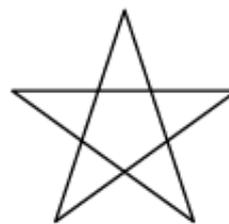
1. Укажите, какие из представленных на рисунке фигур являются многоугольниками.



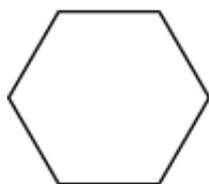
1



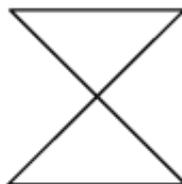
2



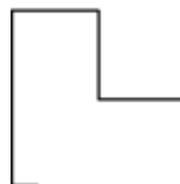
3



4



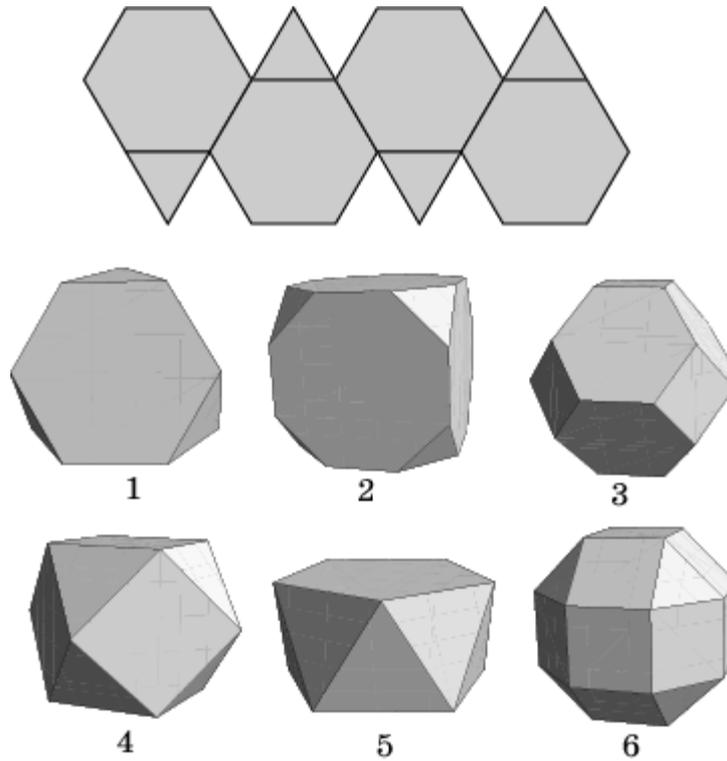
5



6

Ответ. 1, 2, 4, 6.

2. Укажите номер многогранника, развёртка которого изображена на рисунке.

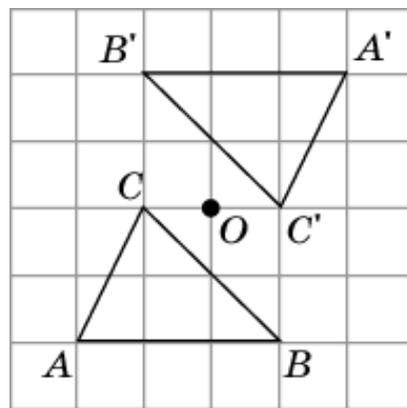
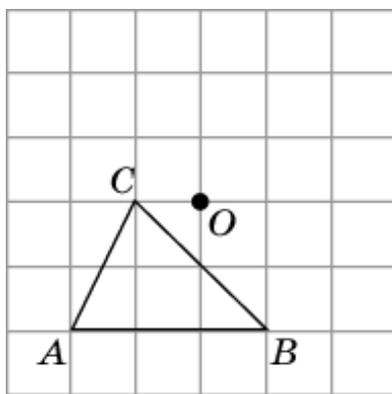


Ответ. 1.

3. У многогранника 12 вершин. В каждой из них сходится 3 ребра. Сколько у него рёбер? Приведите пример такого многогранника.

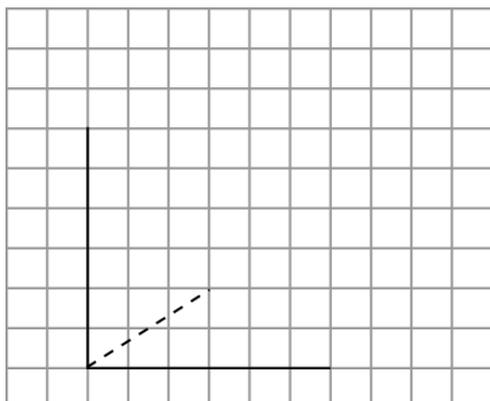
Ответ. 18, шестиугольная призма.

4. Изобразите треугольник, симметричный данному треугольнику ABC относительно точки O .

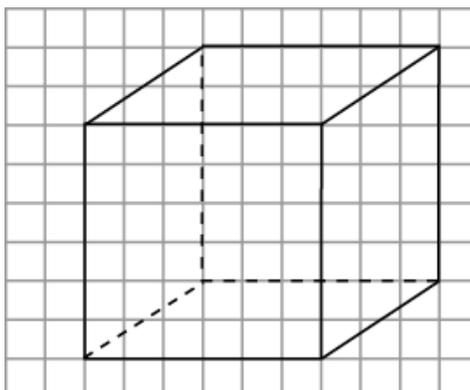


Ответ.

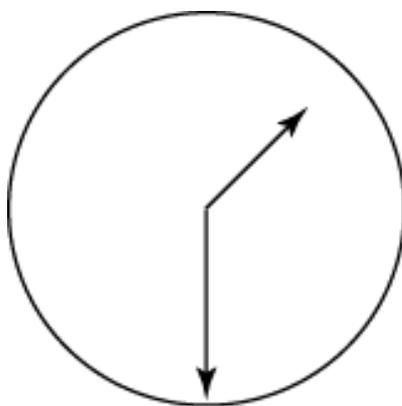
5. На рисунке изображены три ребра куба. Изобразите весь куб.



Ответ.

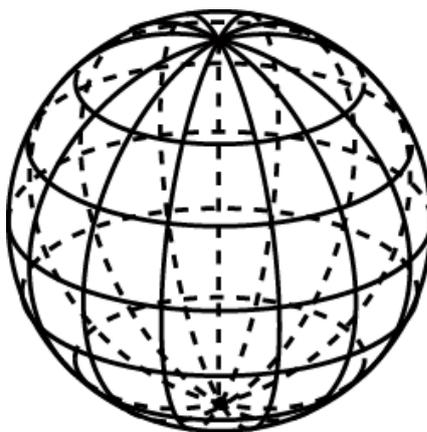


6. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 1 ч 30 мин?



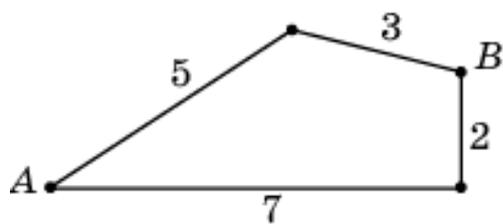
Ответ. 135° .

7. На сколько градусов повернётся Земля вокруг своей оси за 8 часов?



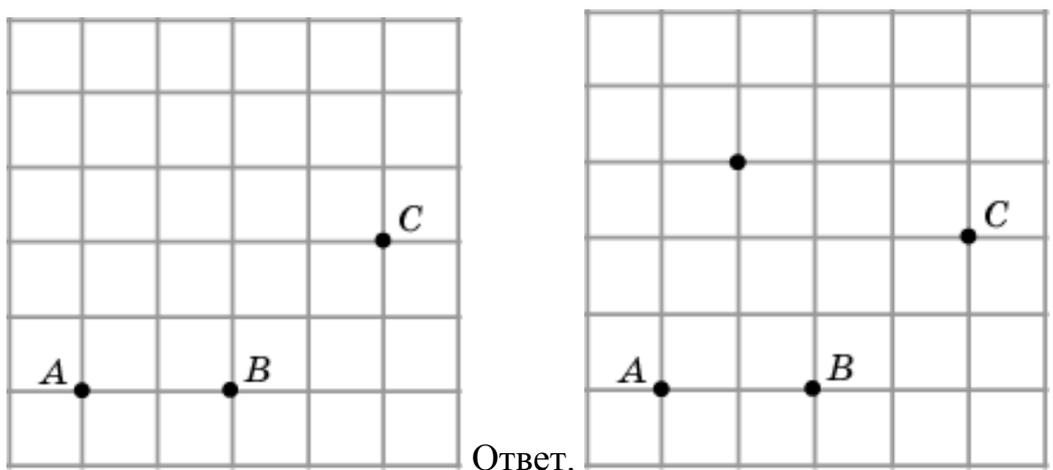
Ответ. 120° .

8. На рисунке изображены стержни, соединённые шарнирами, которые могут свободно двигаться. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния, на которые можно раздвинуть концы *A* и *B*.



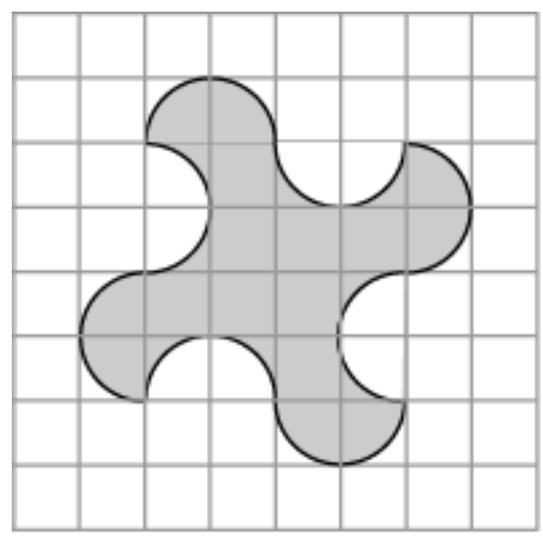
Ответ. 8 и 5.

9. Отметьте точку, расположенную в узле сетки и равноудалённую от точек A, B и C.



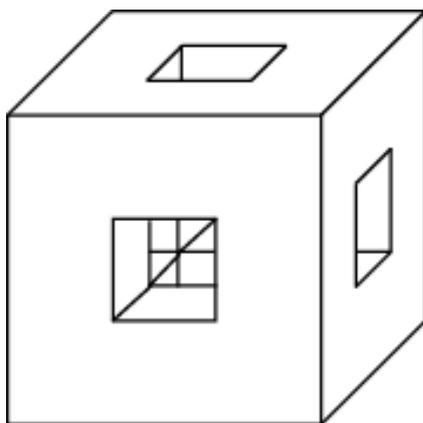
Ответ.

10. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке. Стороны квадратных клеток равны 1.



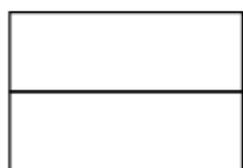
Ответ. 16.

11. В центре каждой грани куба с ребром 3 проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 1. Найдите объём и площадь поверхности оставшейся части.

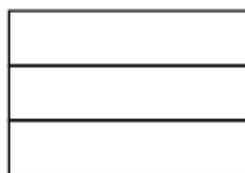


Ответ. 20, 72.

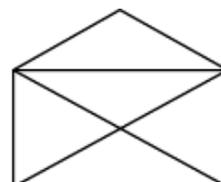
12. Укажите номера рисунков, на которых изображены уникальные графы (графы, которые можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждому ребру ровно один раз).



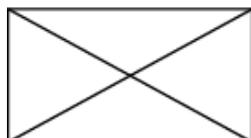
1



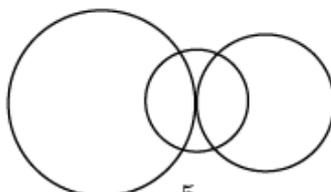
2



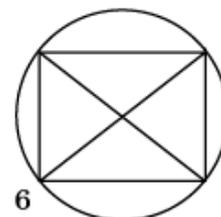
3



4



5



6

Ответ. 1, 3, 5.

Литература

1. Четверухин Н.Ф. Геометрические характеристики причины трудности узнавания фигур на чертеже //Математика в школе. – 1965. - № 4. – С. 13.
2. Александров А.Д. О геометрии //Математика в школе. – 1980. - № 3. – С. 56.
3. Болтянский В.Г. Математическая культура и эстетика //Математика в школе. – 1982. - № 3. – С. 40.
4. Пуанкаре А. Математическое творчество /В кн. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982, с. 141.
5. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. –М.: Просвещение, 1982, с.116.