ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
8 класс

В. А. Смирнов
Московский педагогический государственный университет
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: экстремальные задачи по геометрии, 8 класс.

Аннотация: в работе рассматривается задачи по геометрии на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), которые могут быть использованы при обучении геометрии в 8-м классе.

EXTREME GEOMETRY PROBLEMS
8 grade

V. A. Smirnov
Moscow State Pedagogical University
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Keywords: extreme geometry problems, 8-th grade.

Abstract: the paper deals with problems in geometry to find the largest and smallest values (extreme problems) that can be used when teaching geometry in the 8-th grade.

Данная статья является продолжением статьи журнала «Математика в школе», в которой были представлены геометрические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений для учащихся 7 класса.

Здесь мы рассмотрим экстремальные задачи по геометрии, которые могут быть использованы при обучении в 8-м классе как на основных уроках, так и при проведении курсов по выбору, организации исследовательской деятельности учащихся. Решения этих задач используют свойства и теоремы, которые изучаются в курсе геометрии 8-го класса, среди которых: признаки параллелограмма; свойство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки; теоремы об углах, связанных с окружностью; свойства вписанной и описанной окружностей и др.

В качестве дополнительной литературы, посвящённой экстремальным задачам, рекомендуем книги [1–6].

В последующих статьях будут рассмотрены аналогичные задачи для 9, 10 и 11 классов.

Начнём с задачи с практическим содержанием, решение которой использует признак параллелограмма.

Задача 1. Населённые пункты A и D расположены на противоположных берегах реки. В каком месте реки следует построить мост

BC и проложить дороги *AB* и *CD*, чтобы путь *ABCD* имел наименьшую длину? Берега *b*, *c* реки предполагаются параллельными, ширина реки равна *h*, а мост строится перпендикулярно этим берегам (рис. 1).

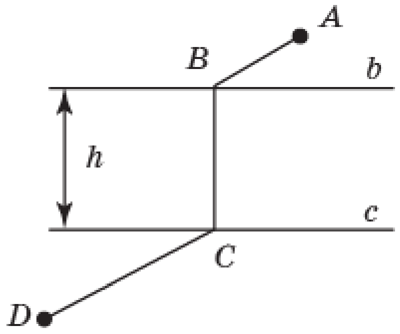


Рис. 1

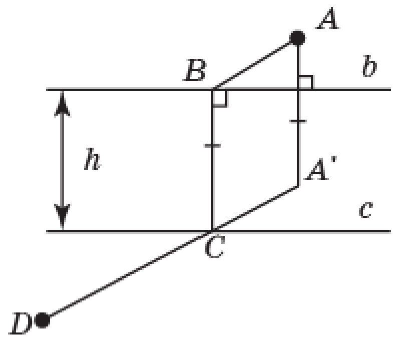


Рис. 2

Решение. Через точку *A* проведём прямую, перпендикулярную прямой *b*, и отложим на ней отрезок *AA’*, равный *h*. Обозначим *C* точку пересечения отрезка *A’D* и прямой *c*. Через точку *C* проведём прямую, перпендикулярную прямой *c*, и обозначим *B* точку её пересечения с прямой *b*. Соединим отрезком точки *A* и *B*. Путь *ABCD* будет искомым кратчайшим путём (рис. 2). Действительно, для произвольного расположения моста *BC* четырёхугольник *AA’CB* будет параллелограммом (стороны *AA’*, *BC* равны и параллельны). Следовательно, *AB* = *A’C*. Длина пути *ABCD* равна длине пути *AA’CD*. Так как длина отрезка *AA’* постоянна и равна *h*, то длина пути *AA’CD* будет наименьшей, если наименьшей будет длина пути *A’CD,* т. е. в случае, если точки *A’*, *C*, *D* принадлежат одной прямой.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи изобразите мост *BC* и дороги *AB* и *CD* так, чтобы путь *ABCD* имел наименьшую длину (рис. 3).

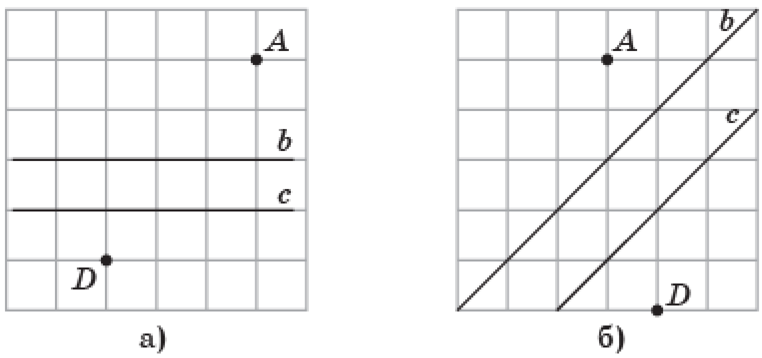
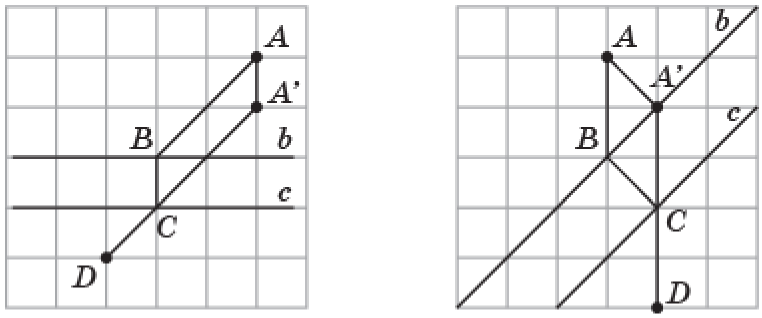


Рис. 3

Решение показано на рисунке 4.



а) б)

Рис. 4

Следующие задачи относятся к углам и отрезкам, связанным с окружностью.

Задача 3. Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = c$ найдите треугольник с наименьшим радиусом R описанной окружности (рис. 5).

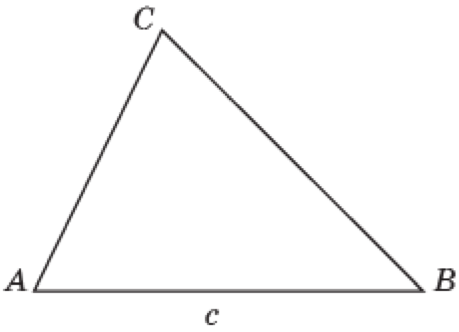


Рис. 5

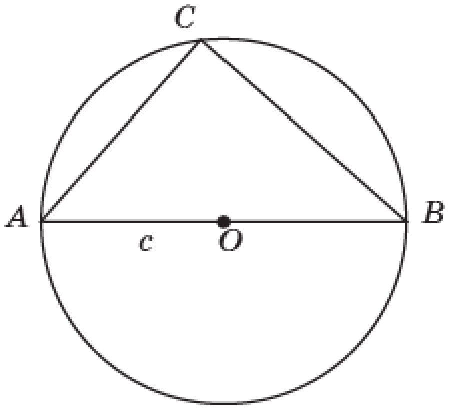


Рис. 6

Решение. Искомым треугольником является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = c$ (рис. 6). В этом случае центр O описанной окружности принадлежит стороне AB. Во всех остальных случаях центр O' описанной окружности не принадлежит стороне AB, следовательно, $O'A + O'B > AB = OA + OB$. Значит, $O'A > OA$.

Задача 4. Для данной окружности с центром O найдите хорду наименьшей длины, проходящую через данную точку C внутри этой окружности (рис. 7).

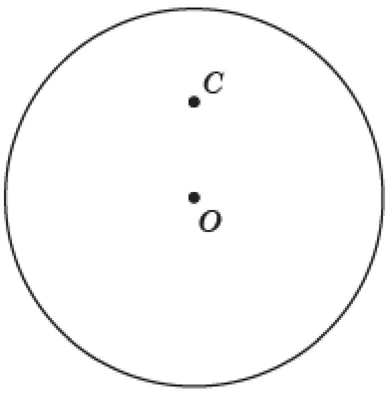


Рис. 7

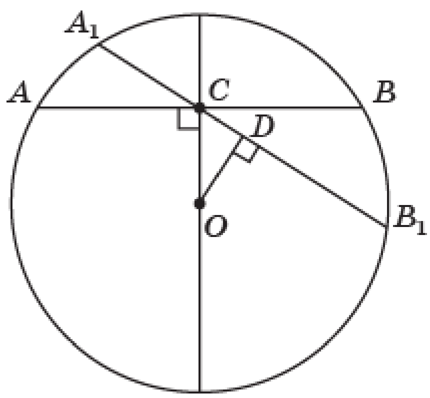


Рис. 8

Решение. Хорда AB будет иметь наименьшую длину в случае, если расстояние до неё от центра окружности будет наибольшим. Такой хордой является хорда AB, перпендикулярная прямой, проходящей через точки O и C (рис. 8).

Задача 5. Для двух данных пересекающихся окружностей с центрами O_1, O_2 найдите секущую AB наибольшей длины, проходящую через точку C пересечения этих окружностей (рис. 9).

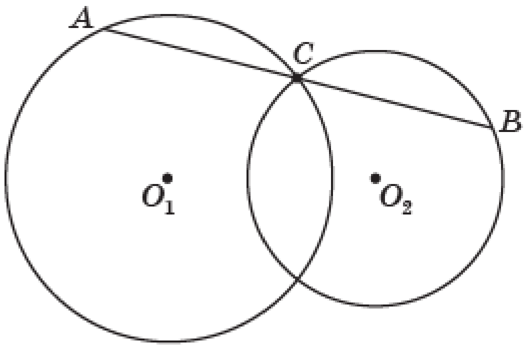


Рис. 9

Решение. Из центров данных окружностей опустим перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 на прямую AB (рис. 10).

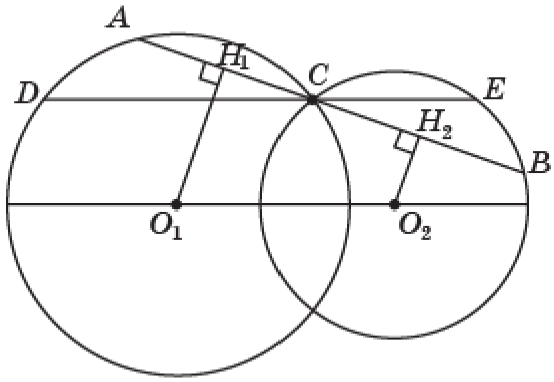


Рис. 10

Отрезок H_1H_2 является проекцией отрезка O_1O_2 на прямую AB и равен половине отрезка AB. Он имеет наибольшую длину, если равен отрезку O_1O_2, т. е. в случае, если прямая AB параллельна прямой O_1O_2. Искомой секущей наибольшей длины будет секущая DE, изображённая на рисунке 10.

Задача 6. Через данную точку C, расположенную внутри данного угла aOb, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник AOB наименьшего периметра (рис. 11).

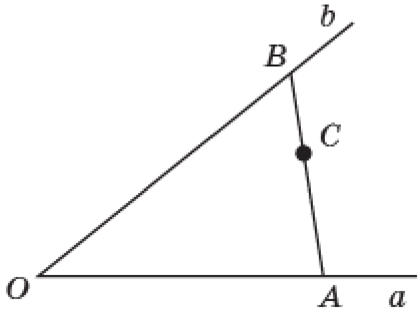


Рис. 11

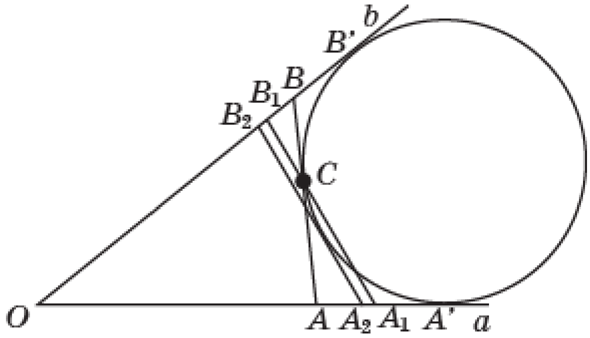


Рис. 12

Решение. Через точку *C* проведём окружность, касающуюся сторон угла в точках *A'*, *B'*. Через точку *C* проведём касательную к этой окружности, пересекающую стороны *a* и *b* данного угла соответственно в точках *A* и *B*. Треугольник *AOB* будет искомым треугольником наименьшего периметра (рис. 12). Его периметр равен сумме *OA' + OB'* = 2*OA'*.

Для другого треугольника A_1OB_1 прямая A_1B_1 будет пересекать окружность, следовательно, можно выбрать треугольник A_2OB_2, для которого прямая A_2B_2 касается окружности и параллельна прямой A_1B_1. Периметр треугольника A_2OB_2 равен периметру треугольника *AOB* и меньше периметра треугольника A_1OB_1.

Задача 7. Дан отрезок *AB* и прямая *c*, не имеющая с ним общих точек. На этой прямой найдите такую точку *C*, из который данный отрезок *AB* виден под наибольшим углом, т. е. угол *ACB* наибольший (рис. 13).

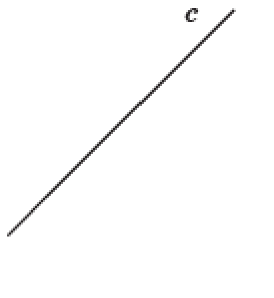


Рис. 13

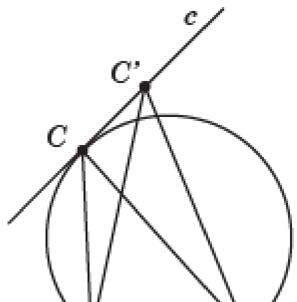
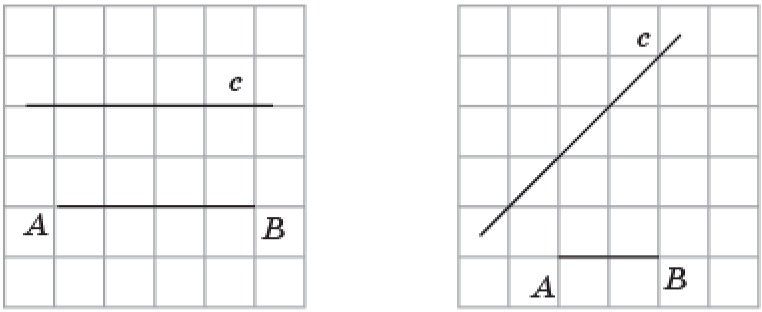


Рис. 14

Решение. Искомой точкой является точкой касания прямой *c* и окружности, проходящей через точки *A* и *B*. Любая другая точка *C'* данной прямой расположена вне этой окружности. Следовательно, угол *AC'B* будет меньше угла *ACB*.

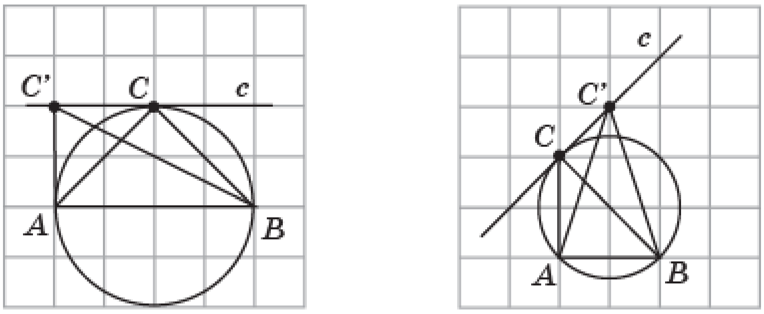
Задача 8. На прямой *c* отметьте точку *C*, из которой отрезок *AB* виден под наибольшим углом (рис. 15). Найдите величину этого угла.



а) б)

Рис. 15

Решение. Искомая точка *C* показана на рисунке 16. Угол равен: а) 90°; б) 45°.



а) б)

Рис. 16

Задача 9. На прямой *c* найдите точку *C*, из которой данная окружность видна под наибольшим углом, т. е. угол *ACB* наибольший (рис. 17).

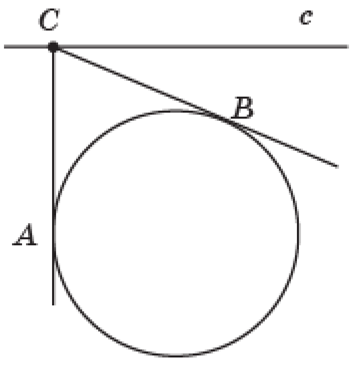


Рис. 17

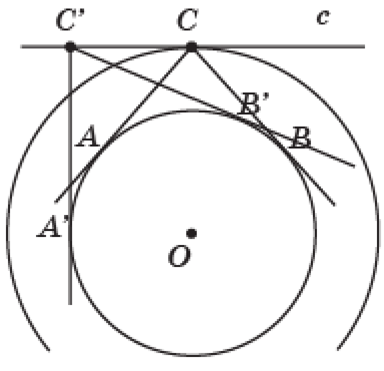


Рис. 18

Решение. Рассмотрим окружность, концентрическую с данной и касающуюся данной прямой в точке *C* (рис. 18). Эта точка *C* будет искомой, для которой угол *ACB* наибольший. Любая другая точка *C'* данной прямой расположена дальше центра *O* данной окружности, поэтому угол *A'C'B'* будет меньше угла *ACB*.

Задача 10. На прямой *c* отметьте точку *C*, из которой данная окружность видна под наибольшим углом (рис. 19). Найдите величину этого угла.

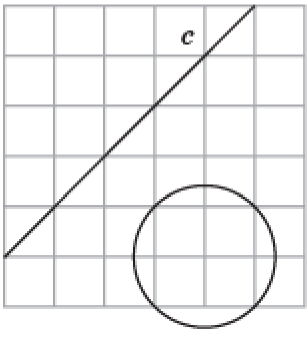


Рис. 19

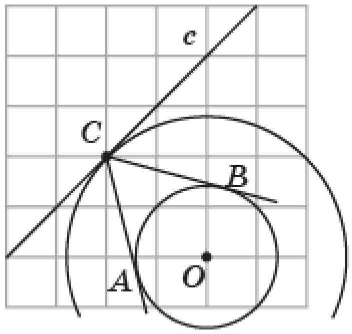


Рис. 20

Решение. Искомая точка C показана на рисунке 20. Она является точкой касания прямой c и окружности, концентрической с данной окружностью. Угол ACB равен 60°.

Задача 11. Точка A расположена внутри окружности с центром O. На этой окружности найдите точку B, для которой угол ABO наибольший (рис. 21).

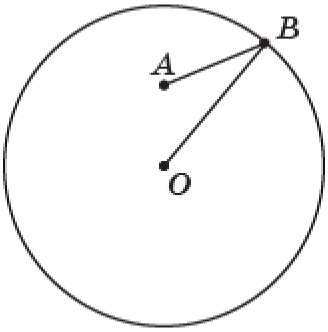


Рис. 21

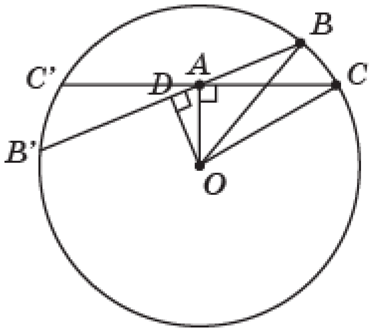


Рис. 22

Решение. Для точки B окружности опустим перпендикуляр OD на прямую AB. В прямоугольном треугольнике OBD гипотенуза OB постоянна (равна радиусу), следовательно, угол OBD тем больше, чем больше катет OD. Угол OBA будет наибольшим, когда угол OAB – прямой. Следовательно, искомой точкой является точка C пересечения прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой OA, с данной окружностью (рис. 22).

Рассмотрим теперь классическую задачу Ферма, для решения которой используется понятие поворота.

Задача 12. (Задача Ферма.) Для треугольника ABC найдите такую точку, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.

Данную задачу можно переформулировать как задачу с практическим содержанием.

Задача о колодце. Три соседа по садовому товариществу решили вырыть общий колодец и проложить к нему дорожки от своих домиков. Где нужно расположить колодец, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей?

Для решения этой задачи рассмотрим случай, когда углы треугольника меньше 120°, и случай, когда один из углов треугольника больше или равен 120°.

Задача 13. Докажите, что если углы треугольника меньше 120°, то точкой, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая, является точка Торричелли, т. е. такая точка, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120° (рис. 23).

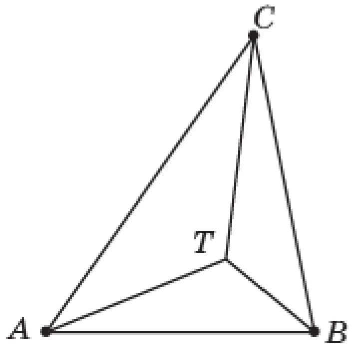


Рис. 23

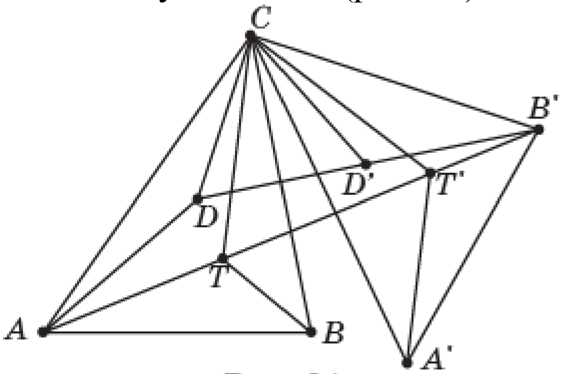


Рис. 24

Решение. Пусть *D* – произвольная точка. Повернём треугольник *ABC* и точку *D* вокруг вершины *C* на угол 60°. При этом точка *A* перейдёт в точку *A'*, точка *B* – в точку *B'*, точка *D* – в точку *D'*. Треугольник *CDD'* – равносторонний, следовательно, *CD* = *DD'* (рис. 24).

Сумма расстояний *AD* + *BD* + *CD* равна длине ломаной *ADD'B'*. Если точки *A*, *D*, *D'*, *B'* принадлежат одной прямой, то сумма *AD* + *BD* + *CD* будет наименьшей. Это будет, если углы *ADC* и *BDC* равны по 120°, т. е. если точки *D* совпадает с точкой Торричелли *T* – такой точкой, из которой стороны треугольника *ABC* видны под углом 120°.

Задача 14. Выясните, где будет располагаться точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая, если один из углов треугольника: а) равен 120°; б) больше 120°.

Решение. Если угол *C* треугольника *ABC* больше или равен 120°, то точка Торричелли не существует. Тем не менее, точка, для которой сумма расстояний до вершин треугольника *ABC* наименьшая, существует. В этих случаях ею является вершина *C* треугольника *ABC* (рис. 25).

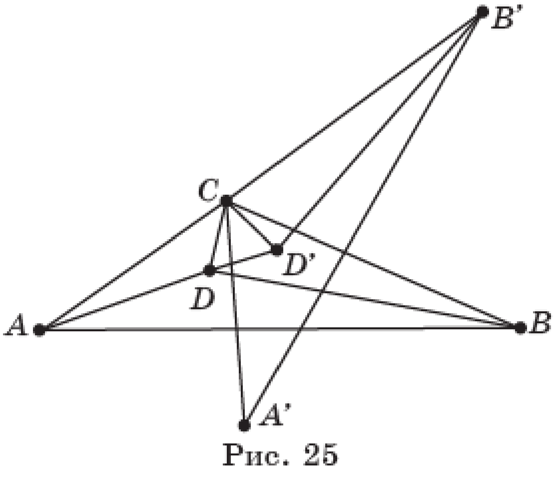
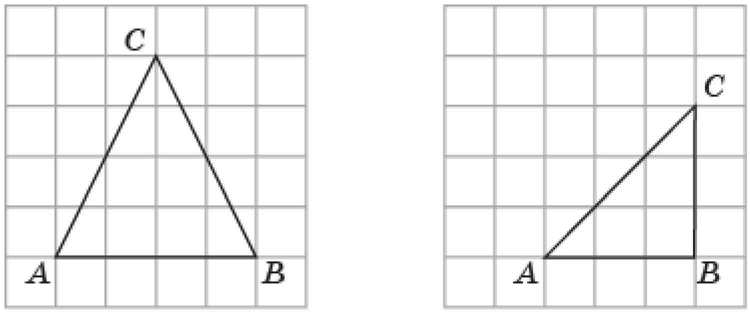


Рис. 25

Для любой другой точки *D* сумма *AC* + *BC* будет меньше длины ломаной *ADD'B'*, значит, меньше суммы *AD* + *BD* + *CD*.

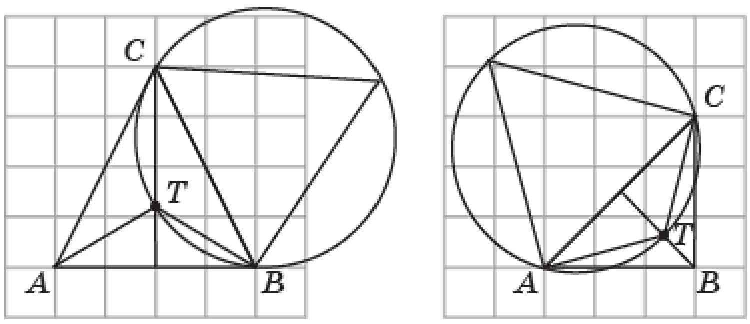
Задача 15. Для данного треугольника *ABC* (рис. 26) постройте точку *T*, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.



а) б)

Рис. 26

Решение. Построение искомой точки *T* показано на рисунке 27.



а) б)

Рис. 27

Вернёмся к задаче Герона, рассмотренной в предыдущей статье, сформулированной как задача об автобусной остановке.

Задача об автобусной остановке. Населённые пункты *A* и *B* расположены по одну сторону от шоссе *c*. Требуется построить автобусную остановку и проложить от неё дорожки до населённых пунктов так, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей (рис. 28).

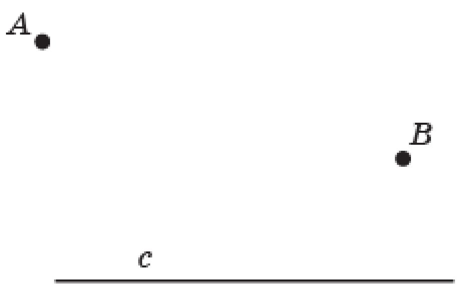


Рис. 28

Заметим, что данная формулировка отличается от формулировки, предложенной в упомянутой статье только одним словом. А именно, в данной формулировке не требуется, чтобы дорожки были прямолинейными.

Можно подумать, что в случае криволинейных дорожек их суммарная длина будет больше, чем в случае прямолинейных. Однако это не так.

Задача 16. Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону. Для точки D обозначим C основание перпендикуляра, опущенного из неё на прямую c. Найдите такое положение точки D, для которого сумма расстояний $AD + BD + CD$ наименьшая (рис. 29).

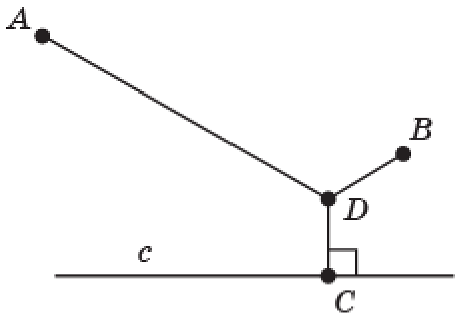


Рис. 29

Решение аналогично решению задачи Ферма**.** А именно, повернём отрезки AD, BD и CD вокруг точки A на угол 60° против часовой стрелки. Точка A останется на месте, точка B перейдёт в точку B', точка C – в точку C', точка D – в точку D' (рис. 30). При этом, $AD + BD + CD = B'D' + D'D + DC$. Последняя сумма будет наименьшей, если точки B', D', D, C принадлежат одной прямой. Это выполняется, если углы ADC и BDC равны по 120°.

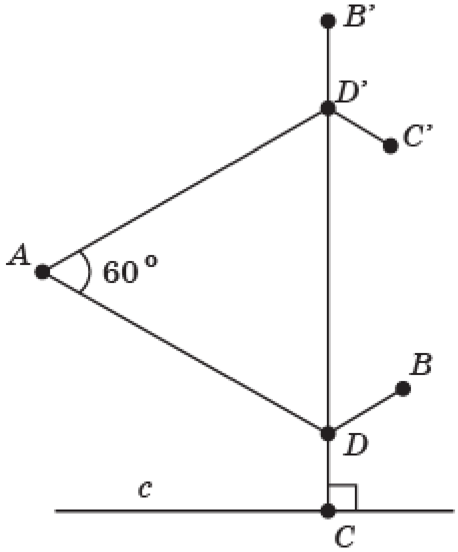


Рис. 30

Литература

1. Возняк Г. М. Гусев В. А. Прикладные задачи на экстремумы. – М.: Просвещение, 1985.

2. Нагибин Ф. Ф. Экстремумы. – М.: Просвещение 1966.

3. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.

4. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Экстремальные задачи по геометрии. – М.: Чистые пруды, 2007.

5. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.

6. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.