И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

КАК НАУЧИТЬ ШКОЛЬНИКОВ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ?

Геометрическую задачу С2 ЕГЭ по математике 2010 г., в которой требовалось найти расстояние в пространстве, решило около 5% школьников. Это, конечно, очень мало. Поэтому вопрос: «Как научить школьников решать такие задачи?» – является весьма актуальным.

Ответ на него кажется очевидным. Для того чтобы научить решать задачи, нужно решать задачи. Однако простое следование этой рекомендации может не привести к желаемому результату, поскольку задач много, все их не перерешаешь и, кроме того, при решении последующих задач предыдущие задачи забываются. По прошествии некоторого времени ученики могут не только не помнить, как решать задачу, которую они решали раньше, но и не помнить сам факт решения этой задачи. Это объясняется тем, что в процессе решения задач не был отработан метод, лежащий в основе решения задач данного типа, не были сформированы устойчивые навыки и представления, необходимые для решения данной и аналогичных ей задач.

В методике обучения математике имеются примеры преодоления этих трудностей обучения решению задач. Они основаны на выделении базовых (тренировочных) задач, закладывающих основы последующего обучения решению более трудных задач. Так, например, для того чтобы научить школьников решать арифметические задачи, необходимо, чтобы сначала они овладели техникой вычислений, могли производить арифметические действия над числами, не делая при этом грубых ошибок. Аналогично, поскольку решение многих уравнений сводится к решению линейных или квадратных уравнений, то, для того чтобы научить решать произвольные уравнения, нужно сначала научить решать линейные и квадратные уравнения.

Если математика – это «гимнастика ума», то уместно провести аналогию между обучением математике и обучением гимнастике. Для того чтобы научить детей выполнять то или иное трудное гимнастическое упражнение, нужно сначала многократно повторять более легкие базовые (тренировочные) упражнения, добиваться устойчивых умений и навыков в их выполнении и только после этого переходить к обучению выполнения требуемого трудного упражнения. Более того, именно тренировки развивают такие гимнастические качества как силу, ловкость, координацию и т. д.

Так же следует поступать и в случае обучения решению геометрических задач. Сначала нужно выделить базовые (тренировочные) задачи, тренироваться в их решении до тех пор, пока не будут сформированы устойчивые умения и навыки, а затем приступать к решению более трудных задач. При этом именно тренировочные упражнения будут способствовать развитию геометрических представлений и мышления учащихся.

При обучении школьников решению стереометрических задач имеется дополнительная трудность, связанная с тем, что обычно для изображения многогранников используется параллельное проектирование, которое не вполне соответствует нашему зрительному восприятию окружающих предметов. Школьников нужно специально учить разбираться в изображениях пространственных фигур, развивать их пространственное воображение. Для этого учащихся следует познакомить с параллельным проектированием и его основными свойствами, показать, как изображаются основные пространственные фигуры. Соответствующий материал можно посмотреть в учебнике [1].

В данной статье мы предлагаем методику обучения решению задач на нахождение расстояний в пространстве, которая не только формируют необходимые умения и навыки, но и развивает пространственные представления учащихся.

Отметим, что особенностью предлагаемых нами задач является то, что они хорошо клонируются. Мы рассматриваем точки и прямые на примере куба, но вместо куба можно взять прямоугольный параллелепипед, правильную треугольную или шестиугольную призму, пирамиды и т. д. Каждый учитель, по аналогии с предложенными задачами, может придумывать свои задачи.

Начнем с задач на нахождение расстояния от точки до прямой.

Напомним, что расстоянием от точки до прямой, не проходящей через эту точку, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую (рис. 1).

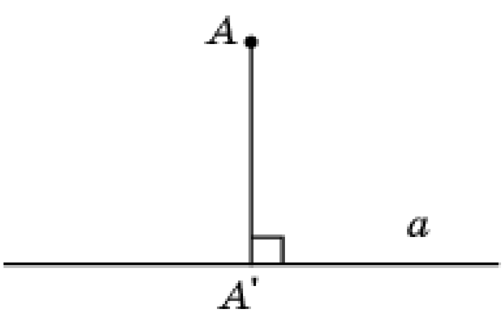

Рис. 1

Для нахождения расстояния от точки A до прямой a сначала находят основание A' перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую a. Если нахождение длины перпендикуляра AA' не вытекает непосредственно из условия задачи, то на прямой a выбирают какие-нибудь точки B, C и рассматривают треугольник ABC, в котором AA' является высотой (рис. 2). Для нахождения высоты AA' используют теорему Пифагора или другие теоремы и формулы.

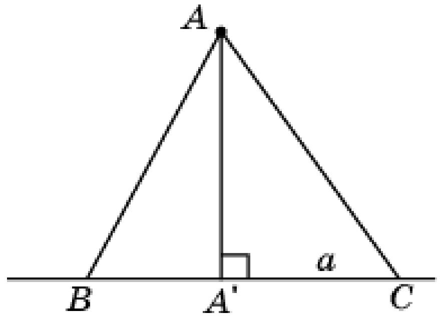

Рис. 2

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BC (рис. 3).

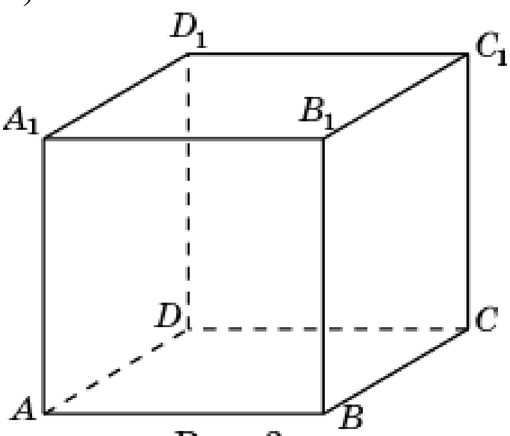

Рис. 3

Здесь учащиеся должны увидеть и обосновать то, что отрезок AB является перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую BC, и, следовательно, его длина является искомым расстоянием от точки A до прямой BC.

Например, можно сказать, что грань $ABCD$ является квадратом. Следовательно, AB является перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую CD. Искомое расстояние равно длине этого перпендикуляра и равно 1.

Наш опыт работы показывает, что не все учащиеся 10 класса сразу видят изображенную пространственную ситуацию и могут дать правильный ответ. Трудность здесь заключается в том, что видимый на рисунке угол ABC отличается от прямого. Учащимся требуется отвлечься от рисунка и представить себе расположение данного угла в пространстве. Это не такое простое умственное действие.

Если мы ограничимся решением только этой задачи, то у многих учащихся не будут сформированы устойчивые представления, умения и навыки. Необходимо предложить учащимся серию аналогичных задач.

1'. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой: а) CD; б) BB_1, в) DD_1; г) A_1B_1; д) A_1D_1.

Вместо точки A можно выбирать любую другую вершину куба.

Хорошо, если учащиеся сами увидят, что все эти задачи аналогичны и отличаются только расположением букв, обозначающих вершины куба.

Следующие задачи немного труднее.

2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BC_1 (рис. 4).

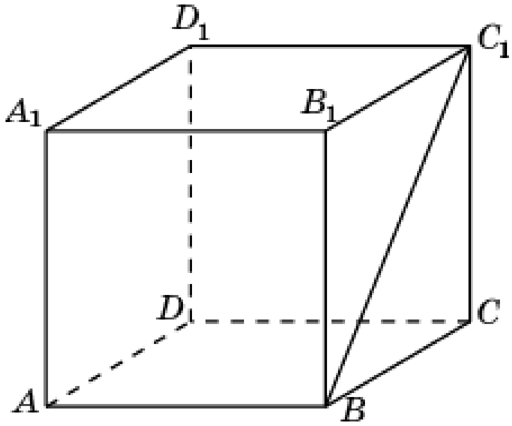

Рис. 4

Здесь для доказательства перпендикулярности прямых AB и BC_1 можно воспользоваться тем, что прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_1 и, значит, перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Искомое расстояние равно длине отрезка AB и равно 1.

2'. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой а) DC_1; б) A_1C_1.

Так же как и в предыдущих задачах, вместо точки A можно брать любую другую вершину куба.

3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой CB_1 (рис. 5).

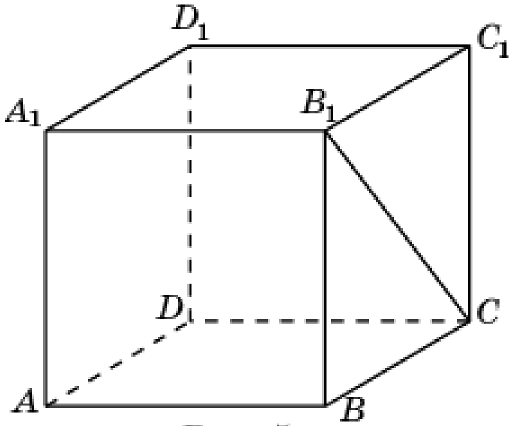

Рис. 5

В этой задаче требуется построить (изобразить) искомый перпендикуляр. Заметим, что треугольник ACB_1 – равносторонний и, следовательно, его медиана AM будет высотой (рис. 6). Таким образом, для построения искомого перпендикуляра достаточно отметить середину M отрезка CB_1 и соединить ее с точкой A. Так как стороны треугольника ACB_1 равны $\sqrt{2}$, искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

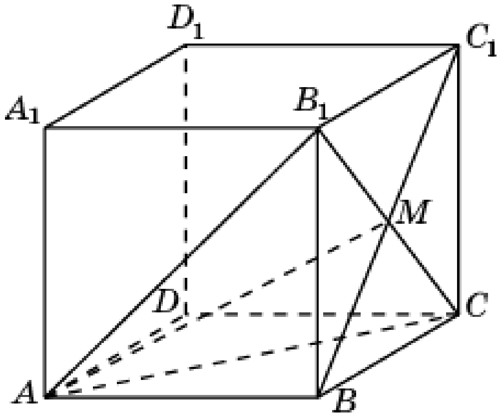

Рис. 6

3’. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой а) CD_1; б) B_1D_1; в) BD; г) BA_1; д) DA_1.

Следующие задачи наиболее трудные.

4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1 (рис. 7).

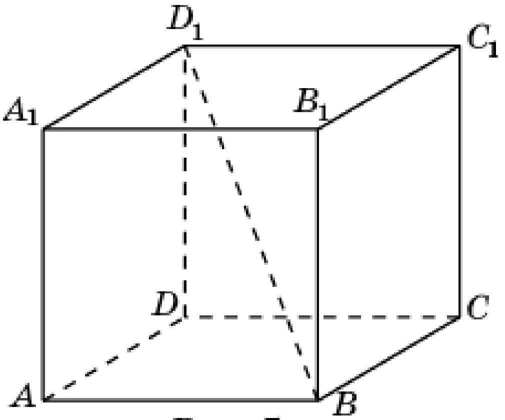

Рис. 7

Для нахождения искомого перпендикуляра, рассмотрим треугольник ABD_1 (рис. 8). Он является прямоугольным (угол A – прямой) с катетами $AB = 1$, $AD_1 = \sqrt{2}$ и гипотенузой $BD_1 = \sqrt{3}$. Найдем его высоту AH. Для этого можно использовать или преобразование подобия, или тригонометрические функции, или площадь треугольника. Искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

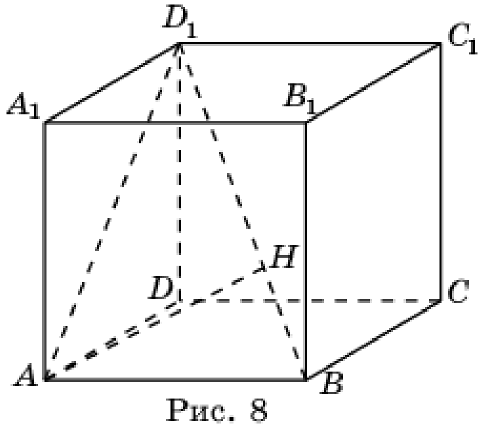

Рис. 8

4’. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой: а) DB_1; б) CA_1.

Перейдем теперь к задачам на нахождение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

Напомним, что расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым.

Если одна из двух данных скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая – параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью (рис. 9).

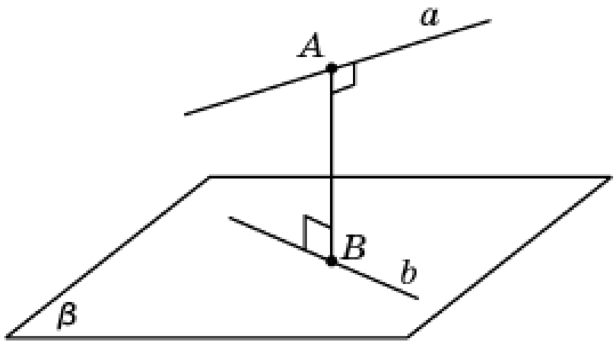

Рис. 9

Если данные скрещивающиеся прямые a и b лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β, то расстояние между прямыми a и b равно расстоянию между плоскостями α и β. В этом случае длина перпендикуляра CD, опущенного из произвольной точки C плоскости α на плоскость β, будет равна расстоянию между прямыми a и b (рис. 10).

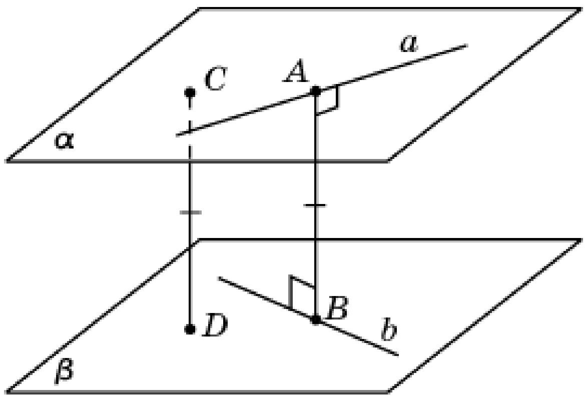

Рис. 10

5. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC (рис. 11).

Здесь учащиеся должны увидеть и обосновать то, что отрезок AB является общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым AA_1 и BC, и, следовательно, его длина, равная 1, является искомым расстоянием между этими прямыми.

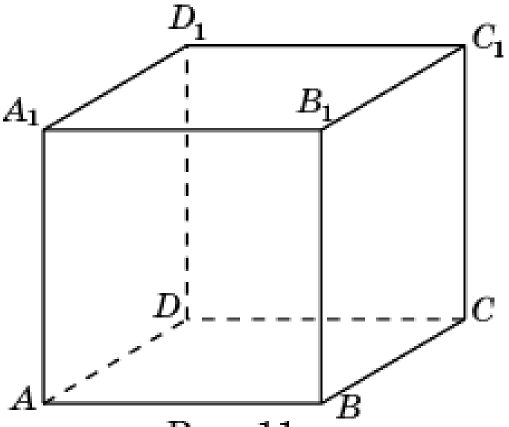

Рис. 11

5’. В единичном кубе $A…D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и: а) CD; б) B_1C_1; в) C_1D_1; г) BC_1; д) CB_1; е) CD_1; ж) DC_1; з) BD; и) B_1D_1.

Следующая задача немного труднее.

6. В единичном кубе $A…D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1 (рис. 12).

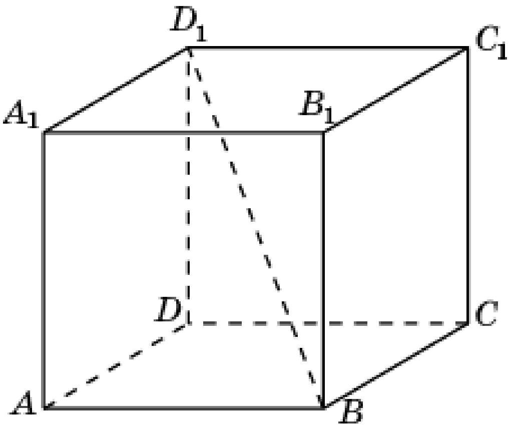

Рис. 12

Здесь общим перпендикуляром является отрезок EF, соединяющий середины отрезков AA_1 и BD_1 (рис. 13).

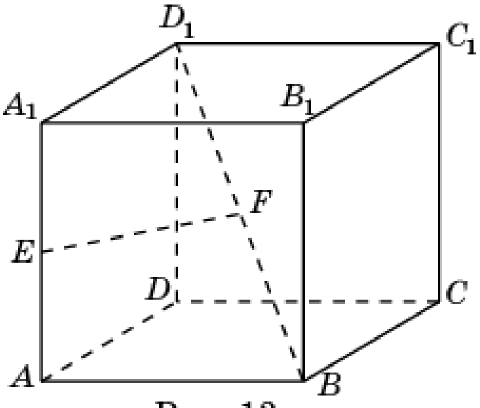

Рис. 13

Действительно, пусть O – центр грани $ABCD$ (рис. 14). В четырехугольнике $AOFE$ стороны AE и OF равны и параллельны. Значит, этот четырехугольник – параллелограмм и, следовательно, стороны EF и AO равны и параллельны.

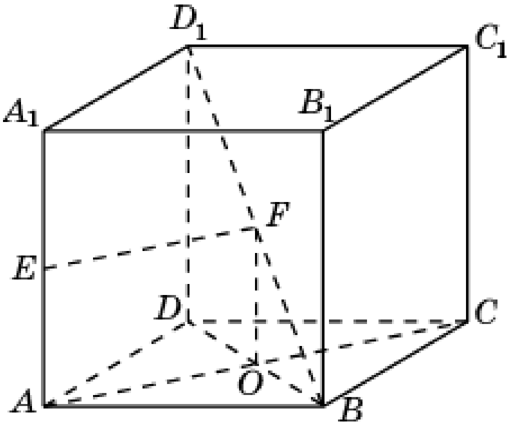

Рис. 14

Прямая AA_1 перпендикулярна AO, так как она перпендикулярна плоскости ABC. Прямая BD_1 перпендикулярна AO по теореме о трех перпендикулярах. Следовательно, и прямая EF перпендикулярна AA_1 и BD_1. Значит, отрезок EF является искомым общим перпендикуляром, длина которого равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6'. В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и DB_1; б) AB и CA_1; в) BC и AC_1; г) CD и BD_1; д) AD и BD_1.

Наиболее трудной из этой серии является следующая задача.

7. В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 (рис. 15).

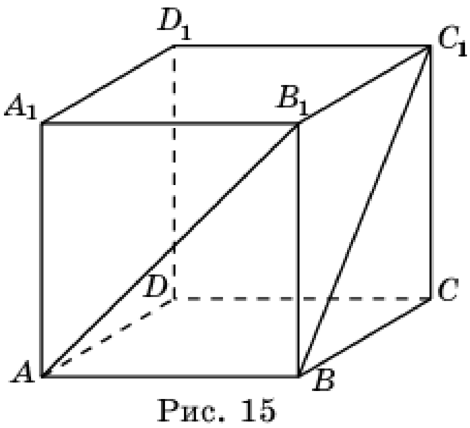

Рис. 15

Расстояние между данными прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 (рис. 16).

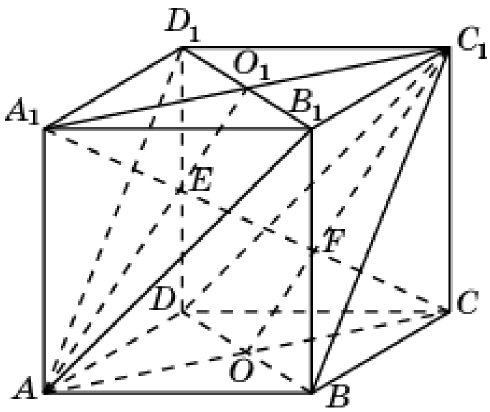

Рис. 16

Диагональ CA_1 перпендикулярна этим плоскостям и делится ими в точках пересечения E и F на три равные части. Следовательно, искомое расстояние равно длине отрезка EF и равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7'. В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми: а) BA_1 и CB_1; б) BA_1 и AC; в) BA_1 и B_1D_1; г) BA_1 и AD_1.

Предлагаемая методика тренировочных задач реализована в пособиях [2], [3], [4], в которых подробно рассмотрены не только задачи на нахождение расстояний в пространстве, но и задачи на нахождение углов, объемов, площадей поверхностей и др.

Литература

1. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия. 10-11 классы: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). – М.: Мнемозина, 2009.

2. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия. Расстояния и углы в пространстве. – М.: Экзамен, 2009 (Серия «ЕГЭ. сто баллов»).

3. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия. Объемы и площади поверхностей пространственных фигур. – М.: Экзамен, 2009 (Серия «ЕГЭ. сто баллов»).

4. В.А. Смирнов. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под редакцией И.В. Ященко и А.В. Семенова. – М.: МЦНМО, 2009.