О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОЛУПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЕ GEOGEBRA

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
i-m-smirnova@yandex.ru
Аннотация: в работе рассматриваются полуправильные многогранники; показываются способы их моделирования в компьютерной программе GeoGebra; предлагаются упражнения для самостоятельного решения.
Ключевые слова: полуправильные многогранники, моделирование.

ON MODELING SEMIREGULAR POLYHEDRA IN THE GEOGEBRA COMPUTER PROGRAM

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru
Abstract: the paper considers semiregular polyhedra; shows ways to model them in the GeoGebra computer program; offers exercises for self-solution.
Keywords: semiregular polyhedra, modeling.

Полуправильные многогранники являются естественным расширением семейства правильных многогранников. Это выпуклые многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники, возможно, с разным числом сторон, и все многогранные углы равны, причём, один многогранный угол получается из другого движением самого многогранника.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы (рис. 1), все рёбра которых равны,

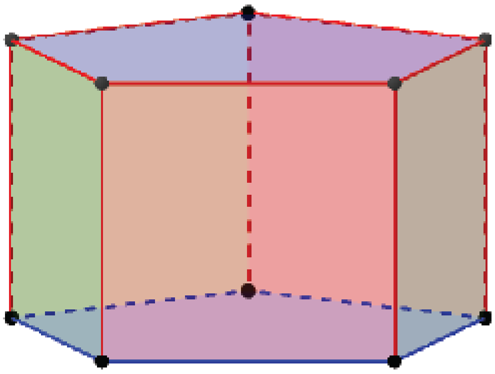


Рис. 1

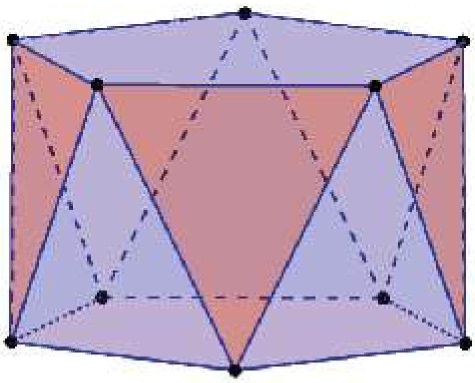


Рис. 2

и, так называемые, антипризмы (рис. 2), поверхность которых состоит из двух равных правильных многоугольников, называемых основаниями, и правильных треугольников, имеющих общие стороны с одним из оснований.

Кроме этих двух бесконечных серий, имеются ещё только 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед (287 – 212 гг. до н. э.). Поэтому они называются также телами Архимеда.

Полуправильные многогранники очень декоративны. Знакомство учащихся с полуправильными многогранниками может способствовать повышению интереса к обучению геометрии, развитию пространственных представления школьников [1].

Для моделирования различных многогранников можно воспользоваться свободно распространяемой компьютерной программой GeoGebra [2], которую можно скачать с официального сайта https://www.geogebra.org.

Например, для моделирования додекаэдра нужно отметить две какие-нибудь точки *A*, *B*, и в строке «Ввод» написать: Додекаэдр(A,B). В результате получим додекаэдр, двумя вершинами которого являются данные точки (рис. 3).

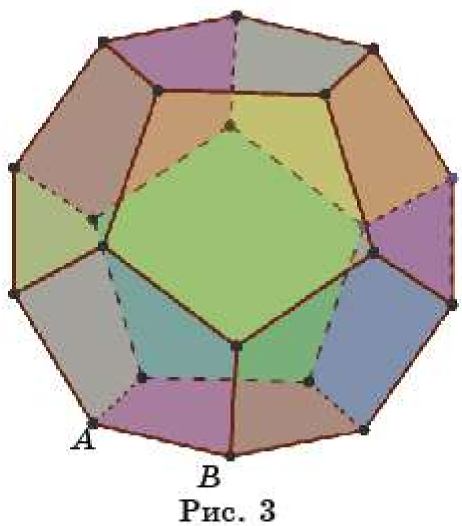


Рис. 3

Здесь мы покажем, как модели полуправильных многогранников можно получить в компьютерной программе GeoGebra.

Представленный материал может быть использован учителями для организации проектной деятельности учащихся по математике.

Покажем, как в этой программе можно получить антипризмы. В качестве примера рассмотрим пятиугольную антипризму (рис. 2).

Сначала получим правильный пятиугольник $ABCDE$. Отметим его центр O. На прямой a, проходящей через этот центр, и перпендикулярной плоскости ABC выберем какую-нибудь точку O_1. Перенесём пятиугольник $ABCDE$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Повернём этот пятиугольник вокруг прямой OO_1 на угол 36°. Получим пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$. Построим треугольники ABA_1, BCB_1, CDC_1, DED_1, EAE_1, A_1B_1B, B_1C_1C, C_1D_1D, D_1E_1E, E_1A_1A. Перемещая точку O_1 на прямой a, можно добиться, чтобы все построенные треугольники были правильными. В результате получим искомую пятиугольную антипризму (рис. 4).

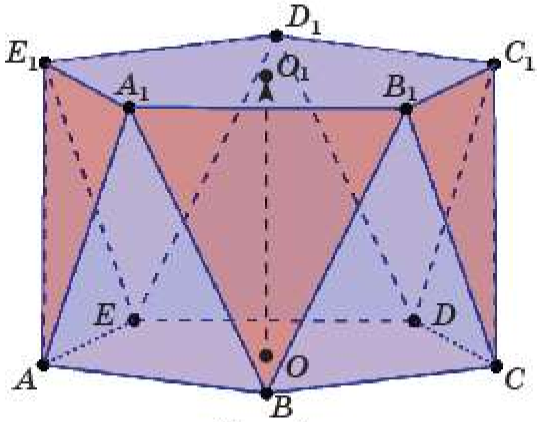


Рис. 4

Рассмотрим теперь тела Архимеда.

Кубооктаэдр – полуправильный многогранник, поверхность которого состоит из граней куба и граней октаэдра (5).

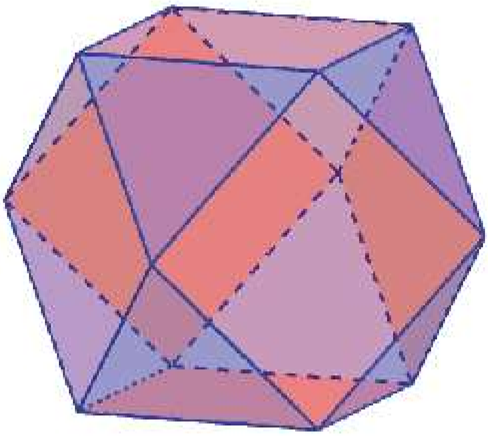


Рис. 5

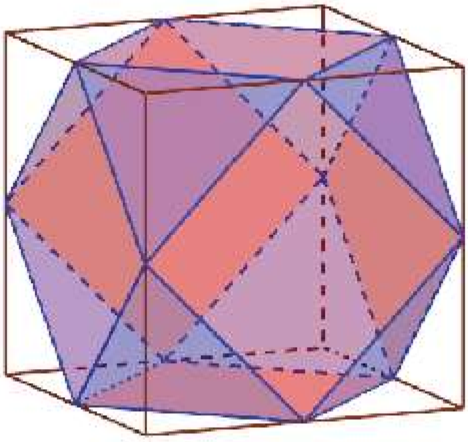


Рис. 6

Для его получения построим куб (рис. 6). Отметим середины его рёбер. Построим квадраты и правильные треугольники с вершинами в этих точках. Построим квадраты и правильные треугольники с вершинами в этих точках. Скроем сам куб. В результате получим искомый кубооктаэдр.

Упражнение 1. Какой многогранник получится, если аналогичное построение применить к: а) тетраэдру; б) октаэдру?

Икосододекаэдр - полуправильный многогранник, поверхность которого состоит из граней икосаэдра и граней додекаэдра (рис. 7).

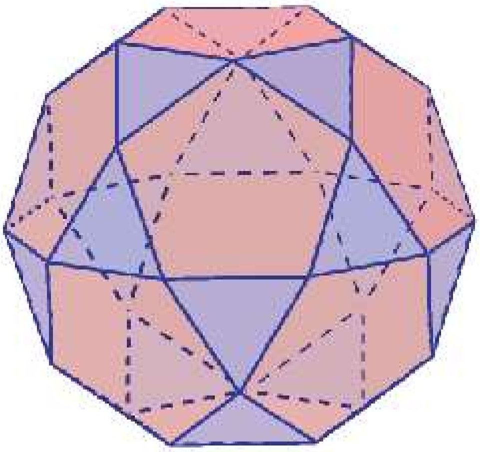


Рис. 7

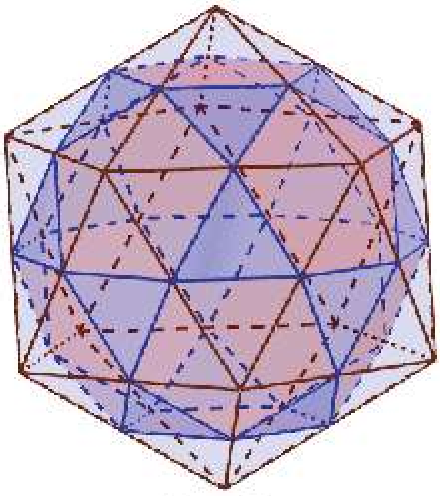


Рис. 8

Для его получения построим додекаэдр. Отметим середины его рёбер. Построим правильные треугольники и правильные пятиугольники с вершинами в этих точках (рис. 8). Скроем сам додекаэдр. В результате получим искомый икосододекаэдр.

Упражнение 2. Какой многогранник получится, если аналогичное построение применить к икосаэдру?

Усечённый тетраэдр получается из правильного тетраэдра отсечением от его трёхгранных углов правильных тетраэдров. Его гранями являются правильные треугольники и правильные шестиугольники (рис. 9).

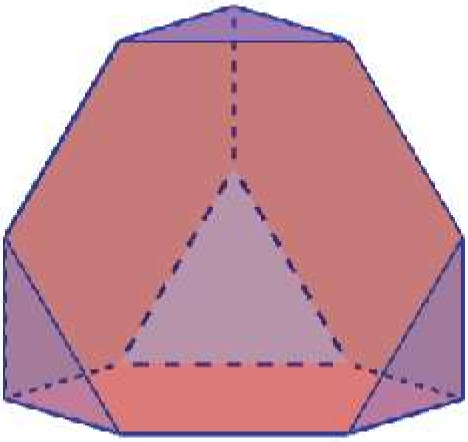


Рис. 9

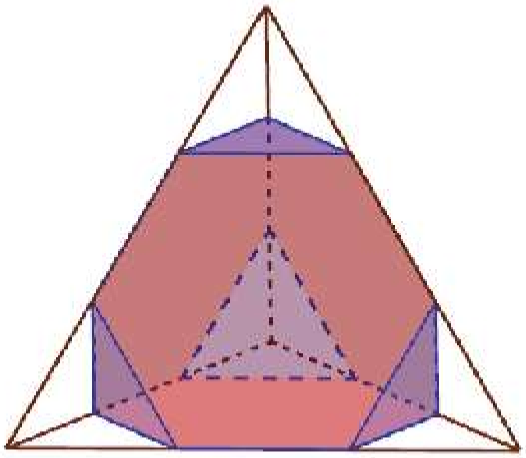


Рис. 10

Для его получения построим правильный тетраэдр (рис. 10). На каждом его ребре отметим две точки, делящие это ребро на три равные части. Построим треугольники и шестиугольники с вершинами в этих точках. Самостоятельно проверьте, что эти многоугольники являются правильными. Скроем сам тетраэдр. В результате получим искомый усечённый тетраэдр.

Усечённый куб получается из куба отсечением от его трёхгранных углов правильных треугольных пирамид. Его гранями являются правильные треугольники и правильные восьмиугольники (рис. 11).

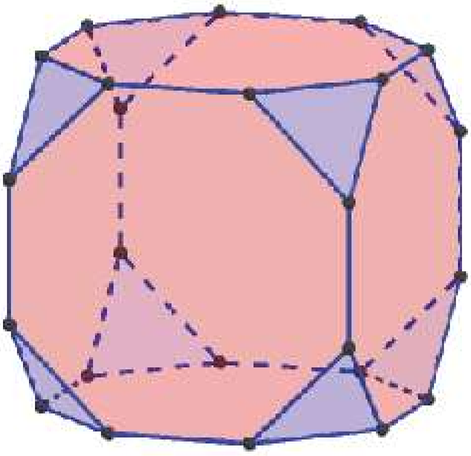


Рис. 11

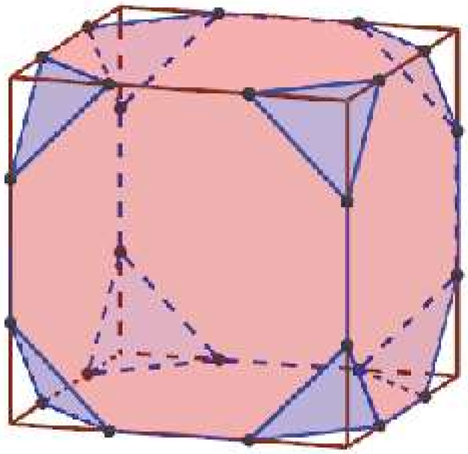


Рис. 12

Для его получения построим единичный куб. На каждом его ребре отметим две точки, отстоящие от ближайших вершин на расстояние, равное $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Построим треугольники и восьмиугольники с вершинами в этих точках. Самостоятельно проверьте, что эти многоугольники являются правильными. Скроем сам куб. В результате получим искомый усечённый куб.

Усечённый октаэдр получается из октаэдра отсечением от его четырёхгранных углов правильных четырёхугольных пирамид. Его гранями являются квадраты и правильные шестиугольники (рис. 13).

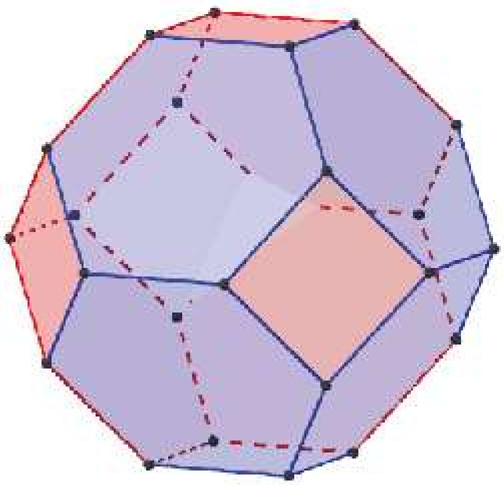


Рис. 13

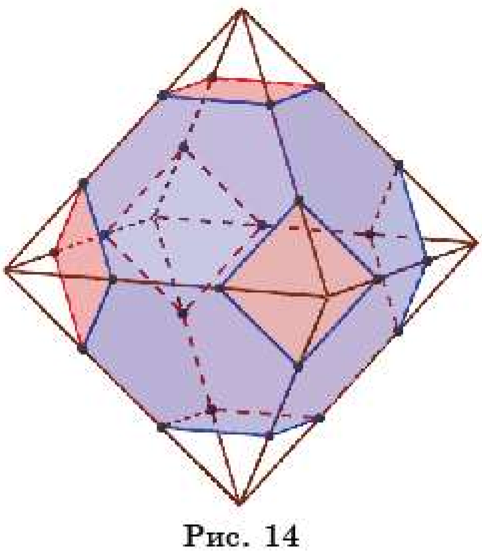


Рис. 14

Для его получения построим октаэдр (рис. 14). На каждом его ребре отметим две точки, делящие это ребро на три равные части. Построим квадраты и шестиугольники с вершинами в этих точках. Самостоятельно проверьте, что эти многоугольники являются правильными. Скроем сам октаэдр. В результате получим искомый усечённый октаэдр.

Усечённый икосаэдр получается из икосаэдра отсечением от его пятигранных углов правильных пятиугольных пирамид. Его гранями являются правильные пятиугольники и правильные шестиугольники (рис. 15).

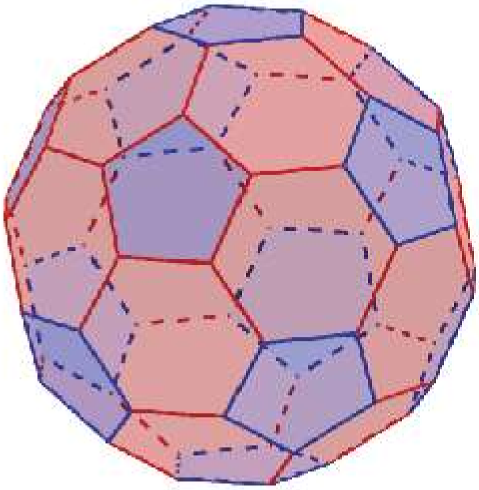


Рис. 15

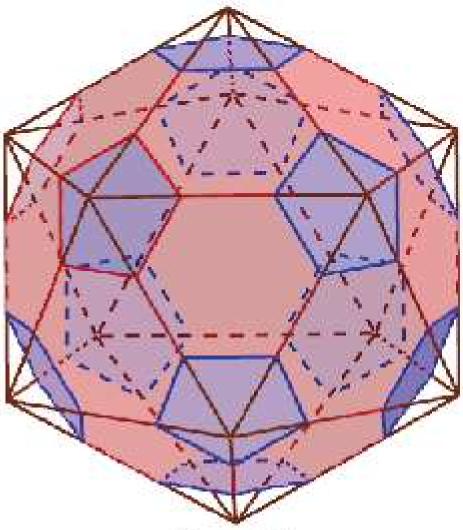


Рис. 16

В форме этого многогранника изготавливают поверхность футбольного мяча.

Для получения этого многогранника построим икосаэдр (рис. 16). На каждом его ребре отметим две точки, делящие это ребро на три равные части. Построим пятиугольники и шестиугольники с вершинами в этих точках. Самостоятельно проверьте, что эти многоугольники являются правильными. Скроем сам икосаэдр. В результате получим искомый усечённый икосаэдр.

Усечённый додекаэдр получается из додекаэдра отсечением от его трёхгранных углов правильных треугольных пирамид. Его гранями являются правильные треугольники и правильные десятиугольники (рис. 17).

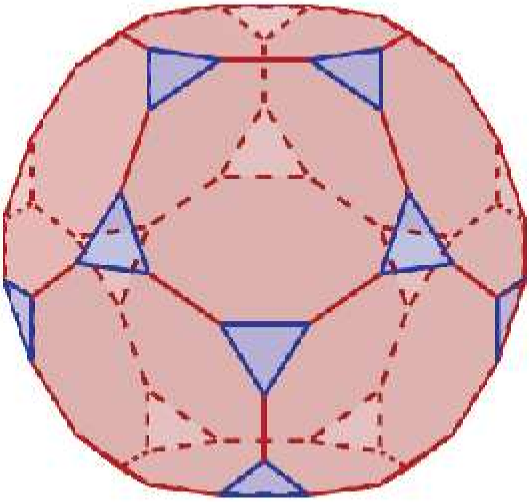


Рис. 17

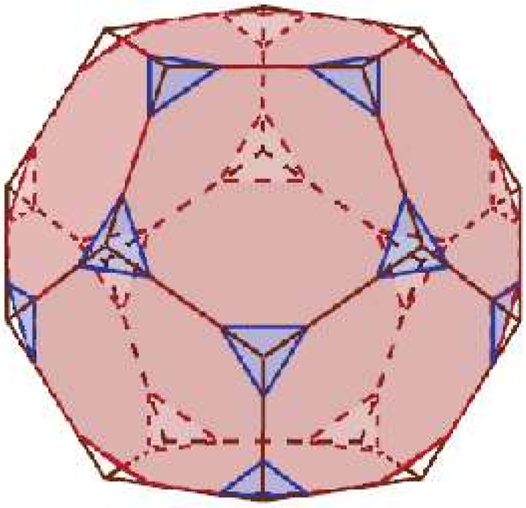


Рис. 18

Для получения этого многогранника построим додекаэдр (рис. 18). На каждом его ребре отметим две точки, отстоящие от ближайших вершин на расстояние, равное $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Построим треугольники и десятиугольники с вершинами в этих точках. Самостоятельно проверьте, что эти многоугольники являются правильными. Скроем сам додекаэдр. В результате получим искомый усечённый додекаэдр.

Ромбокубооктаэдр – полуправильный многогранник, гранями которого являются грани куба и октаэдра, к которым добавлены ещё 12 квадратов, которые считаются ромбами (рис. 19).

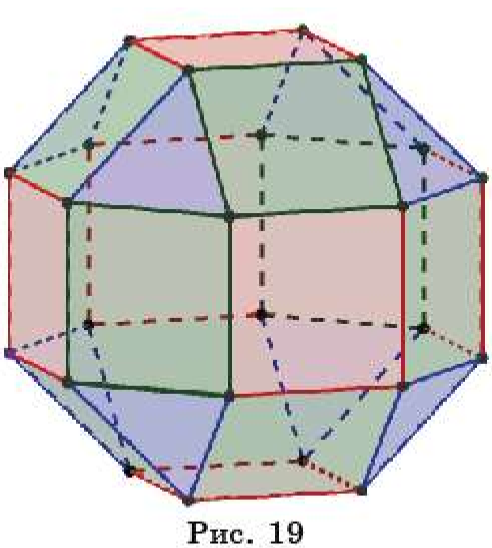


Рис. 19

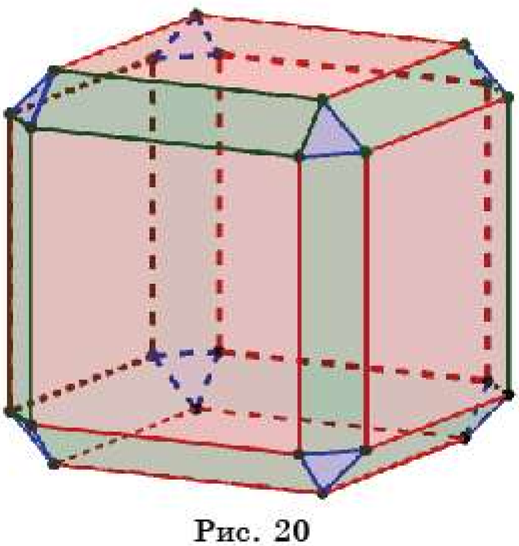


Рис. 20

Для его получения построим куб. Будем параллельно сдвигать его грани на векторы, равной длиной, перпендикулярные этим граням.

Заполним образовавшиеся пустоты прямоугольниками и треугольниками (рис. 20). Меняя длину векторов, можно добиться, чтобы эти прямоугольники стали квадратами, а треугольники – правильными. В результате получим искомый ромбокубооктаэдр.

Упражнение 3. Какой многогранник получится, если аналогичное построение применить к: а) тетраэдру; б) октаэдру?

Ромбоикосододекаэдр – полуправильный многогранник, гранями которого являются грани икосаэдра и додекаэдра, к которым добавлены ещё 30 квадратов, которые считаются ромбами (рис. 21).

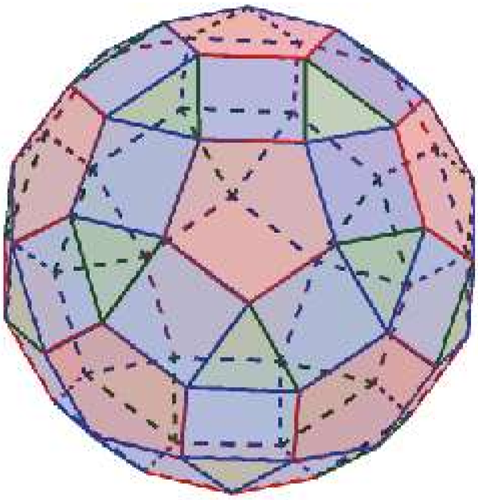


Рис. 21

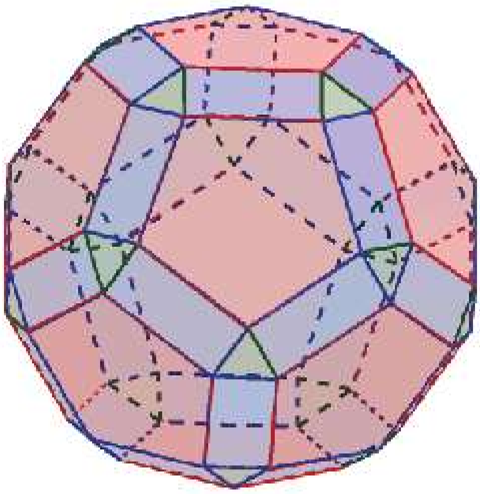


Рис. 22

Для его получения рассмотрим додекаэдр. Будем параллельно сдвигать его грани на векторы, равной длиной, перпендикулярные этим граням. Заполним образовавшиеся пустоты прямоугольниками и треугольниками (рис. 22). Меняя длину векторов, можно добиться, чтобы эти прямоугольники стали квадратами, а треугольники – правильными. В результате получим искомый ромбоикосододекаэдр.

Упражнение 4. Какой многогранник получится, если аналогичное построение применить к: икосаэдру?

Усечённый кубооктаэдр – полуправильный многогранник, гранями которого являются квадраты, правильные шестиугольники и правильные восьмиугольники (рис. 23).

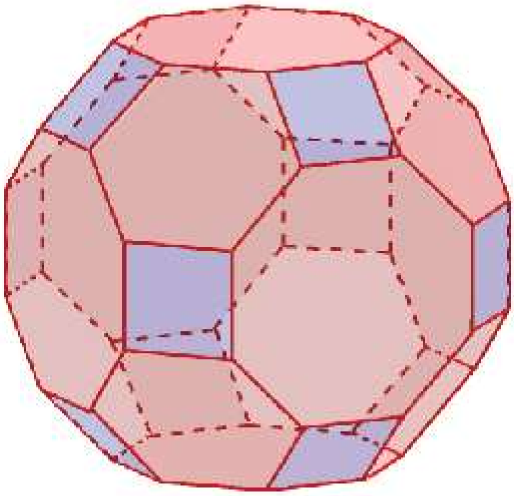
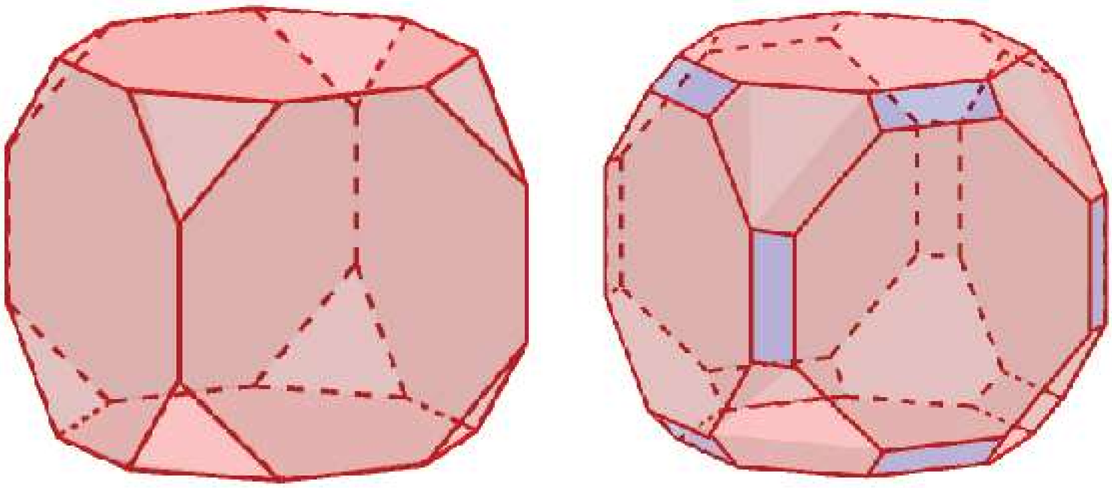


Рис. 23

Хотя он и называется усечённый кубооктаэдр, но он не получается усечением кубооктаэдра. Для его получения рассмотрим усечённый куб (рис. 24, а). Удалим в нём треугольные грани.



а) Рис. 24 б)

Будем параллельно сдвигать восьмиугольные грани на векторы, равной длиной, перпендикулярные этим граням. Заполним образовавшиеся пустоты прямоугольниками и шестиугольниками (рис. 24, б). Меняя длину векторов, можно добиться, чтобы эти прямоугольники стали квадратами, а шестиугольники – правильными. В результате получим искомый усечённый кубооктаэдр.

Упражнение 5. Какой многогранник получится, если аналогичное построение применить к: а) усечённому тетраэдру; б) усечённому октаэдру?

Усечённый икосододекаэдр – полуправильный многогранник, гранями которого являются квадраты, правильные шестиугольники и правильные десятиугольники (рис. 25).

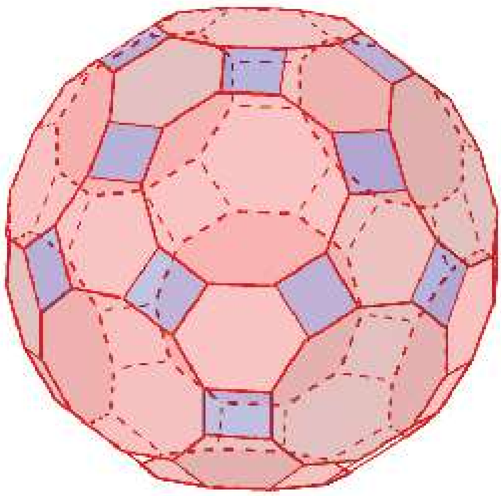
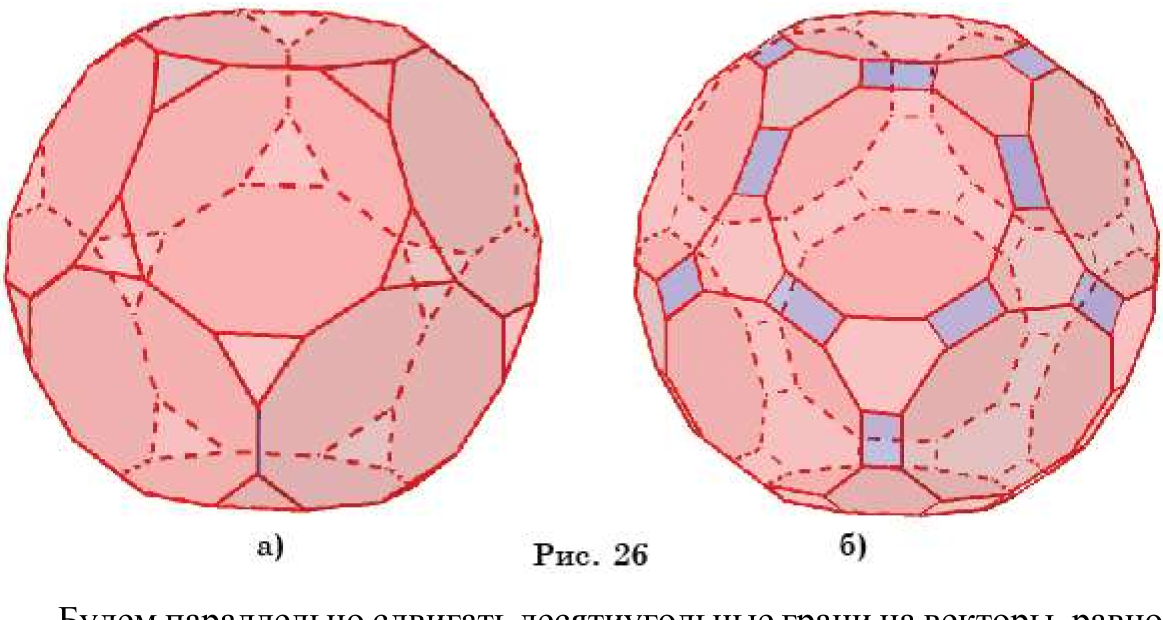


Рис. 25

Хотя он и называется усечённый икосододекаэдр, но он не получается усечением икосододекаэдра. Для его получения рассмотрим усечённый додекаэдр (рис. 26, а). Удалим в нём треугольные грани.



а) Рис. 26 б)

Будем параллельно сдвигать десятиугольные грани на векторы, равной длиной, перпендикулярные этим граням. Заполним образовавшиеся пустоты прямоугольниками и шестиугольниками (рис. 26, б). Меняя длину векторов, можно добиться, чтобы эти прямоугольники стали квадратами, а шестиугольники – правильными. В результате получим искомый усечённый икосододекаэдр.

Упражнение 6. Какой многогранник получится, если аналогичное построение применить к усечённому икосаэдру?

Курносый куб – полуправильный многогранник, поверхность которого состоит из граней куба, окружённых правильными треугольниками (рис. 27).

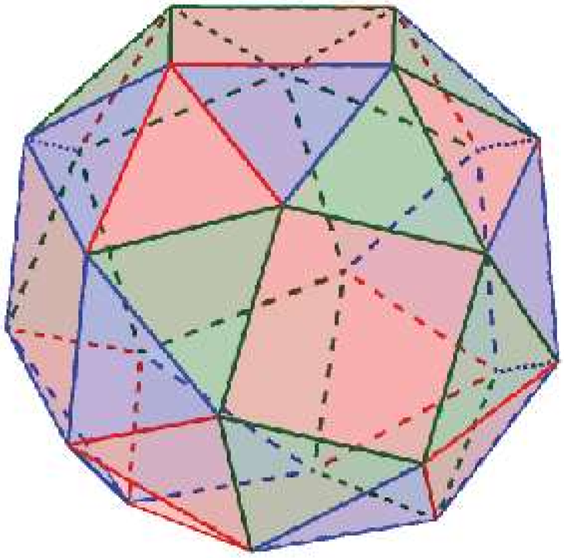
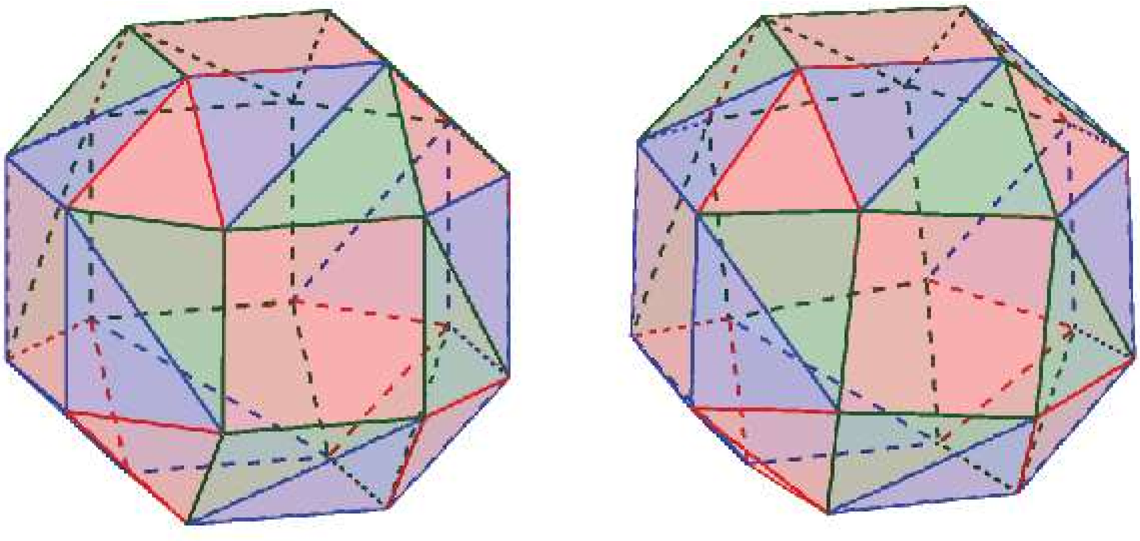


Рис. 27

Для его получения рассмотрим ромбокубооктаэдр. Вместо квадратов, которые считаются ромбами, построим прямоугольные треугольники (рис. 28, а).



а) Рис. 28 б)

Будем поворачивать квадраты вокруг прямых, проходящих через их центры, и перпендикулярные их плоскостям (рис. 28, б). Меняя угол поворота, можно добиться, чтобы прямоугольные треугольники стали правильными треугольниками. В результате получим искомый курносый куб.

Курносый додекаэдр – полуправильный многогранник, поверхность которого состоит из граней додекаэдра, окружённых правильными треугольниками (рис. 29).

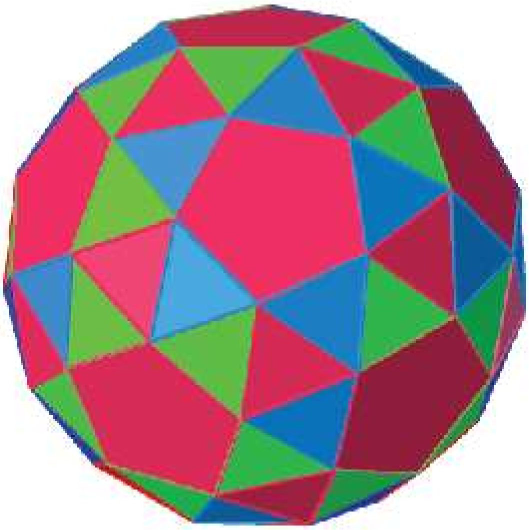


Рис. 29

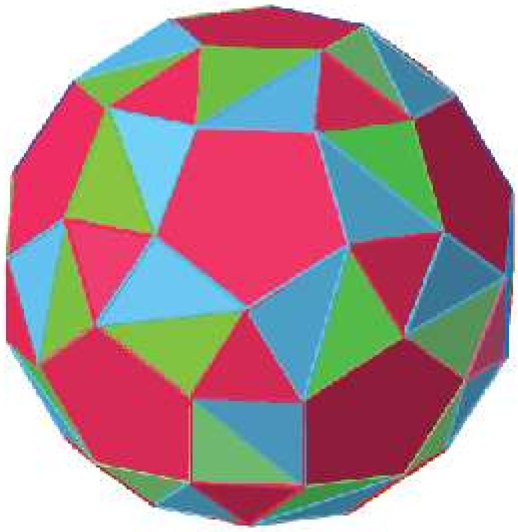


Рис. 30

Для его получения рассмотрим ромбоикосододекаэдр. Вместо квадратов, которые считаются ромбами, построим прямоугольные треугольники (рис. 30).

Будем поворачивать пятиугольники вокруг прямых, проходящих через их центры, и перпендикулярные их плоскостям. Меняя угол поворота, можно добиться, чтобы прямоугольные треугольники стали правильными треугольниками. В результате получим искомый курносый додекаэдр.

Ответы к упражнениям: **1.** а) октаэдр; б) кубооктаэдр. **2.** Икосододекаэдр. **3.** а) кубооктаэдр; б) ромбокубооктаэдр. **4.** Ромбоикосододекаэдр. **5.** а) усечённый октаэдр; б) усечённый кубооктаэдр. **6.** Усечённый икосододекаэдр.

Список источников

1. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс. Геометрия: учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). – М.: Мнемозина, 2020.
2. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. – М.: Прометей, 2018.