ЗАДАЧИ О ДВУХ КОРАБЛЯХ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация: в статье рассматриваются задачи с практическим содержанием о движении двух кораблей, математические решения которых являются довольно сложными, а приближённые решение с использованием компьютерных программ могут быть доступны для учащихся основной школы.

Ключевые слова: геометрия, задачи с практическим содержанием, моделирование в компьютерных программах.

THE PROBLEMS OF TWO SHIPS

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
i-m-smirnova@yandex.ru

Abstract: The paper considers the problems with practical content about the movement of two ships, the mathematical solutions of which are quite complex, and approximate solutions using computer programs can be available to primary school students.

Keywords: geometry, problems with practical content, modeling in computer programs.

В статье [1] была рассмотрена задача о легковом автомобиле, математическое решение которой является довольно сложным, а использование моделирования ситуации в компьютерной программе GeoGebra позволяет найти её приближённое решение, доступное для учащихся основной школы.

Здесь мы рассмотрим задачи о движении двух кораблей. Предложим решения, использующие их моделирование в компьютерной программе GeoGebra, а также математические решения.

Для знакомства с возможностями компьютерной программы GeoGebra можно воспользоваться книгой [2].

Задача 1. Расстояние между двумя портами A_1, A_2 на берегу моря равно 10 км. Из порта A_1 отплыл корабль в направлении, составляющем 60^o с направлением A_1A_2 со скоростью 15 км/ч. Из порта A_2 в то же время отплыл корабль в направлении, составляющем 30^o с направлением A_2A_1 со скоростью 20 км/ч (рис. 1).

1. Выясните, произойдёт ли столкновение этих кораблей.

2. Найдите наименьшее расстояние, которое будет между этими кораблями.

3. Найдите угол к направлению A_2A_1, под которым должен идти второй корабль, чтобы, не меняя курса, встретиться с первым кораблём.

4. Найдите время от начала движения, через которое встретятся корабли.

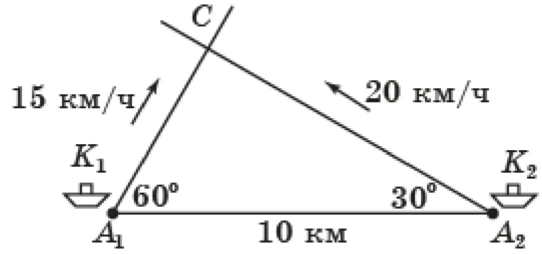

Рис. 1

Математическое решение. 1. Рассмотрим треугольник A_1A_2C (рис. 1). В нём $A_1A_2 = 10$, $A_1C = 5$, $A_2C = 5\sqrt{3}$. Время, за которое корабли будут в точке C равно соответственно $\frac{1}{3}$ ч $= 20$ мин, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ч ≈ 26 мин. Следовательно, корабли не столкнутся.

2. Рассмотрим общую ситуацию. Пусть из портов $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ одновременно отплыли корабли K_1, K_2 в направлении и скоростью, задаваемыми направляющими векторами соответственно $\overrightarrow{m_1}(a_1, b_1)$, $\overrightarrow{m_2}(a_2, b_2)$ (рис. 2).

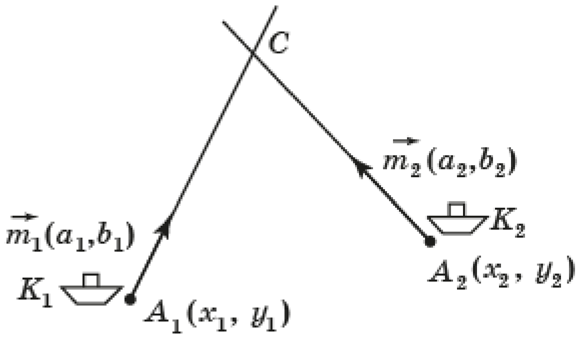

Рис. 2

Найдём наименьшее возможное расстояние между этими кораблями в процессе их движения.

Для этого воспользуемся заданием прямой с помощью параметрических уравнений [3].

Прямую, проходящую через точку $A_0(x_0, y_0)$, с направляющим вектором $\vec{m}(a, b)$ можно задать параметрическими уравнениями (рис. 3).

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$$

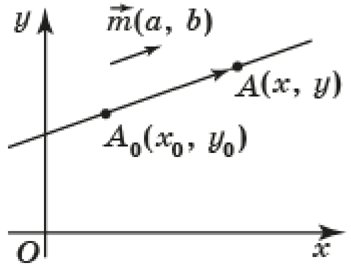

Рис. 3

С физической точки зрения, направляющий вектор $\vec{m}(a, b)$ является вектором скорости движения точки по прямой.

Движение этих кораблей задаётся параметрическими уравнениями

$$K_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1 t, \\ y = y_1 + b_1 t, \end{cases} K_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2 t, \\ y = y_2 + b_2 t. \end{cases}$$

Квадрат расстояния между этими кораблями в момент времени t равен

$$((x_2 - x_1) + (a_2 - a_1)t)^2 + ((y_2 - y_1) + (b_2 - b_1)t)^2.$$

Перепишем это выражение в виде квадратного трёхчлена

$$((a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2)t^2 + 2\big((x_2 - x_1)(a_2 - a_1) + (y_2 - y_1)(b_2 - b_1)\big)t + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Его наименьшее значение принимается в случае, если

$$t = -\frac{(x_2 - x_1)(a_2 - a_1) + (y_2 - y_1)(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

Оно равно

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \frac{\big((x_2 - x_1)(a_2 - a_1) + (y_2 - y_1)(b_2 - b_1)\big)^2}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

В нашем случае $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = 10$, $y_2 = 0$, $a_1 = \frac{15}{2}$, $b_1 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$, $a_2 = -10\sqrt{3}$, $b_2 = 10$. Подставляя эти значения в найденные выражения, получим, что наименьшее значение квадрата расстояния между кораблями принимается в случае, если

$$t = \frac{10(10\sqrt{3} + \frac{15}{2})}{\left(10\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(10 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{25} \approx 0{,}397 \text{ (ч)}.$$

Оно равно

$$100 - \frac{100\left(10\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right)^2}{\left(10\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(10 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 100 - \left(4\sqrt{3} + 3\right)^2 \approx 1{,}43.$$

Искомое наименьшее расстояние между кораблями приближённо равно квадратному корню из 1,43, т. е. приближённо равно 1,2 км.

3. Выясним, под каким углом φ к направлению A_2A_1 должен идти второй корабль, чтобы, не меняя курса, встретиться с первым кораблём.

Рассмотрим треугольник A_1A_2C (рис. 4).

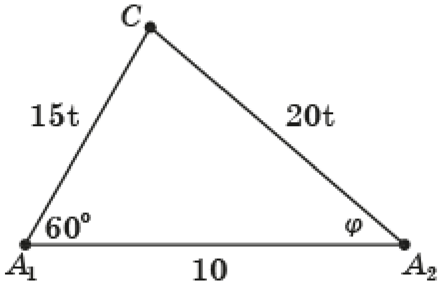

Рис. 4

За время t ч первый корабль пройдёт $15t$ км, $A_1C = 15t$. Для того чтобы второй корабль встретился с первым, нужно, чтобы $A_2C = 20t$.

Воспользуемся теоремой синусов, применённой к треугольнику A_1A_2C, Получим равенство

$$\frac{15t}{\sin\varphi} = \frac{20t}{\sin 60°} = \frac{10}{\sin(60° + \varphi)}.$$

Из первого равенства следует $\sin\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}65$. Используя таблицу тригонометрических функций, находим $\varphi \approx 40{,}5°$.

Из второго равенства следует $t = \frac{4}{3+\sqrt{37}} \approx 0{,}44$ (ч) $\approx 26{,}42$ (мин).

Решение с помощью GeoGebra. 1. В компьютерной программе GeoGebra отметим точки $A_1(0, 0)$ и $A_2(10, 0)$.

Проведём прямую A_1A_2.

Повернём её вокруг точки A_1 на угол 60° против часовой стрелки и вокруг точки A_2 на угол 30° по часовой стрелке.

Обозначим C точку пересечения полученных прямых.

Создадим ползунок t, изменяющийся от 0 до 60. Параметр t будем считать в минутах от начала движения.

Построим окружность с центром A_1 радиусом $\frac{15t}{60}$ и окружность с центром A_2 радиусом $\frac{20t}{60}$.

Найдём точки K_1, K_2 их пересечения соответственно с первой и второй прямыми. Они показывают место положения кораблей в момент времени t мин (рис. 5).

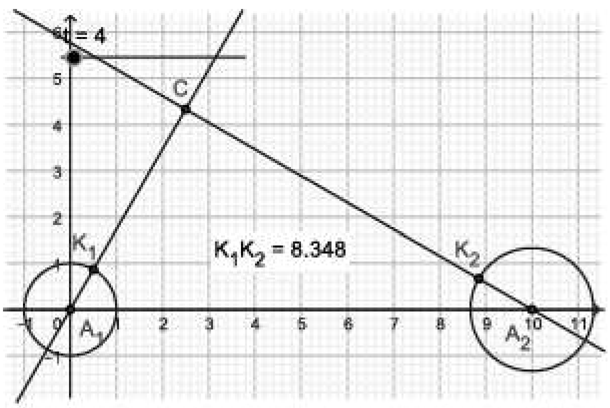

Рис. 5

Меняя значение ползунка получим движение кораблей, которые в точку C придут в разное время. Следовательно, корабли не столкнутся.

2. Найдём расстояние между точками K_1, K_2 в момент времени t.

Меняя значение t ползунка, найдём наименьшее расстояние между K_1 и K_2. Оно примерно равно 1,2 км (рис. 6). Это соответствует расстоянию, найденному с помощью математического решения.

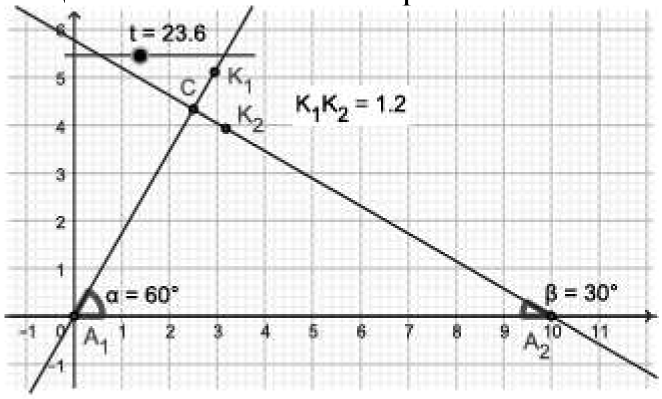

Рис. 6

3. Выясним, под каким углом к направлению A_2A_1 должен идти второй корабль, чтобы, не меняя курса, встретиться с первым кораблём.

Для этого отметим точки $A_1(0, 0)$ и $A_2(10, 0)$.

Проведём прямую A_1A_2.

Повернём её вокруг точки A_1 на угол 60° против часовой стрелки.

Создадим ползунок t, изменяющийся от 0 до 60. Параметр t будем считать в минутах от начала движения.

Построим окружность с центром A_1 радиусом $\frac{15t}{60}$.

Найдём точку K_1 её пересечения с построенной прямой. Она показывает место положения корабля в момент времени t мин.

Проведём отрезок A_2K_1.

Найдём его длину s.

Найдём угол $K_1A_2A_1$.

Выберем инструмент «Текст». В открывшемся окне поставим галочку в строчке «LaTeX-формула». Напишем: v=\frac{s\cdot 60}t=.

В «Объектах» выберем пустую рамку. В ней напишем: 60s/t (рис. 7).

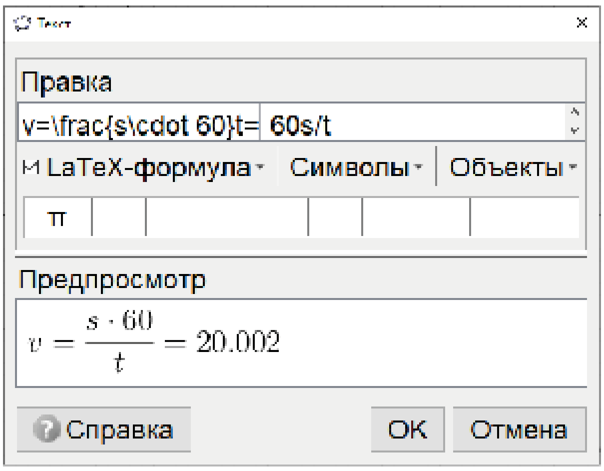

Рис. 7

Нажмём «ОК». В результате на экране появится соответствующая надпись, показывающая скорость второго корабля, с которой он должен двигаться, чтобы встретиться с первым кораблём.

Меняя значение t ползунка, найдём угол $K_1A_2A_1$, при котором скорость второго корабля приближённо равна 20 км/ч. Он примерно равен 40,5° (рис. 8).

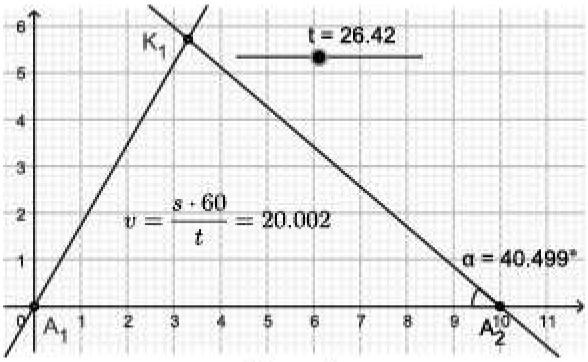

Рис. 8

Значение ползунка $t = 26{,}42$ показывает приближённое время в минутах, от начала движения, через которое встретятся корабли.

Это соответствует углу и времени, найденным с помощью математического решения.

Задача 2. Ширина участка реки с параллельными берегами равна 1 км. Расстояние между двумя пунктами A_1, A_2 на одном берегу равно 1 км. Из пункта A_1 выходит катер K_1 в направлении противоположного берега со скоростью 10 км/ч. Из пункта A_2 в то же время на перехват первому катеру выходит катер K_2 со скоростью 15 км/ч.

1. Сможет ли первый катер достичь противоположного берега так, чтобы второй катер его не перехватил?

2. Какую наименьшую скорость должен иметь второй катер, чтобы он мог перехватить первый катер при любом его направлении движения?

3. Найдите максимальное расстояние между пунктами A_1 и A_2, при котором катер, выходящий из пункта A_2, может перехватить катер, выходящий из пункта A_1, вне зависимости от направления его движения.

Математическое решение. 1. Если первый катер будет двигаться в направлении, перпендикулярном берегам реки (рис. 9), то он достигнет противоположного берега за $\frac{60}{10} = 6$ (мин).

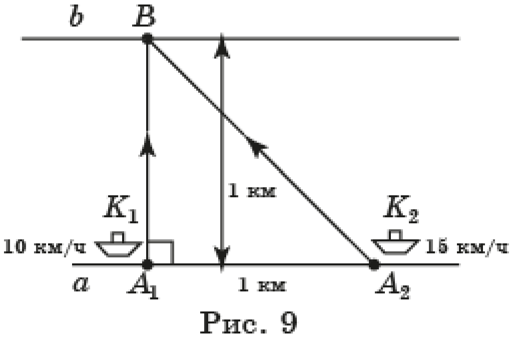

Рис. 9

Для того чтобы достичь того же места на противоположном берегу, второму кораблю потребуется $\frac{\sqrt{2}\cdot 60}{15} \approx 5{,}66$ (мин). Следовательно, второй корабль сможет перехватить первый.

Выясним, существует ли направление движения первого катера, при котором второму катеру не удастся его перехватить.

Обозначим φ угол между направлением движения первого катера и направления, перпендикулярного берегам реки (рис. 10).

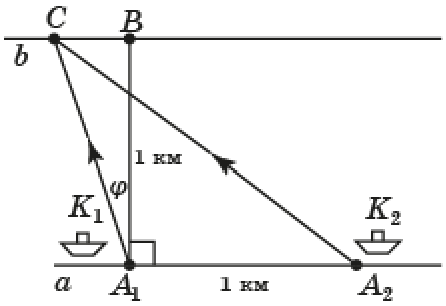

Рис. 10

Тогда путь A_1C, который пройдёт первый катер будет равен $\frac{1}{\cos\varphi}$ (км), а время будет равно $\frac{1}{10\cos\varphi}$ (ч). Для нахождения пути A_2C, который пройдёт второй катер воспользуемся теоремой косинусов, применённой к треугольнику A_1A_2C. Получим

$$(A_2C)^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi} + 1 - \frac{2\cos(90° + \varphi)}{\cos\varphi},$$

а квадрат времени будет равен

$$\frac{1}{225}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + 1 - \frac{2\cos(90° + \varphi)}{\cos\varphi}\right).$$

Для того чтобы второй катер не смог перехватить первый, нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{225}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + 1 - \frac{2\cos(90° + \varphi)}{\cos\varphi}\right) > \frac{1}{100\cos^2\varphi},$$

которое равносильно неравенству

$$5\operatorname{tg}^2\varphi - 8\operatorname{tg}\varphi + 1 < 0.$$

Решая это неравенство, получаем, что для $\operatorname{tg}\varphi$ должны выполняться неравенства

$$\frac{4-\sqrt{11}}{5} < \operatorname{tg}\varphi < \frac{4+\sqrt{11}}{5}.$$

Используя таблицу тригонометрических функций, находим приближённые значения углов $\varphi_1 \approx 8°$, $\varphi_2 \approx 56°$. Если угол φ находится между этими значениями, то второй катер не сможет перехватить первый.

2. Найдём наименьшую скорость, которую должен иметь второй катер, чтобы он мог перехватить первый катер при любом его направлении движения.

Рассмотрим общую ситуацию, в которой $A_1A_2 = a$, $A_1B = b$, скорости катеров равны соответственно v_1, v_2, угол BA_1C равен φ,

Тогда $A_1C = \frac{b}{\cos\varphi}$, а время t_1, за которое первый катер достигнет пункта C, равно $\frac{b}{v_1\cos\varphi}$.

Для нахождения A_2C воспользуемся теоремой косинусов, применённой к треугольнику A_1A_2C. Получим

$$(A_2C)^2 = a^2 + \frac{b^2}{\cos^2\varphi} + \frac{2ab\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Квадрат времени, за которое второй катер достигнет пункта C, равен

$$\frac{1}{v_2^2}\left(a^2 + \frac{b^2}{\cos^2\varphi} + \frac{2ab\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi}\right).$$

Для того чтобы второй катер смог перехватить первый катер в пункте C, нужно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{b^2}{v_1^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{v_2^2}\left(a^2 + \frac{b^2}{\cos^2\varphi} + \frac{2ab\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi}\right).$$

Выразим из него скорость второго катера. Получим

$$v_2^2 = \frac{v_1^2}{b^2}(a^2\cos^2\varphi + b^2 + 2ab\cdot\sin\varphi\cos\varphi).$$

Наибольшее значение v_2 принимается, когда наибольшее значение принимает функция $f(\varphi) = a\cos^2\varphi + 2b\cdot\sin\varphi\cos\varphi$.

Для его нахождения воспользуемся производной. Имеем

$$f'(\varphi) = -2\,a\cos\varphi\sin\varphi + 2b\cos^2\varphi - 2b\sin^2\varphi.$$

Эта производная обращается в нуль, если обращается в нуль функция

$$\frac{f'(\varphi)}{\cos^2\varphi} = -2a\operatorname{tg}\varphi + 2b - 2b\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Обозначим $c = \frac{a}{b}$. Решая уравнение $\operatorname{tg}^2\varphi + c\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0$, находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-c + \sqrt{c^2+4}}{2}.$$

Перепишем выражение для v_2^2 в виде

$$v_2^2 = \frac{v_1^2}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}(c^2 + 1 + \operatorname{tg}^2\varphi + 2c\cdot\operatorname{tg}\varphi).$$

Подставляя в него значение $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-c+\sqrt{c^2+4}}{2}$, получим формулу, выражающую квадрат скорости второго катера, при которой он может перехватить первый катер при любом его направлении движения

$$v_2^2 = \frac{v_1^2\left(c^2 + 2 + c\sqrt{c^2+4}\right)}{2}.$$

В нашем конкретном случае $v_1 = 10$, $c = 1$. Следовательно,

$$v_2^2 = 150 + 50\sqrt{5}.$$

Искомая скорость v_2 выражается формулой

$$v_2 = \sqrt{\frac{v_1^2(c^2+2+c\sqrt{c^2+4})}{2}} \approx 16{,}18 \text{ (км/ч)}.$$

3. Найдём максимальное расстояние между пунктами A_1 и A_2, при котором катер, выходящий из пункта A_2, может перехватить катер, выходящий из пункта A_1, вне зависимости от направления его движения.

Воспользуемся найденной формулой

$$v_2^2 = \frac{v_1^2\left(c^2 + 2 + c\sqrt{c^2+4}\right)}{2},$$

в которой $c = \frac{a}{b}$, a – расстояние между пунктами A_1A_2, b – ширина реки, равная 1 км.

Подставляя в эту формулу значения $v_1 = 10$, $v_2 = 15$, получим уравнение

$$5 = 2c^2 + 2c\sqrt{c^2+4},$$

решая которое находим $c = \frac{5}{6}$, Следовательно, искомое расстояние a равно $\frac{5}{6}$ км.

Решение с помощью GeoGebra. Отметим точки $A_1(0, 0)$ и $A_2(1, 0)$.

Проведём две прямые, заданные уравнениями $y = 0$, $y = 1$.

Через точку A_1 проведём прямую, перпендикулярную первой прямой.

Найдём точку B её пересечения со второй прямой.

Отметим точку C на второй прямой.

Проведём отрезки A_1C, A_2C.

Найдём отношение k их длин.

Найдём угол φ = BA_1C (рис. 11)

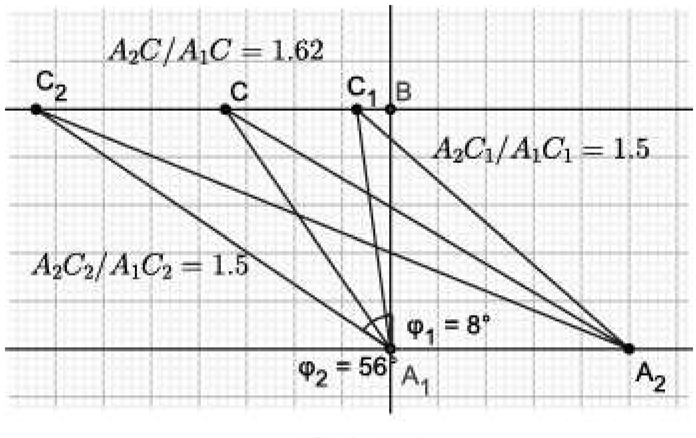

Рис. 11

Перемещая точку C по второй прямой, найдём положения, при которых $k = 1{,}5$. Таких положений будет два, при которых $\varphi_1 \approx 8°$, $\varphi_2 \approx 56°$. Для положений C, для которых угол φ заключён между φ_1 и φ_2, отношение k будет больше 1,5. Следовательно, для этих углов φ второй катер не сможет перехватить первый.

2. Отметим точки $A_1(0, 0)$ и $A_2(1, 0)$.

Проведём две прямые, заданные уравнениями $y = 0$, $y = 1$.

Через точку A_1 проведём прямую, перпендикулярную первой прямой.

Найдём точку B её пересечения со второй прямой.

Отметим точку C на второй прямой.

Проведём отрезки A_1C, A_2C.

Обозначим эти отрезки соответственно s_1, s_2.

Выберем инструмент «Текст». В открывшемся окне поставим галочку в строчке «LaTeX-формула». Напишем: v_2=\frac{10A_2C}{A_1C}=. После этого в «Объектах» выберем пустую рамку. В ней напишем: 10s_2/s_1 (рис. 12).

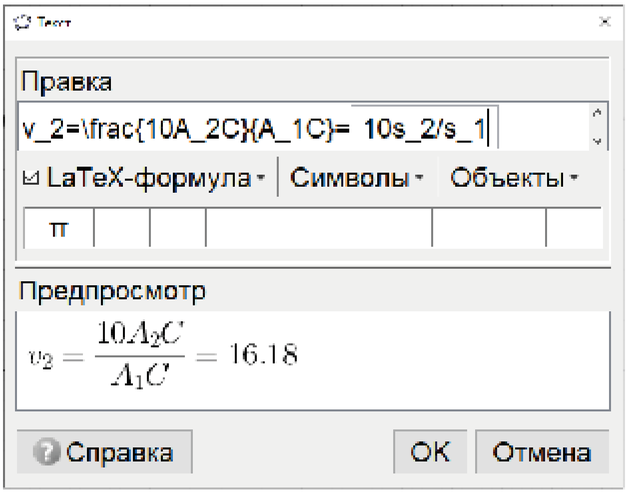

Рис. 12

Нажмём «ОК». В результате на экране (рис. 13) появится соответствующая надпись, показывающая скорость второго корабля, с которой он должен двигаться, чтобы встретиться с первым кораблём.

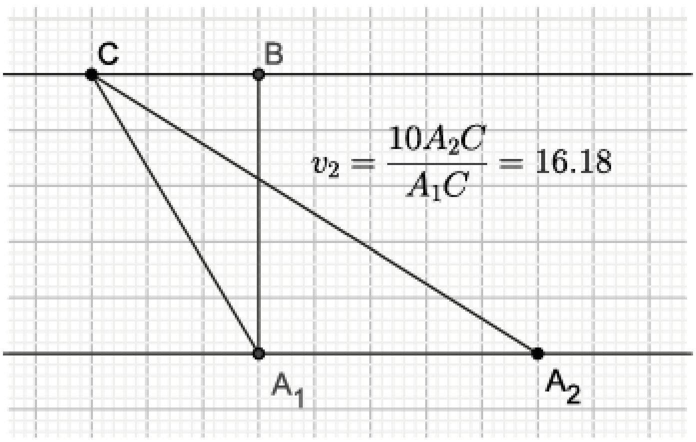

Рис. 13

Меняя положение точки C, найдём такое, при котором скорость v_2 наибольшая. Она примерно равна 16,18 км/ч. Это совпадает с приближённым значением скорости, найденным с помощью математического решения.

3. Для подтверждения ответа, полученного при математическом решении, в качестве координат точки A_2 напишем (5/6, 0). Перемещая точку C по прямой b, убеждаемся, что скорость v_2 не будет превосходить 15 км/ч.

Литература

1. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Об одной задаче с практическим содержанием // Математика для школьников. 2024. № 4. С. 3.

2. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия. – М.: Прометей, 2018.

3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Кривые. Курс по выбору. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2007.