РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПОВОРОТ. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ»

И.М. Смирнова,
В.А. Смирнов
МПГУ (Москва)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru

I.M. Smirnova,
V.A. Smirnov
Moscow state pedagogical university
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru

Ключевые слова: развитие пространственных представлений, поворот, фигуры вращения.

Keywords: development of spatial presentations, turn, figures of rotation.

Аннотация: В работе предлагаются задачи базового и углублённого уровней на развитие пространственных представлений старшеклассников при изучении темы «Поворот. Фигуры вращения».

Annotation: the problems of base and higher level are proposed for development of spatial presentations of senior classes of students at the study of theme «Turn. Figures of rotation».

Введение

Развитие пространственных представлений учащихся является одной из основных целей обучения геометрии в школе. Хорошие пространственные представления необходимы не только тем, кто связывает свою будущую профессию с математикой. Они нужны физику, химику, биологу, геологу, астроному, географу, инженеру, строителю, архитектору, художнику, врачу и, вообще, каждому человеку.

В некотором смысле пространственные представления важнее заученных формул, определений и доказательств. Заученные формулировки забываются, а пространственные представления остаются. Формулировки и формулы можно посмотреть в справочной литературе, а пространственные представления нет.

С появлением компьютерных технологий, 3D-моделирования важность развития пространственных представлений существенно возросла.

К сожалению, задачам на развитие пространственных представлений в школьном курсе геометрии не уделяется должного внимания. Такие задачи практически отсутствуют в ЕГЭ по математике, где геометрические задачи, как правило, носят вычислительный характер.

Здесь мы предлагаем задачи на развитие пространственных представлений учащихся при изучении темы «Поворот. Фигуры вращения».

Напомним, что точка A' на плоскости α получается из точки A этой плоскости поворотом вокруг центра O на угол φ, если $OA' = OA$ и угол $A'OA$ равен φ (рис. 1).

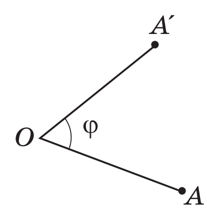


Рис. 1

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой (рис. 2). Через точку A проведём плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения a и α обозначим O. Говорят, что точка

A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ.

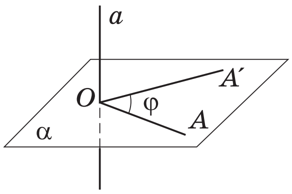


Рис. 2

Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол φ называется поворотом, или вращением. Прямая a при этом называется осью вращения.

Примеры задач

Приведём примеры задач. Буквой Б будем обозначать задачи базового уровня, буквой У – задачи углублённого уровня.

Задача 1 (Б). На какой наименьший угол нужно повернуть правильный тетраэдр вокруг прямой, содержащей его высоту, чтобы он совместился сам с собой?

Ответ. 120°.

Задача 2 (Б). На какой угол нужно повернуть правильный тетраэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер, чтобы он совместился сам с собой?

Ответ. 180°.

Задача 3 (Б). Тетраэдр повернут вокруг прямой, содержащей его высоту, на угол 60°. Какая фигура является общей частью исходного тетраэдра и повёрнутого?

Ответ. Правильная шестиугольная пирамида.

Задача 4 (У). Тетраэдр повернут вокруг прямой, соединяющей середины противоположных рёбер, на угол 90°. Какая фигура является общей частью исходного тетраэдра и повёрнутого?

Для решения этой задачи удобно представить тетраэдр ACB_1D_1, вписанным в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, как показано на рисунке 3.

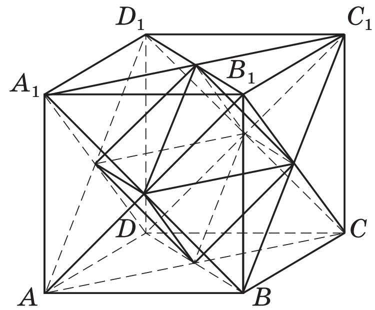


Рис. 3

При указанном повороте этот тетраэдр переходит в тетраэдр BDC_1A_1. Общей частью этих тетраэдров является октаэдр, вершинами которого служат центры граней куба.

Задача 5 (Б). На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?

Ответ. 90°.

Задача 6 (Б). На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер, чтобы он совместился сам с собой?

Ответ. 180°.

Задача 7 (Б). На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, содержащей его диагональ, чтобы он совместился сам с собой?

Ответ. 120°.

Задача 8 (Б). Куб повёрнут вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, на угол $45°$. Какая фигура является общей частью исходного куба и повёрнутого?

Ответ. Правильная восьмиугольная призма.

Задача 9 (У). Единичный куб повёрнут вокруг прямой, содержащей его диагональ, на угол $60°$. Какая фигура является общей частью исходного куба и повёрнутого?

Основная трудность этой задачи состоит в том, чтобы выяснить, какой фигурой является эта общая часть.

Выясним, какая фигура является общей частью куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и куба, полученного из него поворотом вокруг прямой DB_1 на угол $60°$ (рис. 4).

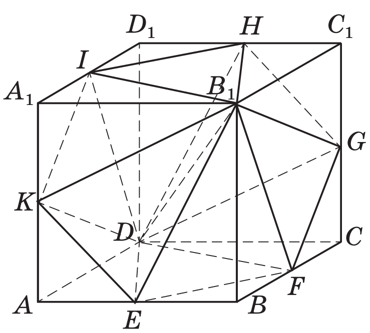


Рис. 4

Заметим, что при таком повороте правильный шестиугольник $EFGHIK$, вершинами которого являются соответственно середины рёбер AB, BC, CC_1, C_1D_1, A_1D_1, AA_1, переходит сам в себя. Причём, треугольник B_1KE переходит в треугольник B_1EF. Следовательно, в искомой общей части не будет содержаться пирамида B_1BFE. Аналогично, в общей части не будут содержаться пирамиды B_1C_1GH, B_1A_1IK, $DAEK$, $DCFG$ и DD_1HI. Таким образом, общей частью будет фигура, составленная из двух правильных шестиугольных пирамид с вершинами B_1, D, общим основанием которых является правильный шестиугольник $EFGHIK$.

Задача 10 (У). Единичный куб повёрнут вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер, на угол $90°$. Какая фигура является общей частью исходного куба и повёрнутого?

Для решения этой задачи применим общий метод, который заключается в том, чтобы свести пространственную задачу к плоской. А именно, выясним какие сечения будут у общей части двух кубов плоскостями, перпендикулярными оси поворота. Ясно, что сечением исходного куба плоскостью, перпендикулярной оси поворота EE_1, где E, E_1 – середины рёбер BC и A_1D_1 соответственно, является прямоугольник (рис. 5).

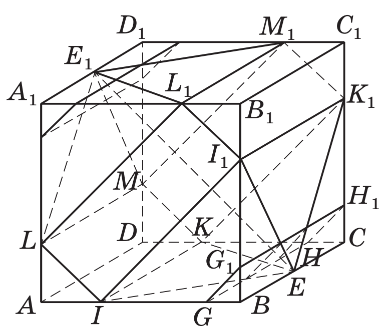


Рис. 5

Если плоскость сечения удалена от точки E на расстояние d, то стороны этого прямоугольника равны $2d$, 1. Если d меньше 0,5, то общей частью этого прямоугольника и прямоугольника, полученного из него поворотом на $90°$, является квадрат со стороной $2d$. Если d больше 0,5 и меньше $\sqrt{2}-0,5$, то общей частью этого прямоугольника и прямоугольника, полученного из него поворотом на $90°$, является квадрат со стороной 1. Если d больше $\sqrt{2}-0,5$ и меньше $\sqrt{2}$, то общей частью этого прямоугольника и прямоугольника, полученного из него поворотом на $90°$, является квадрат со стороной

$2\sqrt{2}-2d$. Из этого следует, что общая часть исходного куба и повёрнутого состоит из двух правильных четырёхугольных пирамид $EIKK_1I_1$, $E_1LMM_1L_1$, основаниями которых являются единичные квадраты, и правильной четырёхугольной призмы $IKK_1I_1LMM_1L_1$.

Фигуры вращения

Перейдём теперь к рассмотрению фигур вращения. Напомним, что фигура $\varPhi$ в пространстве получается вращением фигуры F вокруг оси a (то есть вокруг прямой), если точки фигуры $\varPhi$ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a. Фигура $\varPhi$ при этом называется фигурой вращения.

Например, при вращении точки A вокруг прямой a (рис. 6) получается окружность с центром в точке O, являющейся пересечением прямой a с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a.

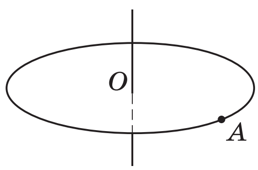


Рис. 6

Сфера получается вращением окружности вокруг. Вокруг прямой, содержащей диаметр. Аналогично, шар получается вращением круга вокруг прямой, содержащей какого-нибудь его диаметр (рис. 7).

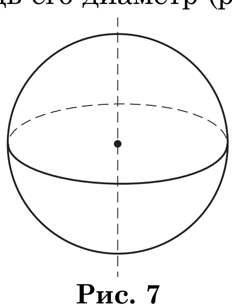


Рис. 7

Цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг его стороны (рис. 8).

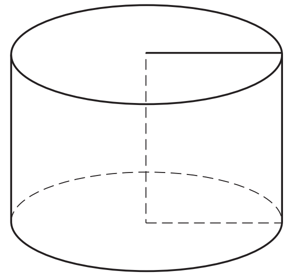
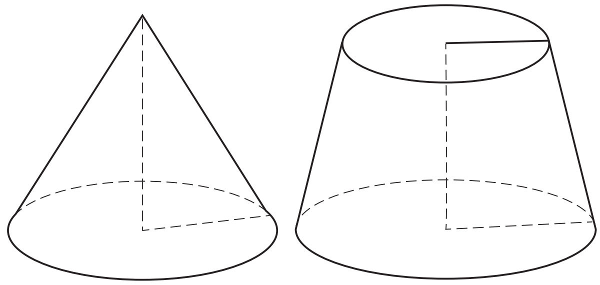


Рис. 8

Конус получается вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет (рис. 9*а*).

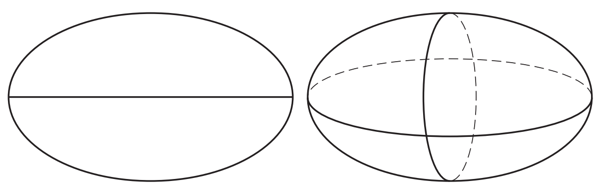
Усечённый конус получается вращением прямоугольной трапеции, вокруг прямой, содержащей его боковую сторону, перпендикулярную основаниям (рис. 9*б*).



***а*) *б*)**

Рис. 9

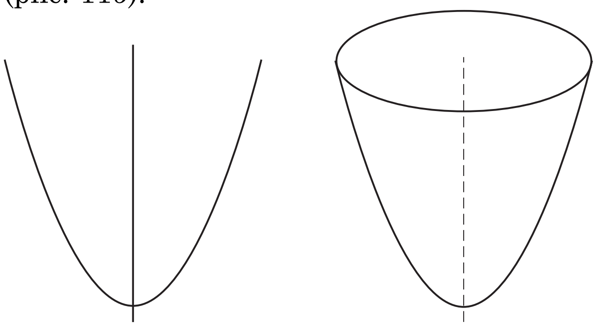
При вращении эллипса вокруг его оси (рис. 10*а*) получается поверхность, называемая эллипсоидом вращения (рис. 10*б*).



***а*) *б*)**

Рис. 10

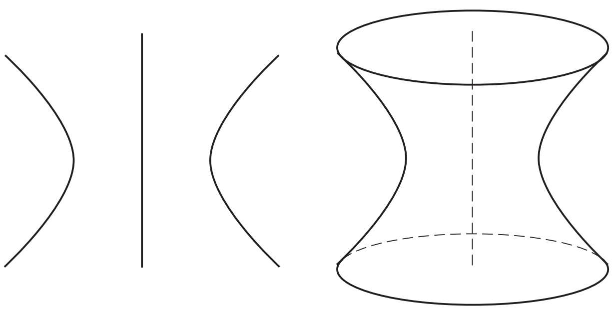
При вращении параболы вокруг её оси (рис. 11*а*) получается поверхность, называемая параболоидом вращения (рис. 11*б*).



***а*)** ***б*)**

Рис. 11

При вращении гиперболы вокруг её оси, показанной на рисунке 12*а*, получается поверхность, называемая гиперболоидом вращения (рис. 12*б*).

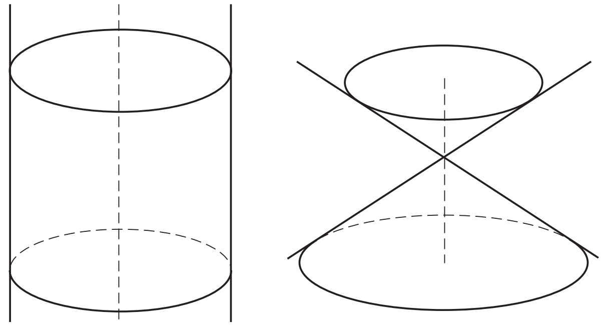


***а*)** ***б*)**

Рис. 12

Выясним, какие фигуры могут получаться при вращении прямой.

Если прямая параллельна оси вращения, то при вращении получается фигура, называемая цилиндрической поверхностью (рис. 13*а*). Если прямая пересекает ось и не перпендикулярна ей, то при вращении получается фигура, называемая конической поверхностью (рис. 13*б*). Если прямая пересекает ось и перпендикулярна ей, то при вращении получается плоскость. Если прямая не пересекает ось и перпендикулярна ей, то при вращении получается плоскость без внутренности круга.



***а*)** ***б*)**

Рис. 13

Теорема. При вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения и не перпендикулярной этой оси, получается гиперболоид вращения.

Доказательство. Пусть a и b – не перпендикулярные скрещивающиеся прямые, OH – их общий перпендикуляр (рис. 14).

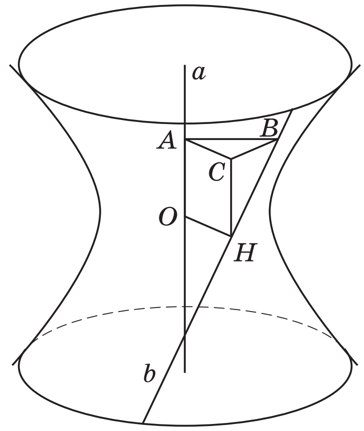


Рис. 13

Напомним, что длина d отрезка OH называется расстоянием между прямыми a и b. Она является наименьшей из длин отрезков, соединяющих точки прямых a и b. Поэтому при вращении точек прямой b вокруг оси a окружность наименьшего радиуса будет получаться при вращении точки H. Рассмотрим произвольную точку B на прямой b, отличную от H, и опустим из неё перпендикуляр

BA на прямую a. При вращении точка B описывает окружность, радиус которой равен AB. Выразим этот радиус через d. Для этого через точку H проведём прямую, параллельную a, и через точку A – прямую, параллельную OH. Точку пересечения этих прямых обозначим C. Пусть расстояние AB равно x, расстояние OA равно y и угол BHC равен α. Треугольник ABC – прямоугольный, катет AC равен d, катет BC равен $y\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Поэтому выполняется равенство $x^2 = d^2 + y^2\mathrm{tg}^2\alpha$ или

$$\frac{x^2}{d^2}-\frac{y^2\mathrm{tg}^2\alpha}{d^2}=1. \qquad (*)$$

Введём систему координат, считая началом координат точку O, осью Oy – прямую a, осью Ox – прямую, содержащую отрезок OH. Уравнение (*) представляет собой уравнение гиперболы. При вращении этой гиперболы получается та же самая фигура, что и при вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения. Следовательно, искомой фигурой вращения является гиперболоид вращения.

Из доказанной теоремы, в частности, следует интересная особенность гиперболоидов вращения. Несмотря на искривленность их поверхностей, все они состоят из прямолинейных отрезков. Поэтому форма гиперболоида вращения часто используется в архитектурных сооружениях. Так, Шаболовская телебашня в Москве, построенная по проекту замечательного русского инженера, почётного академика В.Г. Шухова (1853–1939), составлена из частей гиперболоидов вращения. Её особенностью является то, что она, в действительности, состоит из прямолинейных конструкций – металлических стержней.

Примем без доказательства, что поверхность фигуры, получающейся при вращении многогранника, определяется вращением некоторых его рёбер. При этом, если ребро параллельно оси, то при вращении оно даёт боковую поверхность цилиндра. Если ребро не параллельно оси, но лежит с ней в одной плоскости, то при вращении оно даёт часть конической поверхности. А именно: а) если ребро не пересекает ось, то получается боковая поверхность усечённого конуса; б) если одна вершина ребра принадлежит оси, то получается боковая поверхность конуса; в) если ребро пересекает ось, то получается поверхность, состоящая из двух боковых поверхностей конусов с общей вершиной. Если же ребро многогранника скрещивается с осью вращения, то получается поверхность, являющаяся частью гиперболоида вращения.

Таким образом, поверхность вращения многогранника может состоять из боковых поверхностей цилиндра, конуса, усечённого конуса и частей поверхностей гиперболоидов вращения. Никаких других поверхностей при вращении многогранника получиться не может.

Задачи связанные с фигурами вращения

Задача 1 (Б). Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника?

Ответ. Конус.

Задача 2 (Б). Какая фигура получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет?

Ответ. Конус.

Задача 3 (Б). Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр?

Ответ. Шар.

Задача 4 (Б). Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней.

О т в е т. Цилиндр.

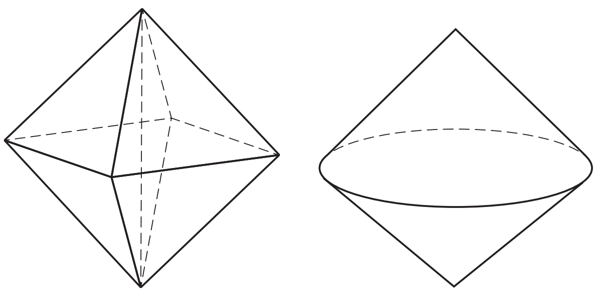
Задача 5 (Б). Какая фигура получится при вращении правильной n-угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры её оснований?

О т в е т. Цилиндр.

Задача 6(Б). Какая фигура получается при вращении правильной n-угольной пирамиды вокруг прямой, содержащей её высоту?

О т в е т. Конус.

Задача 7 (Б). Какая фигура получается при вращении октаэдра вокруг прямой, проходящей через две противоположные вершины (рис. 15*а*)?

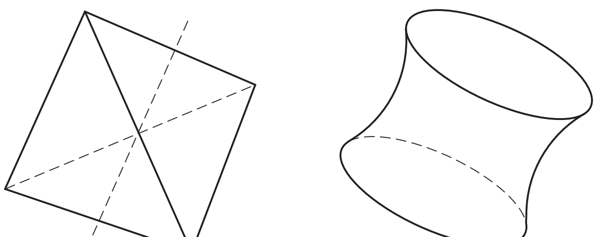


а) ***б)***

Рис. 15

О т в е т. Фигура, поверхность которой состоит из двух боковых поверхностей конусов с общим основанием (рис. 15*б*).

Задача 8 (У). Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, проходящей через середины скрещивающихся рёбер (рис. 16*а*)?

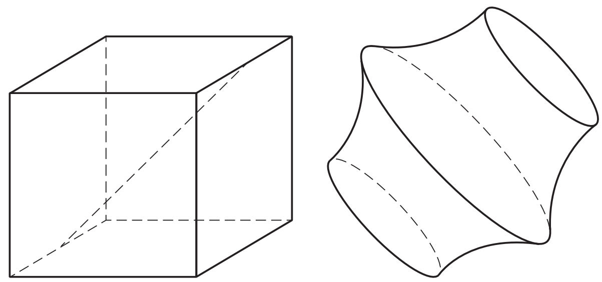


а) ***б)***

Рис. 16

О т в е т. Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и гиперболоида вращения (рис. 16*б*).

Задача 9 (У). Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, содержащей его диагональ (рис. 17*а*)?

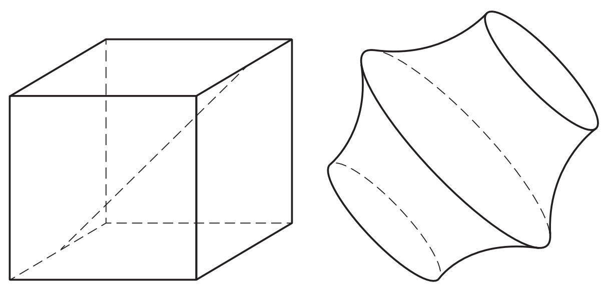


а) ***б)***

Рис. 17

О т в е т. Фигура, поверхность которой состоит из боковых поверхностей двух конусов и гиперболоида вращения (рис. 17*б*).

Задача 10 (У). Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер (рис. 18*а*)?



а) ***б)***

Рис. 18

О т в е т. Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и двух гиперболоидов вращения (рис. 18*б*).