О сумме углов многоугольника[1]

Одной из наиболее важных теорем школьного курса геометрии является теорема о том, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Приведём доказательство этой теоремы, данное в учебнике [1].

Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, изображённый на рисунке 15.1. Соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим $n-2$ треугольника, сумма углов которых равна сумме углов данного n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2...A_n$ равна $(n-2)180°$.

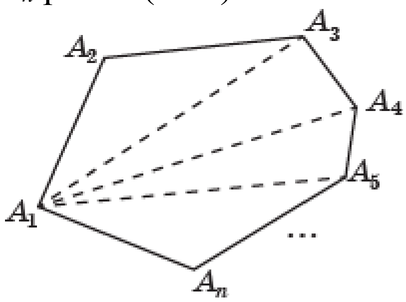


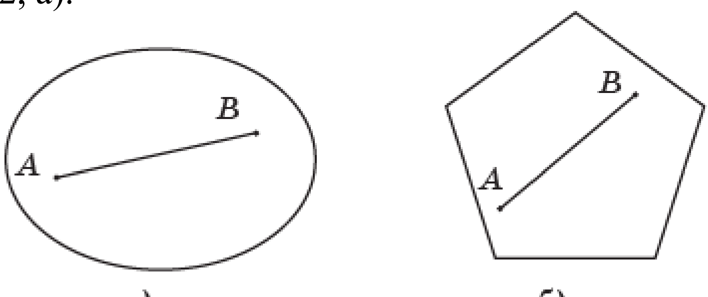
Рис. 15.1

Заметим, что в самом этом доказательстве выпуклость n-угольника никак не используется. Остаётся непонятным, почему диагонали n-угольника, проведённые из вершины A_1, разбивают этот n-угольник на треугольники.

Дело в том, что в этом учебнике многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Из этого определения не вытекает непосредственно то, что диагональ выпуклого разбивает многоугольник на два многоугольника, а доказательство этого факта не такое простое.

Гораздо удобнее использовать другое, более общее определение выпуклости, данное в учебнике [2]. А именно, фигура называется выпуклой, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок (рис. 15.2, а).



а) Рис. 15.2 б)

Частным случаем выпуклой фигуры является выпуклый многоугольник (рис. 15.2, б).

Из этого определения выпуклости непосредственно следует, что диагональ выпуклого многоугольника целиком содержится в этом

[1] Математика. – 2002. – № 1. – С. 31, 32.

многоугольнике, следовательно, разбивает его на два многоугольника. Значит, все диагонали, проведённые из одной вершины выпуклого многоугольника, разбивают этот многоугольник на треугольники.

На самом деле, формула суммы углов многоугольника справедлива не только для выпуклого, но и для произвольного многоугольника. Доказательство этого основано на следующей теореме.

Теорема. В каждом многоугольнике с числом сторон большим трёх можно провести диагональ, целиком в нём содержащуюся.

Доказательство. Для данного многоугольника M зафиксируем какую-нибудь прямую a, и найдём вершину A многоугольника, расстояние от которой до этой прямой наибольшее. Пусть A', A'' – соседние с ней вершины (рис. 15.3).

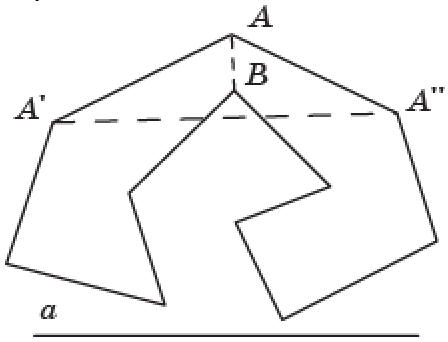


Рис. 15.3

Если отрезок $A'A''$ целиком содержится в многоугольнике M, то он является искомой диагональю. Если $A'A''$ не содержится целиком в M, то существуют вершины многоугольника M, содержащиеся в треугольнике $A'AA''$. Выберем из них вершину B, наиболее удалённую от прямой a. Тогда отрезок AB будет целиком содержаться в многоугольнике, следовательно, он является искомой диагональю.

Из этой теоремы следует, что любой многоугольник можно разбить на треугольники. Действительно, многоугольник можно разбить на два многоугольника, проведением диагонали. Продолжая процесс проведения диагоналей, мы, в конце концов, дойдём до треугольников, на которые будет разбит данный многоугольник.

Докажем индукцией по n, что для n-угольника число таких треугольников равно $n - 2$. Для $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что мы доказали, что любой m-угольник при $m < n$ проведением диагоналей разбивается на $m - 2$ треугольника. Рассмотрим n-угольник. Проведением диагонали, он разбивается на i-угольник и $(n - i + 2)$-угольник. Каждый из них, по предположению индукции, разбивается на $i - 2$ и $n - i$ треугольника, которые вместе составляют разбиение n-угольника на $n - 2$ треугольника.

Углы этих треугольников составляют углы исходного n-угольника. Следовательно, сумма углов n-угольника равна $180°(n - 2)$.

Таким образом, сумма углов многоугольника зависит только от числа углов и не зависит от формы и размеров многоугольника, т. е. сумма углов многоугольника является топологическим инвариантом. Мы можем изменять форму многоугольника, увеличивать или уменьшать его размеры, однако сумма углов многоугольника останется неизменной.

Рассмотрим теперь произвольные замкнутые ломаные, возможно с самопересечениями $A_1A_2\ldots A_nA_1$ (рис. 15.4, а). Такие самопересекающиеся ломаные будем называть звёздчатыми многоугольниками (рис. 15.4, б–г).

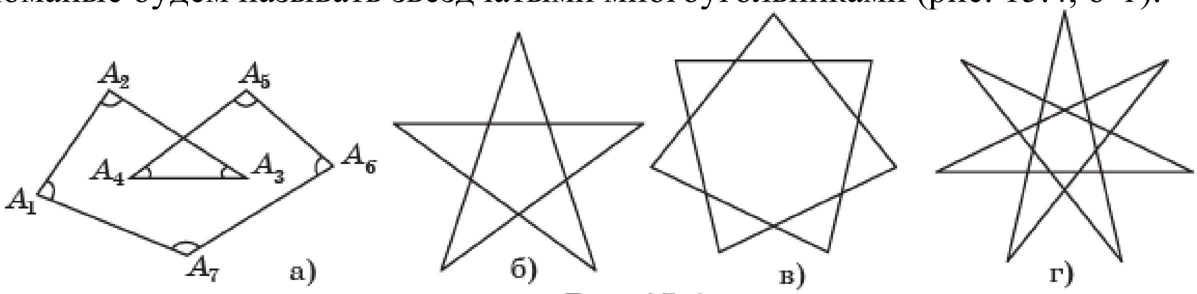


Рис. 15.4

Зафиксируем направление подсчёта углов против часовой стрелки. Заметим, что углы, образованные замкнутой ломаной, зависят от направления её обхода. Если направление обхода ломаной меняется на противоположное, то углами многоугольника будут углы, дополняющие углы исходного многоугольника до $360°$.

Если M – многоугольник, образован простой замкнутой ломаной, проходимой в направлении по часовой стрелке (рис. 15.5, а), то сумма углов этого многоугольника будет равна $180°(n – 2)$. Если же ломаная проходится в направлении против часовой стрелки (рис. 15.5, б), то сумма углов будет равна $180°(n + 2)$.

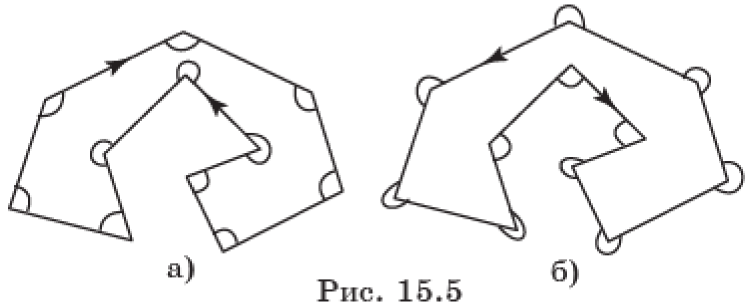


Рис. 15.5

Таким образом, общая формула суммы углов многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, имеет вид

$$\Sigma = 180°(n \pm 2),$$

где Σ - сумма углов, n – число углов многоугольника, «+» или «–» берётся в зависимости от направления обхода ломаной.

Наша задача состоит в том, чтобы вывести формулу суммы углов произвольного многоугольника, образованного замкнутой (возможно самопересекающейся) ломаной. Для этого введём понятие степени многоугольника.

Степенью многоугольника называется число оборотов, совершаемое точкой при полном последовательном обходе сторон многоугольника. Причём, обороты, совершаемые в направлении против часовой стрелки, считаются со знаком «+», а обороты по часовой стрелке – со знаком «–».

Ясно, что у многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, степень равна +1 или –1 в зависимости от направления обхода. Степень многоугольника на рисунке 15.4, а равна двум. Степень звёздчатых семиугольников (рис. 15.4, в, г) равна соответственно двум и трём.

Аналогичным образом понятие степени определяется и для замкнутых кривых на плоскости. Например, степень кривой, изображённой на рисунке 15.6 равна двум.

Для нахождения степени многоугольника или кривой можно поступать следующим образом. Предположим, что, двигаясь по кривой (рис. 15.6, а), мы, начиная с какого-то места A_1, совершили полный оборот и попали в ту же точку A_1. Удалим из кривой соответствующий участок и продолжим движение по оставшейся кривой (рис. 15.6, б). Если, начиная с какого-то места A_2, мы снова совершили полный оборот и попали в ту же точку, то удаляем соответствующий участок кривой и продолжаем движение (рис. 15.6, в). Считая количество удалённых участков со знаками «+» или «–», в зависимости от их направления обхода, получим искомую степень кривой.

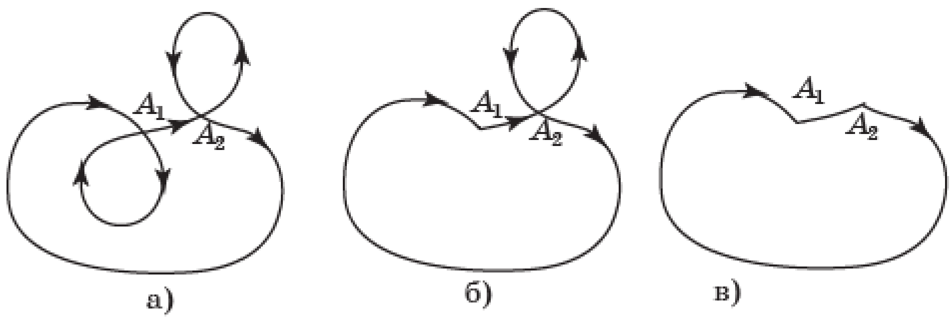


Рис. 15.6

Степень кривой является топологическим инвариантом. Кривую можно деформировать, изменяя её форму и размеры, однако степень при этом не изменится.

Теорема. Для произвольного многоугольника имеет место формула

$$\Sigma = 180°(n + 2m),$$

где Σ - сумма углов, *n* – число углов, *m* – степень многоугольника.

Доказательство. Пусть многоугольник *M* имеет степень *m* и условно изображён на рисунке 15.7. M_1, …, M_k – простые замкнутые ломаные, проходя по которым, точка совершает полные обороты. A_1, …, A_k – соответствующие точки самопересечения ломаной, не являющиеся её вершинами.

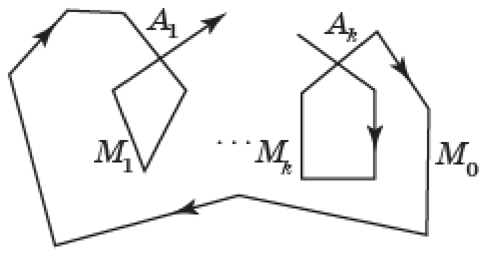


Рис. 15.7

Обозначим число вершин многоугольника M, входящих в многоугольники $M_1, \ldots, M_k$ через $n_1, \ldots, n_k$ соответственно. Поскольку, помимо вершин многоугольника M, к этим многоугольникам добавляются ещё вершины $A_1, \ldots, A_k$, то число вершин многоугольников $M_1, \ldots, M_k$ будет равно соответственно $n_1 + 1, \ldots, n_k + 1$. Тогда суммы их углов будут равны $180^o(n_1 + 1 \pm 2), \ldots, 180^o(n_k + 1 \pm 2)$. Плюс или минус берётся в зависимости от направления обхода многоугольников.

Сумма углов многоугольника M_0, оставшегося от многоугольника M после удаления многоугольников $M_1, \ldots, M_k$, равна $180^o(n - n_1 - \ldots - n_k + k \pm 2)$.

Суммы углов многоугольников $M_0, M_1, \ldots, M_k$ дают сумму Σ углов многоугольника M, и в каждой вершине $A_1, \ldots, A_k$ дополнительно получим 360^o. Следовательно, имеем равенство

$$180^o(n_1 + 1 \pm 2) + \ldots + 180^o(n_k + 1 \pm 2) + 180^o(n - n_1 - \ldots - n_k + k \pm 2) = \Sigma + 360^o \cdot k.$$

Приводя подобные члены, получим

$$\Sigma = 180^o(n \pm 2 \pm \ldots \pm 2) = 180^o(n + 2m),$$

где m – степень многоугольника M.

Применяя доказанную формулу для семиугольников (рис. 15.2, в, г), получаем, что сумма углов семиугольника, изображённого на рисунке 15.2, в, равна $3 \cdot 180^o = 540^o$, а сумма углов семиугольника, изображённого на рисунке 15.3, г равна 180^o. При этом неважно, правильные это семиугольники или нет.

Литература

1. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014.

2. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебник для для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2014.