О СВОЙСТВАХ ПАРАБОЛЫ, АНАЛОГИЧНЫХ СВОЙСТВАМ ОКРУЖНОСТИ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru, i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация: в работе рассматриваются парабола и её свойства, аналогичные свойствам окружности; предлагаются упражнения для учащихся, использующие метод аналогии; для иллюстрации свойств параболы используется компьютерная программа GeoGebra.

Ключевые слова: окружность, парабола, аналогия.

ABOUT THE PARABOLA'S PROPERTIES THAT ARE SIMILAR TO THOSE OF A CIRCLE

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow Pedagogical State University (MPSU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru, i-m-smirnova@yandex.ru

Astract: The paper discusses the parabola and its properties, which are similar to those of a circle; exercises for students using the analogy method are offered; the GeoGebra computer program is used to illustrate the properties of the parabola.

Keywords**:** circle, parabola, analogy.

Парабола является одной из замечательных кривых. Она с древних времён привлекала к себе внимание учёных и использовалась ими для описания различных природных явлений от траектории брошенного камня до орбит космических тел. Сегодня свойства параболы используется при изготовлении различных приёмопередающих устройств: прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков телескопов, параболических антенн и мн. др.

В учебнике [1] парабола определяется как геометрическое место точек и располагается в конце седьмого класса, после рассмотрения примеров геометрических мест точек, таких как окружность, серединный перпендикуляр, биссектриса угла и др.

Здесь мы рассмотрим свойства параболы, аналогичные свойствам окружности. Предложим упражнения для учащихся на нахождение формулировок и доказательств этих свойств, с использованием метода аналогии. Для иллюстрации свойств параболы будем использовать компьютерную программу GeoGebra [2].

Рассмотрение этого материала с учащимися седьмого класса позволит:

– более глубоко изучить понятие геометрического места точек и свойств окружности;

– познакомиться с параболой, её свойствами и приложениями;

– научиться применять метод аналогии для формулировок и доказательств утверждений, аналогичных данным;

– научиться моделировать геометрические фигуры и устанавливать их свойства, используя компьютерную программу GeoGebra.

Напомним, что параболой называется геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой d, не проходящей через эту точку (рис. 1).

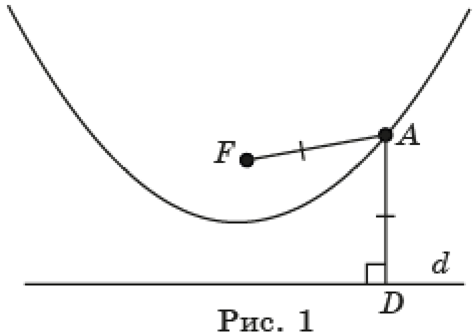

Рис. 1

Точка F называется фокусом, а прямая d – директрисой параболы.

Для получения параболы в компьютерной программе GeoGebra имеется инструмент «Парабола». Если выбрать этот инструмент и последовательно нажать левой кнопкой мыши на данную точку и данную прямую, то на экране появится парабола.

Свойство 1. Окружность разбивает плоскость на две области – внутреннюю и внешнюю. Для точек внутренней области расстояние до центра окружности меньше её радиуса. Для точек внешней области расстояние до центра больше радиуса.

Упражнение 1. Сформулируйте соответствующее свойство для параболы.

Свойство 1'. Парабола разбивает плоскость на две области – внутреннюю и внешнюю. Для точек внутренней области расстояние до фокуса меньше расстояния до директрисы, для точек внешней области расстояние до фокуса больше расстояния до директрисы (рис. 2).

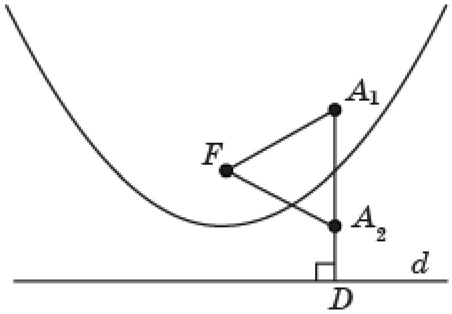

Рис. 2

Определение 1. Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.

Упражнение 2. По аналогии с определением касательной к окружности сформулируйте определение касательной к параболе.

Заметим, что определение касательной к параболе как прямой, имеющей с параболой только одну общую точку, нуждается в уточнении, так как прямая b, перпендикулярная директрисе, не является касательной (рис. 3).

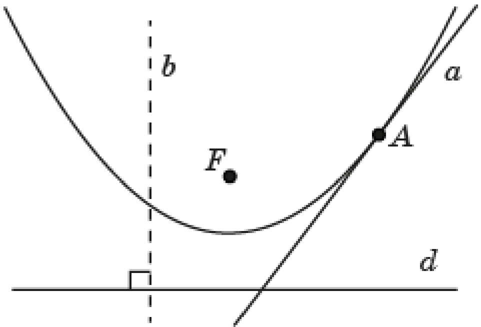

Рис. 3

В качестве определения касательной можно взять одно из следующих определений.

Определение 2'. Касательной к параболе называется прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная её директрисе.

Определение 2''. Касательной к параболе называется прямая, имеющая с параболой только одну общую точку, все точки которой, кроме точки касания, расположенная во внешней области параболы.

Для получения касательной в компьютерной программе GeoGebra имеется инструмент «Касательная». Если выбрать этот инструмент и последовательно нажать левой кнопкой мыши на точку и параболу, то на экране появится касательная к параболе, проходящая через эту точку.

Теорема. Касательной к окружности является прямая, проходящая через точку окружности, и перпендикулярная радиусу, проведённому в эту точку.

Упражнение 3. Сформулируйте и докажите теорему о касательной к параболе, аналогичную следующей теореме о касательной к окружности.

В качестве подсказки можно обратить внимание учащихся на то, что указанная прямая содержит биссектрису развёрнутого угла, образованного прямой *OA* и вершиной *A* (рис. 4).

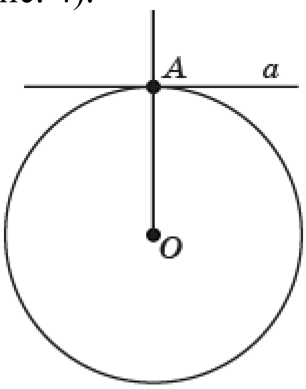

Рис. 4

Искомой формулировкой теоремы о касательной к параболе будет следующая.

Теорема’. Касательной к параболе с фокусом *F* и директрисой *d* является прямая, проходящая через точку *A* параболы, и содержащая биссектрису угла *FAD*, где *D* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *A* на директрису.

Доказательство. Обозначим *a* прямую, проходящую через точку *A* параболы и содержащую биссектрису угла *FAD* (рис. 5).

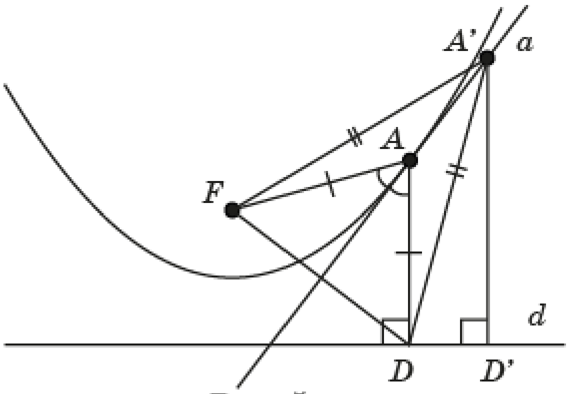

Рис. 5

Докажем, что все остальные точки *A’* прямой *a* принадлежит внешней области параболы. Из точки *A’* опустим перпендикуляр *A’D’* на директрису *d*. Треугольник *AFD* является равнобедренным, *AF* = *AD*. Следовательно, прямая *a* является серединным перпендикуляром к отрезку *FD*. Значит, *A’F* = *A’D*. Так как перпендикуляр короче наклонной, проведённой из той же точки к той же прямой, то *A’F* = *A’D* > *A’D’*. Следовательно, точка *A’* не принадлежит параболе. Более того, она принадлежит её внешней области.

Из этой теоремы вытекает оптическое свойство параболы, которое заключается в том, что если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Упражнение 4. Докажите оптическое свойство параболы. Используйте то, что лучи отражаются от параболы так же, как от касательной, проведённой к этой параболе в точке падения, а угол падения равен углу отражения (рис. 6).

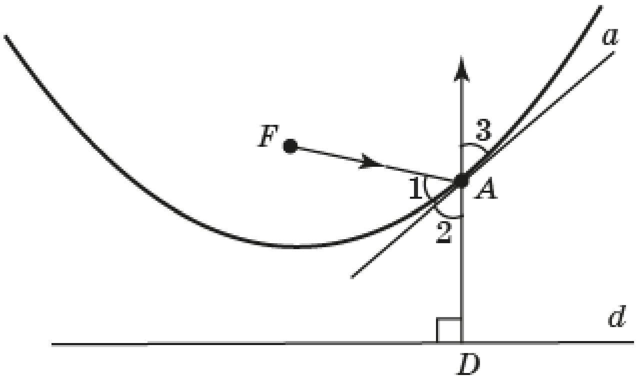

Рис. 6

Доказательство. Пусть луч исходит из точки F и отражается от параболы в точке A. Так как касательная a содержит биссектрису угла FAD, то углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Значит, отражённый луч пойдёт в направлении луча DA, перпендикулярном директрисе.

Для отрезков касательных к окружности имеют место следующие свойства.

Свойство 2. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны (рис. 7).

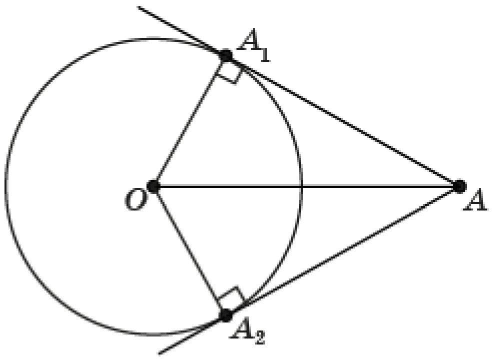

Рис. 7

Свойство 3. Углы, под которыми из центра O окружности видны отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны.

Упражнение 5. Проверьте, выполняются ли аналогичные свойства для отрезков касательных к параболе.

Решение. Свойство, аналогичное свойству 2, не выполняется. Это можно проверить в компьютерной программе GeoGebra.

Свойство, аналогичное свойству 3, выполняется.

Свойство 3'. Углы, под которыми из фокуса параболы видны отрезки касательных, проведённых к параболе из одной точки, равны.

Равенство этих углов можно проверить в компьютерной программе GeoGebra (рис. 8).

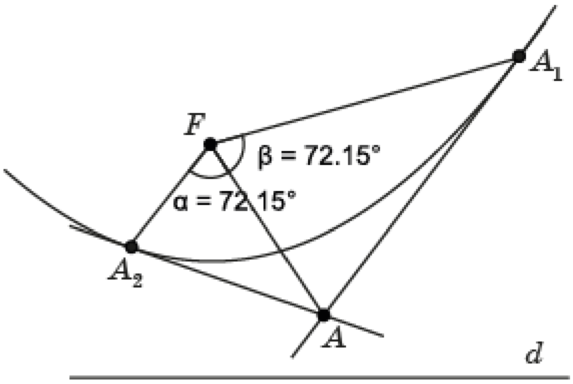

Рис. 8

Доказательство. Докажем, что углы, под которыми из фокуса F параболы видны отрезки AA_1 и AA_2 касательных, проведённых к параболе из точки A, равны.

Из точек касания опустим перпендикуляры A_1D_1 и A_2D_2 на директрису d (рис. 9).

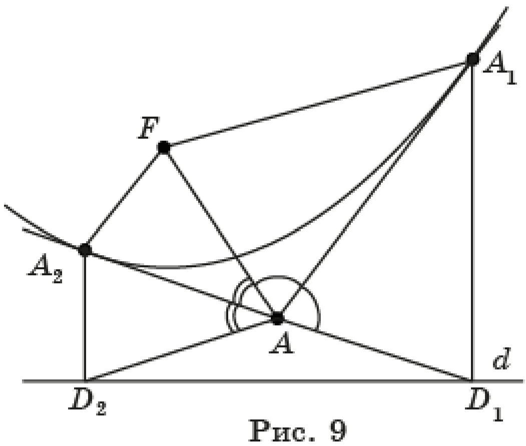

Рис. 9

Касательные AA_1 и AA_2 содержат биссектрисы углов соответственно FAD_1 и FAD_2. Треугольники AFA_1 и AD_1A_1, AFA_2 и AD_2A_2 равны. Следовательно, равны углы AFA_1 и AD_1A_1, AFA_2 и AD_2A_2. Из равенства отрезков AD_1, AF и AD_2 следует равенство углов AD_1D_2 и AD_2D_1. Значит, равны углы AFA_1 и AFA_2.

Для отрезков касательных к окружности имеет место следующее свойство.

Свойство 4. Через точку B окружности, расположенную внутри угла A_1AA_2, где AA_1, AA_2 – касательные, проведём касательную к окружности. Обозначим B_1, B_2 её точки пересечения соответственно с AA_1, AA_2. Тогда периметр треугольника AB_1B_2 не зависит от положения точки B (рис. 10).

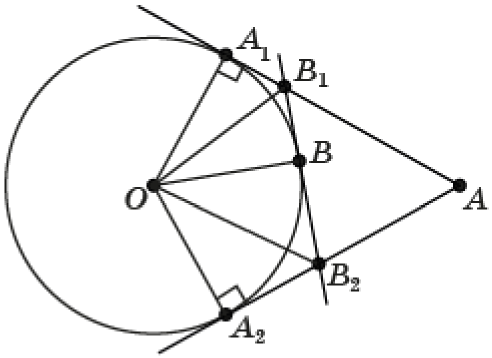

Рис. 10

Упражнение 6. Проверьте, выполняется ли аналогичное свойство для отрезков касательных к параболе.

Ответ. Аналогичное свойство не выполняется. Это можно проверить в компьютерной программе GeoGebra.

Близким к этому свойству является следующее свойство отрезков касательных к параболе.

Свойство 4'. Через точку B параболы, расположенную внутри угла A_1AA_2, где AA_1, AA_2 – касательные, проведём касательную к параболе. Обозначим B_1, B_2 её точки пересечения соответственно с AA_1, AA_2. Тогда ортогональная проекция D_1D_2 отрезка B_1B_2 на директрису d не зависит от положения точки B (рис. 11).

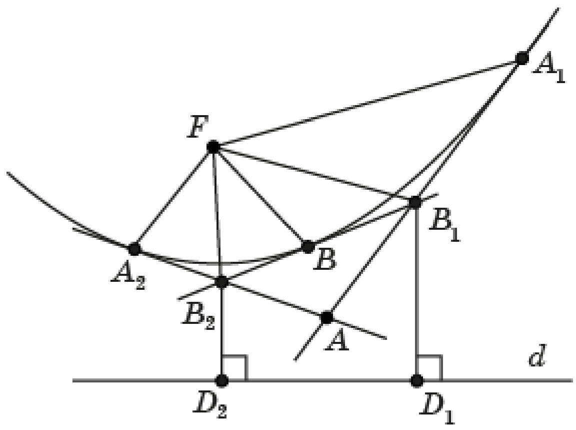

Рис. 11

Упражнение 7. Проверьте выполнимость этого свойства в компьютерной программе GeoGebra.

Ответ. Оно выполняется.

Упражнение 8*. Докажите это свойство, используя рисунок 12.

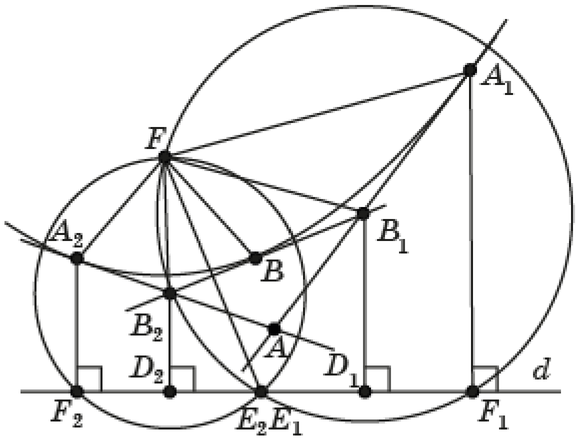

Рис. 12

Доказательство. С центром в точке B_1 и радиусом B_1F проведём окружность. Обозначим E_1, F_1 её точки пересечения с директрисой d. Так как прямая B_1B_2 является касательной к параболе, то она является серединным перпендикуляром к отрезку FE_1. С центром в точке B_2 и радиусом B_2F проведём окружность. Обозначим E_2, F_2 её точки пересечения с директрисой. Так как прямая B_1B_2 является касательной к параболе, то она является серединным перпендикуляром к отрезку FE_2. Так как этот серединный перпендикуляр один и тот же, то точки E_1 и E_2 совпадают. Обозначим её E. Так как $ED_1 = D_1F_1$ и $ED_2 = D_2F_2$, то отрезок D_1D_2 равен половине отрезка F_1F_2, который не зависит от положения точки B.

Рассмотрим ещё одно свойство отрезков касательных к окружности.

Свойство 5. Через точку B окружности, расположенную внутри угла A_1AA_2, где AA_1, AA_2 – касательные, проведём касательную к окружности. Обозначим B_1, B_2 её точки пересечения соответственно с AA_1, AA_2 (рис. 10). Тогда величина угла B_1OB_2, под которым из центра O виден отрезок B_1B_2, не зависит от положения точки B.

Доказательство. Из свойства 3 отрезков касательных к окружности следует равенство углов B_1OB и B_1OA_1, B_2OB и B_2OA_2. Следовательно, угол B_1OB_2 равен половине угла A_1OA_2, который не зависит от положения точки B.

Упражнение 9. Сформулируйте аналогичное свойство для параболы. Проверьте его выполнимость.

Свойство 5’. Через точку B параболы, расположенную внутри угла A_1AA_2, где AA_1, AA_2 – касательные, проведём касательную к параболе. Обозначим B_1, B_2 её точки пересечения соответственно с AA_1, AA_2 (рис. 13). Тогда величина угла B_1OB_2, под которым из фокуса F виден отрезок B_1B_2, не зависит от положения точки B.

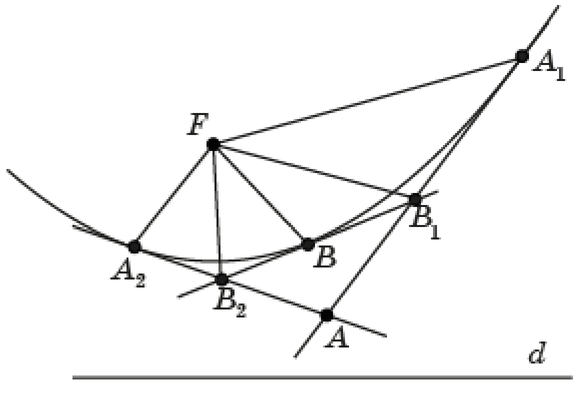

Рис. 13

Доказательство. Из свойства 3’ отрезков касательных к параболе следует равенство углов B_1FB и B_1FA_1, B_2FB и B_2FA_2. Следовательно, угол B_1FB_2 равен половине угла A_1FA_2, который не зависит от положения точки B.

Список источников

1. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. М.: Мнемозина, 2019.
2. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия. М.: Прометей, 2018.