ОБ АНАЛОГАХ ПАРАБОЛЫ, ЭЛЛИПСА И ГИПЕРБОЛЫ НА СФЕРЕ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru, i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация: в работе рассматриваются кривые на сфере, являющиеся аналогами параболы, эллипса и гиперболы на плоскости. Выводятся параметрические уравнения этих кривых. Для их иллюстрации используется компьютерная программа GeoGebra.
Ключевые слова: парабола, эллипс, гипербола, сфера, аналогия.

ABOUT ANALOGS OF PARABOLA, ELLIPSE AND HYPERBOLA ON THE SPHERE

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru, i-m-smirnova@yandex.ru

Abstract: the paper considers curves on the sphere, which are analogs of parabola, ellipse and hyperbola in the plane. The parametric equations of these curves are derived. The GeoGebra computer program is used to illustrate them.
Keywords: parabola, ellipse, hyperbola, sphere, analogy.

Напомним определения параболы, эллипса и гиперболы [3].

Параболой называется геометрическое место точек A, равноудалённых от данной точки F и данной прямой d, не проходящей через эту точку. Прямая d называется директрисой, а точка F - фокусом параболы (рис. 1).

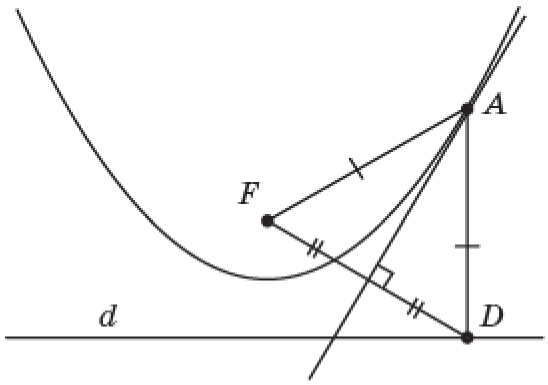

Рис. 1

Напомним также, что касательной к параболе, проходящей через её точку A, является серединный перпендикуляр к отрезку FD.

Эллипсом называется геометрическое место точек A, сумма расстояний от которых до данных точек F_1, F_2 равна числу c, большему расстояния между точками F_1, F_2 (рис. 2). Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса.

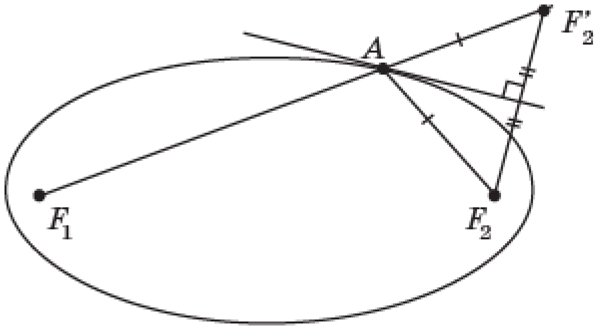

Рис. 2

Касательной к эллипсу, проходящей через точку A, является серединный перпендикуляр к отрезку $F_2F'_2$.

Гиперболой называется геометрическое место точек A, модуль разности расстояний от которых до данных точек F_1, F_2 равна положительному числу c, меньшему расстояния между точками F_1, F_2 (рис. 3). Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы.

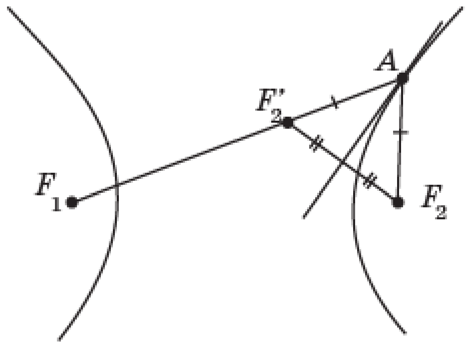

Рис. 3

Касательной к гиперболе, проходящей через точку A, является серединный перпендикуляр к отрезку $F_2F'_2$.

Нашей задачей является определение и построение кривых на сфере, являющихся аналогами параболы, эллипса и гиперболы на плоскости. При этом для моделирования этих кривых будет применяться компьютерная программа GeoGebra [4].

Предлагаемый материал может быть использован при проведении учебных курсов внеурочной деятельности для классов с углублённым уровнем обучения.

Познакомиться с геометрией на сфере можно по книгам [1, 2]. Напомним, что сферической прямой называется большая окружность на сфере, т. е. окружность на сфере, центром которой является центр сферы. Сферическим расстоянием между двумя точками на сфере является длина меньшей дуги большой окружности, проходящей через эти точки.

Пусть на сфере задана сферическая прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Обозначим N и S полюса сферы, расположенные на прямой, перпендикулярной плоскости данной сферической прямой. Найдём сферический аналог параболы, т. е. геометрическое место точек (ГМТ) A на сфере, равноудалённых от точки F и сферической прямой d (рис. 4).

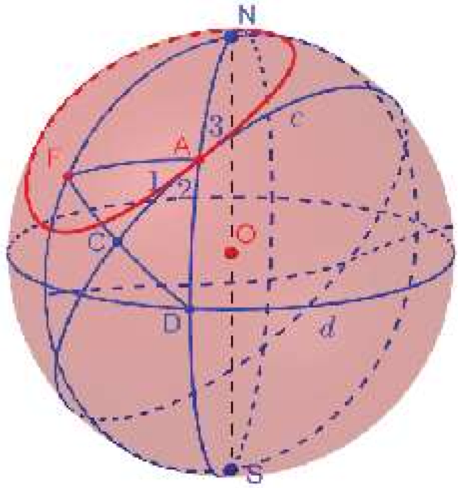

Рис. 4

Рассмотрим какую-нибудь точку D на сферической прямой d. Соединим её сферическим отрезком с точкой F. Обозначим C середину этого отрезка. Через точку C проведём плоскость, перпендикулярную сферической прямой FD. Сферическая прямая c, являющаяся пересечением этой плоскости со сферой, и будет геометрическим местом точек, равноудалённых от точек F и D. Через точку D и полюса сферы проведём большую окружность. Точка A пересечения этой окружности и построенной линии будет равноудалена от точки F и сферической прямой d. При изменении положения точки D на окружности d точка A будет описывать искомое ГМТ. Будем называть его сферической параболой, а сферическую прямую d – директрисой. Сферическая прямая c будет касательной, а точка A – точкой касания.

Указанное построение точки A можно провести в компьютерной программе GeoGebra [4]. Если для полученной точки A выбрать опцию «Оставлять след», то при перемещении точки D по сферической прямой d точка A будет описывать искомую сферическую параболу.

Заметим, что из равенства дуг $\widetilde{AF}$ и $\widetilde{AD}$ следует, что сумма длин дуг $\widetilde{AD}$ и $\widetilde{AN}$ равна длине дуги $\widetilde{DN}$, т. е. равна $\frac{\pi}{2}$ и не зависит от положения точки D на сферической прямой d. Следовательно, построенное ГМТ на сфере можно также рассматривать как аналог эллипса на плоскости.

Из равенства сферических треугольников ACF и ACD следует равенство углов 1 и 2. Углы 2 и з равны как вертикальные. Следовательно, равны углы 1 и 3.

Для данной точки F на сфере и сферической прямой d построим касательную к соответствующей сферической параболе, проходящую через данную точку G. С центром в точке G и радиусом FG проведём окружность. Обозначим D_1, D_2 её точки пересечения с директрисой d. Построим отрезки FD_1, FD_2. Проведём плоскости, перпендикулярные этим отрезкам, и проходящие через их середины. Линии пересечения этих плоскостей со сферой будут искомыми касательными к сферической параболе. Точками будут точки A_1, A_2 пересечения этих линий соответственно с дугами $\widetilde{ND_1}$, $\widetilde{ND_2}$

(рис. 5). Доказательство этого аналогично доказательству для параболы на плоскости [3]. Проведите его самостоятельно.

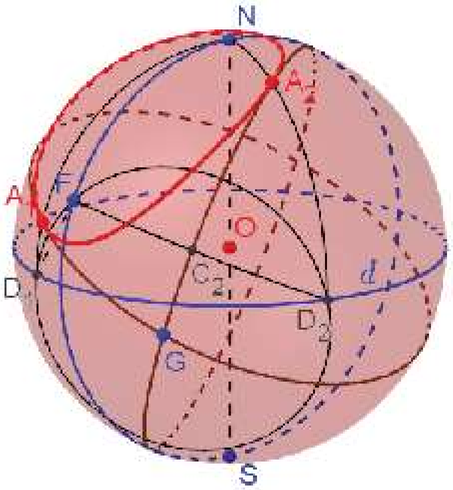

Рис. 5

Переформулируем определения эллипса и гиперболы на плоскости по аналогии с определением параболы. Для этого вместо прямой d возьмём окружность. А именно, пусть точка F расположена внутри окружности d с центром O и не совпадает с этим центром (рис. 6).

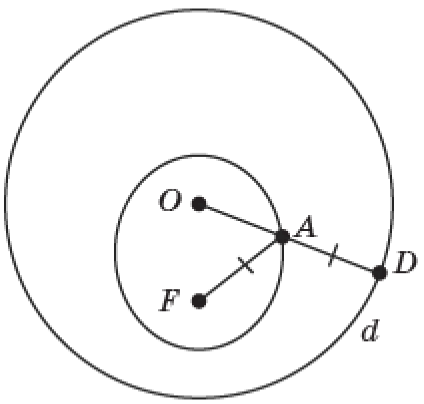

Рис. 6

Тогда геометрическим местом точек A, равноудалённых от точки F и окружности d, будет эллипс, фокусами которого являются точки F и O, а сумма расстояний от точки A эллипса до фокусов будет равна радиусу окружности.

Если точка F расположена вне окружности, то геометрическим местом точек, равноудалённых от точки F и окружности, будет ветвь гиперболы, фокусами которой являются точки F и O, а разность расстояний от точки A гиперболы до фокусов равна радиусу окружности (рис. 7).

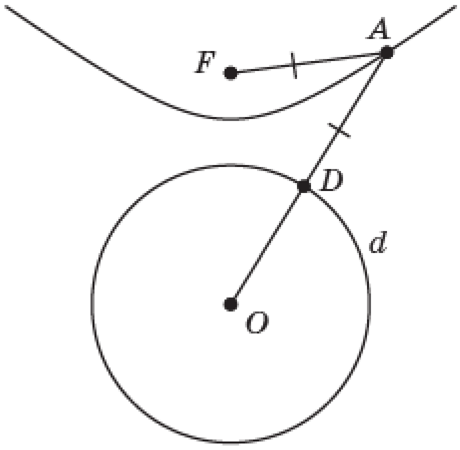

Рис. 7

В случае сферы рассмотрим точку F и окружность d, не проходящую через эту точку. Обозначим N и S полюса сферы, расположенные на прямой, перпендикулярной плоскости данной окружности. Найдём сферический аналог эллипса, т. е. геометрическое место точек A на сфере, равноудалённых от точки F и окружности d.

Рассмотрим какую-нибудь точку D на окружности d. Указанное выше построение даёт геометрическое место точек A, сумма расстояний от которых до точки F и окружности d равна длине дуги $\overset{\frown}{DN}$, т. е. равна сферическому расстоянию от точки N до окружности d, значит, не зависит от положения точки D на окружности d (рис. 8).

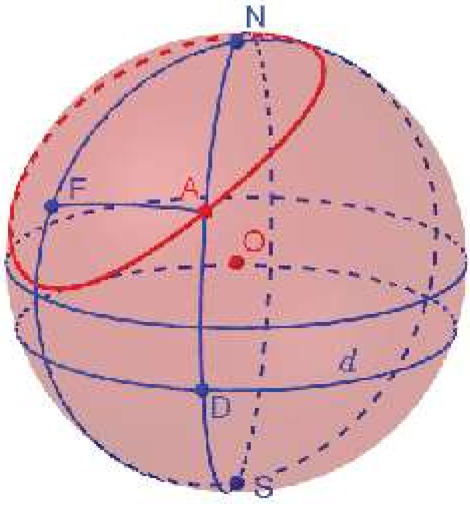

Рис. 8

Следовательно, построенное ГМТ на сфере можно также рассматривать как аналог эллипса на плоскости. Будем называть это геометрическое место точек сферическим эллипсом.

Из равенства дуг $\overset{\frown}{AF}$ и $\overset{\frown}{AD}$ следует, что разность длин дуг $\overset{\frown}{AS}$ и $\overset{\frown}{AF}$ равна длине дуги $\overset{\frown}{DS}$, т. е. не зависит от положения точки D на окружности d. Следовательно, построенное ГМТ на сфере можно рассматривать как аналог ветви гиперболы на плоскости, фокусами которой являются точки F и S.

Вторая ветвь этой гиперболы центрально-симметрична данной ветви относительно центра O сферы (рис. 9). Докажите это самостоятельно.

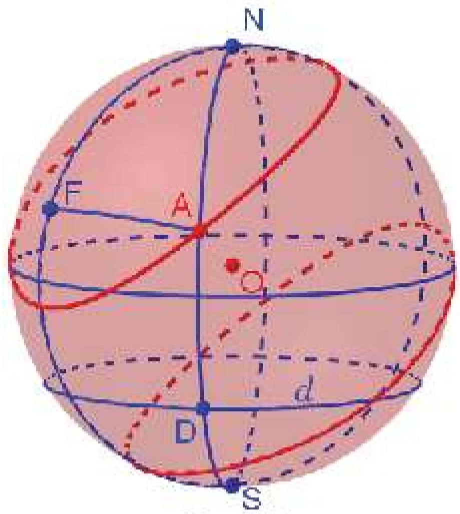

Рис. 9

Таким образом, для сферического эллипса выполняются сразу три условия.

1. Каждая его точка A равноудалена от точки F и окружности d.

2. Сумма сферических расстояний от точек A до точек F и N постоянна и равна сферическому расстоянию от точки N до окружности d.

3. Разность расстояний от точек A до точек S и F постоянна и равна сферическому расстоянию от точки S до окружности d.

Следовательно, сферический эллипс одновременно является и ветвью сферической гиперболы, а сферическая парабола является его частным случаем.

Найдём уравнение сферического эллипса. Для этого напомним определение сферических координат [3].

Рассмотрим декартову систему координат в пространстве и точку A (рис. 10).

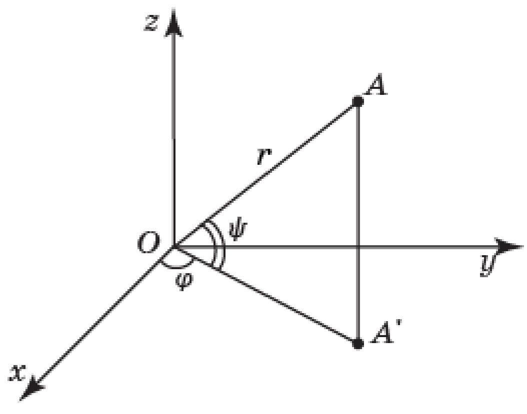

Рис. 10

Ортогональную проекцию точки A на плоскость Oxy обозначим A', а длину вектора $\overrightarrow{OA}$ обозначим r. Угол между вектором $\overrightarrow{OA'}$ и осью Ox обозначим φ. Будем считать его изменяющимся от 0 до 2π. Угол между вектором $\overrightarrow{OA}$ и плоскостью Oxy обозначим ψ. Будем считать его изменяющимся от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Тройка (r; φ; ψ) называется сферическими координатами точки A в пространстве.

Декартовы координаты (x, y, z) точки в пространстве выражаются через её сферические координаты по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi. \end{cases}$$

Для сферического эллипса на единичной сфере (рис. 11) положим $F(1; 0;\ \gamma)$, $A(1; \varphi;\ \psi)$, $D(1; \varphi;\ \delta)$.

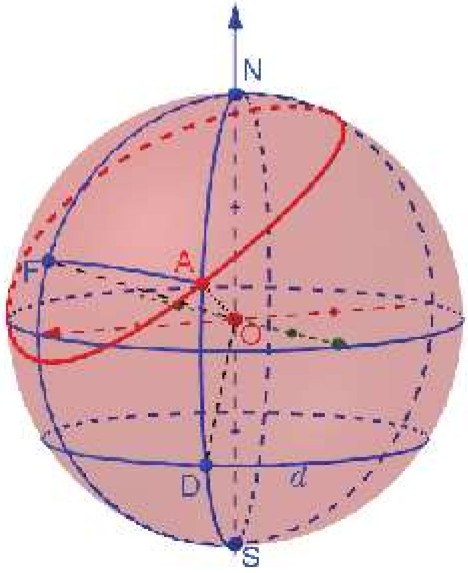

Рис. 11

Для нахождения длины дуги $\breve{AF}$ воспользуемся теоремой косинусов сферического треугольника ABC, стороны BC, AC, AB которого соответственно равны a, b, c, а угол C равен φ

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\varphi.$$

Применим эту теорему к сферическому треугольнику AFN. Его стороны FN и AN равны соответственно $\frac{\pi}{2} - \gamma$ и $\frac{\pi}{2} - \psi$. Угол N равен φ. Имеем равенство

$$\cos\breve{AF} = \sin\gamma \cdot \sin\psi + \cos\gamma \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi.$$

Для дуги $\breve{AD}$ имеет место равенство

$$\cos\breve{AD} = \cos(\psi - \delta) = \cos\psi \cdot \cos\delta + \sin\psi \cdot \sin\delta.$$

Следовательно, для точек A сферического эллипса имеет место равенство

$$\sin\gamma \cdot \sin\psi + \cos\gamma \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi = \cos\psi \cdot \cos\delta + \sin\psi \cdot \sin\delta,$$

которое можно переписать в виде

$$tg\,\psi = \frac{\cos\delta - \cos\gamma \cdot \cos\varphi}{\sin\gamma - \sin\delta}.$$

Параметрические уравнения сферического эллипса в сферических координатах будут иметь вид

$$\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = t, \\ \psi = \operatorname{arctg} \dfrac{\cos\delta - \cos\gamma \cdot \cos t}{\sin\gamma - \sin\delta}, \end{cases}$$

где t – параметр, изменяющийся от 0 до 2π.

Для получения сферического эллипса в компьютерной программе GeoGebra достаточно в строке «Ввод» набрать

Кривая((1; t; arctan((cos(δ) − cos(γ) ∗ cos(t))/(sin(γ) − sin(δ)))), t, 0, 2π) и нажать «Enter».

В результате на экране появится искомый сферический эллипс.

Найдём параметрические уравнения сферического эллипса в декартовых координатах.

Имеем

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{tg^2\psi + 1}}, \sin\psi = tg\ \psi \cdot \cos\psi.$$

Обозначим

$$f(t) = \frac{\cos\delta - \cos\gamma \cdot \cos \mathrm{t}}{\sin\gamma - \sin\delta}.\ \ g(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{f^2(\mathrm{t}) + 1}}.$$

Подставляя эти функции в выражения декартовых координат, получим искомые параметрические уравнения сферического эллипса.

$$\begin{cases} x = g(\mathrm{t}) \cdot \cos \mathrm{t}, \\ y = g(\mathrm{t}) \cdot \sin \mathrm{t}, \\ z = f(\mathrm{t}) \cdot g(\mathrm{t}), \end{cases}$$

где t – параметр, изменяющийся от 0 до 2π.

Используя эти параметрические уравнения, сферический эллипс можно получить в компьютерной программе GeoGebra.

Для этого в строке «Ввод» нужно последовательно набрать

$f(t) = (\cos(\delta) - \cos(\gamma) * \cos(\mathrm{t}))/\ (\sin(\gamma) - \sin(\delta))$

$g(t) = 1/\mathrm{sqrt}(f(t)^2 + 1)$

Кривая((g(t) ∗ cos(t), g(t) ∗ sin(t), f(t) ∗ g(t)),t,0,2π)

Покажем, что уравнение

$$tg\ \psi = \frac{\cos\delta - \cos\gamma \cdot \cos\varphi}{\sin\gamma - \sin\delta}$$

задаёт в пространстве коническую поверхность.

Обозначим

$$\frac{\cos\delta}{\sin\gamma - \sin\delta} = a, \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma - \sin\delta} = b.$$

От сферических координат перейдём к декартовым. Получим

$$tg\ \psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение и преобразуя его, получим уравнение

$$z^2 = (a^2 - b^2)x^2 + a^2y^2 - 2bxz,$$

которое задаёт коническую поверхность в пространстве. Пересечением этой конической поверхности и сферы, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, является сферический эллипс (рис. 12).

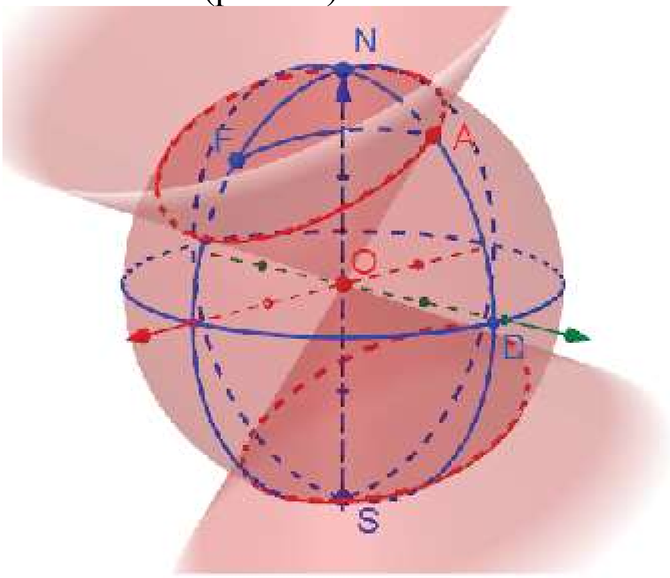

Рис. 12

Рассмотрим каноническое уравнение конической поверхности

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad (0 < b < a).$$

В сферических координатах эта коническая поверхность задаётся уравнением

$$tg^2\psi = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}.$$

Заметим, что пересечением этой конической поверхности и плоскости, задаваемой уравнением $z = 1$, будет эллипс (рис. 13), задаваемый в этой плоскости уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (0 < b < a).$$

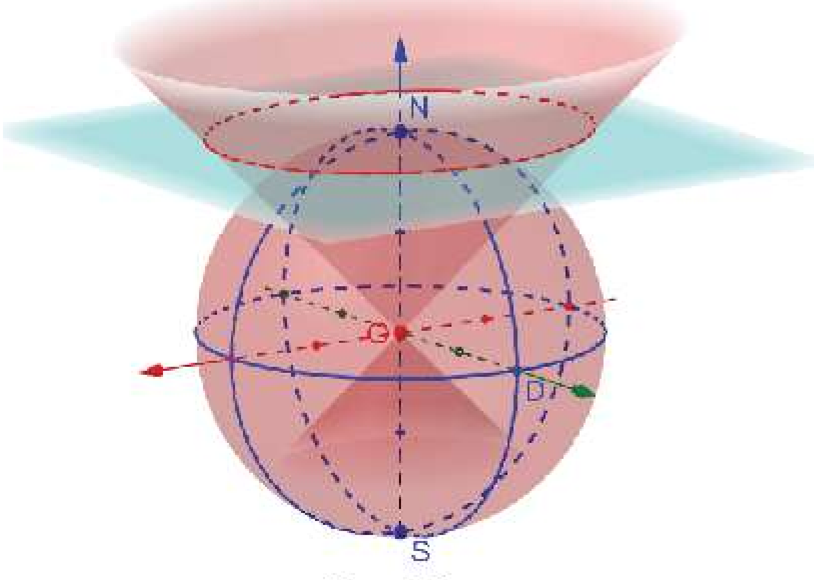

Рис. 13

Пересечением этой конической поверхности и сферы, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, будет сферический эллипс, параметрические уравнения в сферических координатах будут иметь вид.

Его параметрические

$$\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = t, \\ \psi = \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{a^2} + \dfrac{\sin^2 t}{b^2}}, \end{cases}$$

где t – параметр, изменяющийся от 0 до 2π.

Литература

1. Абрамов А. М. и др. Избранные вопросы математики. 10 класс: Факультативный курс. – М.: Просвещение, 1980.
2. Вентцель М. К. Сферическая тригонометрия. – М.: Геодезиздат, 1948.
3. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2019.
4. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. – М.: Прометей, 2018.