И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ПОЛУВПИСАННЫЕ СФЕРЫ

Математика 2008 № 9

В школьном курсе стереометрии рассматриваются сферы, вписанные в многогранники, и сферы, описанные около многогранников. Однако в задачах нередко встречается сфера, касающаяся всех ребер многогранника. Такая сфера называется полувписанной в многогранник.

Ясно, что центром полувписанной сферы является точка, одинаково удаленная от всех ребер данного многогранника.

На рисунке 1 показана сфера, полувписанная в куб. Ее центр находится в центре куба, а радиус равен $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, где a – ребро куба.

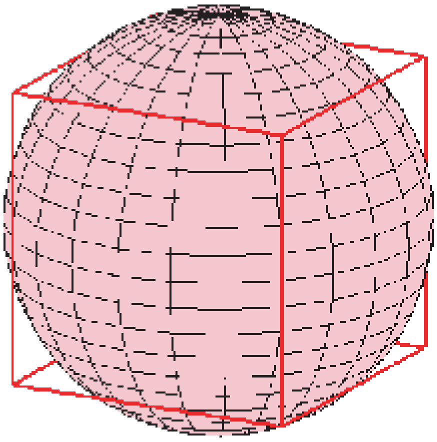

Рис. 1

Выясним, для каких многогранников существуют полувписанные сферы и приведем соответствующие примеры.

Заметим, что если у многогранника существует полувписанная сфера, то сечениями этой сферы плоскостями граней многогранника являются окружности, вписанные в грани многогранника, причем, окружности, вписанные в соседние грани, касаются общего ребра в одной и той же точке. Таким образом, имеет место следующее необходимое условие существования у многогранника полувписанной сферы.

Теорема 1. Если у многогранника существует полувписанная сфера, то в каждую его грань можно вписать окружность, причем, окружности, вписанные в соседние грани, касаются общего ребра этих граней в одной и той же точке.

Далее мы приведем пример (пример 4), показывающий, что в общем случае это условие не является достаточным.

Докажем, что для тетраэдра (треугольной пирамиды) это условие является и достаточным.

Теорема 2. Если окружности, вписанные в грани тетраэдра, касаются общих ребер этих граней в одних и тех же точках, то у данного тетраэдра существует полувписанная сфера.

Действительно, пусть в грани тетраэдра *ABCD* можно вписать окружности, касающиеся общих ребер в одних и тех же точках. Рассмотрим окружности, вписанные в грани *ABC* и *ABD* и касающиеся ребра *AB* в точке *X* (рис. 2).

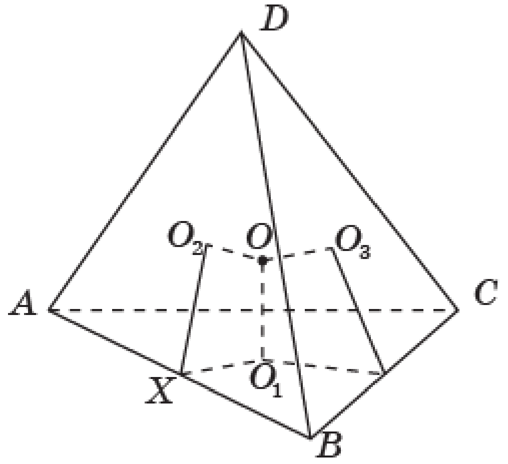

Рис. 2

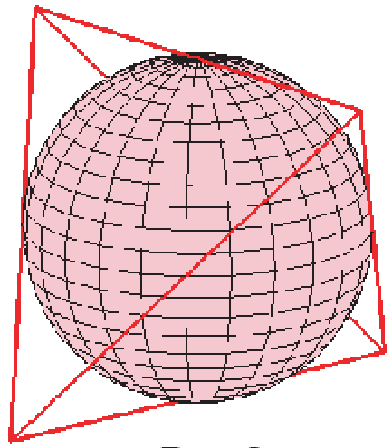

Рис. 3

Через центры этих окружностей проведем перпендикуляры к плоскостям их граней. Они лежат в одной плоскости, проходящей через *X* и перпендикулярной *AB*. Следовательно, они пересекаются, и точка *O* их пересечения будет равноудалена от сторон треугольников *ABC* и *ABD*. Перпендикуляр, проведенный через центр окружности, вписанной в грань *BCD*, будет пересекаться как с перпендикуляром к грани *ABC*, так и с перпендикуляром грани *ABD*. Следовательно, он пройдет через точку *O*. Аналогично, через точку *O* пройдет и перпендикуляр к грани *ACD*, проведенный через центр вписанной окружности. Таким образом, через точку *O* пройдут все перпендикуляры, проведенные через центры окружностей вписанных в грани тетраэдра и, следовательно, она будет равноудалена от всех ребер тетраэдра *ABCD*, т.е. *O* – центр сферы, касающейся всех ребер данного тетраэдра.

В частности, полувписанная сфера существует у правильного тетраэдра. Окружности, вписанные в грани правильного тетраэдра, касаются ребер в их серединах.

На рисунке 3 показана полувписанная сфера правильного тетраэдра.

Используя теорему 2, легко привести пример тетраэдра, для которого не существует полувписанной сферы. Для этого в правильном тетраэдре *ABCD* через ребро *AB* и точку *E* на ребре *CD* проведем плоскость (рис. 4). Покажем, что для тетраэдра *ABCE* полувписанной сферы не существует. Действительно, окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается ребра *BC* в его середине, а окружность, вписанная в треугольник BCE – в точке, расположенной ближе к C, чем к B.

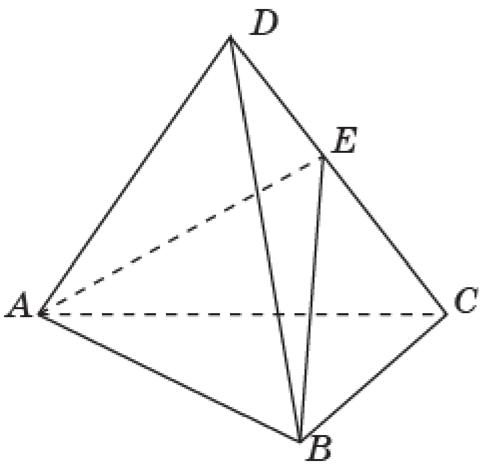

Рис. 4

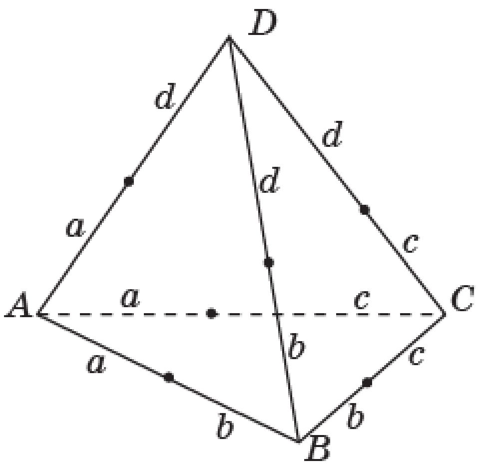

Рис. 5

Приведем необходимое и достаточное условие существования полувписанной сферы у тетраэдра, использующее длины ребер.

Теорема 3. У тетраэдра существует полувписанная сфера тогда и только тогда, когда суммы его противоположных ребер равны.

Доказательство. Пусть у тетраэдра $ABCD$ существует полувписанная сфера. Обозначим через a, b, c и d расстояния от соответствующих вершин тетраэдра до точек касания (рис. 5). Тогда $AB = a + b$, $CD = c + d$. Следовательно, $AB + CD = a + b + c + d$. Аналогично, $AC + BD = a + b + c + d$, $AD + BC = a + b + c + d$. Таким образом, суммы противоположных ребер тетраэдра равны.

Обратно. Предположим, что суммы противоположных ребер тетраэдра $ABCD$ равны. Впишем в треугольник ABC окружность. Обозначим через X точку касания этой окружности стороны AB. Тогда $AX = (AB + AC – BC):2$. Так как $AC – BC = AD – BD$, то $AX = (AB + AD – BD):2$. Следовательно, точка X является точкой касания окружности, вписанной в треугольник ABD. Аналогичным образом показывается, что совпадают и другие точки касания окружностей, вписанных в соседние грани тетраэдра. Используя теорему 1, получаем, что у данного тетраэдра существует полувписанная сфера.

Пример 1. Найдем центр и радиус сферы, полувписанной в правильный тетраэдр.

Пусть O – центр описанной сферы правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром a (рис. 6). Воспользуемся тем, что радиус описанной сферы равен $\frac{\sqrt{6}}{4}a$. Треугольник AOD равнобедренный, $AD = a$, $AO = OD = \frac{\sqrt{6}}{4}a$. Высота OH этого треугольника равна расстоянию от точки O до ребра AD. По теореме Пифагора находим $OH =$

$\sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{6}{16}a^2 - \frac{4}{16}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$. Из равенства равнобедренных треугольников с вершиной O, основаниями которых служат ребра тетраэдра, следует, что расстояния от точки O до всех ребер тетраэдра равны, т.е. точка O является центром полувписанной сферы, а ее радиус равен $\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

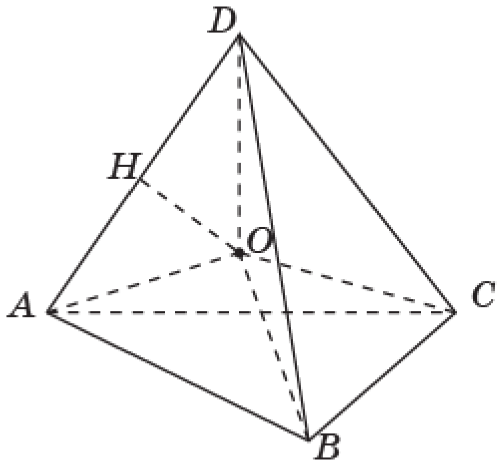

Рис. 6

Рассмотрим n-угольную призму (рис. 7). Предположим, что у нее существует полувписанная сфера. Тогда в каждую ее боковую грань можно вписать окружность и, следовательно, боковые грани – ромбы. Кроме того, так как плоскости, содержащие основания, пересекают полувписанную сферу по равным окружностям, то боковые ребра перпендикулярны этим плоскостям и, значит, боковые грани – квадраты. Таким образом, имеет место следующая теорема.

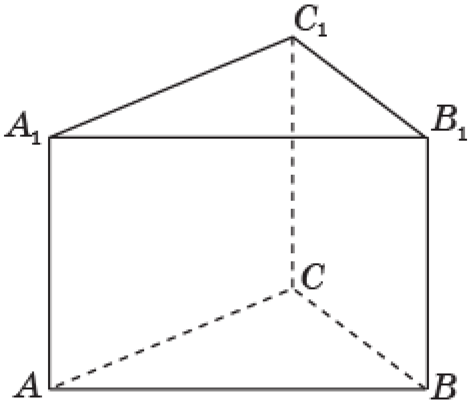

Рис. 7

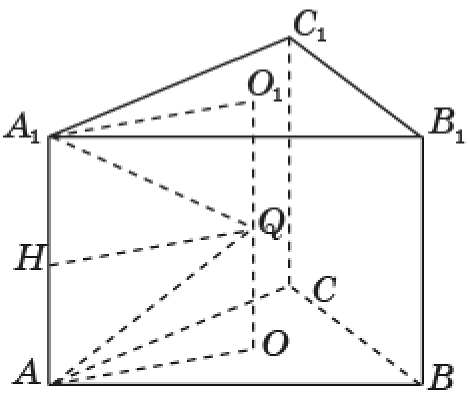

Рис. 8

Теорема 4. Из n-угольных призм полувписанная сфера может быть только у правильной n-угольной призмы, все ребра которой равны.

Легко видеть, что центром сферы, полувписанной в призму, является центр описанной сферы, а ее радиус равен радиусу окружности, описанной около основания призмы.

Пример 2. Найдем центр и радиус сферы, полувписанной в правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с ребрами, равными a.

Обозначим Q середину отрезка OO_1, соединяющего центры оснований (рис. 8). Эта точка является центром описанной около призмы сферы. Равнобедренные треугольники с вершиной в точке Q, основаниями которых служат ребра призмы, равны и, следовательно, равны расстояния от точки Q до этих ребер, т.е. Q является центром полувписанной сферы. В треугольнике AOA_1 высота QH равна отрезку OA и равна $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Следовательно, искомый радиус полувписанной сферы равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Рассмотрим n-угольную пирамиду $SA_1\ldots A_n$. Аналогично тому, как это было сделано для тетраэдра, доказывается следующая теорема.

Теорема 5. Если в грани n-угольной пирамиды можно вписать окружности, касающиеся общих ребер соседних граней в одних и тех же точках, то у данной пирамиды существует полувписанная сфера.

В частности, полувписанная сфера существует у правильной n-угольной пирамиды.

Пример 3. Найдем центр и радиус полувписанной сферы для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, ребра которой равны 1 (рис. 9).

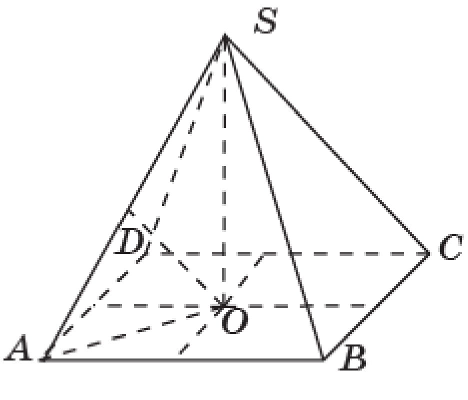

Рис. 9

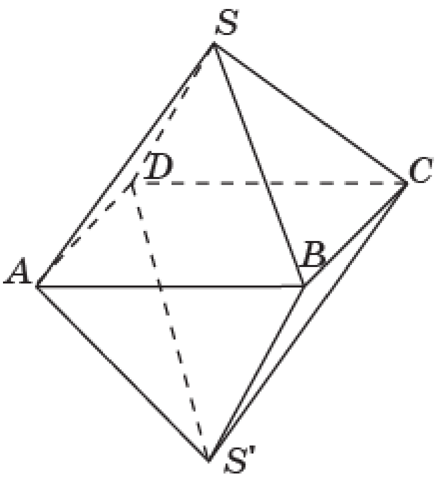

Рис. 10

Пусть O – центр основания. Высота SO этой пирамиды равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Нетрудно видеть, что расстояния от точки O до ребер пирамиды равны $\frac{1}{2}$. Следовательно, O – центр искомой полувписанной сферы, а ее радиус равен $\frac{1}{2}$.

Пример 4. Рассмотрим бипирамиду, образованную двумя правильными пирамидами с общим основанием, боковые ребра которых не равны (рис. 10). Для каждой из них существует полувписанная сфера, однако эти сферы будут иметь разные радиусы и, следовательно, одной сферы, полувписанной в бипирамиду, не существует.

Этот пример показывает, что необходимое условие, приведенное в теореме 1 для существования у многогранника полувписанной сферы, не является достаточным.

Приведем условие существования полувписанной n-угольной пирамиды, использующее длины ребер.

Теорема 6. Если у n-угольной пирамиды $SA_1 \ldots A_n$ существует полувписанная сфера, то выполняются равенства:

$$
\begin{aligned}
&SA_1 + A_2A_3 = SA_3 + A_1A_2,\\
&SA_2 + A_3A_4 = SA_4 + A_2A_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&SA_{n-1} + A_nA_1 = SA_1 + A_{n-1}A_n,\\
&SA_n + A_1A_2 = SA_2 + A_nA_1.
\end{aligned}
$$

Доказательство проводится аналогично тому, как это было сделано для тетраэдра. Однако, в отличие от тетраэдра, выполнимость этих равенств не является достаточным условием для существования полувписанной сферы. Например, для четырехугольной пирамиды, в основании которой ромб и высота проходит через точку пересечения диагоналей ромба, указанные равенства выполняются, а полувписанной сферы не существует.

Покажем, что полувписанные сферы существуют для правильных многогранников.

Куб и тетраэдр уже были рассмотрены.

Пример 5. Найдем центр и радиус полувписанной сферы для октаэдра с ребром 1.

Октаэдр *SABCDS’* можно представить состоящим из двух правильных четырехугольных пирамид, ребра которых равны 1 (рис. 11). Сфера с центром в точке O пересечения диагоналей AC и BD и радиусом $\frac{1}{2}$ будет искомой полувписанной сферой.

На рисунке 12 показана сфера, полувписанная в октаэдр.

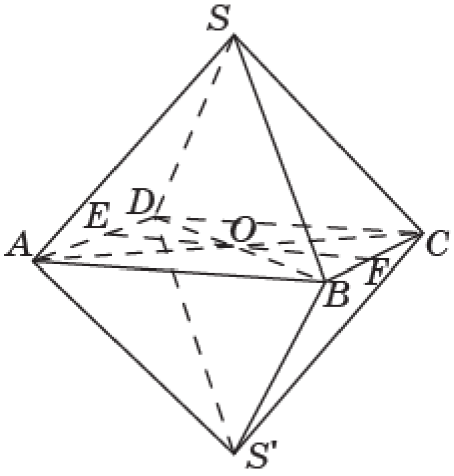

Рис. 11

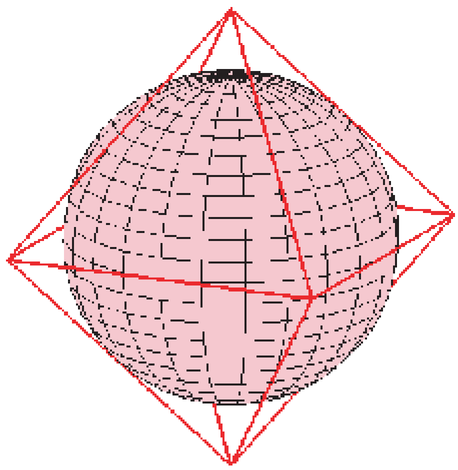

Рис. 12

Пример 6. Найдем центр и радиус полувписанной сферы для икосаэдра с ребром 1.

Обозначим *O* центр сферы, описанной около икосаэдра (рис. 13). Расстояния от *O* до ребер икосаэдра равны половине диагонали *AC* правильного пятиугольника *ABCDE* со стороной 1. Учитывая, что эта диагональ равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, получаем, что радиус искомой полувписанной сферы с центром *O* равен $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

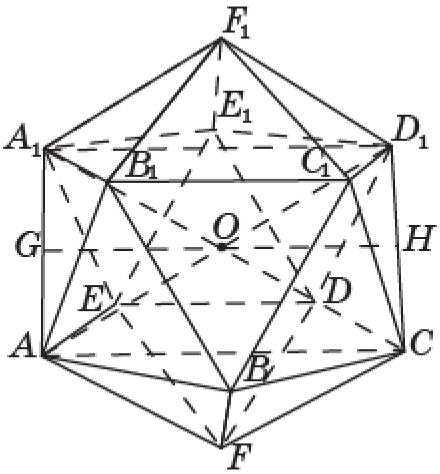

Рис. 13

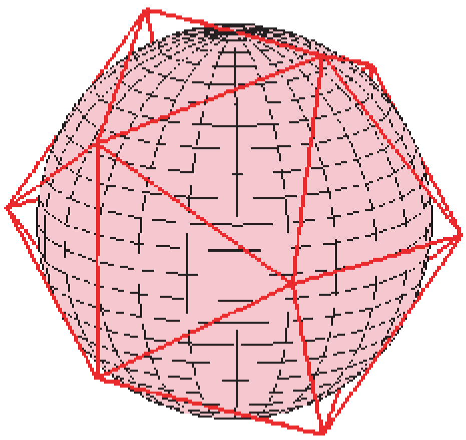

Рис. 14

На рисунке 14 показана сфера, полувписанная в икосаэдр.

Пример 7. Найдем центр и радиус полувписанной сферы для додекаэдра с ребром 1.

Обозначим *O* центр сферы, описанной около додекаэдра (рис. 15). Расстояния от *O* до ребер додекаэдра равны *OH* и равны половине диагонали *AD* правильного пятиугольника *ABCDE*, сторона которого равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, радиус искомой полувписанной сферы с центром O равен $\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

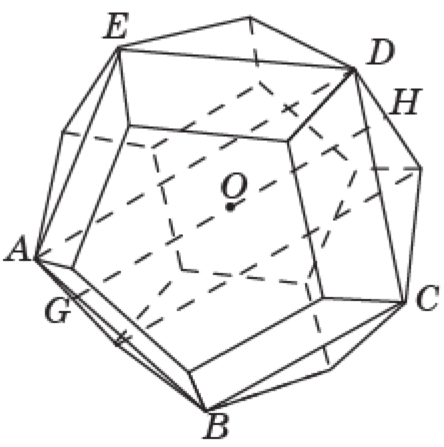

Рис. 15

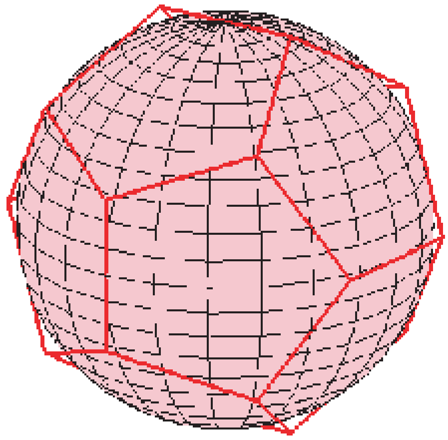

Рис. 16

На рисунке 16 показана сфера, полувписанная в додекаэдр.

Пример 8. Найдем центр и радиус полувписанной сферы для ромбододекаэдра с ребром 1.

Напомним, что ромбододекаэдр – многогранник, поверхность которого состоит из двенадцати равных ромбов (рис. 17). Его можно получить следующим образом. Возьмем два равных куба. Разобьем один из них на шесть равных четырехугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями – гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго куба так, чтобы основания пирамид совместились с гранями куба (рис. 18). Образовавшийся многогранник будет ромбододекаэдром.

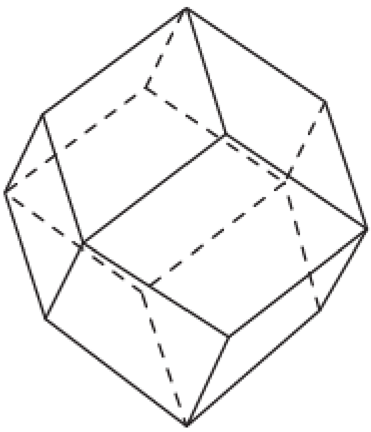

Рис. 17

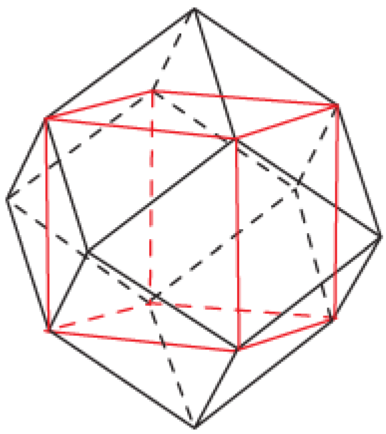

Рис. 18

Обозначим O центр куба, вписанного в ромбододекаэдр. Ребро куба будет равно $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (рис. 19). Расстояния от точки O до ребер ромбододекаэдра равны высоте OH треугольника OAB, в котором $OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $OA = AB = 1$. Отрезок AC перпендикулярен OB и равен $\frac{\sqrt{6}}{3}$, откуда $OH = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, искомый радиус полувписанной сферы равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

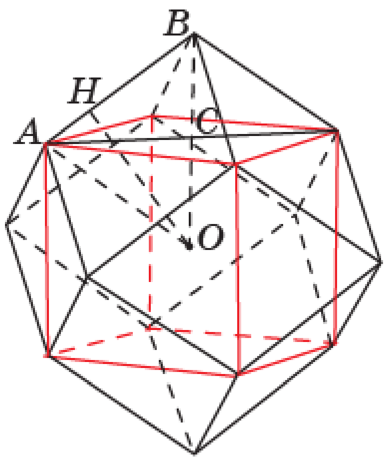

Рис. 19

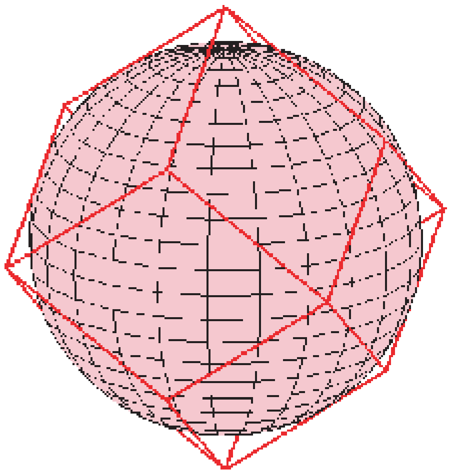
Рис. 20

На рисунке 20 показана сфера, полувписанная в ромбододекаэдр.

Полувписанные сферы существуют не только для правильных, но и для полуправильных многогранников. Их определение и свойства можно посмотреть в учебниках:

И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия 7-9 классы. – М.: Мнемозина, 2007.

И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия 10-11 классы. – М.: Мнемозина, 2006.

Попробуйте самостоятельно найти радиусы полувписанных сфер для полуправильных многогранников.