

КАК СДЕЛАТЬ ИЗУЧЕНИЕ ТЕОРЕМ ГЕОМЕТРИИ БОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНЫМ?

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

Московский педагогический государственный университет

e-mail: v-a-smirnov@mail.ru

Ключевые слова: теоремы геометрии, опытные и лабораторные работы, программа GeoGebra.

Аннотация: В работе предлагаются методика изучения теорем и их доказательств, основанная на использовании опытных и лабораторных работ.

V.A. Smirnov, I.M. Smirnova

Moscow state pedagogical university

e-mail: v-a-smirnov@mail.ru

Keywords: theorems of geometry, experimental and laboratory works, the program GeoGebra.

Annotation: This article proposes a methodology for the study of theorems and their proofs, based on the use of experimental and laboratory works.

Теоремы и их доказательства составляют основу геометрии. Трудности, возникающие при их изучении, связаны с неочевидностью утверждений многих теорем и высокой долей абстракции их доказательств.

Нередко обучающиеся просто выучивают формулировки теорем и доказательства, не понимая их по существу. По прошествии времени учащиеся забывают не только доказательства, но даже и формулировки теорем.

Для решения проблемы повышения эффективности обучения геометрии, в начале прошлого века были предложены подходы к обучению, основанные на опытных и лабораторных работах [1], [2].

Так в книге [1] в основу обучения геометрии положен индуктивный метод, согласно которому учащиеся сначала должны сами при помощи опыта, на отдельных конкретных случаях, подметить искомую зависимость, и только после этого даётся логическое доказательство.

В предисловии к книге [2] указывается, что она составлена с целью так расположить геометрический материал, чтобы у изучающих его вырабатывалось умение выполнять нужные в жизни измерения и построения, развивалась наблюдательность, практическая сметка, ясность мысли и доверие к выводам её.

Современные компьютерные средства, в частности программа GeoGebra, которую свободно можно скачать с официального сайта www.geogebra.org, позволяют по-новому взглянуть на эти подходы.

Здесь мы рассмотрим возможности использования программы GeoGebra для проведения геометрических опытов, иллюстраций формул и теорем, установления зависимостей между геометрическими величинами и т. п.

Рабочее окно этой программы имеет вид, показанный на рисунке 1.

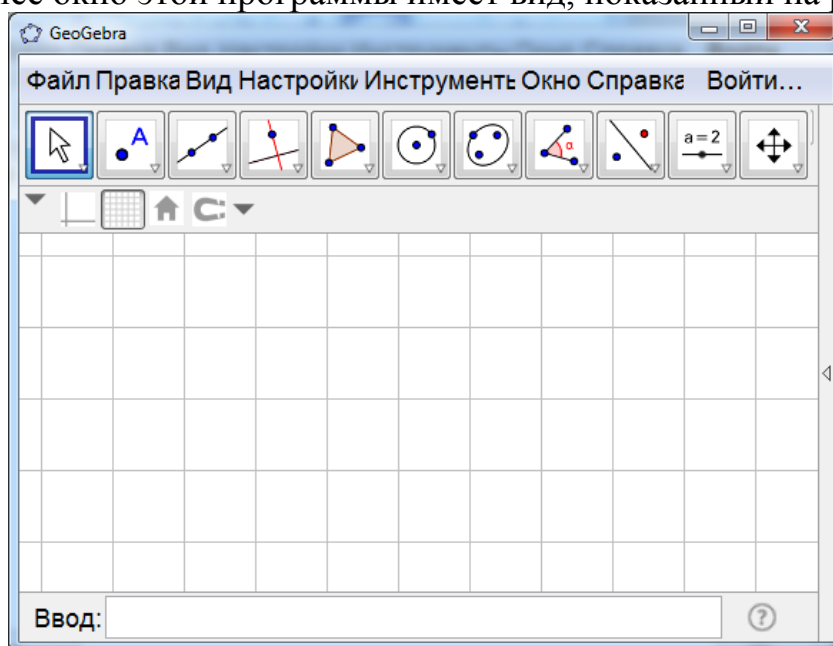


Рис. 1

В верхней части рабочего окна имеется панель инструментов - строка с окошками с изображением инструментов.

С помощью этих инструментов можно:

- изображать точки;
- изображать отрезки, лучи и прямые, проходящие через данные точки;
- проводить прямые, параллельные или перпендикулярные данной прямой;
- строить угол заданной градусной величины;
- строить середину отрезка и биссектрису угла;
- изображать многоугольники, указанием их вершин;
- изображать правильные многоугольники, указанием двух их соседних вершин;
- изображать окружности с данным центром и данным радиусом или с тремя её точками;
- проводить касательные прямые к окружности;
- строить фигуру, симметричную данной относительно: а) точки; б) прямой;
- поворачивать фигуру вокруг данной точки на данный угол;
- находить длины отрезков, периметры многоугольников, величины углов, площади фигур;
- изменять стиль, толщину, цвет линий и многое другое.

Начнём с одной из основных теорем геометрии о сумме углов треугольника.

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180° .

Прежде чем представлять формулировку теоремы и её доказательство, учащимся можно предложить изобразить треугольник, с помощью транспортира измерить его углы и найти их сумму. При этом одним учащимся можно предложить изобразить остроугольный треугольник, другим – прямоугольный, третьим – тупоугольный треугольник. В качестве ответов у учащихся могут получаться значения, близкие к 180° , что объясняется погрешностью измерений.

Для более точных построений и измерений углов можно воспользоваться программой GeoGebra. В ней можно изобразить произвольный треугольник, указав его вершины, найти величины его углов и их сумму. На рисунке 2 показан результат таких действий.

Перемещая вершины, форму треугольника можно изменять, но сумма углов этого треугольника будет оставаться равной 180° .

Конечно, проведённая проверка не заменяет доказательства. Она лишь подкрепляет его собственными опытами и наглядными представлениями.

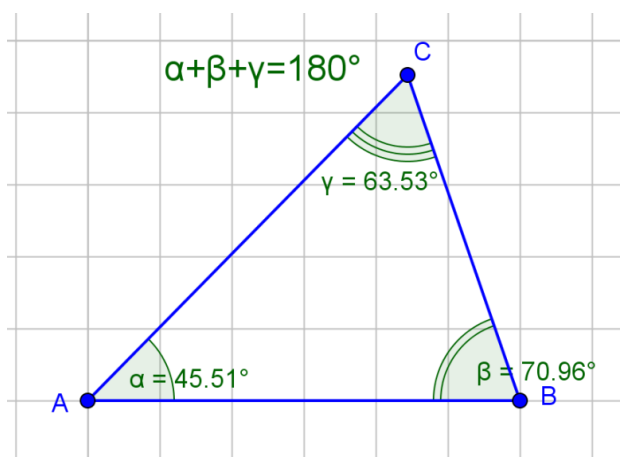


Рис. 2

Для проведения доказательства также можно воспользоваться программой GeoGebra. А именно, изобразим треугольник ABC и через его вершину C проведём прямую c , параллельную прямой AB (рис. 3).

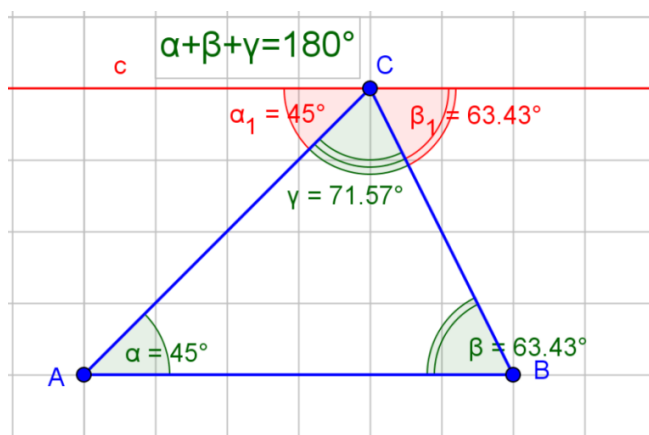


Рис. 3

Внутренние накрест лежащие углы α и α_1 при параллельных прямых AB , c и секущей AC равны, по ранее изученной теореме. В равенстве этих углов можно дополнительно убедиться, найдя их величину. Аналогично, внутренние накрест лежащие углы β и β_1 при параллельных прямых AB , c и секущей BC равны. Перемещая вершину C , форму треугольника ABC можно менять, но указанные внутренние накрест лежащие углы будут оставаться равными.

Углы α_1 , γ , β_1 в сумме составляют развёрнутый угол, величина которого равна 180° . Следовательно, и сумма углов треугольника ABC равна 180° .

Одними из важных теорем геометрии являются теоремы о средних линиях треугольника и трапеции.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Прежде чем представлять формулировку теоремы и её доказательство, учащимся можно предложить изобразить треугольник, ABC ; отметить середины D , E его сторон AC , BC соответственно; провести среднюю линию DE ; с помощью линейки измерить её и сторону AB треугольника; убедиться в том, что средняя линия DE равна половине стороны AB .

Для того чтобы убедиться в параллельности средней линии DE стороне AB , учащимся можно предложить измерить с помощью транспортира углы, образованные прямыми AB , DE и секущей AC ; убедиться, что углы CAB и CDE равны. Следовательно, средняя линия DE параллельна стороне AB .

Все эти построения и измерения можно провести в программе GeoGebra (рис. 4).

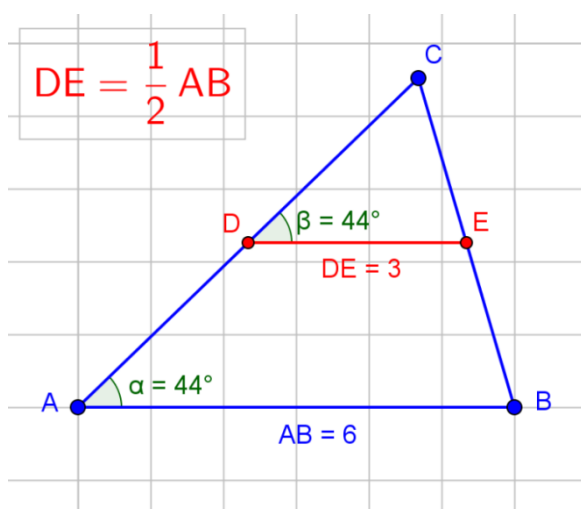


Рис. 4

Перемещая вершины, форму треугольника можно изменять, но средняя линия треугольника будет оставаться параллельной одной из его сторон и равна её половине.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Прежде чем представлять формулировку теоремы и её доказательство, учащимся можно предложить изобразить трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$); отметить середины E , F боковых сторон AD , BC соответственно; провести среднюю линию EF ; с помощью линейки измерить её и основания AB , CD ; убедиться, что средняя линия EF равна их полусумме.

Для того чтобы убедиться в параллельности средней линии EF основанию AB , учащимся можно предложить измерить с помощью транспортира углы, образованные прямыми AB , EF и секущей AD ; убедиться, что углы DAB и DEF равны. Следовательно, средняя линия EF параллельна основанию AB , значит, и основанию CD .

Все эти построения и измерения можно провести в программе GeoGebra (рис. 5).

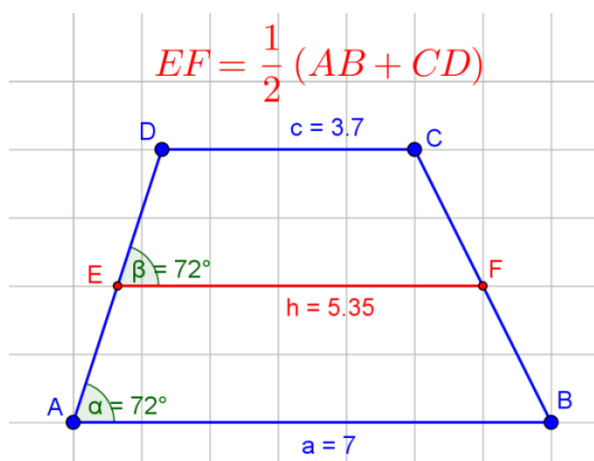


Рис. 5

Перемещая вершины, форму трапеции можно изменять, но её средняя линия будет оставаться параллельной основаниям и равна их полусумме.

Рассмотрим ещё одну важную теорему об углах, вписанных в окружность.

Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Учащимся можно предложить изобразить окружность, вписанный в неё угол ACB и центральный угол AOB , опирающийся на ту же дугу; с помощью транспортира измерить эти углы и убедиться в справедливости теоремы.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 6).

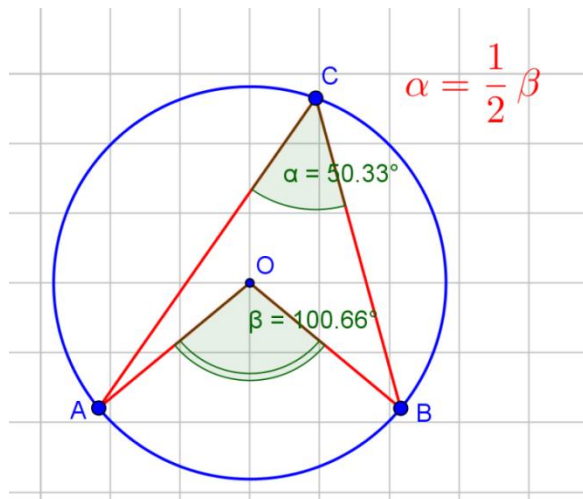


Рис. 6

Перемещая точки A , B , C , вписанный и центральный углы можно изменять, но при этом величина вписанного угла будет оставаться равной половине величины соответствующего центрального угла.

Теорема. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, заключённые между этой точкой и точками касания, равны.

Учащимся можно предложить изобразить окружность; выбрать какую-нибудь точку вне этой окружности; провести из неё касательные к окружности и отметить точки касания; измерить отрезки касательных от выбранной точки до точек касания; убедиться в равенстве этих отрезков.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 7).

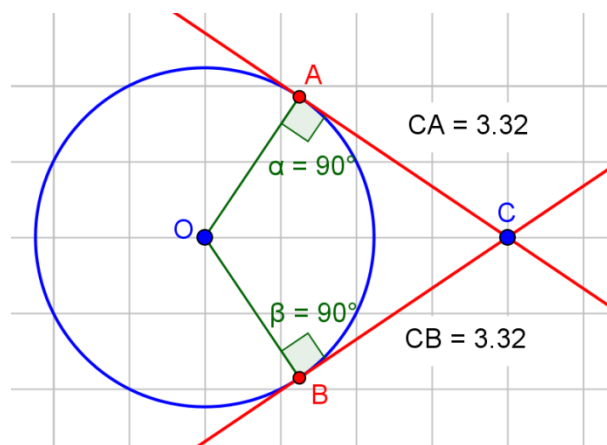


Рис. 7

Положение точки C можно изменять, но отрезки касательных будут оставаться равными.

Теорема. Суммы противоположных сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

Учащимся можно предложить изобразить окружность; построить четырёхугольник, описанный около этой окружности; измерить его стороны и убедиться в том, что суммы противоположных сторон равны.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 8).

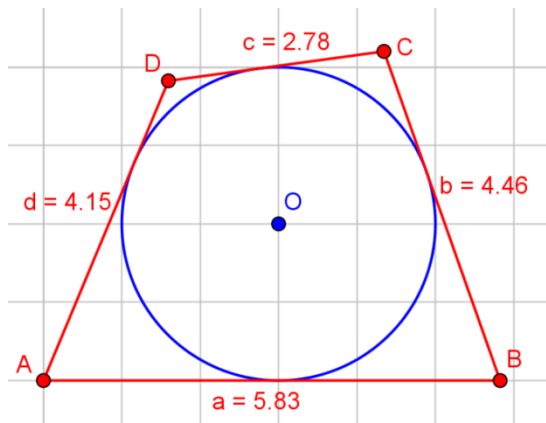


Рис. 8

А именно, сначала построим окружность. Затем отметим какую-нибудь точку A вне этой окружности и проведем через неё касательные. Отметим на этих касательных точки B , D и проведём через них касательные к окружности. Найдём точку C их пересечения. Сделаем касательные невидимыми. Построим четырёхугольник $ABCD$ и измерим его стороны.

Перемещая точки A , B , D , форму четырёхугольника $ABCD$ можно изменять, но суммы его противоположных сторон будут оставаться равными.

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центроиде) и делятся в ней в отношении 2:1, считая от его вершин.

Учащимся можно предложить изобразить треугольник, провести в нём медианы и убедиться, что они пересекаются в одной точке. С помощью линейки измерить расстояние от вершины треугольника до точки пересечения медиан и от неё до основания этой медианы. Убедиться в том, что первое расстояние в два раза больше второго.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 9).

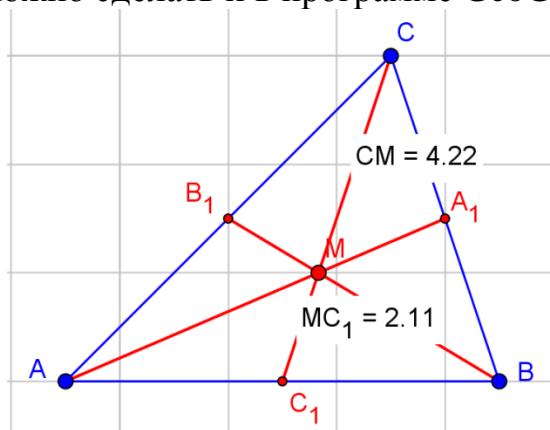


Рис. 9

Перемещая вершины, форму треугольника можно изменять, но его медианы будут пересекаться в одной точке, сохраняя отношение 2:1.

Теорема. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентре).

Учащимся можно предложить изобразить: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный треугольник. Затем провести в них

высоты или их продолжения; выяснить, в каком случае высоты пересекаются в одной точке, а в каком – их продолжения.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 10).

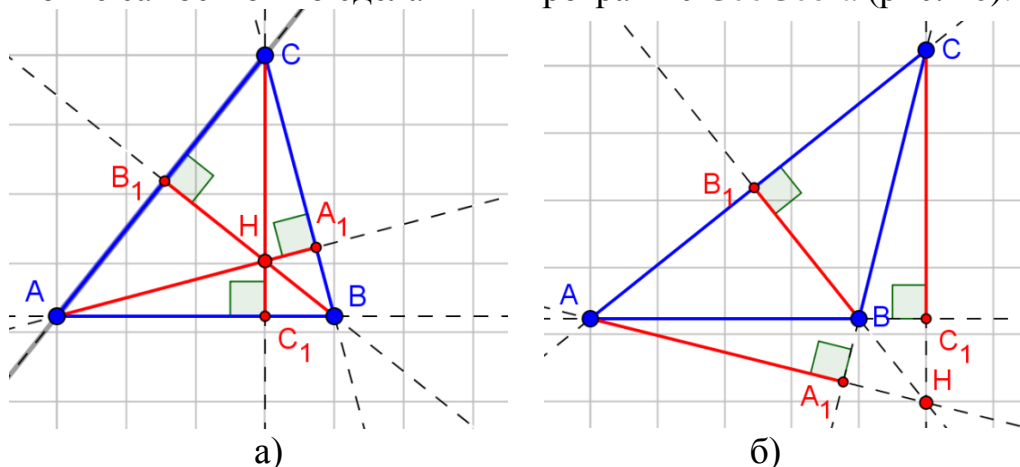


Рис. 10

Аналогичным образом можно поступить и с точкой пересечения биссектрис (центр вписанной окружности), точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (центр описанной окружности).

Теорема (Пифагора). В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Прежде чем доказывать эту теорему, учащимся можно предложить изобразить прямоугольный треугольник; измерить его катеты и гипотенузу; убедиться в том, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 11).

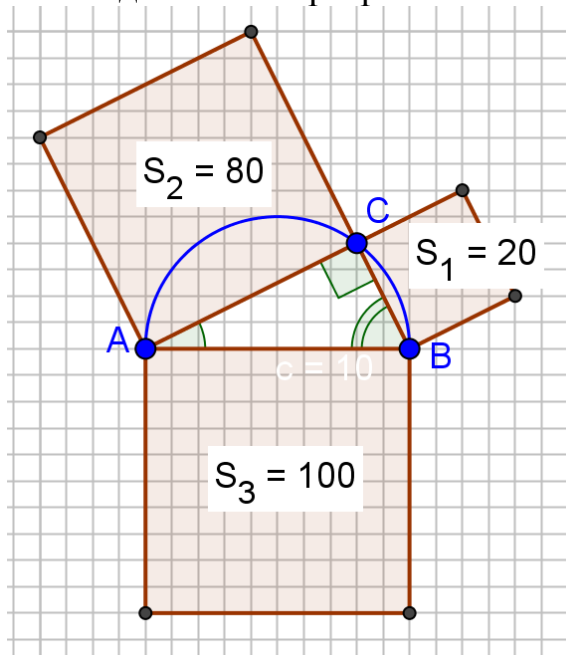


Рис. 11

Для этого сначала строим отрезок AB . Затем на нём, как на диаметре, строим окружность. Выбираем на окружности какую-нибудь точку C и

строим прямоугольный треугольник ABC . На сторонах этого треугольника строим квадраты и находим их площади. Убеждаемся, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Перемещая вершину C по окружности, форму треугольника можно изменять, но площадь квадрата, построенного на гипотенузе, будет оставаться равной сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Литература

1. Астряб А.М. Курс опытной геометрии. Индуктивно-лабораторный метод изложения. – 14-е изд. – М.-Л.: 1928.

2. Иовлев М.Н. Практическая геометрия. – М.: Государственное издательство, 1922.

Сведения об авторе

- Смирнов Владимир Алексеевич;
- Московский педагогический государственный университет, заведующий кафедрой элементарной математики и методики обучения математике;
- 129337, Москва, ул. Дудинка, д. 2, корп. 1, кв. 124;
- (499) 188-51-95;
- v-a-smirnov@mail.ru;
- 01.12.1949;
- 45 03 729767, 16.08.2002, ОВД «Ярославский» г. Москвы;
- Страховое свидетельство: 011-881-577-42;
- ИНН: 771 607 182 607.