В.А. СМИРНОВ, И.М. СМИРНОВА, И.В. ЯЩЕНКО

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5 класс

Москва

2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Геометрия – один из самых увлекательных и важных разделов математики. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она знакомит с разнообразием пространственных форм, формирует необходимые пространственные представления. Во-вторых, геометрия даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А.Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

Кроме этого, изучение геометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

Наконец, геометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых учёных: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н.И. Лобачевского и др.

Она возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. С древних времён люди сталкивались с необходимостью находить расстояния между предметами, определять размеры участков земли, ориентироваться по расположению звёзд на небе и т. п.

Слово ***геометрия*** – греческое, оно означает “землемерие” (***гео*** – земля, ***метрео*** – измеряю).

О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до нашей эры древнегреческий учёный Геродот (V в. до н. э.) написал следующее: "Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию".

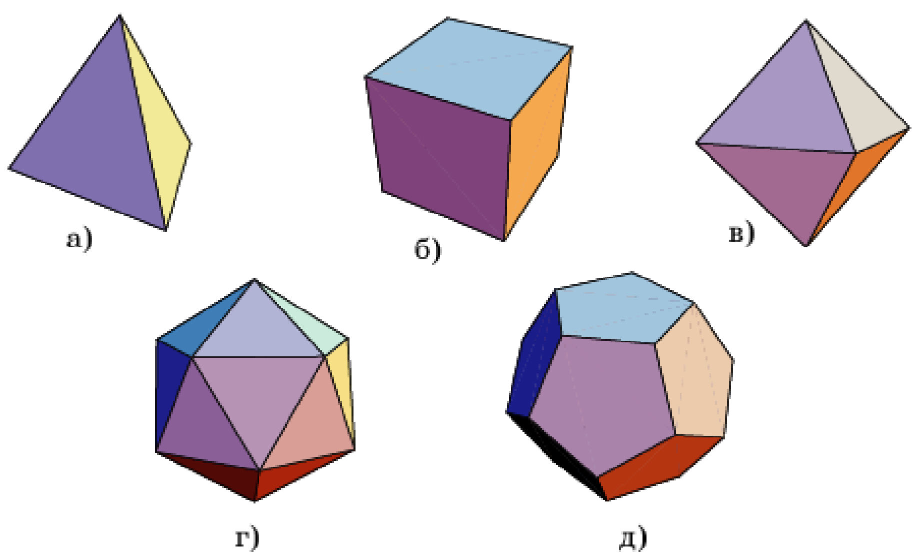
При строительстве различных сооружений необходимо было рассчитывать, сколько материала пойдёт на постройку, вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так, египетские пирамиды, сооружённые за две, три и четыре тысячи лет до нашей эры, поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие геометрические положения и расчёты. Одна из самых известных и больших пирамид – пирамида Хеопса (XXVIII в. до н. э.). Её высота достигает 146,5 м, а основанием служит квадрат, сторона которого равна 233 м. Это сооружение, сотворённое человеком, считалось самым высоким на Земле вплоть до XIX века.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времён года, уметь определять своё местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направления движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звёздами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке - астрономии.

Начиная с VII века до нашей эры, в Древней Греции создаются так называемые философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Всё большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства, исходя из некоторого перечня свойств, принимаемых без доказательства и называемых аксиомами.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI-V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора.

Объяснение устройства мира пифагорейцы тесно связывали с геометрией. Так, выделяя первоосновы бытия, они приписывали их атомам форму правильных многогранников, а именно: атомам огня - форму тетраэдра (рис. а), земли – гексаэдра (куба, рис. б), воздуха – октаэдра (рис. в), воды – икосаэдра (рис. г). Всей Вселенной приписывалась форма додекаэдра (рис. д). В названиях этих многогранников указывается число граней (от греч. ***эдра*** – грань): ***тетра*** - четыре, ***гекса*** - шесть, ***окто*** - восемь, ***икоси*** - двадцать, ***додека*** - двенадцать.



Более поздняя философская школа - Александрийская, интересна тем, что дала миру знаменитого учёного Евклида, который жил около 300 г. до нашей эры. В одном из своих сочинений математик Папп (III в. н. э.) изображает его как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм. Насколько серьёзно и строго он относился к изучению математики, можно судить по следующему известному рассказу. Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его "Начала". Евклид на это ответил: "В геометрии нет царского пути".

Именно "Начала" создали славу Евклиду. В них впервые было представлено стройное аксиоматическое строение геометрии. На протяжении около двух тысячелетий этот труд остаётся основой изучения систематического курса геометрии.

В последние столетия возникли и развивались новые направления геометрии, среди которых: геометрия Лобачевского, топология, теория графов и др. Появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволяющие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Геометрия широко используется в других науках: физике, химии, биологии, экономике и др.

Настоящая книга предназначена для занятий наглядной геометрией в 5-ом классе, как на основных уроках, так и на кружковых занятиях по математике.

В ней Вы познакомитесь с геометрическими фигурами и их названиями, научитесь их изображать и моделировать, узнаете о геометрических величинах и научитесь их находить. Всё это позволит развить Ваши геометрические представления, выработать необходимые практические навыки и умения, необходимые для изучения систематического курса геометрии в 7-11 классах.

Предлагаемое пособие служит дополнением к учебнику математики 5-го класса и соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту второго поколения, Примерной программе основного общего образования.

Для работы с ним нужно иметь тетрадь в клетку или рабочую тетрадь, в которой вы будете заносить решения задач, изображать геометрические фигуры, проводить необходимые построения.

В задачах, в формулировках которых участвует клетчатая бумага, мы будем предполагать, что стороны клеток равны 1.

Желаем успехов в изучении наглядной геометрии!

§ 1. Точки, прямые, плоскости

Представление о геометрических фигурах дают окружающие нас объекты. Однако, в отличие от реальных объектов, геометрические фигуры идеальны.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Древнегреческий учёный Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге "Начала" определял точку как то, что не имеет частей.

Точки изображаются остро отточенным карандашом или ручкой на листе бумаги, мелом на доске и т. п. Чем острее карандаш, тем лучше это изображение. Однако изображение точки только приближённое, потому что точка, нарисованная карандашом, всегда имеет хоть и очень маленькие, но ненулевые размеры, а геометрическая точка размеров не имеет.

Точки обозначаются прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots, A_1, B_2, C_3, \ldots, A', B'', C'''$,... (рис. 1.1).

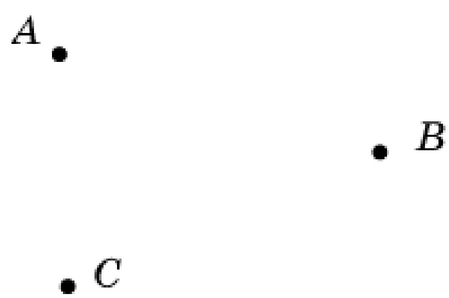


Рис. 1.1

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Евклид определял прямую как длину без ширины.

Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки. Хотя изображения прямых ограничены, их следует представлять себе неограниченно продолженными в обе стороны.

Одним из основных свойств прямой является то, что через две точки проходит только одна прямая.

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами $a, b, c, \ldots, a_1, b_2, c_3, \ldots, a', b'', c''', \ldots$, или двумя прописными латинскими буквами $AB, CD, \ldots, A_1B_1, C_2D_2, \ldots, A'B', C''D'', \ldots$ (рис. 1.2).

Точка может принадлежать данной прямой, в этом случае говорят также, что прямая проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что прямая не проходит через точку (рис. 1.3).

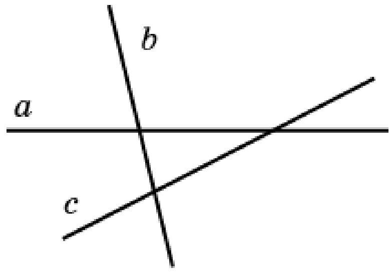


Рис. 1.2

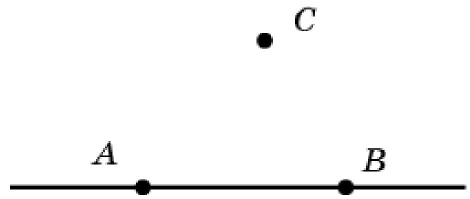


Рис. 1.3

Если две прямые имеют одну общую точку, то говорят, что прямые ***пересекаются*** в этой точке (рис. 1.4).

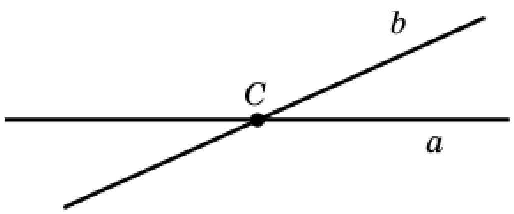


Рис. 1.4

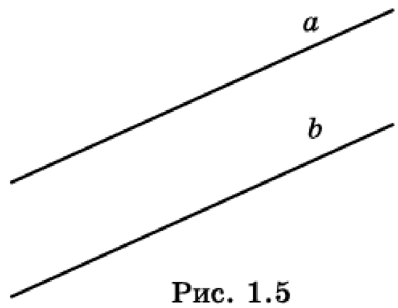


Рис. 1.5

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точка может принадлежать данной плоскости, в этом случае говорят также, что плоскость проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что плоскость не проходит через точку.

Прямая может лежать в плоскости, иметь с плоскостью одну общую точку или не иметь с плоскостью ни одной общей точки.

Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются ***параллельными*** (рис. 1.5).

Вопросы

1. Идеализацией каких объектов является точка?
2. Как определял точку Евклид?
3. Как изображаются точки?
4. Как обозначаются точки?
5. Идеализацией каких объектов является прямая?
6. Как определял прямую Евклид?
7. Как изображаются прямые?
8. Как обозначаются прямые?
9. В чём заключается одно из основныз свойств прямой?

10. Как могут располагаться относительно друг друга точка и прямая?

11. Какие две прямые называются пересекающимися?

12. Идеализацией каких объектов является плоскость?

13. Как могут располагаться относительно друг друга точка и плоскость?

14. Как могут располагаться относительно друг друга прямая и плоскость?

15. Какие две прямые называются параллельными?

Задачи

1. Сколько общих точек могут иметь две прямые?

2. Сколько прямых изображено на рисунке 1.6? Сколько у них точек попарных пересечений?

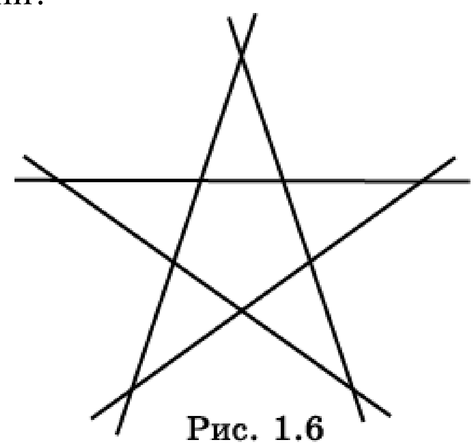


Рис. 1.6

3. Пусть точки A, B, C принадлежат одной прямой и точки B, C, D принадлежат одной прямой. Что можно сказать о всех точках A, B, C, D?

4. Пусть прямые a, b, c пересекаются в одной точке и прямые b, c, d пересекаются в одной точке. Что можно сказать о всех прямых a, b, c, d?

5. Изобразите прямую и точки, принадлежащие этой прямой и не принадлежащие ей.

6. Изобразите три точки, не принадлежащие одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из трёх данных точек. Сколько всего таких прямых?

7. Изобразите четыре точки, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из четырёх данных точек. Сколько всего таких прямых?

8. Изобразите пять точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из пяти данных точек. Сколько всего таких прямых?

9. Изобразите шесть точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из шести данных точек. Сколько всего таких прямых?

10. Сколько точек попарных пересечений могут иметь три прямые? Изобразите различные случаи.

11. Изобразите четыре прямые так, чтобы у них было шесть точек попарных пересечений.

12. Изобразите пять прямых так, чтобы у них было десять точек попарных пересечений.

13. На клетчатой бумаге изобразите прямую *AB* и точку *C*, как показано на рисунке 1.7. Через точку *C* проведите прямую, параллельную прямой *AB*.

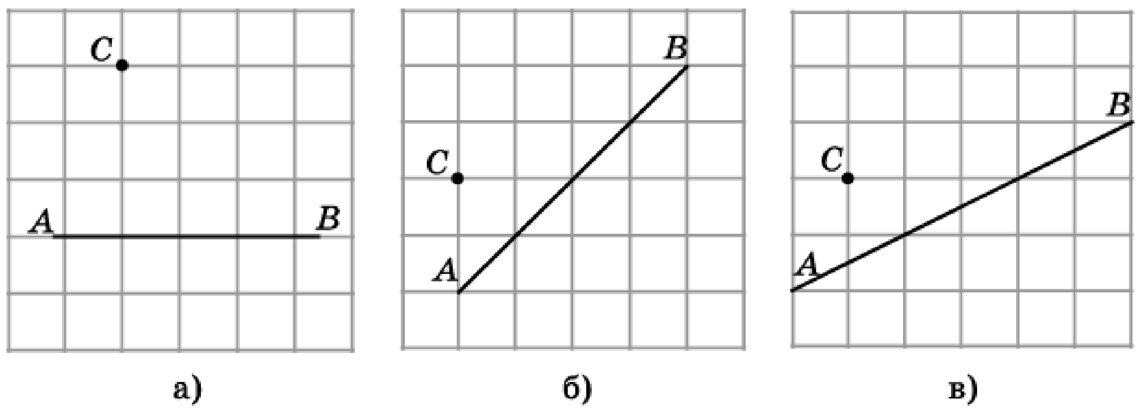


Рис. 1.7

14. Укажите пары параллельных прямых, изображённых на рисунке 1.8.

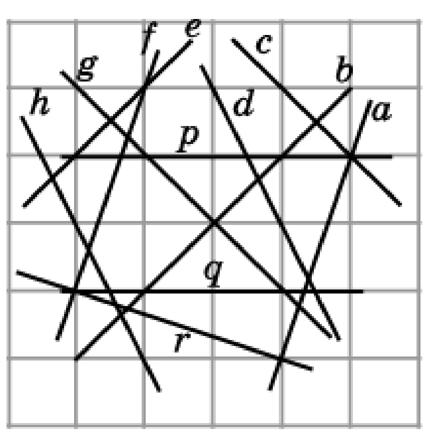


Рис. 1.8

§ 2. Лучи, отрезки

Лучом, или ***полупрямой***, называется часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих от неё по одну сторону. При этом сама данная точка называется ***началом***, или ***вершиной луча***.

Для обозначения лучей используются пары прописных латинских букв, например AB, первая из которых обозначает начало луча, а вторая - какую-нибудь точку, принадлежащую лучу (рис. 2.1).

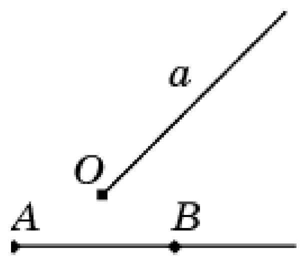


Рис. 2.1

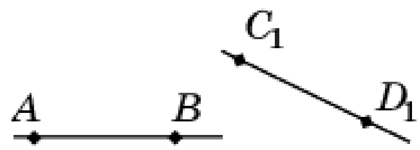


Рис. 2.2

Отрезком называется часть прямой, состоящая из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними. При этом сами данные точки называются ***концами отрезка***.

На листе бумаги отрезки проводят с помощью линейки.

Отрезок обозначается указанием его концов. Например, AB, C_1D_1 (рис. 2.2) и т. д.

Одной из основных операций, которую можно производить с отрезками, является операция ***откладывания данного отрезка*** на данном луче от его вершины. Получающийся при этом отрезок называется ***равным*** исходному отрезку.

Откладывать отрезки можно с помощью линейки, циркуля и т. п.

Равенство отрезков AB и A_1B_1 записывается в виде $AB=A_1B_1$. Оно означает, что если один из этих отрезков, например AB, отложить на луче A_1B_1 от точки A_1, то отрезок AB при этом совместится с отрезком A_1B_1 (рис. 2.3, а).

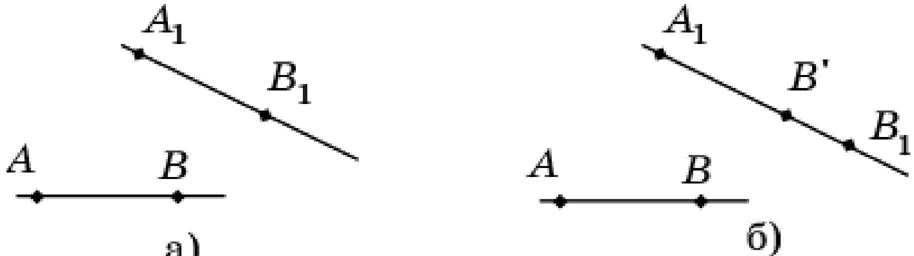


Рис. 2.3

Если при откладывании отрезка AB на луче A_1B_1 от точки A_1 точка B переходит в точку B', лежащую между точками A_1 и B_1, то говорят, что отрезок AB ***меньше*** отрезка A_1B_1 и обозначают $AB < A_1B_1$. Говорят также, что отрезок A_1B_1 ***больше*** отрезка AB и обозначают $A_1B_1 > AB$ (рис. 2.3, б).

Если на отрезке AB между точками A и B взять какую-либо точку C, то образуется два новых отрезка AC и CB. Отрезок AB называется ***суммой*** отрезков AC и CB и обозначается $AB = AC + CB$ (рис. 2.4). Каждый из отрезков AC и CB называется ***разностью*** отрезка AB и другого отрезка, обозначается $AC = AB - CB$, $CB = AB - AC$.

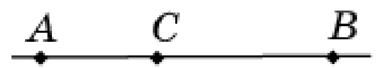


Рис. 2.4

Чтобы сложить два произвольных отрезка AB и CD, продолжим отрезок AB за точку B и на этом продолжении отложим отрезок BE, равный CD (рис. 2.5). Отрезок AE даст сумму отрезков AB и CD, $AE = AB + CD$.

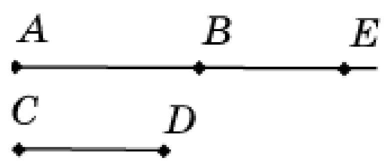


Рис. 2.5

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего отрезка меньшего.

Точка, делящая отрезок на две равные части, называется его ***серединой***.

Вопросы

1. Какая фигура называется лучом?
2. Как обозначается луч?
3. Какая фигура называется отрезком?
4. Как обозначается отрезок?
5. Какие операции можно производить с отрезками?
6. Как обозначается равенство отрезков?

Задачи

1. На сколько частей делят прямую: а) одна точка; б) две точки; в) три точки; г)* *n* точек?

2. На клетчатой бумаге изобразите луч *CE* и отрезок *AB*, как показано на рисунке 2.6. От вершины *C* луча *CE* отложите отрезок *CD*, равный отрезку *AB*.

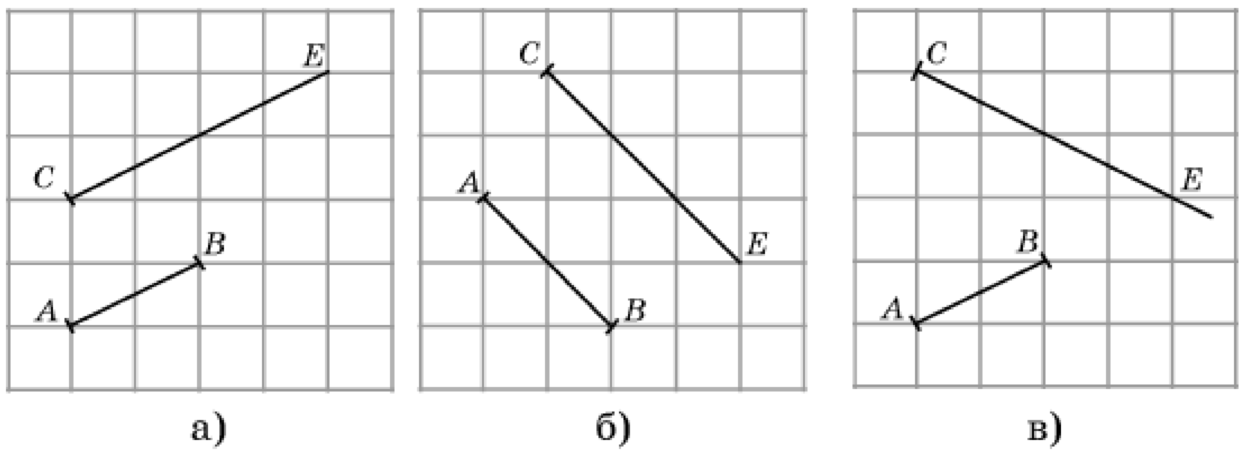


Рис. 2.6

3. Укажите равные отрезки, изображённые на рисунке 2.7.

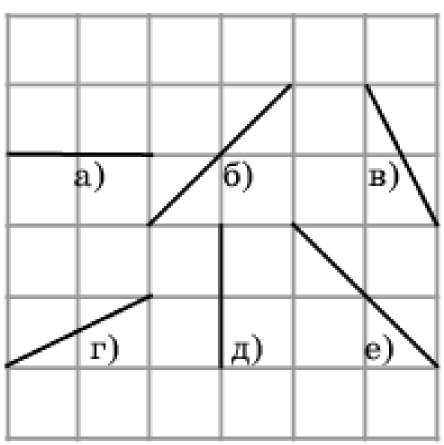


Рис. 2.7

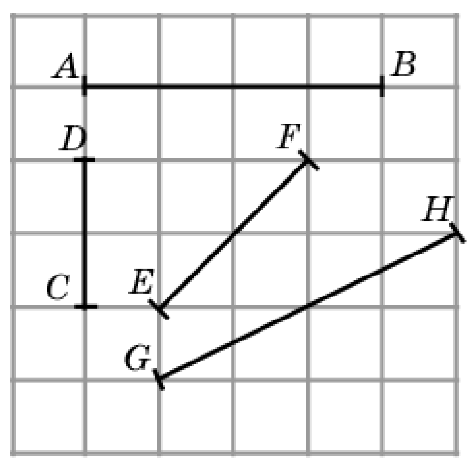


Рис. 2.8

4. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 2.8. Укажите середины отрезков *AB*, *CD*, *EF*, *GH*.

5. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 2.9. Укажите точки, делящие отрезки *AB*, *CD*, *EF* на три равные части.

6. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 2.10. Изобразите отрезок, равный сумме отрезков *AB* и *CD*.

7. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 2.11. Изобразите отрезок, равный разности отрезков *AB* и *CD*.

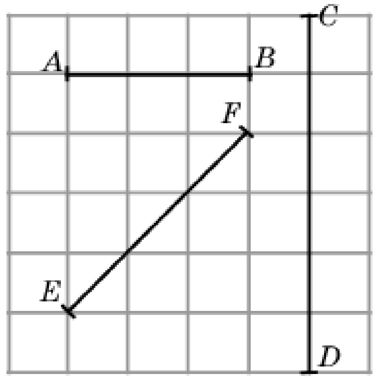


Рис. 2. 9

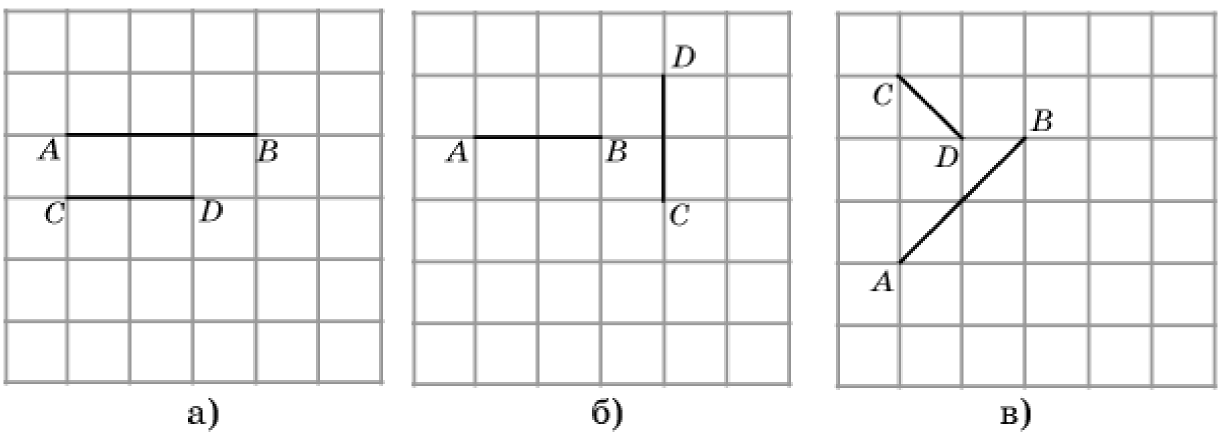


Рис. 2.10

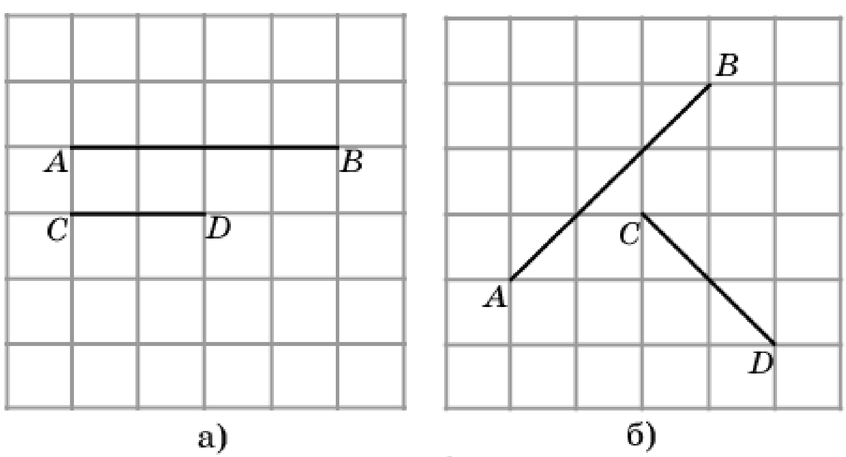


Рис. 2.11

8. Расположите номера в порядке возрастания соответствующих отрезков, изображённых на рисунке 2.12.

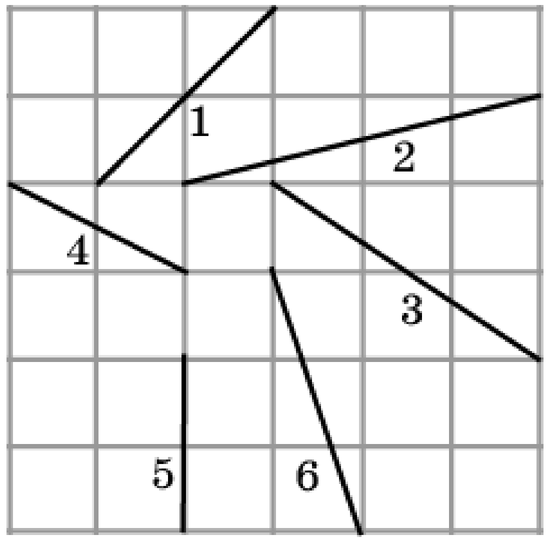


Рис. 2.12

9. Сравните отрезки *AB* и *CD*, изображённые на рисунках 2.13.

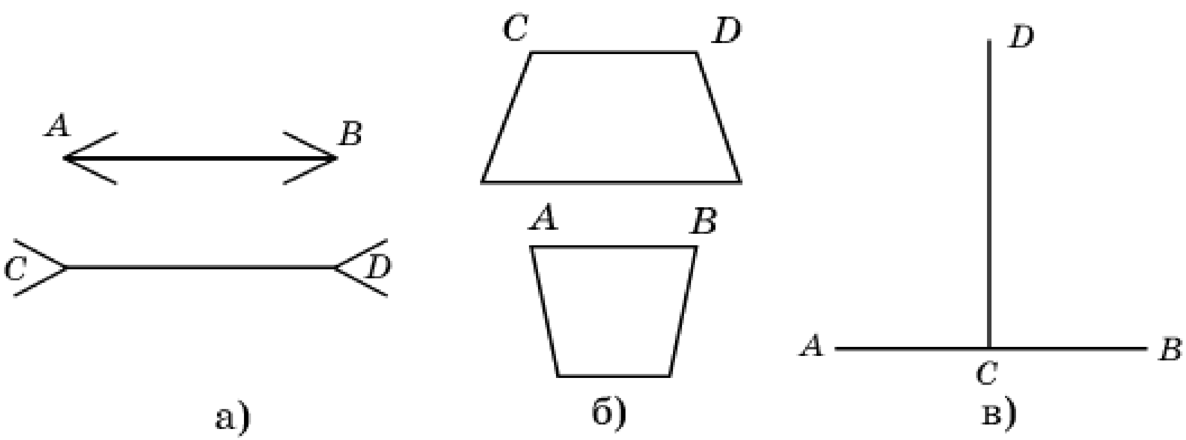


Рис. 2.13

§ 3. Измерение длин отрезков

Измерение длины отрезка основано на сравнении его с отрезком, длина которого принимается за единицу (единичный отрезок).

Длина отрезка – это положительное число, показывающее, сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в данном отрезке.

Длину отрезка AB называют также ***расстоянием*** между точками A и B. Длину отрезка AB будем обозначать как и сам отрезок AB.

Для измерения длин отрезков применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является линейка с делениями, обозначающими сантиметры и их десятые части – миллиметры (рис. 3.1).

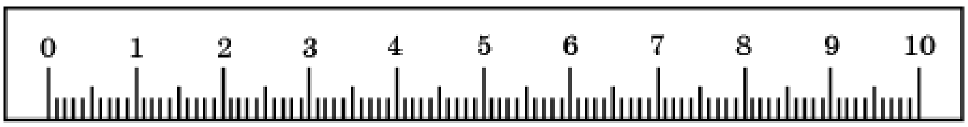


Рис. 3.1

На рисунке 3.2 длины отрезков AB, AC и AD равны соответственно 4 см, 5 см 2 мм, 6 см 5 мм.

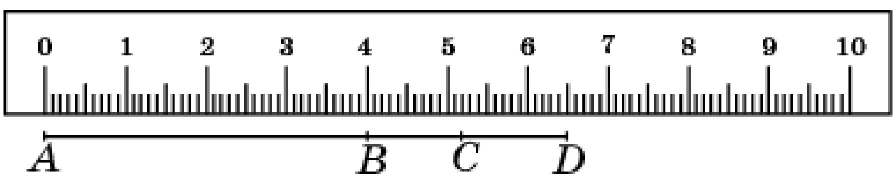


Рис. 3.2

Для измерения длины отрезка на местности обычно используют рулетку, а в качестве единичного отрезка принимается отрезок длины 1 м (метр), равный 100 см. Для измерения больших расстояний в качестве единицы измерения берётся 1 км (километр), равный 1000 м.

Для длин отрезков выполняются следующие свойства.

Свойство 1. Длины равных отрезков равны.

Свойство 2. Длина суммы отрезков равна сумме их длин.

Исторические сведения

Метр, как единая единица измерения длин отрезков, появился относительно недавно, в конце XVIII века. До этого времени существовали различные меры длины, и все они страдали неточностью определения, что давало большие ошибки в вычислениях. По-видимому, одними из самых первых единиц измерения длины были единицы, связанные с размерами человеческого тела.

В одной старинной арабской рукописи VIII века нашей эры, посвящённой вопросам измерения длин, сказано, что за единицу измерения длины принимается локоть, равный ширине 8 кулаков, кулак - ширине 4 пальцев, палец - толщине 6 ячменных зёрен, а ячменное зерно - толщине 6 волос с ослиной морды. Современным учёным, решившим проверить вычисления арабов, пришлось заняться измерениями толщины волос с морды осла.

К концу XVIII века положение с измерениями длин стало совершенно нетерпимым. В каждой стране были свои единицы измерения. И все они были не совершеннее, чем толщина волоса с морды осла. От этого страдали астрономы, торговцы, мореплаватели, землемеры и др. Учёные не раз придумывали хорошие способы избавления от этой путаницы. Они представляли их на утверждение королям, короли благодарили учёных, одобряли проекты и - клали их под сукно.

В 1791 году Французская Академия предложила взять за основу системы мер одну сорокамиллионную часть парижского меридиана. Ей было дано название: метр. Для определения величины метра и изготовления эталона нужно было измерить длину парижского меридиана с большой степенью точности. Для этого были сформированы шесть комиссий.

Измерительными работами во Франции руководил Ж. Даламбер. В 1795 году на парижской конференции были подведены итоги этой работы и утверждён эталон единицы длины - метр. В результате был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве.

Вопросы

1. Что называется длиной отрезка?
2. Как обозначается длина отрезка?
3. Как измеряется длина отрезка?
4. Какие свойства выполняются для длин отрезков?
5. Что называется расстоянием между двумя точками?
6. Когда появился метр?

Задачи

1. Точка C лежит на прямой между точками A и B. Найдите длину отрезка AB, если: а) $AC = 2$ см, $CB = 3$ см; б) $AC = 3$ дм, $CB = 4$ дм; в) $AC = 12$ м, $CB = 5$ м.

2. На прямой в одну сторону последовательно отложены отрезки $OE = 5$ см, $EF = 30$ мм, $FG = 15$ мм, $GH = 11$ см. Найдите отрезки: а) OF; б) OH; в) EG; г) FH.

3. Точки A, B и C принадлежат одной прямой. Известно, что $AB = 4$ см, $AC = 7$ см, $BC = 3$ см. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

4. Точки A, B, C принадлежат одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если $AC = 3$ см, $BC = 5$ см?

5. Могут ли точки A, B, C принадлежать одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC?

6. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся в ней пополам. Известно, что $AO=2CO$. Сравните отрезки AB и CD.

7. На клетчатой бумаге изобразите отрезки AB, CD, EF, как показано на рисунке 3.3. С помощью линейки измерьте их длины.

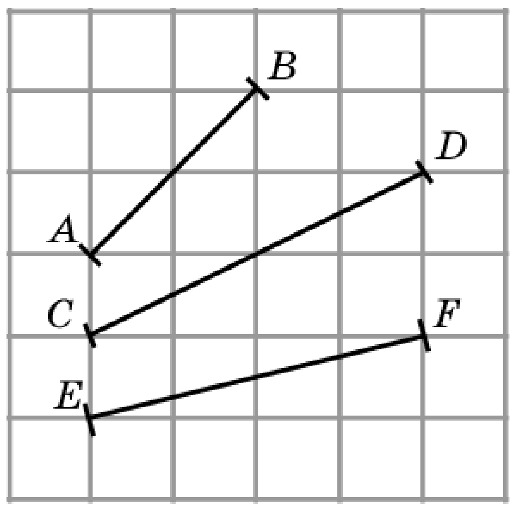


Рис. 3.3

8. Используя линейку, нарисуйте отрезки длиной: а) 6 см; б) 18 мм; в) 1 дм.

9. На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если: а) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC; б) отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC; в) длины отрезков AC и BC относятся как 2:3.

10. На данной прямой от данной точки отложите на глаз отрезки равные: а) 3 см; б) 7 см; в) 10 см. Проверьте точность построений линейкой.

11. На рисунке 3.4 $AB = CD$, $AC = 6$ см. Найдите BD.

Рис. 3.4

12. На рисунке 3.4 $AC = BD$, $AC = 10$ см, $CD = 4$ см. Найдите длину отрезка BC.

13. На прямой последовательно отложены три отрезка: AB, BC и CD так, что $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

14. От точки A, взятой на некоторой прямой, отложены в одном направлении два отрезка AB и AC, причем $AB = 60$ мм, $AC = 100$ мм. Найдите: а) длину отрезка BC; б) расстояние от точки A до середины отрезка BC; в) расстояние между серединами отрезков AB и AC.

15. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма которых равна 28 см; конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго - серединой третьего. Найдите длины этих отрезков.

§ 4. Ломаные

Фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго – началом третьего и т. д., называется ***ломаной линией***, или просто ***ломаной*** (рис. 4.1). Отрезки называются ***сторонами ломаной***, а их концы – ***вершинами ломаной***.

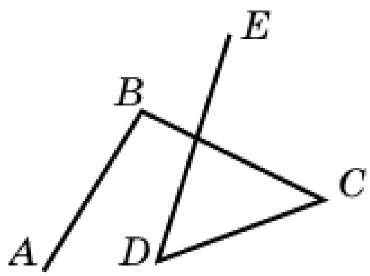


Рис. 4.1

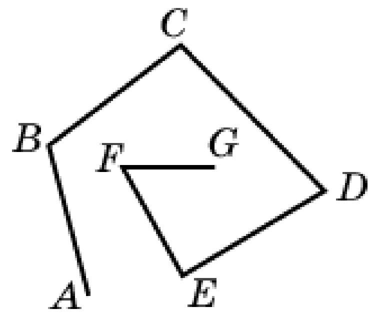


Рис. 4.2

Длиной ломаной называется сумма длин её сторон.

Ломаная обозначается последовательным указанием её вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2\ldots A_n$.

Ломаная называется ***простой***, если она не имеет точек самопересечения (рис. 4.2).

Ломаная называется ***замкнутой***, если начало первого отрезка ломаной совпадает с концом последнего. Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют простой (рис. 4.3).

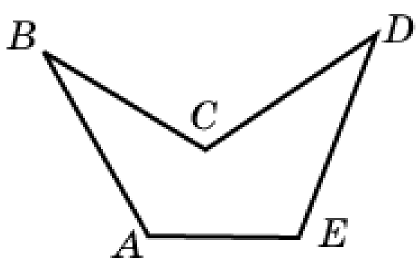


Рис. 4.3

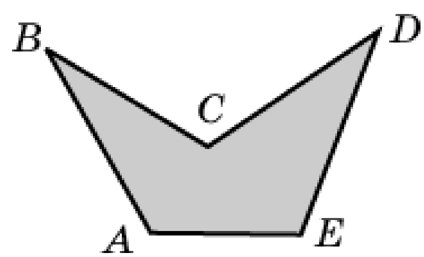


Рис. 4.4

Всякая простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области – ***внутреннюю и внешнюю***. На рисунке 4.4 внутренняя область закрашена.

Вопросы

1. Что называется ломаной? Что называется: а) сторонами; б) вершинами ломаной?

2. Как обозначается ломаная?

3. Что называется длиной ломаной?

4. Какая ломаная называется: а) простой; б) замкнутой?

5. На сколько частей разбивает плоскость простая замкнутая ломаная?

Задачи

1. Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у неё сторон?

2. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у неё вершин?

3. Укажите, какие фигуры, изображённые на рисунке 4.5, являются простыми ломаными?

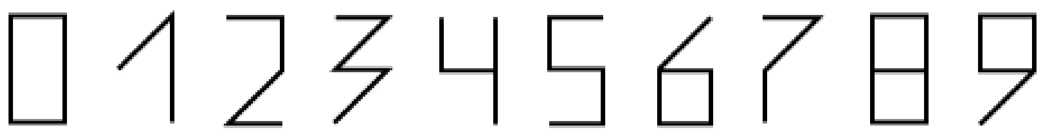
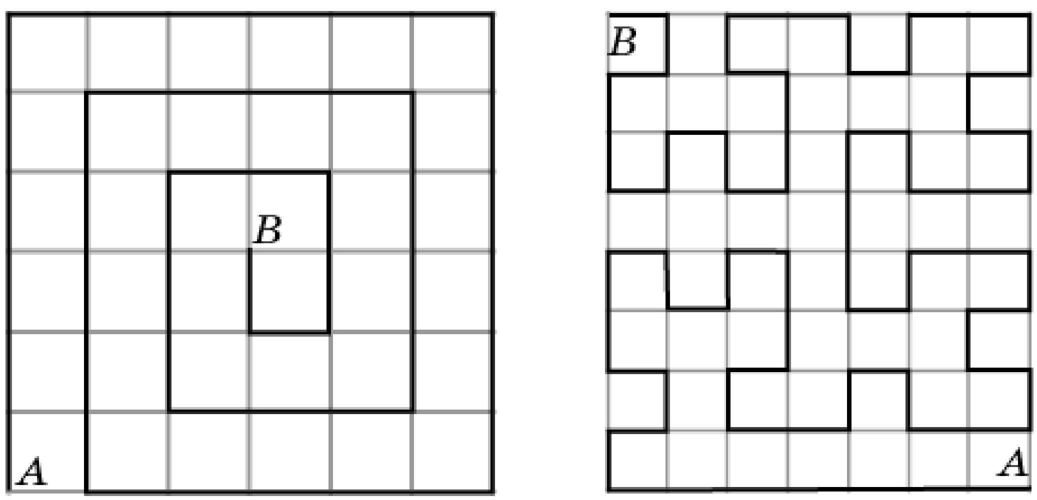


Рис. 4.5

4. Найдите длины ломаных с концами A, B, изображённых на рисунке 4.6.



а) б)

Рис. 4.6

5. Сравните длины ломаных $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ на рисунке 4.7, не измеряя их.

6. Сравните длины ломаных AB_1C и AB_2C на рисунке 4.8, не измеряя их.

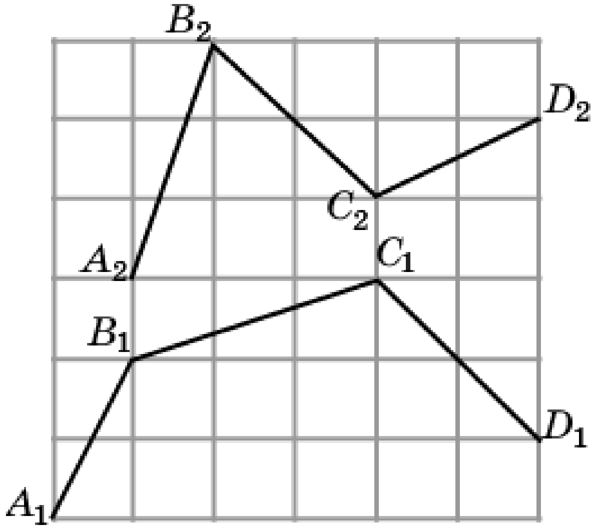


Рис. 4.7

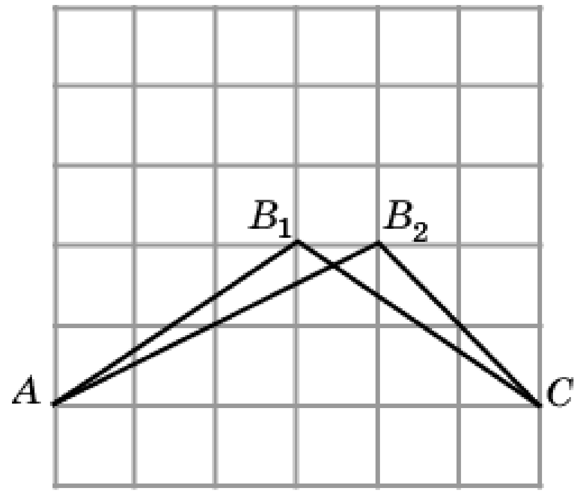
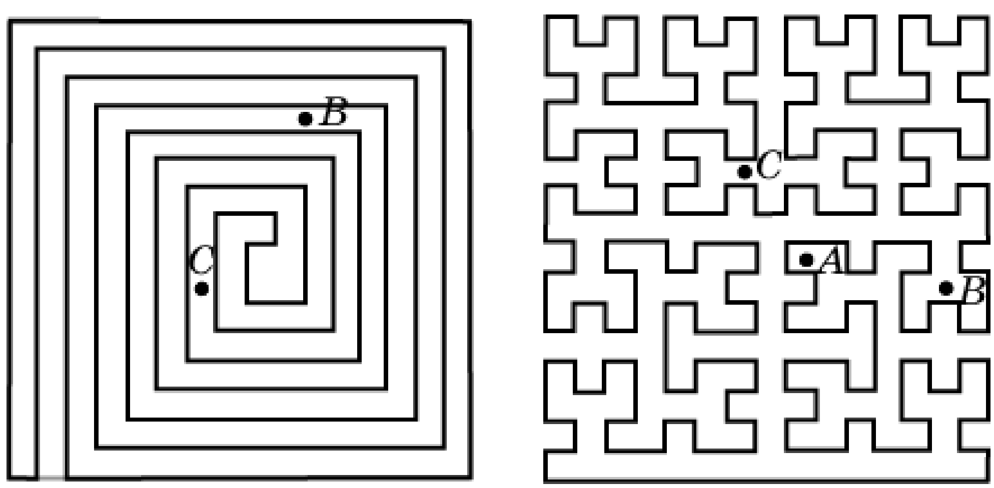


Рис. 4.8

7. Изобразите замкнутую пятистороннюю ломаную, которая имеет: а) две точки самопересечения; б) три точки самопересечения; в) пять точек самопересечения.

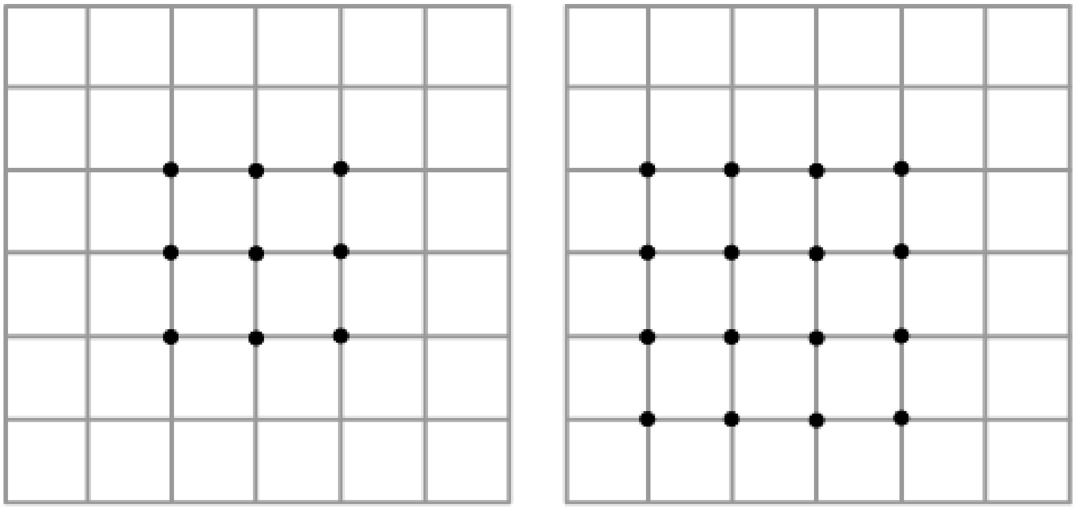
8. Проверьте, что линия, изображённая на рисунке 4.9, является простой замкнутой ломаной. Выясните, какая из данных точек лежит: а) внутри; б) вне этой ломаной.



а) б)

Рис. 4.9

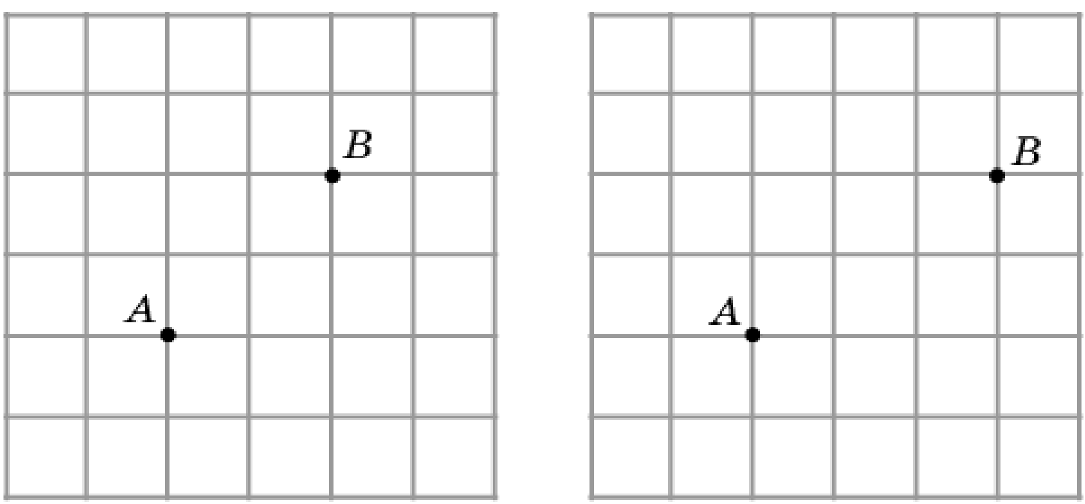
9. Изобразите: а) четырёхстороннюю ломаную; б) шестистороннюю ломаную, проходящую через все данные точки на рисунке 4.10.



а) б)

Рис. 4.10

10. Сколько ломаных: а) длиной 4; б) длиной 5, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяет точки *A* и *B* (рис. 4.11)?



а) б)

Рис. 4.11

§ 5. Полуплоскость и угол

Проведём на плоскости какую-нибудь прямую *a*. Она разобьёт плоскость на две части. На рисунке 5.1 точки *A* и *B* принадлежат одной из этих частей, отрезок *AB* не пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки *A* и *B* ***лежат по одну*** сторону от прямой *a*. Точки *B* и *C* принадлежат разным частям плоскости, отрезок *BC* пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки *B* и *C* ***лежат по разные стороны*** от прямой *a*.

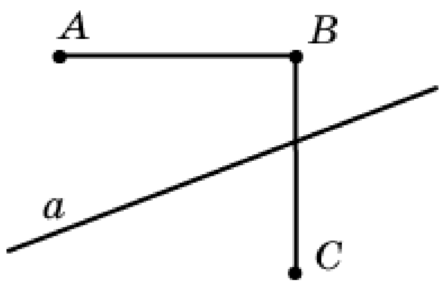


Рис. 5.1

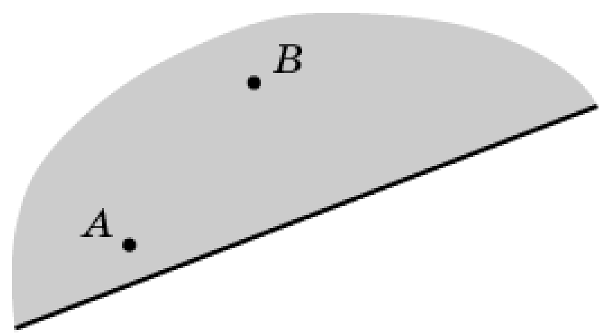


Рис. 5.2

Часть плоскости, состоящая из точек данной прямой и точек, лежащих по одну сторону от этой прямой, называется ***полуплоскостью*** (рис. 5.2).

Рассмотрим два луча с общей вершиной (рис. 5.3) Они разбивают плоскость на две части.

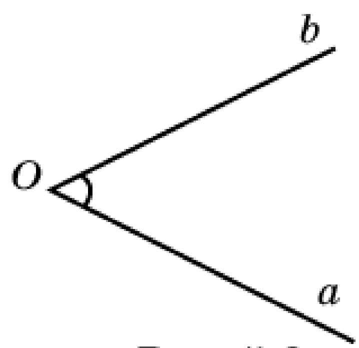


Рис. 5.3

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется ***углом***. Общая вершина называется ***вершиной угла***, а сами лучи - ***сторонами угла***.

Угол обозначается или одной буквой, указывающей его вершину, или тремя буквами, средняя из которых указывает вершину угла, а крайние –

какие-нибудь точки на сторонах угла. Например, $\angle A$, $\angle AOB$ и т. д. Иногда углы обозначаются цифрами, например, $\angle 1$, $\angle 2$ и т. д.

Точки угла, не принадлежащие его сторонам, называются ***внутренними***. Лучи, исходящие из вершины данного угла и проходящие через внутренние точки угла, называются ***внутренними***.

На рисунке 5.4 изображён угол AOB. Точки C и D – его внутренние точки, лучи OC и OD – его внутренние лучи.

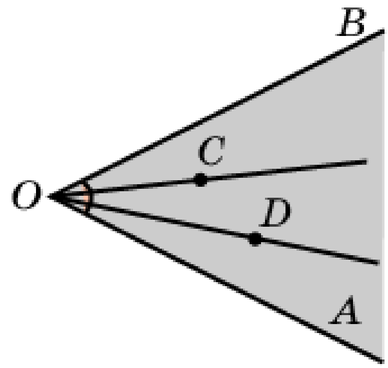


Рис. 5.4

Угол называется ***развёрнутым***, если его стороны вместе составляют прямую (рис. 5.5, а). В противном случае угол называется ***неразвёрнутым***.

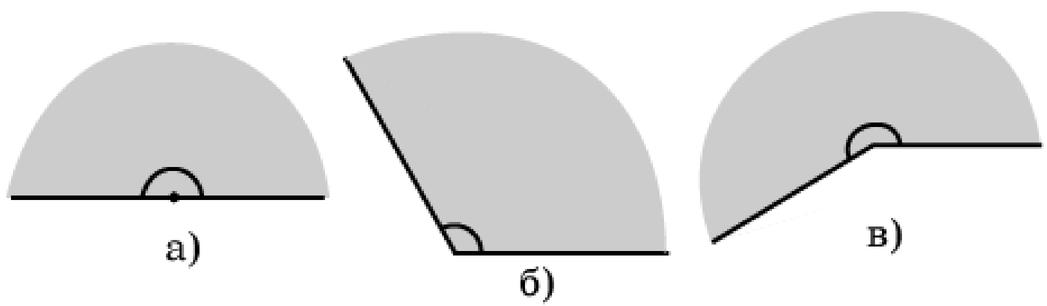


Рис. 5.5

Неразвёрнутый угол может быть меньше развёрнутого, т. е. являться частью развёрнутого угла (рис. 5.5, б), или быть больше развёрнутого, т. е. содержать развёрнутый угол (рис. 5.5, в).

Как правило, если не оговорено противное, мы будем рассматривать углы, меньшие развёрнутых.

Два угла называются ***смежными***, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую (рис. 5.6, а).

Два угла называются ***вертикальными***, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла (рис. 5.6, б).

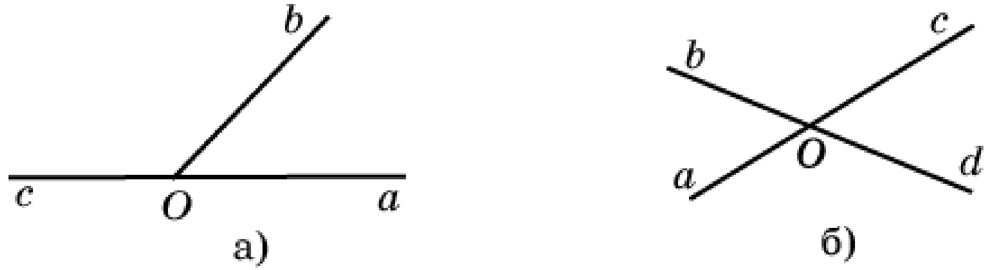


Рис. 5.6

Одной из основных операций, которую можно производить с углами, является операция ***откладывания данного угла*** в ту или другую сторону от данного луча (рис. 5.7). Получающийся при этом угол называется ***равным*** исходному углу.

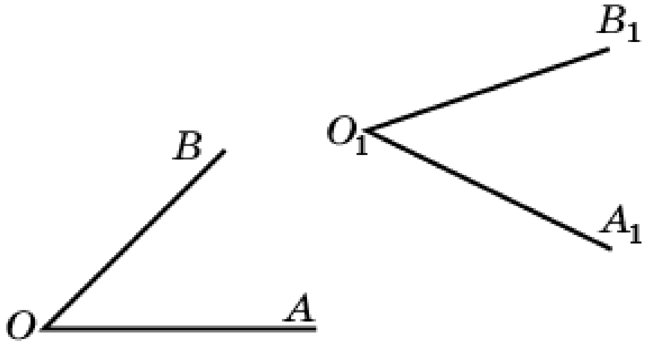


Рис. 5.7

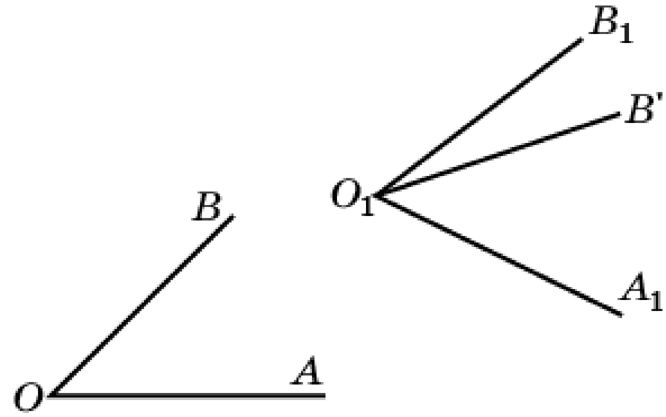


Рис. 5.8

Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например AOB, отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1, то угол AOB при этом совместится с углом $A_1O_1B_1$.

Если при откладывании угла AOB от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч O_1B', лежащий внутри угла $A_1O_1B_1$, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$ и обозначают $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ (рис. 5.8). Говорят также, что угол $A_1O_1B_1$ больше угла AOB и обозначают $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$.

Если внутри угла AOB провести луч OC, то образуется два новых угла AOC и COB (рис. 5.9). Угол AOB называется ***суммой*** углов AOC и COB и обозначается $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$. Каждый из углов AOC и COB называется ***разностью*** угла AOB и другого угла, обозначается $\angle AOC = \angle AOB - \angle COB$, $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC$.

Чтобы сложить два угла, например AOB и CO_1D (рис. 5.10), отложим угол CO_1D от луча OB так, чтобы точки A и D находились по разные стороны от прямой *OB*. Обозначим *OE* луч, в который перейдёт луч O_1D. Тогда угол *AOE* даст сумму углов *AOB* и CO_1D, $\angle AOE = \angle AOB + \angle CO_1D$.

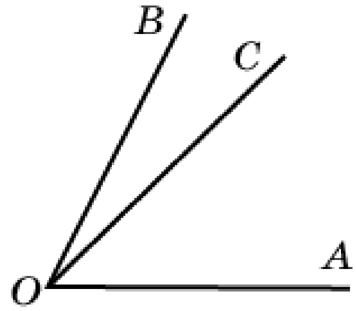


Рис. 5.9

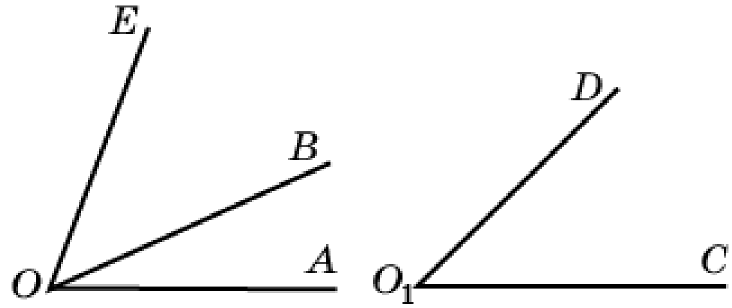
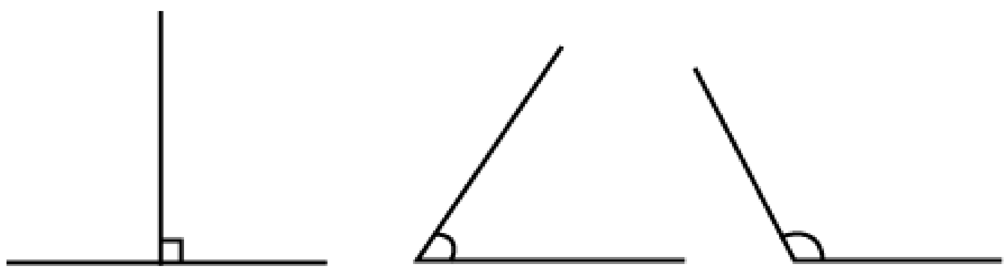


Рис. 5.10

Угол, равный своему смежному, называется ***прямым*** (рис. 5.11, а). Угол, меньший прямого угла, называется ***острым*** (рис. 5.11, б). Угол, больший прямого угла, но меньший развёрнутого угла, называется ***тупым*** (рис. 5.11, в).



а) б) в)

Рис. 5.11

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами, на которые делятся данные прямые точкой их пересечения (рис. 5.12).

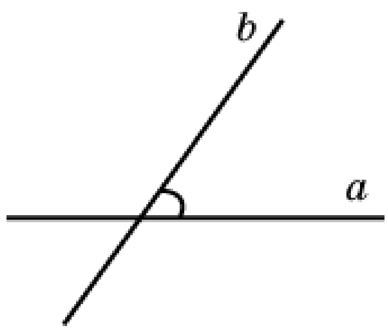


Рис. 5.12

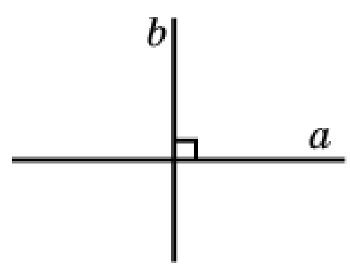


Рис. 5.13

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если они образуют прямые углы (рис. 5.13).

Биссектрисой угла называется внутренний луч, делящий этот угол на два равных угла (рис. 5.14).

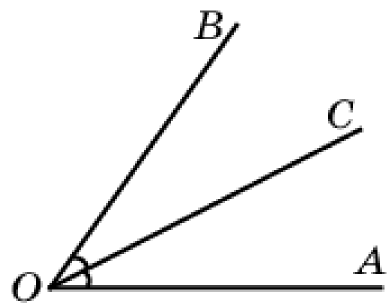


Рис. 5.14

Вопросы

1. На сколько частей прямая разбивает плоскость?
2. Что называется полуплоскостью?
3. В каком случае две точки принадлежат: а) одной полуплоскости; б) разным полуплоскостям относительно данной прямой?
4. Какая фигура называется углом? Что называется вершиной угла? Что называется сторонами угла?
5. Какой угол называется развёрнутым?
6. Какие углы называются: а) смежными; б) вертикальными?
7. Как обозначаются углы?
8. Какую операцию можно производить с углами?
9. Какие углы называются равными?
10. Как обозначается равенство углов?
11. Что означает, что один угол меньше другого? Какое обозначение в этом случае используется?
12. Как определяется: а) сумма двух углов; б) разность двух углов?
13. Какой угол называется: а) острым; б) прямым; в) тупым?
14. Какие прямые называются перпендикулярными?
15. Что называется биссектрисой угла?

Задачи

1. На сколько частей разбивают плоскость: а) две пересекающиеся прямые; б) три попарно пересекающиеся прямые, не пересекающиеся в одной

точке; в) четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке.

2. Изобразите прямую *p* и точки *A, B, C, D, E, F* такие, что *A, E* принадлежат данной прямой, а остальные ей не принадлежат, причём *D* и *F* лежат в разных полуплоскостях, *B* и *C* – в одной полуплоскости, и отрезок *BD* пересекает прямую *p*.

3. Даны прямая и четыре точки *A*, *B*, *C*, *D*, не принадлежащие этой прямой. Пересекает ли эту прямую отрезок *AD*, если: а) отрезки *AB*, *BC* и *CD* пересекают прямую; б) отрезки *AC* и *BC* пересекают прямую, а отрезок *BD* не пересекает; в) отрезки *AB* и *CD* пересекают прямую, а отрезок *BC* не пересекает; г) отрезки *AB* и *CD* не пересекают прямую, а отрезок *BC* пересекает; д) отрезки *AB, BC* и *CD* не пересекают прямую; е) отрезки *AC*, *BC* и *BD* пересекают прямую? Изобразите данные ситуации.

4. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости, а две другие - в другой полуплоскости относительно этой прямой. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков: а) пересекает прямую; б) не пересекает прямую? Сделайте соответствующий рисунок.

5. Изобразите лучи *OA, OB, OC*, *OD* так, чтобы: а) луч *OC* лежал внутри угла *AOB*, а луч *OD* лежал внутри угла *BOC*; б) луч *OA* лежал внутри угла *BOC*, а луч *OC* лежал внутри угла *AOD*.

6. Сколько всего углов определяется лучами, изображёнными на рисунке 5.15? Назовите их.

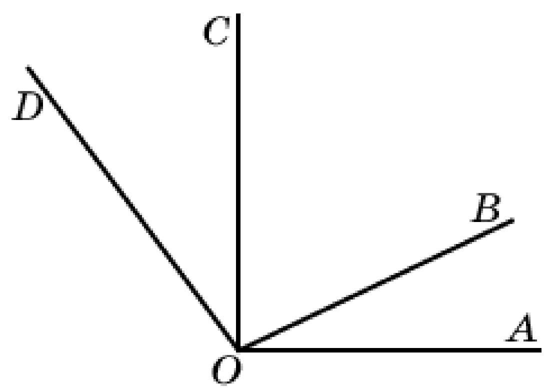


Рис. 5.15

7. Какие из углов на рисунке 5.15: а) острые; б) прямые; в) тупые?

8. Среди углов, изображённых на рисунке 5.16, укажите равные углы.

9. Какой из углов, изображённых на рисунке 5.17, больше?

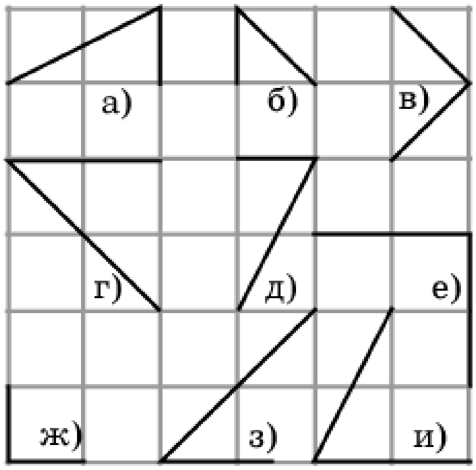


Рис. 5.16

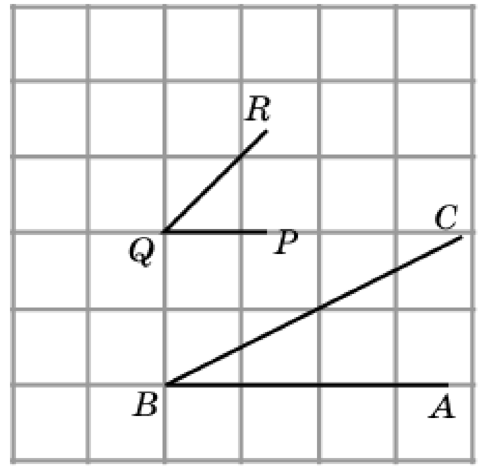


Рис. 5.17

10. Расположите углы, изображённые на рисунке 5.18, в порядке их возрастания.

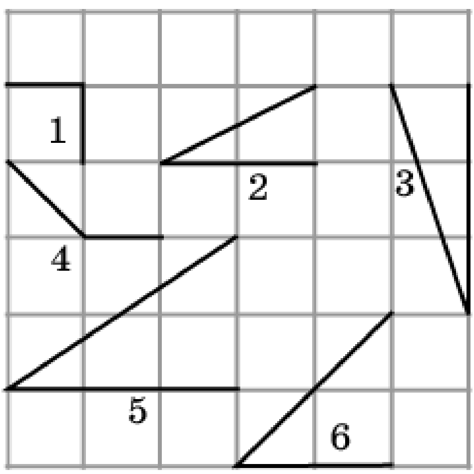


Рис. 5.18

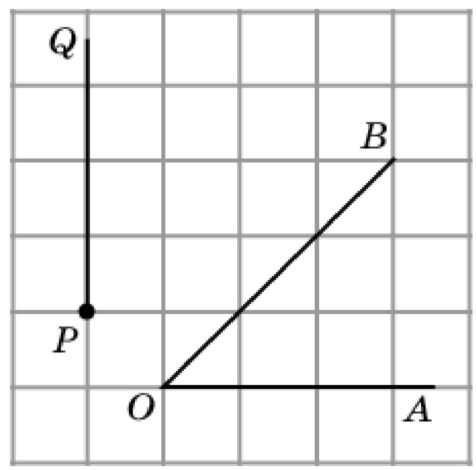


Рис. 5.19

11. На клетчатой бумаге изобразите угол *AOB* и луч *PQ* как показано на рисунке 5.19. От луча *PQ* отложите угол *QPR*, равный углу *AOB*.

12. Сколько имеется углов, смежных данному?

13. Могут ли два смежных угла быть одновременно: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми?

14. По рисунку 5.20 запишите пары: а) вертикальных углов; б) смежных углов.

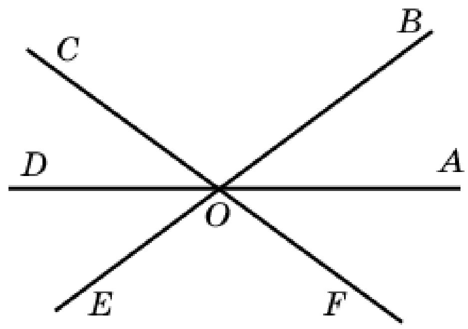


Рис. 5.20

15. На клетчатой бумаге изобразите угол, равный сумме углов *AOB* и *PQR* (рис. 5.21, а, б).

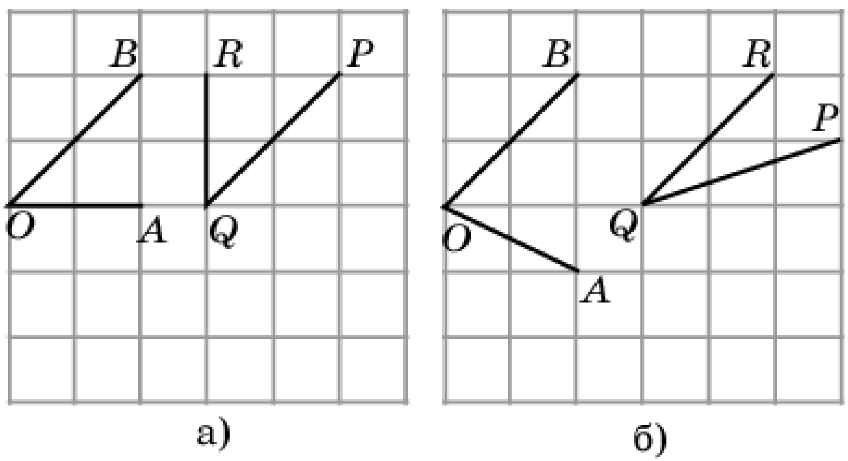


Рис. 5.21

16. На клетчтой бумаге изобразите угол, равный разности углов *AOB* и *PQR* (рис. 5.22, а, б).

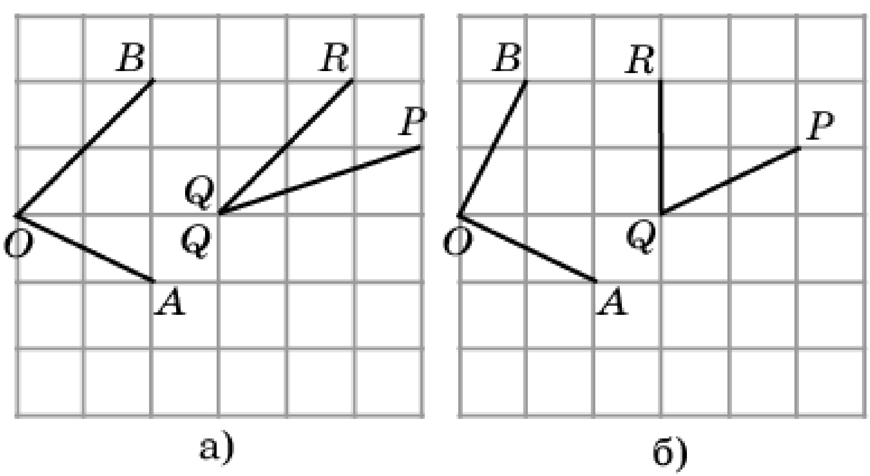


Рис. 5.22

17. На клетчатой бумаге нарисуйте угол *AOB*, аналогично данному на рисунке 5.23, а, б. Изобразите биссектрису *OC* этого угла.

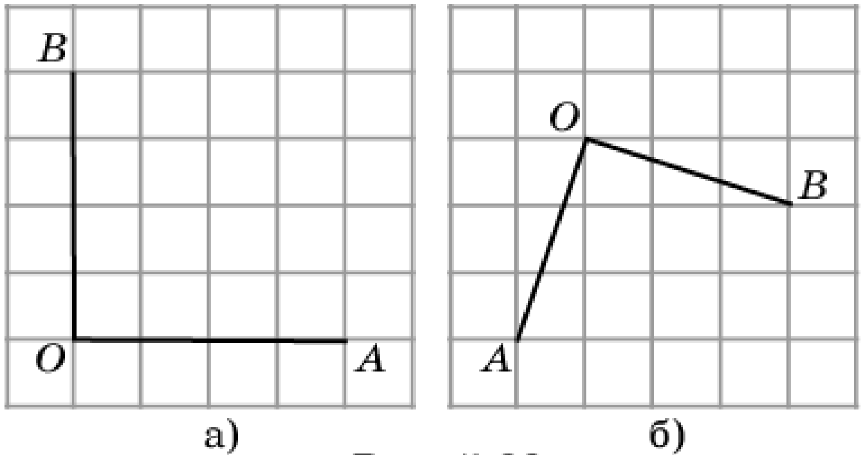


Рис. 5.23

§ 6. Измерение величин углов

Для измерения величин углов применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является транспортир (рис. 6.1).

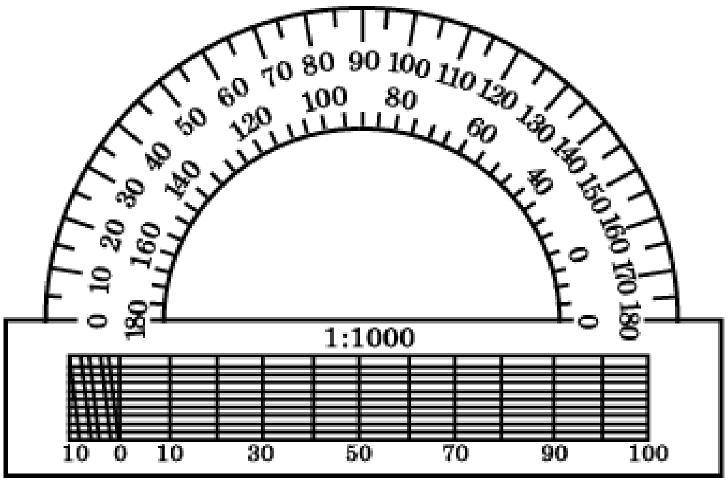


Рис. 6.1

За единицу измерения углов обычно принимается угол, составляющий одну сто восьмидесятую часть развёрнутого угла. Считают, что величина этого угла равна одному градусу, обозначают $1°$.

Градусная величина угла показывает, сколько раз угол в один градус и его части укладываются в этом угле.

На рисунке 6.2 градусные величины углов *AOB*, *AOC* и *AOD* равны соответственно 60^{o}, 90^{o} и 120^{o}.

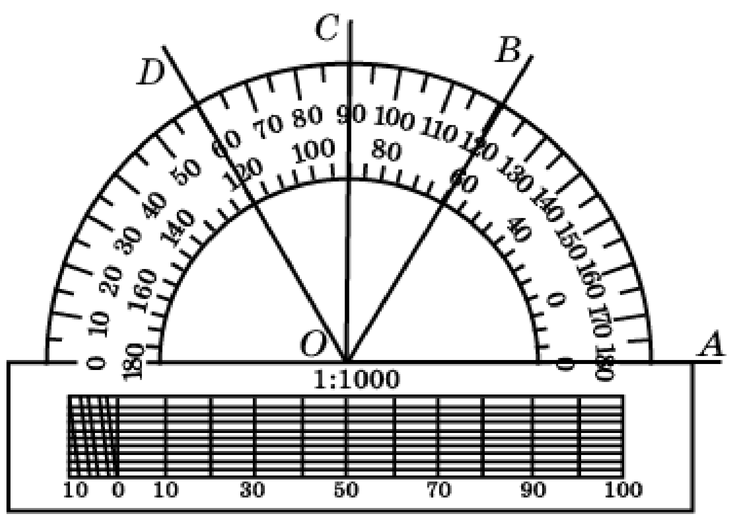


Рис. 6.2

Градусная величина угла удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. Градусные величины равных углов равны.

Свойство 2. Градусная величина суммы углов равна сумме их градусных величин.

Непосредственно из определений следует, что прямой угол равен $90°$. Острый угол меньше $90°$, а тупой угол больше $90°$, но меньше $180°$.

Исторические сведения

Проблема измерения углов восходит к глубокой древности. Астрономические наблюдения, необходимость определения положения солнца и звёзд на небе потребовали создания специальных приборов для определения углов, под которыми видны эти светила. На старинной гравюре (рис. 6.3) художник изобразил моряка эпохи Великих географических открытий, прокладывающего курс корабля с помощью измерительных инструментов.

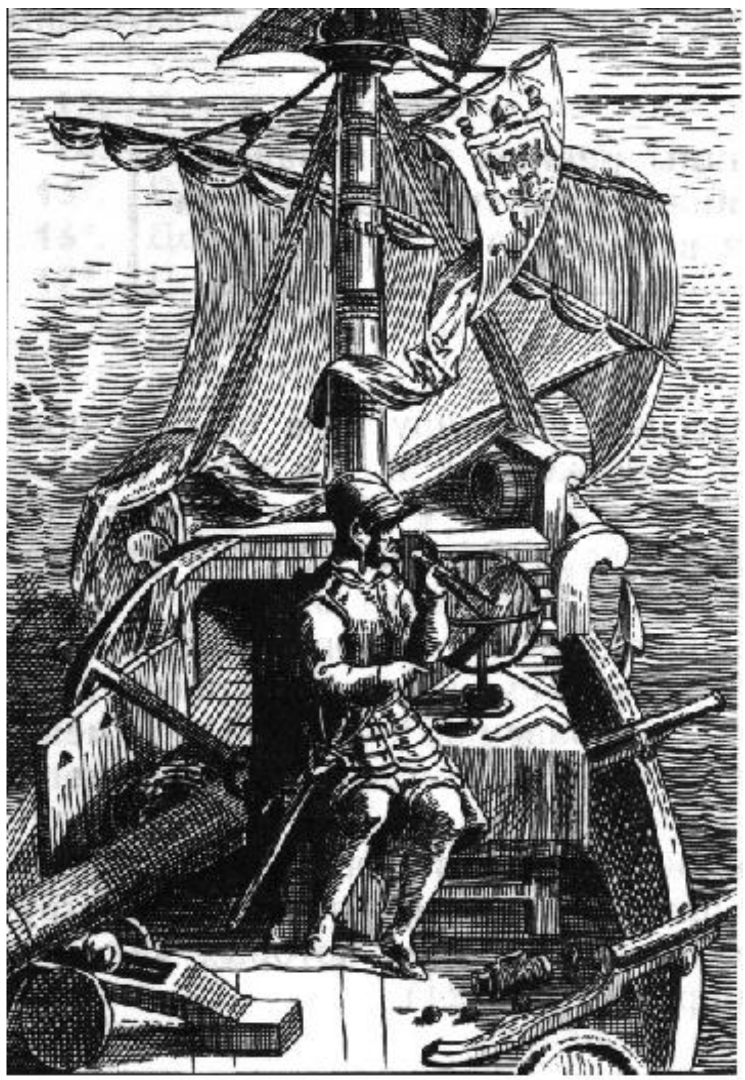


Рис. 6.3

Одним из первых угломерных инструментов была астролябия (рис. 6.4), изобретённая Гиппархом (180-125 гг. до н. э.) и усовершенствованная впоследствии немецким учёным Региомонтаном (1436-1476). Она состояла из тяжёлого медного диска - лимба, который подвешивался за кольцо так, чтобы он висел вертикально и линия $Г_1Г_2$ принимала горизонтальное положение. По краю лимба наносилась шкала, разделённая на градусы. Кроме этого, на лимбе имелась полоса A_1A_2, называемая алидадой, которая могла вращаться вокруг центра лимба и имела на концах поперечные пластинки с отверстиями, называемыми диоптрами.

Для определения высоты звезды над горизонтом наблюдатель прикладывал глаз к нижнему диоптру и поворачивал алидаду так, чтобы звезда была видна через другой диоптр. Деление на шкале, около которого останавливался край алидады, и показывало высоту звезды над горизонтом в градусах.

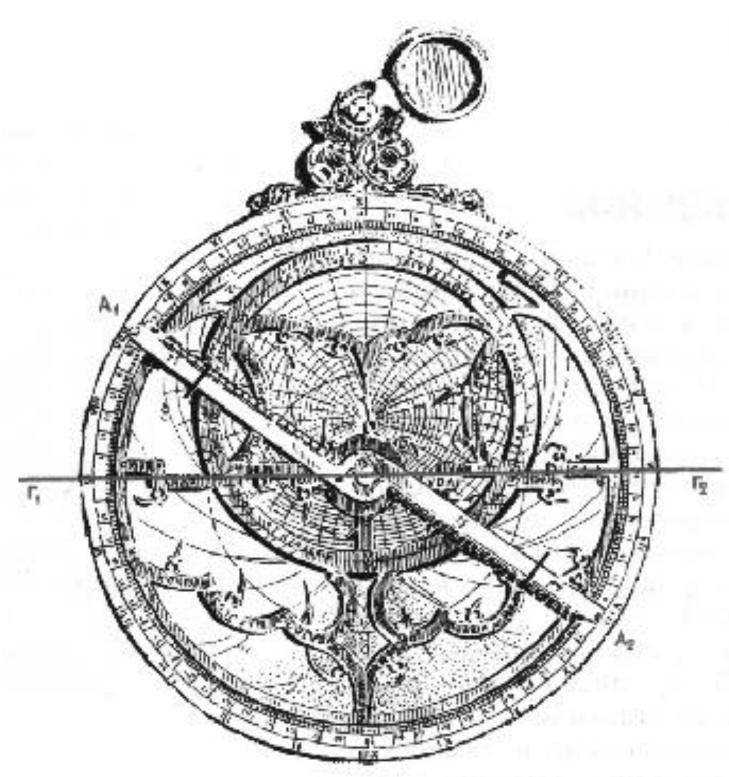


Рис. 6.4

Располагая плоскость лимба горизонтально, можно измерять углы и в горизонтальной плоскости. Для этого после установки астролябии алидаду сначала наводят на один объект наблюдения и засекают угол на шкале лимба, а затем на другой объект и также засекают угол. Разность между этими значениями и есть искомая величина угла.

Другим инструментом для измерения углов был квадрант, представляющий собой одну четвёртую часть астролябии (рис. 6.5).

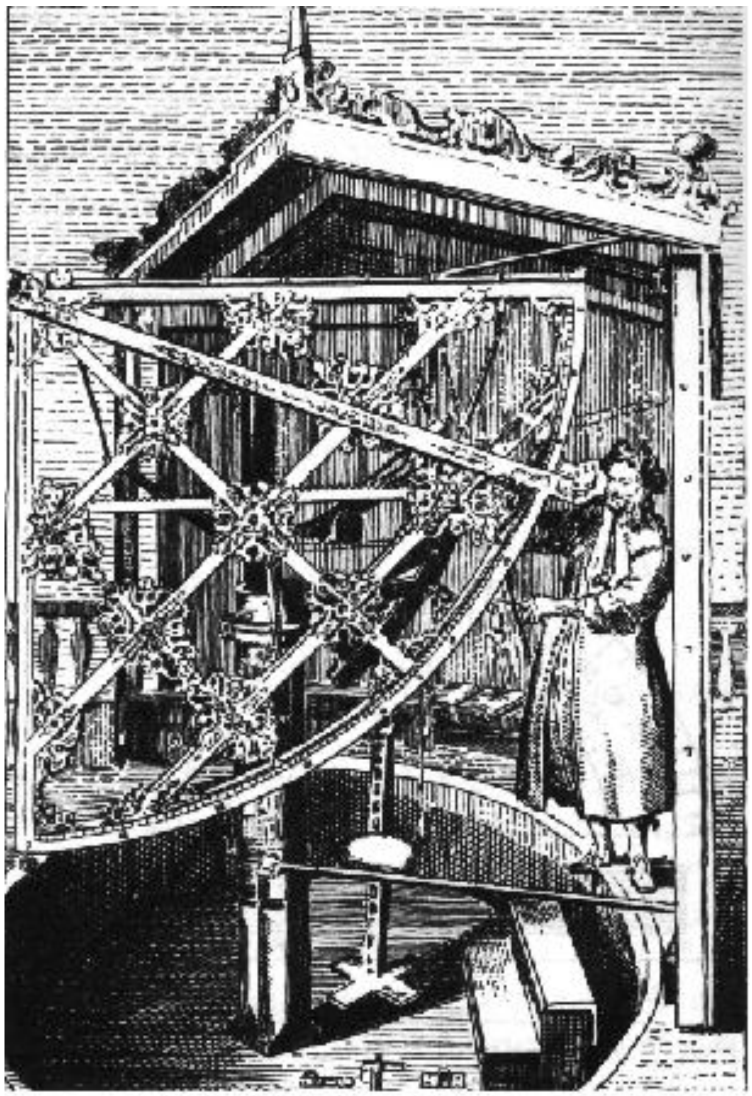


Рис. 6.5

Квадрант имел то преимущество перед астролябией, что его можно было сделать значительно больших размеров и тем самым увеличить точность измерения углов.

Существенные усовершенствования в конструкции астролябии и квадранта были сделаны французским учёным Жаном Пикаром в середине XVII в. Пикар заменил диоптры зрительной трубой, изобретённой незадолго до этого Галилеем. Перед линзой трубы он установил сетку из перекрещивающихся волосков, а для плавного вращения алидады использовал микрометрический винт, что значительно повысило точность измерения.

Наиболее совершенным угловым инструментом, применяющимся в настоящее время для выполнения геодезических работ, является теодолит (рис. 6.6), состоящий из двух лимбов, расположенных в вертикальной и горизонтальной плоскостях, что позволяет измерять вертикальные и горизонтальные углы одновременно. На вертикальном лимбе имеется зрительная труба, с помощью которой алидады вертикального и горизонтального лимбов наводятся на объект наблюдения.

Рис. 6.6

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения углов?
2. Что такое градус?
3. Как измеряется градусная величина угла?
4. Какие свойства выполняются для градусных величин углов?
5. Какие инструменты служат для измерения градусной величины угла?

Задачи

1. Найдите градусную величину угла (рис. 6.7): а) *AOC*; б) *AOB*; в) *AOD*; г) *AOE*; д) *BOD*; е) *BOC*; ж) *BOE*.

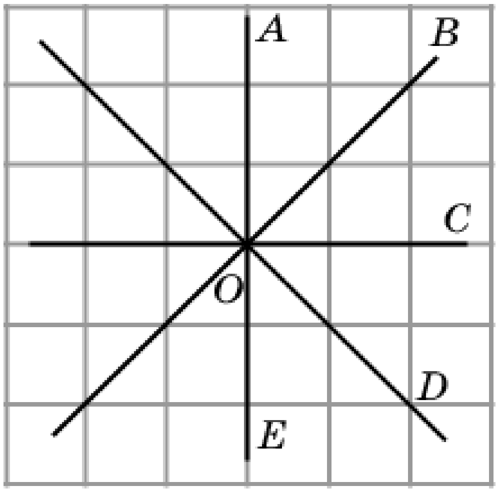


Рис. 6.7

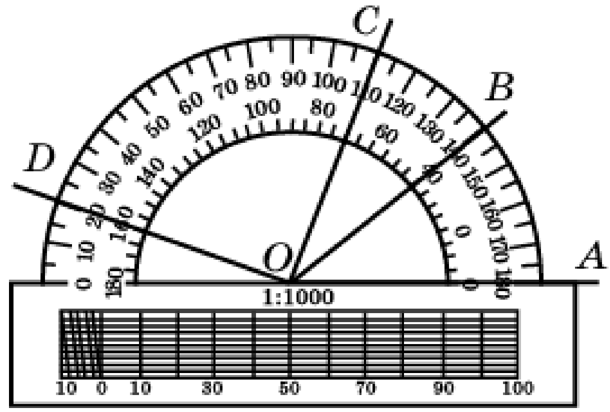


Рис. 6.8

2. Найдите величины углов *AOB*, *AOC*, *AOD*, *BOC*, *BOD*, *COD*, изображённых на рисунке 6.8.

3. Найдите величины углов *AOB*, *AOC*, *AOD*, *BOC*, *BOD*, *COD*, изображённых на рисунке 6.9.

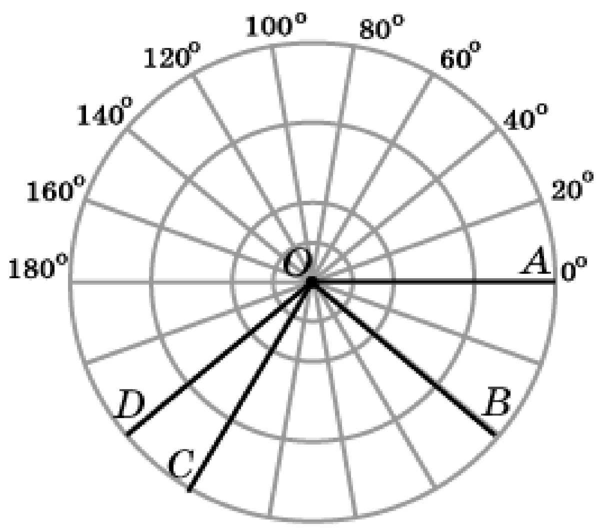
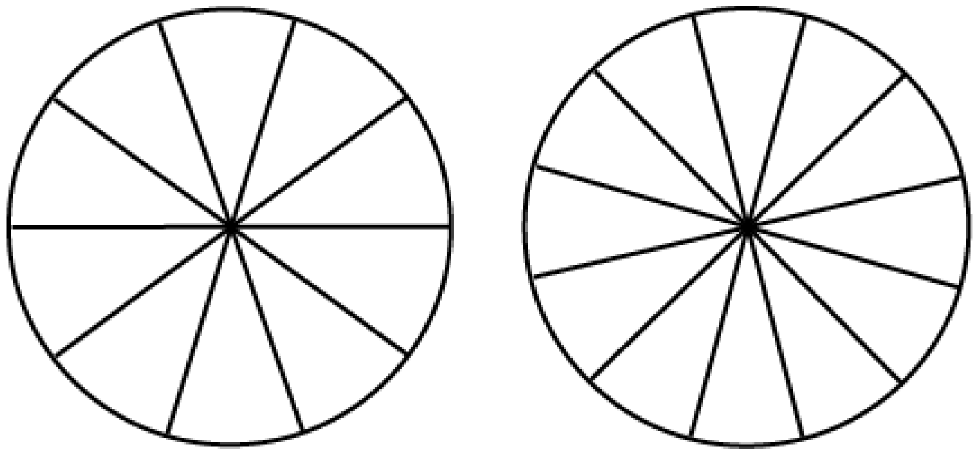


Рис. 6.9

4. С помощью транспортира постройте углы, величиной 10°, 30°, 70°, 100°, 150°.

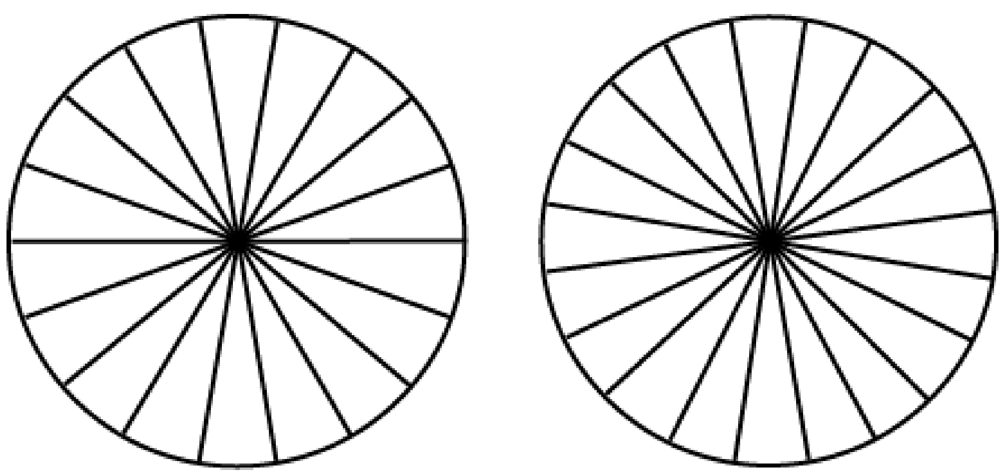
5. Колесо имеет: а) 10 спиц; б) 12 спиц (рис. 6.10, а, б). Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.



а) б)

Рис. 6.10

6. Колесо имеет: а) 18 спиц; б) 20 спиц (рис. 6.11, а, б). Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.



а) б)

Рис. 6.11

7. На клетчатой бумаге изобразите луч *AB*, как показано на рисунке 6.12. От луча *AB* отложите угол *BAC*, равный: а) 45°; б) 90°.

8. На клетчатой бумаге изобразите углы, как показано на рисунке 6.13. Оцените "на глаз" их градусную величину. Проверьте ваши оценки, измерив углы с помощью транспортира.

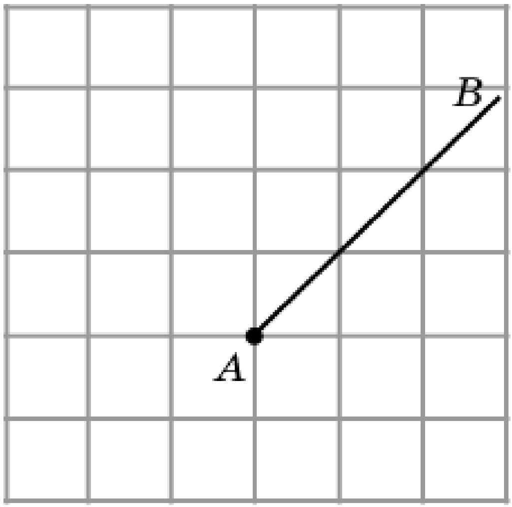


Рис. 6.12

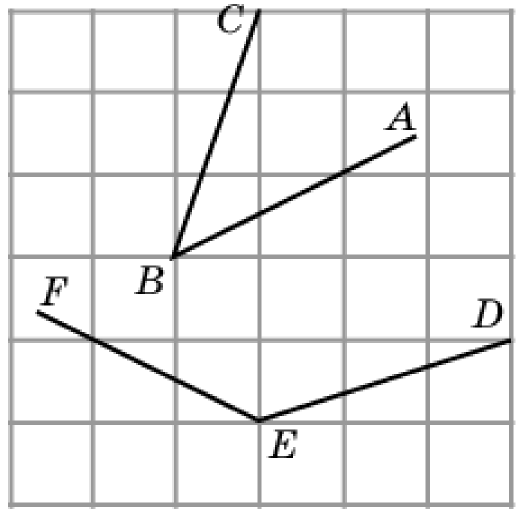


Рис. 6.13

9. Найдите величину суммы углов, изображённых на рисунке 6.14.

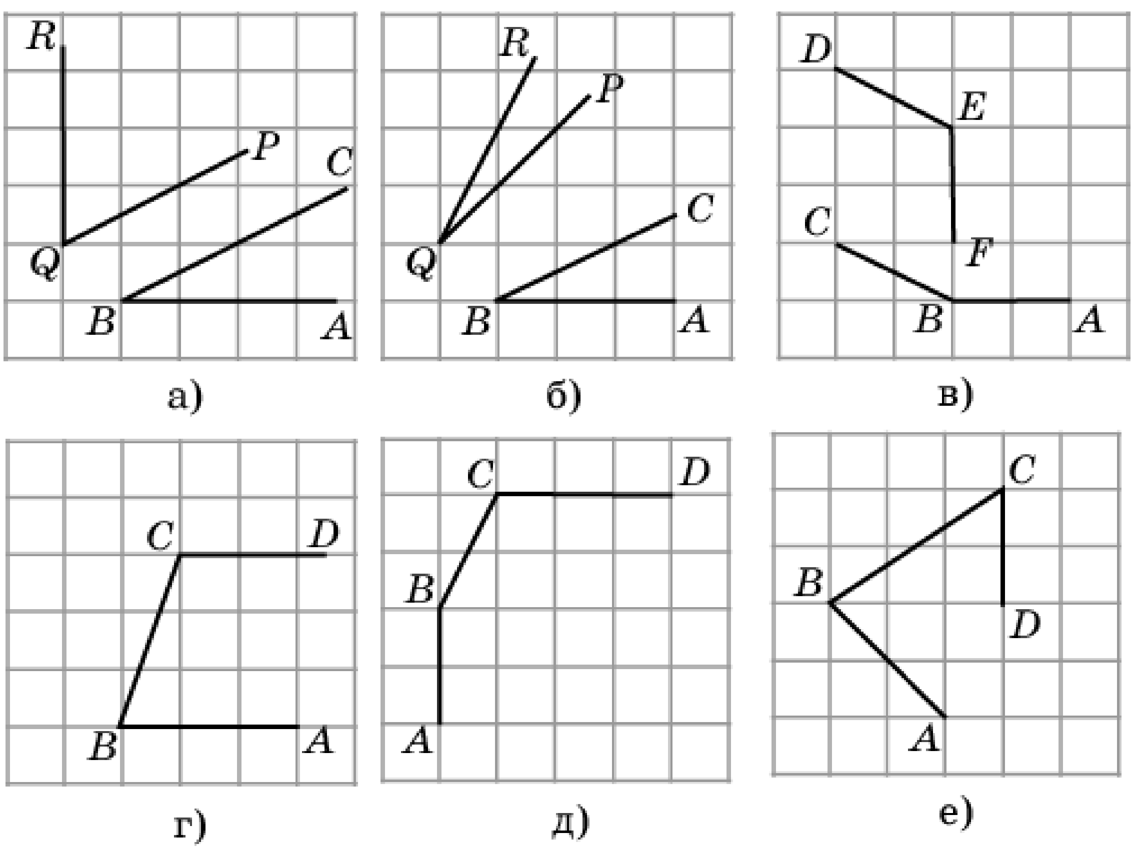


Рис. 6.14

10. Луч OC лежит внутри угла AOB, равного 60^o (рис. 6.15). Найдите угол AOC, если он на 30^o больше угла BOC.

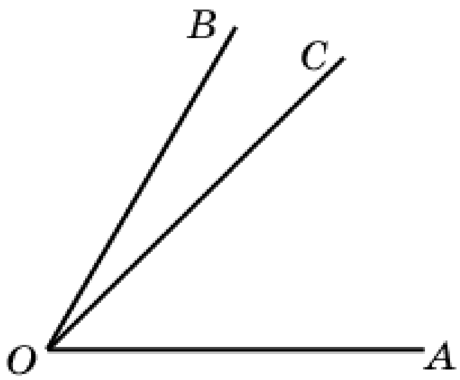


Рис. 6.15

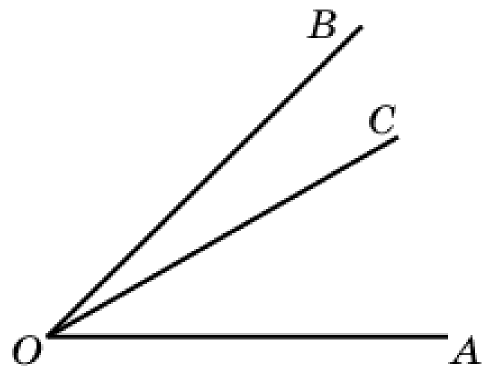


Рис. 6.16

11. Луч OC лежит внутри угла AOB, равного 45^o (рис. 6.16). Найдите угол AOC, если он в два раза больше угла BOC.

12. Луч OC лежит внутри угла AOB, равного 120^o (рис. 6.17). Найдите угол AOC, если он на 30^o меньше угла BOC.

13. Луч OC лежит внутри угла AOB, равного 120^o (рис. 6.18). Найдите угол BOC, если он в три раза больше угла AOC.

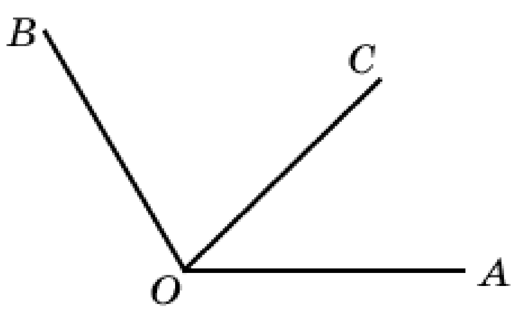


Рис. 6.17

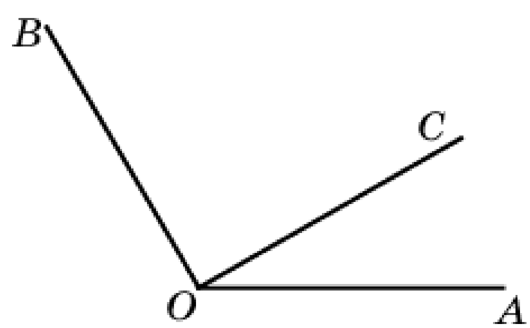


Рис. 6.18

14. Некоторый угол равен $38°$. Чему равен смежный с ним угол?

15. Найдите градусные величины двух смежных углов, если один из них в два раза больше другого.

16. Найдите градусные величины двух смежных углов, если: а) один из них на $30°$ больше другого; б) их разность равна $40°$; в) один из них в четыре раза меньше другого; г) они равны.

17. Найдите градусные величины двух смежных углов, если они относятся как: а) 2 : 3; б) 3 : 7; в) 11 : 25; г) 22 : 23.

18. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен $30°$ (рис. 6.19). Чему равны остальные углы?

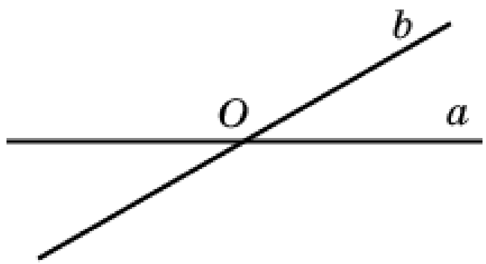


Рис. 6.19

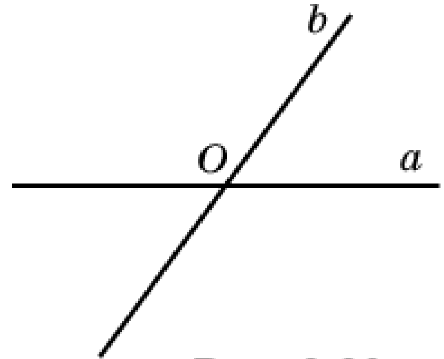


Рис. 6.20

19. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

20. Сумма трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306° (рис. 6.20). Найдите больший из них.

21. Может ли сумма трёх углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, быть равной $150°$?

22. Общей частью двух углов *AOB* и *COD*, величиной $60°$ и $90°$ соответственно, является угол *BOC*, величиной $30°$ (рис. 6.21). Найдите угол *AOD*, покрываемый обоими данными углами.

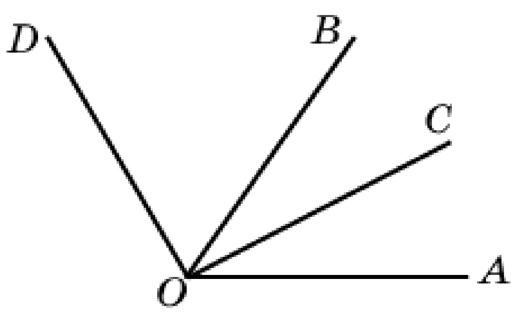


Рис. 6.21

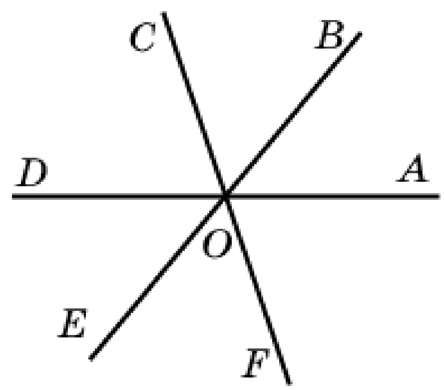


Рис. 6.22

23. На рисунке 6.22 угол *AOB* равен 50°, угол *COD* равен 60°. Найдите угол *EOF*.

24. Чему равен угол между биссектрисами: а) вертикальных углов; б) смежных углов?

25. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в: а) 3 ч; б) 6 ч; в) 5 ч?

26. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за: а) 20 мин; б) 10 мин; в) 50 мин?

27. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за: а) 1 ч; б) 30 мин; в) 20 мин?

§ 7. Многоугольники

Фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью, называется ***многоугольником***.

Вершины ломаной называются ***вершинами многоугольника***, стороны ломаной - ***сторонами многоугольника***, а углы, образованные соседними сторонами, - ***углами многоугольника***.

Точки многоугольника, не принадлежащие его сторонам, называются ***внутренними***.

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Многоугольники подразделяются на ***треугольники*** – многоугольники с тремя углами, ***четырёхугольники*** – многоугольники с четырьмя углами и т. д. (рис. 7.1). Многоугольник, у которого n углов называется ***n-угольником***.

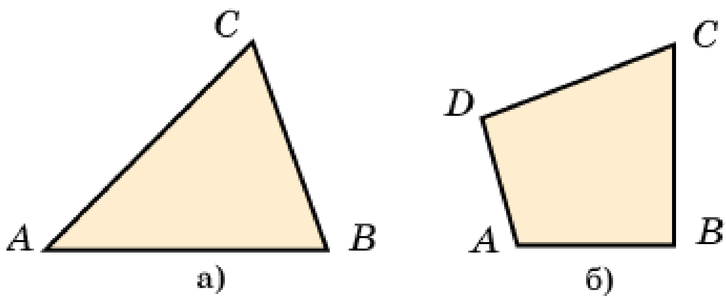


Рис. 7.1

Многоугольник называется ***правильным***, если у него все стороны равны и все углы равны (рис. 7.2).

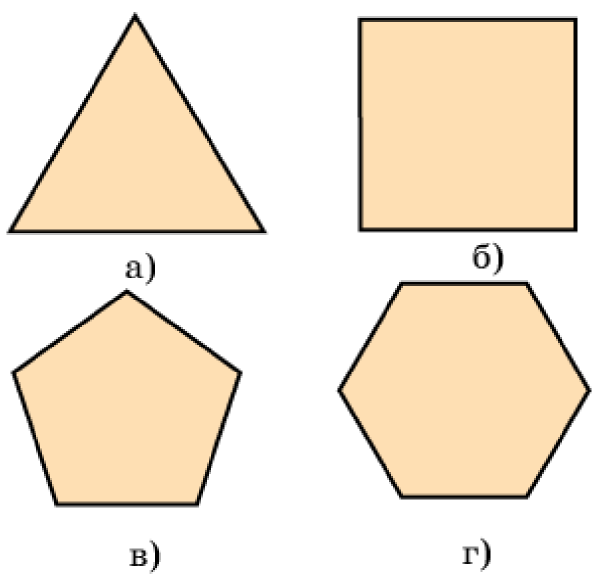


Рис. 7.2

Многоугольник называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 7.3).

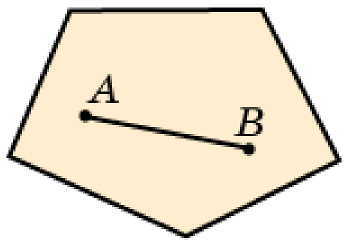


Рис. 7.3

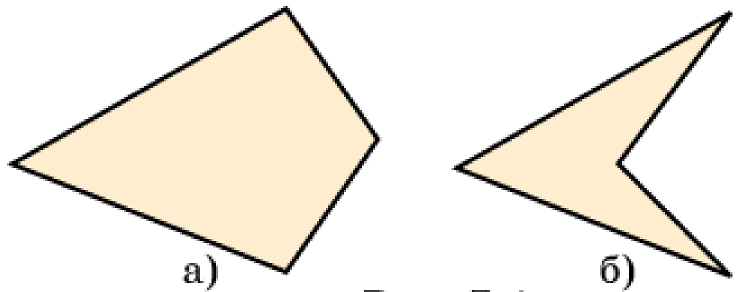


Рис. 7.4

Любой треугольник выпуклый. Среди многоугольников с числом углов, большим трёх, могут быть выпуклые и невыпуклые (рис. 7.4).

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины.

Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 7.5).

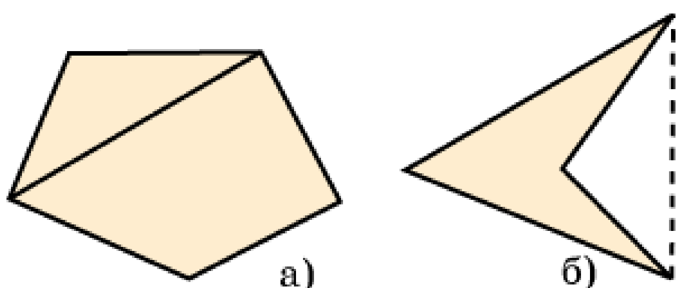


Рис. 7.5

Иногда многоугольником называется замкнутая ломаная, у которой возможны точки самопересечения. К числу таких многоугольников относятся правильные звёздчатые многоугольники, у которых все стороны и все углы равны (рис. 7.6).

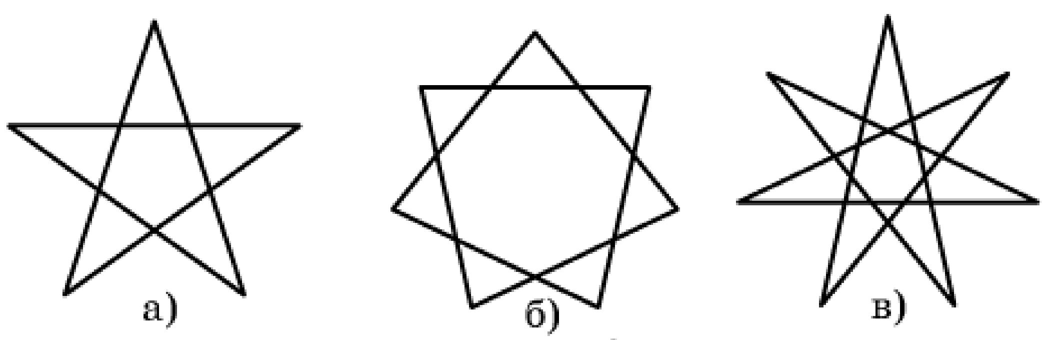


Рис. 7.6

Вопросы

1. Какая фигура называется многоугольником? Что называется: а) вершинами; б) сторонами; в) углами многоугольника?

2. Какие точки многоугольника называются внутренними?

3. Что называется периметром многоугольника?

4. Какой многоугольник называется n-угольником?

5. Какой многоугольник называется: а) правильным; б) выпуклым?

6. Что называется диагональю многоугольника?

7. Какой многоугольник содержит все свои диагонали?

Задачи

1. Укажите, какие из представленных на рисунке 7.7 фигур являются многоугольниками, а какие нет. Какие из них являются выпуклыми, а какие нет?

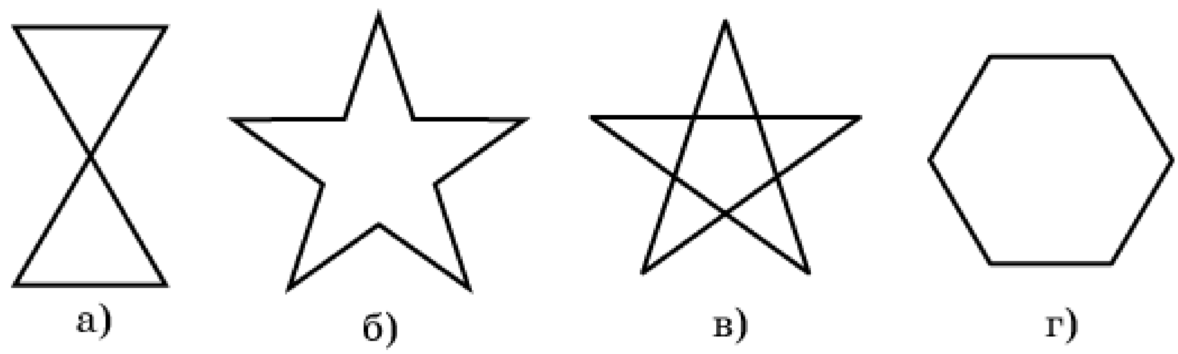


Рис. 7.7

2. Какая имеется зависимость между числом вершин и числом сторон многоугольника?

3. Нарисуйте выпуклые и невыпуклые: а) четырёхугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник. Используя линейку, найдите периметры этих многоугольников.

4. Нарисуйте правильные треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.

5. На сколько треугольников делится выпуклый: а) 4-угольник; б) 5-угольник; в) 6-угольник своими диагоналями, проведёнными из одной вершины?

6. Сколько всего диагоналей имеет: а) четырёхугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник?

7. Может ли многоугольник иметь: а) одну диагональ; б) три диагонали; в) восемь диагоналей?

8. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?

9. Выпуклый многоугольник имеет 14 диагоналей. Сколько у него сторон?

10. Изобразите два треугольника так, чтобы их общей частью (пересечением) был: а) треугольник; б) четырёхугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник.

11. Может ли общей частью (пересечением) двух треугольников быть семиугольник?

12. Приведите пример, когда общей частью (пересечением) треугольника и четырёхугольника является восьмиугольник.

13. Сколько сторон имеют звёздчатые многоугольники, изображённые на рисунке 7.6?

14. На сколько частей разбивают плоскость звёздчатые многоугольники, изображённые на рисунке 7.6?

15. На рисунке 7.8 изображён четырёхугольник *ABCD* и точка *O* внутри него. Из точки *O* видны полностью стороны *AB*, *AD*. Сторона *BC* видна частично и сторона *CD* не видна. Нарисуйте какой-нибудь многоугольник и точку *O* внутри него так, чтобы ни одна из сторон не была видна из неё полностью.

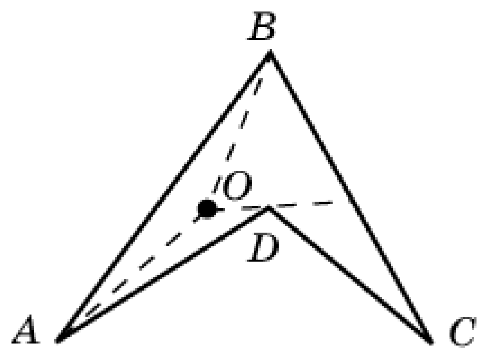


Рис. 7.8

§ 8. Треугольники

Напомним, что треугольником называется многоугольник с тремя углами.

Треугольник обозначается указанием его вершин. Например, треугольник *ABC*.

Треугольник называется ***остроугольным*** если у него все углы острые (рис. 8.1, а).

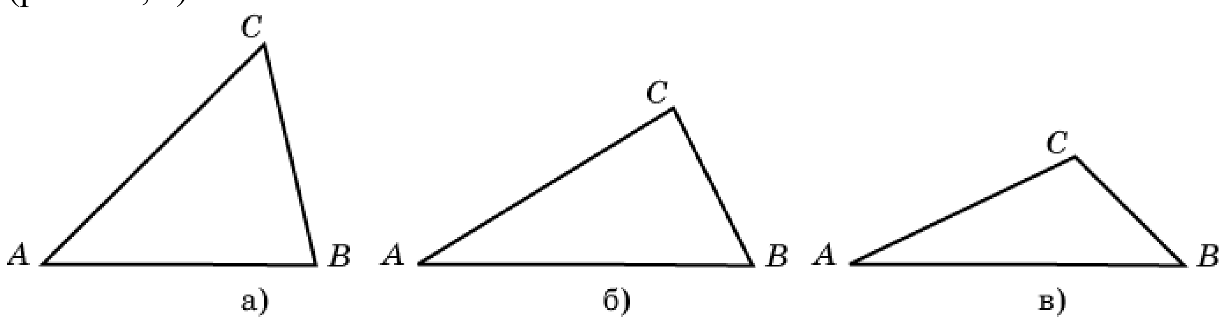


Рис. 8.1

Треугольник называется ***прямоугольным*** если у него есть прямой угол (рис. 8.1, б).

Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется ***гипотенузой***. Остальные две стороны прямоугольного треугольника называются ***катетами***.

Треугольник называется ***тупоугольным*** если у него есть тупой угол (рис. 8.1, в).

Треугольник называется ***равнобедренным***, если у него две стороны равны (рис. 8.2, а). Эти равные стороны называются ***боковыми сторонами***, а третья сторона – ***основанием***.

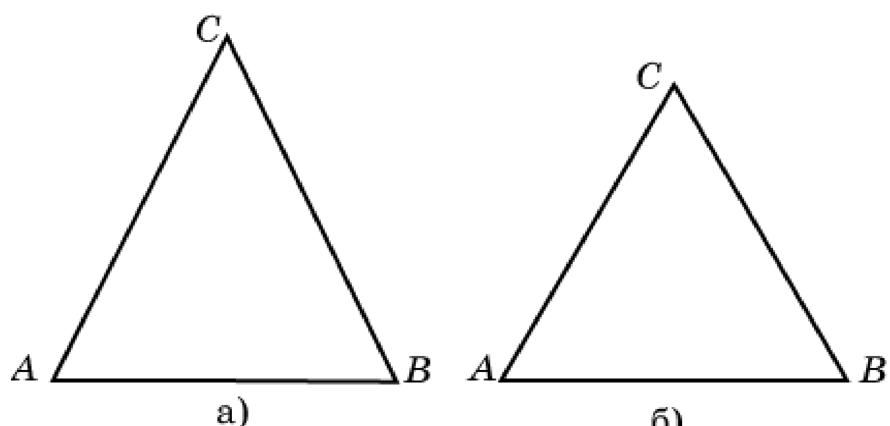


Рис. 8.2

Треугольник называется ***равносторонним***, если у него все стороны равны (рис. 8.2, б).

Среди основных элементов треугольника, кроме вершин, сторон и углов, выделяют следующие:

медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 8.3, а);

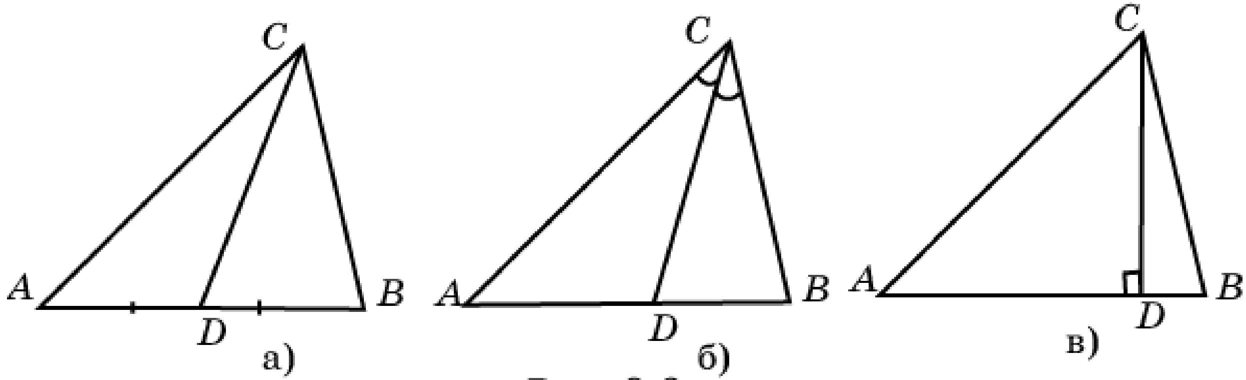


Рис. 8.3

биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны (рис. 8.3, б);

высота треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны или её продолжения и перпендикулярный этой стороне (рис. 8.3, в).

Вопросы

1. Какая фигура называется треугольником?
2. Как обозначается треугольник?
3. Какой треугольник называется: а) остроугольным; б) прямоугольным; в) тупоугольным?
4. Какая сторона прямоугольного треугольника называется гипотенузой?
5. Какие стороны прямоугольного треугольника называются катетами?
6. Какой треугольник называется равнобедренным?
7. Какие стороны равнобедренного треугольника называются боковыми?
8. Какая сторона равнобедренного треугольника называется основанием?
9. Какой треугольник называется равносторонним?
10. Что называется медианой треугольника?
11. Что называется биссектрисой треугольника?
12. Что называется высотой треугольника?

Задачи

1. Перечислите все треугольники, изображённые на рисунке 8.4.

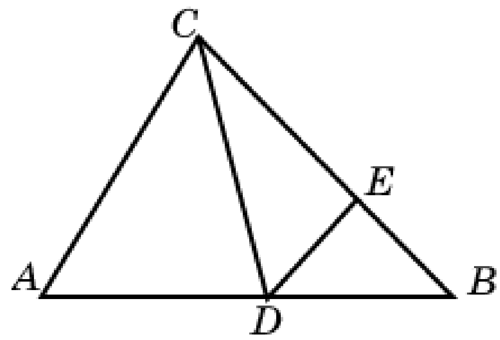


Рис. 8.4

2. На клетчатой бумаге изобразите равнобедренный треугольник *ABC*, основанием которого является отрезок *AB*, а вершина *C* находится в одном из узлов сетки (рис. 8.5).

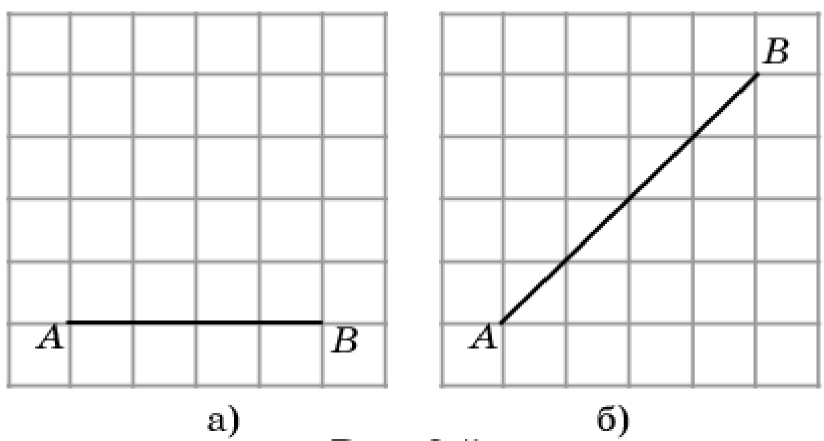


Рис. 8.5

3. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный треугольник *ABC*, гипотенузой которого является отрезок *AB*, а вершина *C* находится в одном из узлов сетки (рис. 8.6).

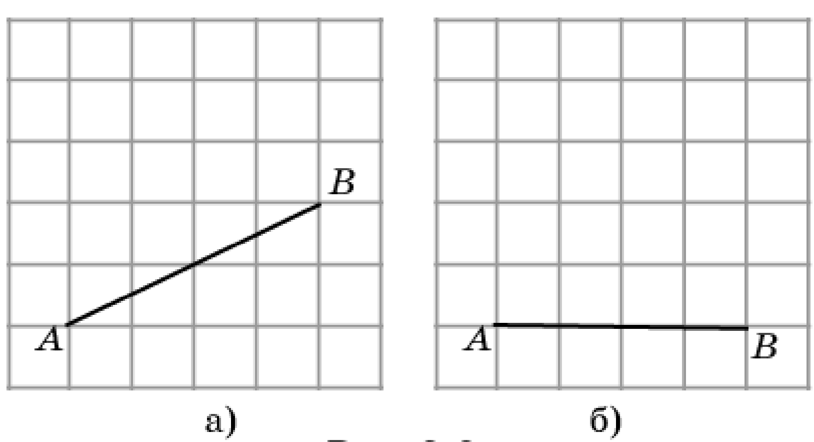


Рис. 8.6

4. На клетчатой бумаге нарисуйте: а) остроугольный треугольник ABC; б) прямоугольный треугольник ABC; в) тупоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке 8.7. Проведите из вершины C медиану, биссектрису и высоту.

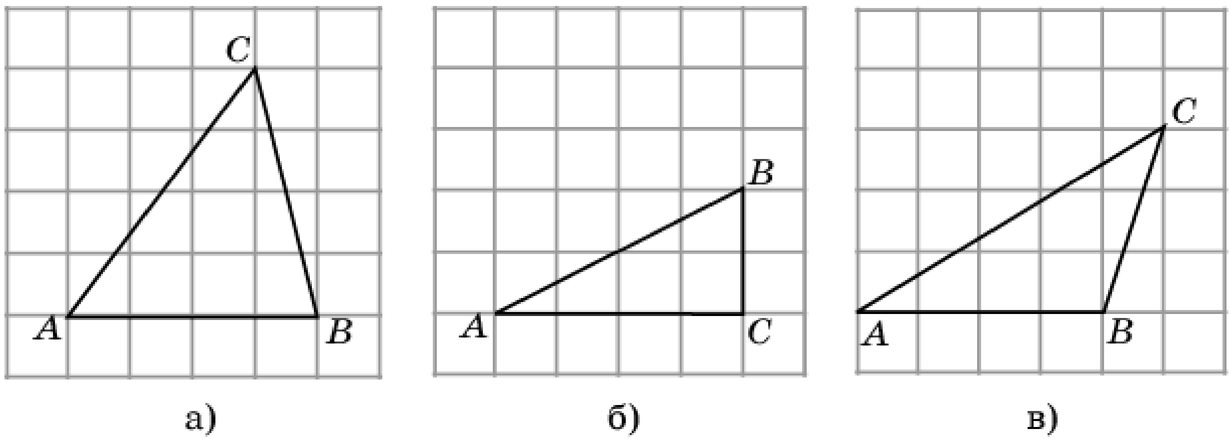


Рис. 8.7

5. Может ли проходить вне треугольника его: а) медиана; б) биссектриса; в) высота?

6. Периметр равнобедренного треугольника равен 2 м, а основание - 0,4 м. Найдите боковую сторону.

7. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона - 2 м. Найдите основание.

8. Сторона AB треугольника ABC равна 17 см. Сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

9. Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 10 см.

10. Периметр треугольника равен 54 см. Найдите его стороны, если они относятся как 2:3:4.

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена медиана DD. Найдите её длину, если периметр треугольника ABC равен 50 см, а треугольника ACD - 40 см.

§ 9. Четырёхугольники

Четырёхугольником называется многоугольник с четырьмя углами.

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые (рис. 9.1).

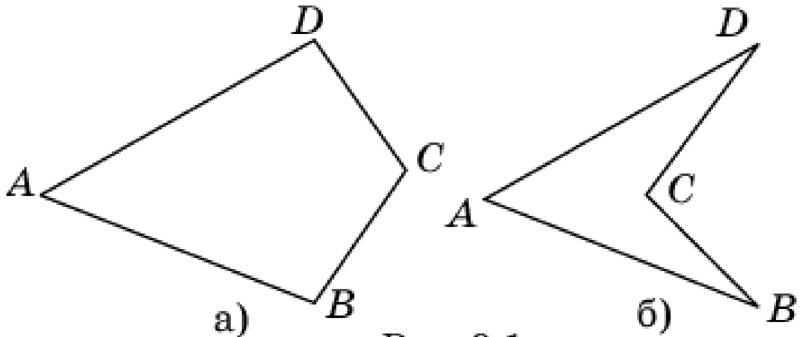


Рис. 9.1

Четырёхугольник, у которого все углы прямые, называется ***прямоугольником*** (рис. 9.2, а).

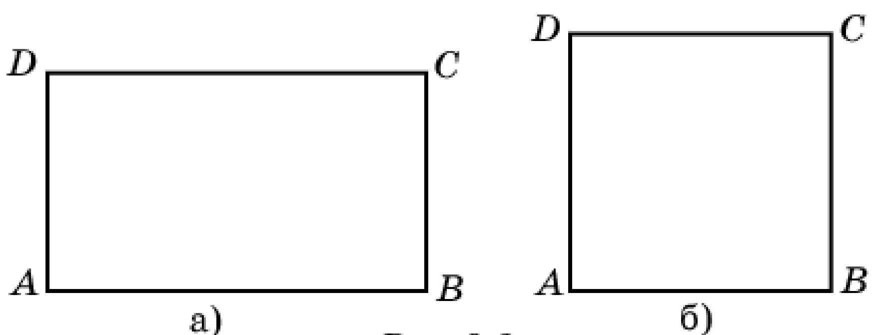


Рис. 9.2

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется ***квадратом*** (рис. 9.2, б).

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (ри. 9.3, а).

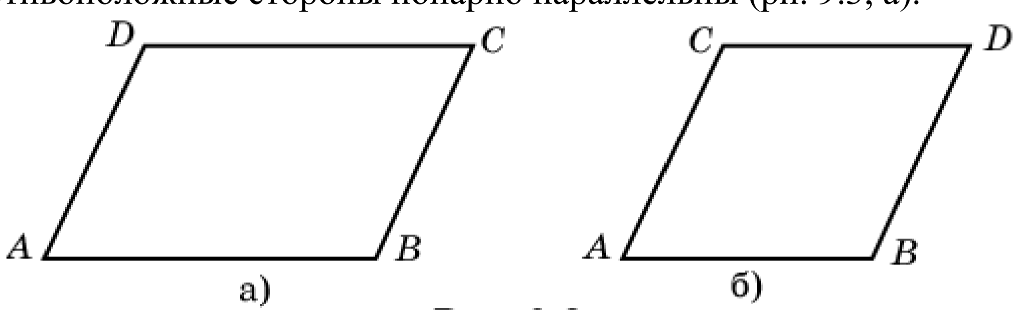


Рис. 9.3

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ***ромбом*** (рис. 9.3, б).

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 9.4, а).

Параллельные стороны трапеции называются её ***основаниями***, а непараллельные стороны – ***боковыми сторонами***.

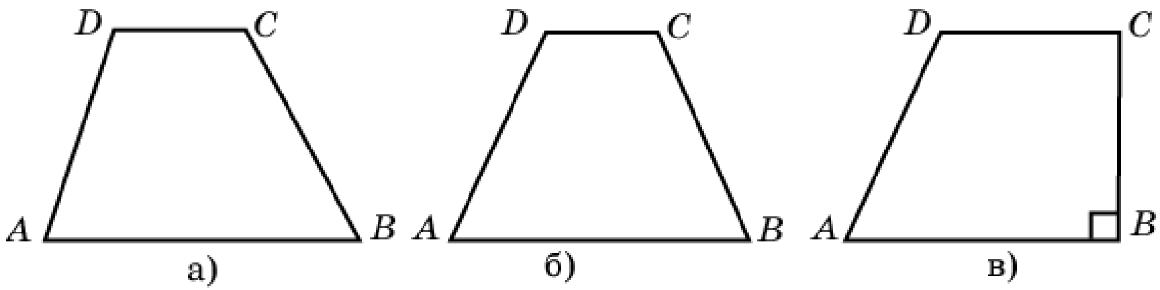


Рис. 9.4

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется ***равнобедренной*** (рис. 9.4, б).

Трапеция, у которой имеется прямой угол, называется прямоугольной (рис. 9.4, в).

Вопросы

1. Какой многоугольник называется четырёхугольником?
2. Какой четырёхугольник называется прямоугольником?
3. Какой прямоугольник называется квадратом?
4. Какой четырёхугольник называется параллелограммом?
5. Какой четырёхугольник называется трапецией?
6. Какие стороны трапеции называются основаниями?
7. Какие стороны трапеции называются боковыми?
8. Какая трапеция называется равнобедренной?
9. Какая трапеция называется прямоугольной?

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите квадрат, одной стороной которого является отрезок AB, как показано на рисунке 9.5.

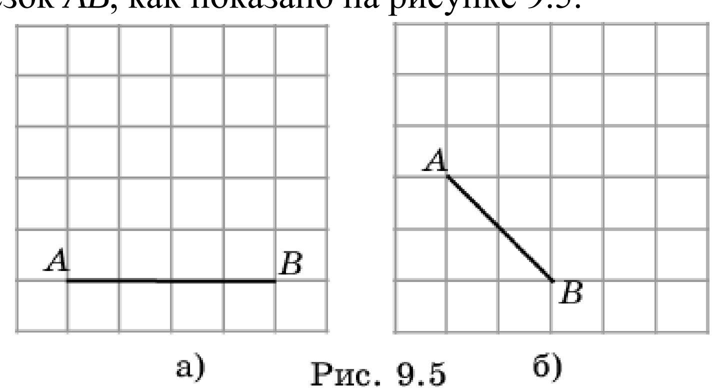
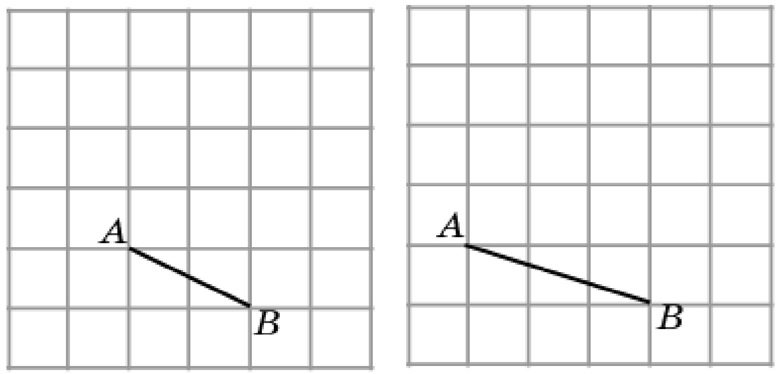


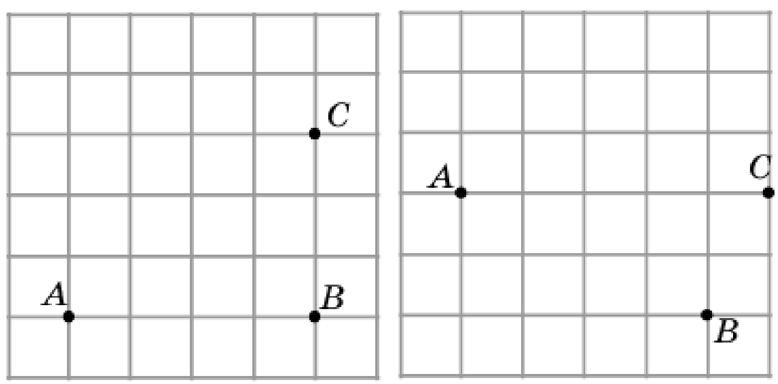
Рис. 9.5

2. На клетчатой бумаге изобразите квадрат, одной стороной которого является отрезок *AB*, как показано на рисунке 9.6.



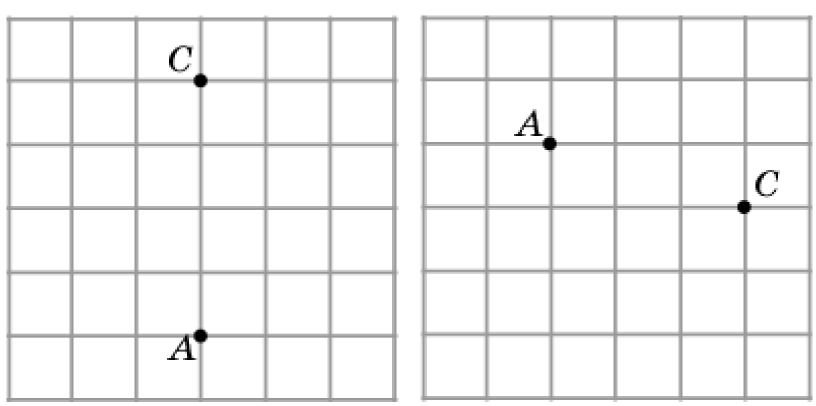
а) Рис. 9.6 б)

3. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольник, тремя вершинами которого являются точки *A*, *B*, *C*, как показано на рисунке 9.7. В случае а) найдите его периметр; в случае б) найдите его диагональ.



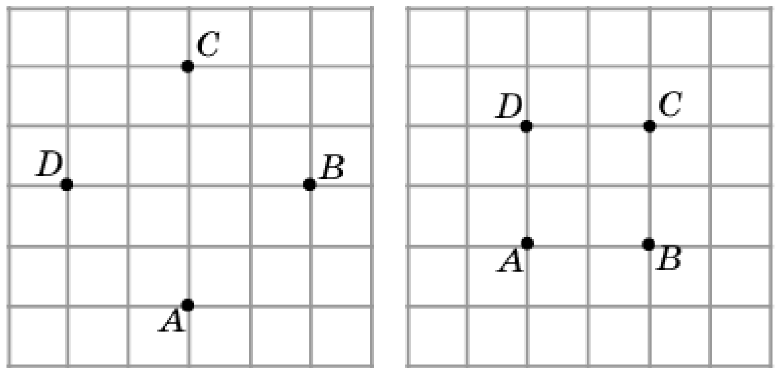
а) Рис. 9.7 б)

4. На клетчатой бумаге изобразите квадрат, двумя противоположными вершинами которого являются точки *A* и *C*, как показано на рисунке 9.8.



а) Рис. 9.8 б)

5. На клетчатой бумаге изобразите квадрат, серединами сторон которого являются точки *A*, *B*, *C* и *D*, как показано на рисунке 9.9. В случае а) найдите его периметр; в случае б) найдите его диагональ.



а) Рис. 9.9 б)

6. На клетчатой бумаге изобразите какой-нибудь четырёхугольник, вершинами которого являются точки *A*, *B*, *C* и *D*, как показано на рисунке 9.10. Сколько решений имеет задача?

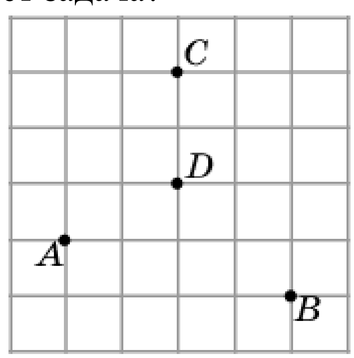
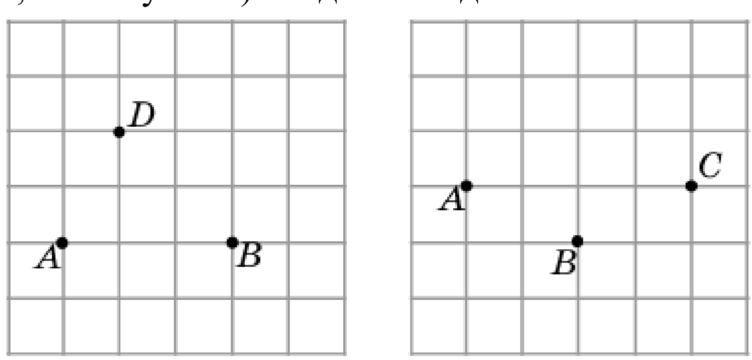


Рис. 9.10

7. На клетчатой бумаге изобразите параллелограмм *ABCD*, тремя вершинами которого являются точки: а) *A*, *B*, *D*; б) *A*, *B*, *C*, как показано на рисунке 9.11, а, б. В случае б) найдите его диагонали.



а) б)

Рис. 9.11

8. Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми, как показано на рисунке 9.12. Сколько при этом получилось параллелограммов?

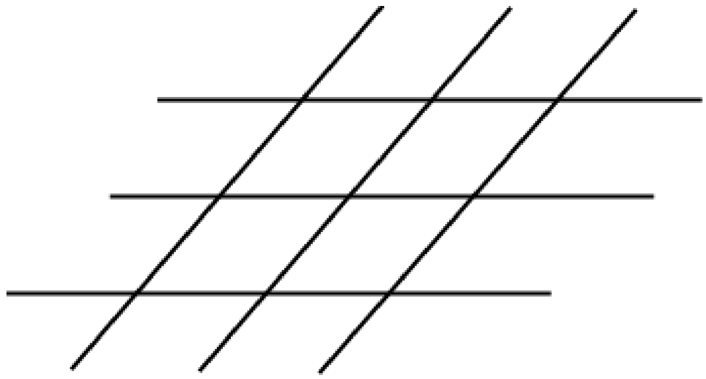
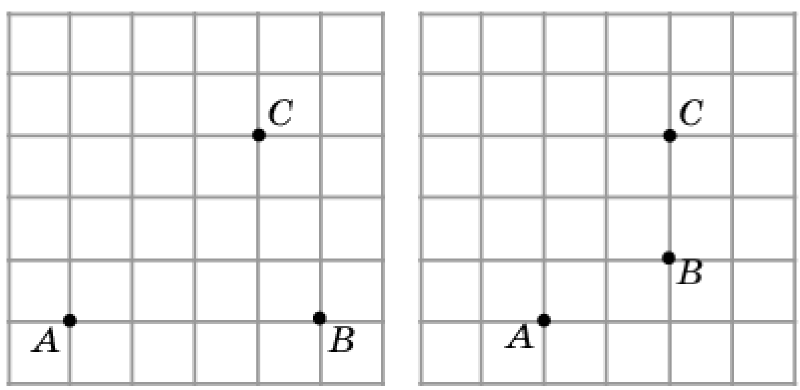


Рис. 9.12

9. Изобразите равнобедренную трапецию *ABCD*, три вершины которой даны на рисунке 9.13. Найдите её основания.



а) Рис. 9.13 б)

10. Изобразите прямоугольную трапецию *ABCD*, три вершины которой даны на рисунке 9.13. Найдите её основания.

§ 10. Многогранники

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

Эти многоугольники называются ***гранями*** многогранника. Их стороны и вершины называются соответственно ***рёбрами*** и ***вершинами*** многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются ***диагоналями*** многогранника.

Многогранник называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 10.1 приведены примеры выпуклых и невыпуклых многогранников.

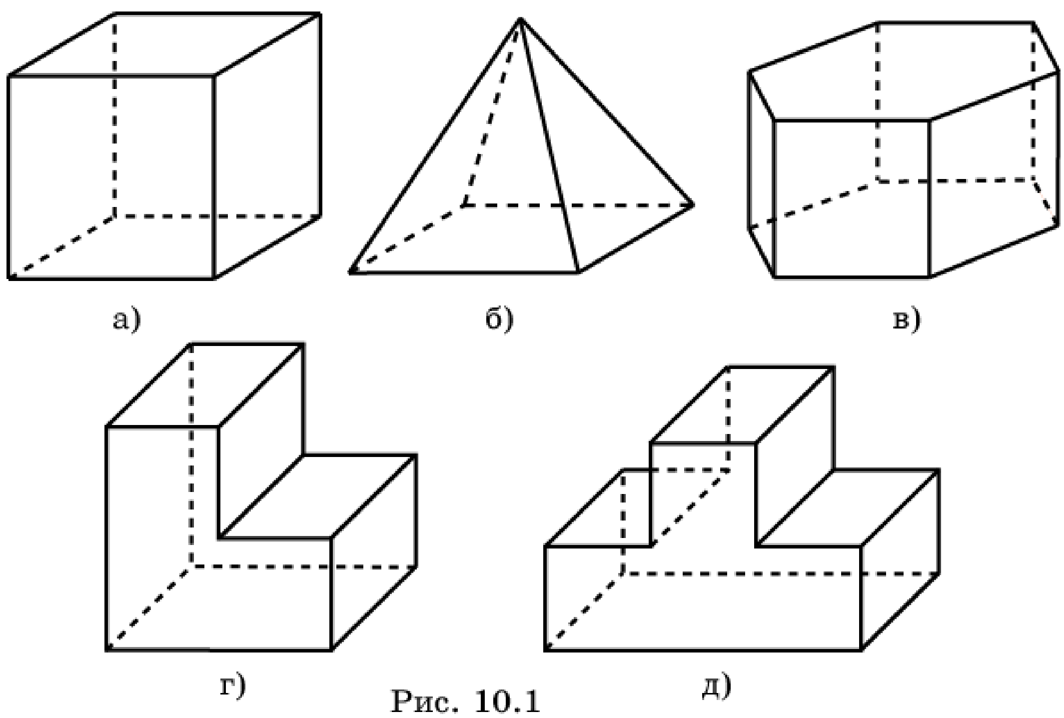


Рис. 10.1

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

Обычно куб изображается так, как показано на рисунке 10.2. А именно, рисуется квадрат ABB_1A_1, изображающий одну из граней куба, и равный ему квадрат DCC_1D_1, стороны которого параллельны соответствующим сторонам квадрата ABB_1A_1. Соответствующие вершины этих квадратов соединяются отрезками. Отрезки, изображающие невидимые рёбра куба, проводятся пунктиром.

На рисунке 10.2 мы смотрим на куб: а) сверху и справа; б) сверху и слева; в) снизу и справа; г) снизу и слева.

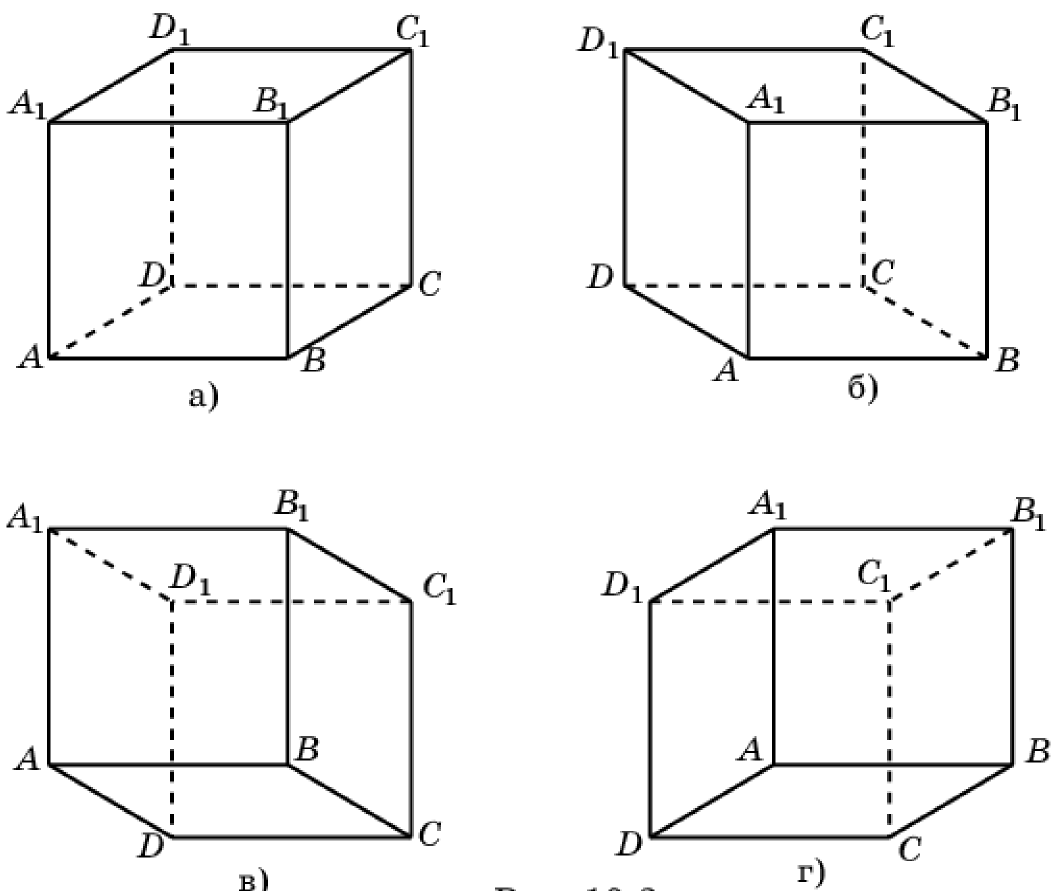


Рис. 10.2

Прямоугольным параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести прямоугольников.

Обычно параллелепипед изображается так, как показано на рисунке 10.3. А именно, рисуется прямоугольник ABB_1A_1, изображающий одну из его граней, и равный ему прямоугольник DCC_1D_1, стороны которого параллельны соответствующим сторонам прямоугольника ABB_1A_1. Соответствующие вершины этих прямоугольников соединяются отрезками. Отрезки, изображающие невидимые рёбра прямоугольного параллелепипеда, проводятся пунктиром.

На рисунке 10.3 мы смотрим на параллелепипед: а) сверху и справа; б) сверху и слева; в) снизу и справа; г) снизу и слева.

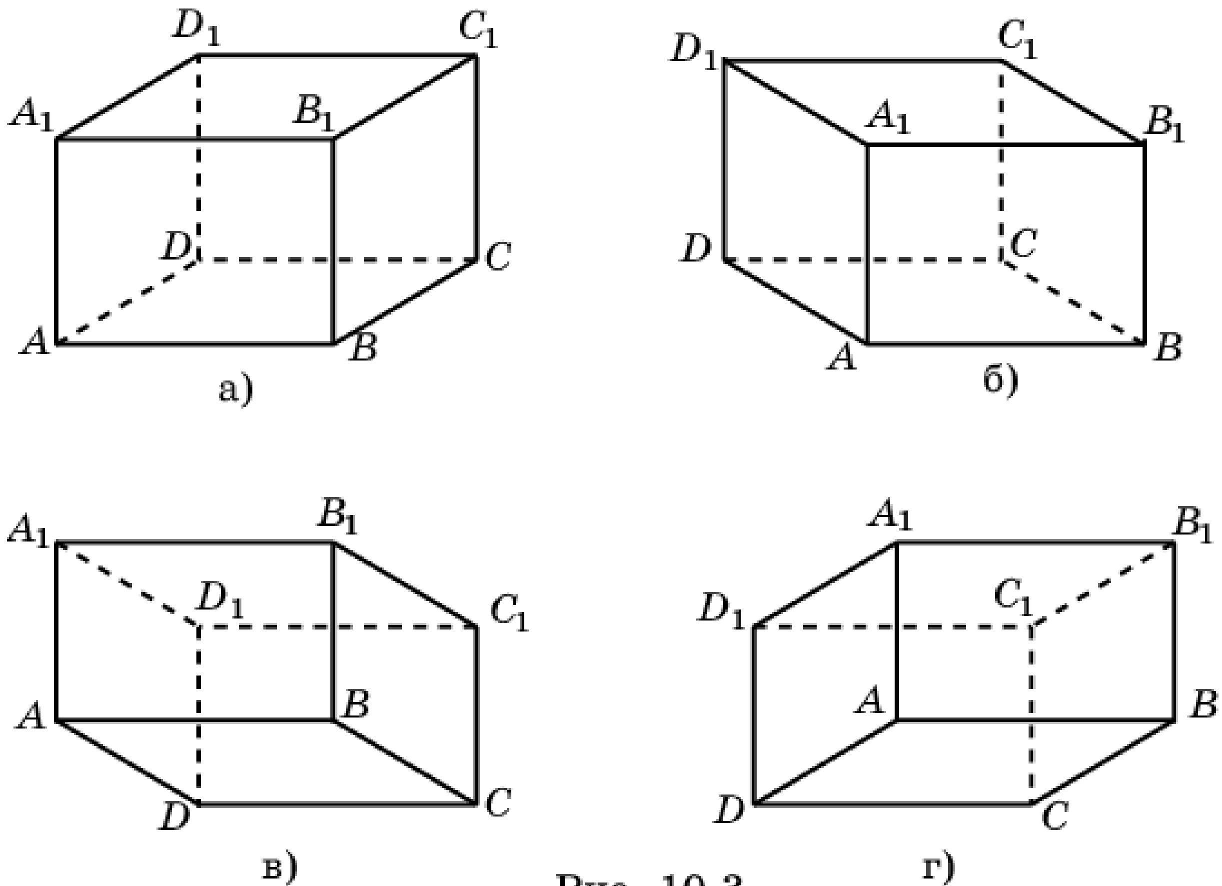
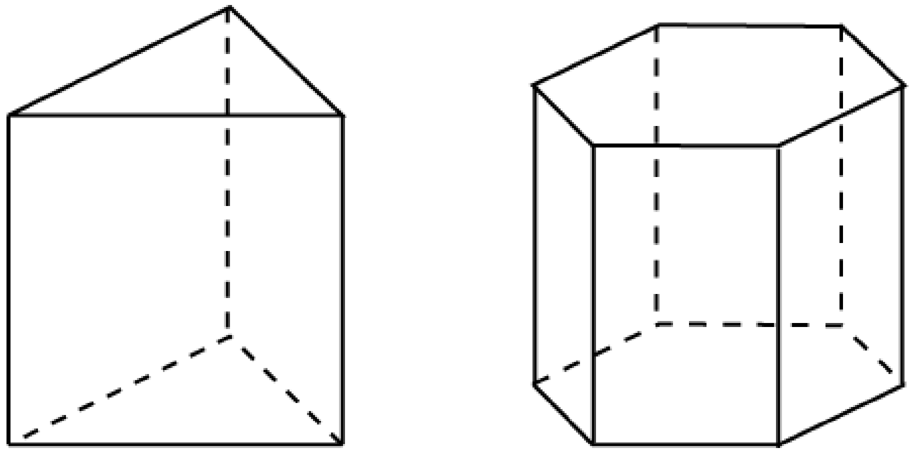


Рис. 10.3

Прямой призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и прямоугольников, называемых боковыми гранями призмы. Стороны боковых граней, не лежащие в основаниях, называются боковыми рёбрами призмы.

Обычно для изображения прямоугольной призмы рисуются два равных многоугольника, изображающие её основания, соответствующие стороны которых параллельны. Соответствующие вершины этих многоугольников соединяются отрезками. Отрезки, изображающие невидимые рёбра, проводятся пунктиром.

На рисунке 10.4, а изображена треугольная призма, на рисунке 10.4, б – шестиугольная.



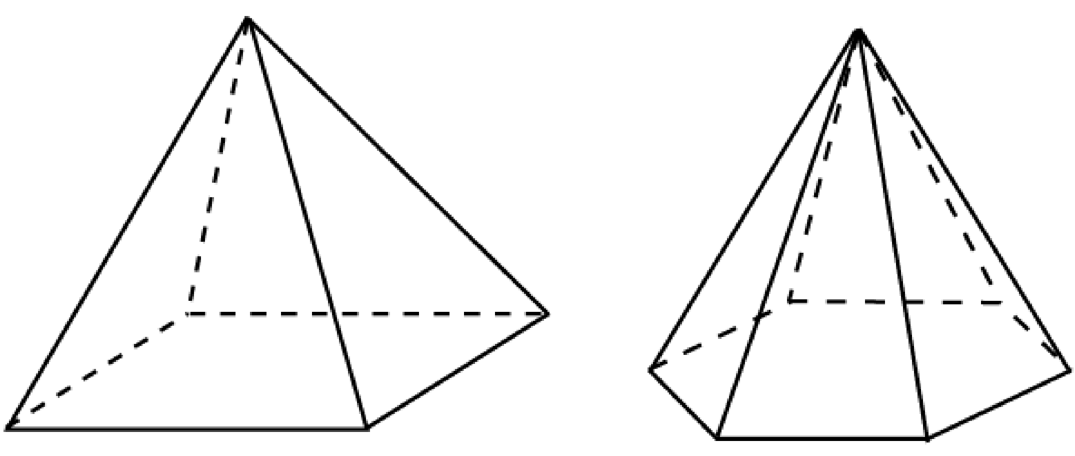
а) б)

Рис. 10.4

Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников с общей вершиной, называемых боковыми гранями пирамиды. Стороны боковых граней, не лежащие в основании, называются боковыми рёбрами пирамиды. Общая вершина боковых граней называется вершиной пирамиды.

Обычно для изображения пирамиды рисуется многоугольник, изображающий её основание. Затем вершины этого многоугольника соединяются отрезками с некоторой точкой, изображающей вершину пирамиды. Отрезки, изображающие невидимые рёбра пирамиды, проводятся пунктиром.

На рисунке 10.5, а изображена четырёхугольная пирамида, на рисунке 10.5, б – шестиугольная.



а) б)

Рис. 10.5

Вопросы

1. Что называется многогранником?
2. Что называется гранями, рёбрами, вершинами многогранника?
3. Какой многогранник называется кубом?
4. Какой многогранник называется прямоугольным параллелепипедом?
5. Какой многогранник называется прямой призмой?
6. Какой многогранник называется пирамидой?

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 10.6.

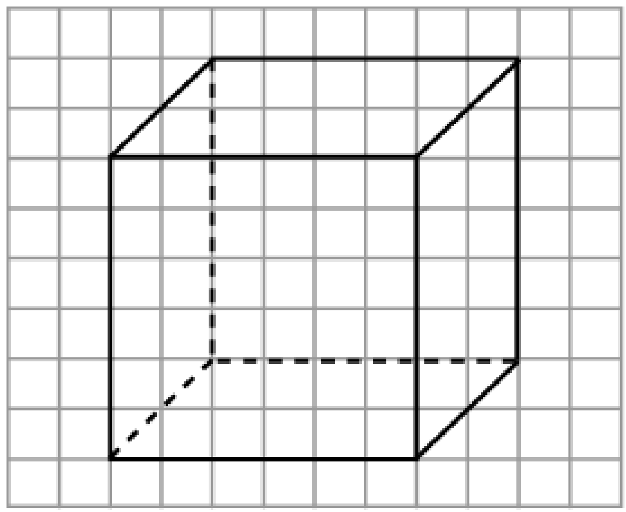
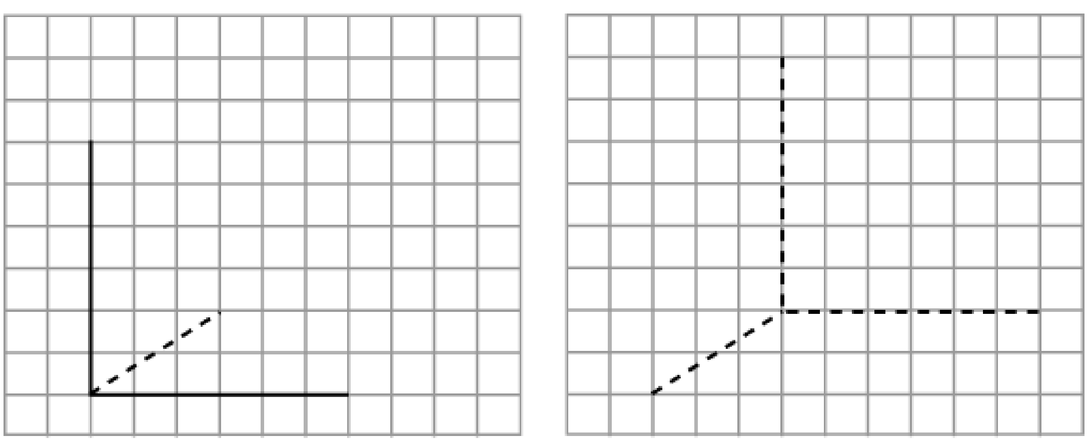


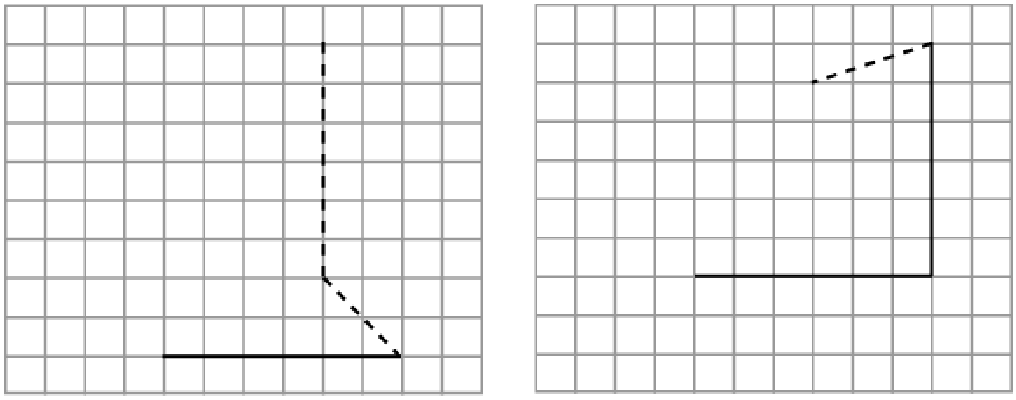
Рис. 10.6

2. На клетчатой бумаге изобразите куб, три ребра которого изображены на рисунке 10.7 а, б.



а) Рис. 10.7 б)

3. На клетчатой бумаге изобразите куб, три ребра которого изображены на рисунке 10.8.



а) б)

Рис. 10.8

4. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 10.9.

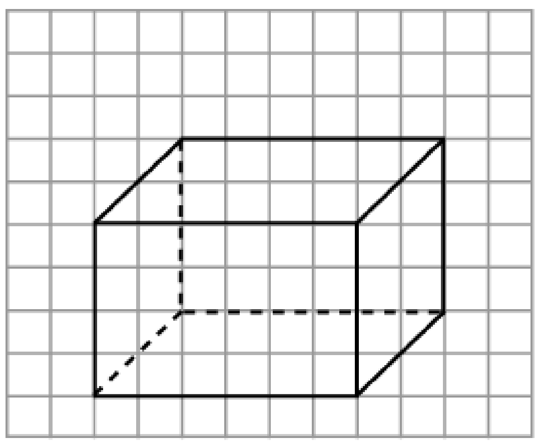
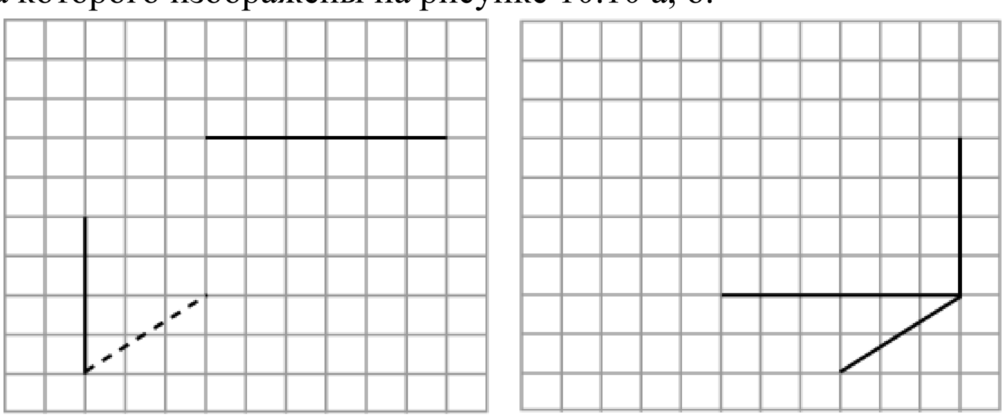


Рис. 10.9

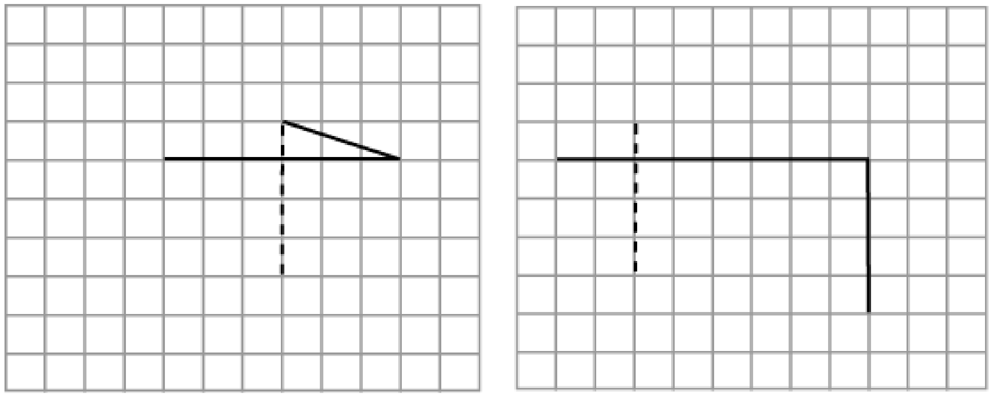
5. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед, три ребра которого изображены на рисунке 10.10 а, б.



а) б)

Рис. 10.10

6. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед, три ребра которого изображены на рисунке 10.11 а, б.



а) б)

Рис. 10.11

7. На клетчатой бумаге изобразите треугольную призму аналогично данной на рисунке 10.12.

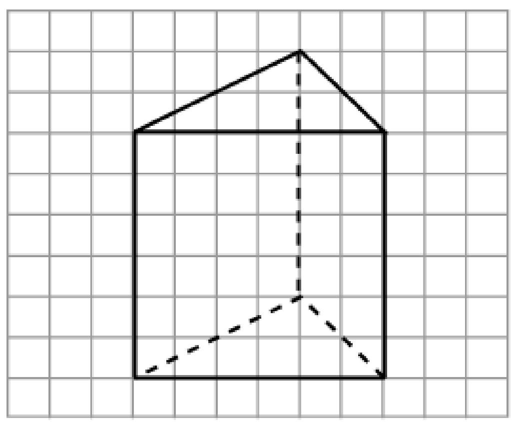
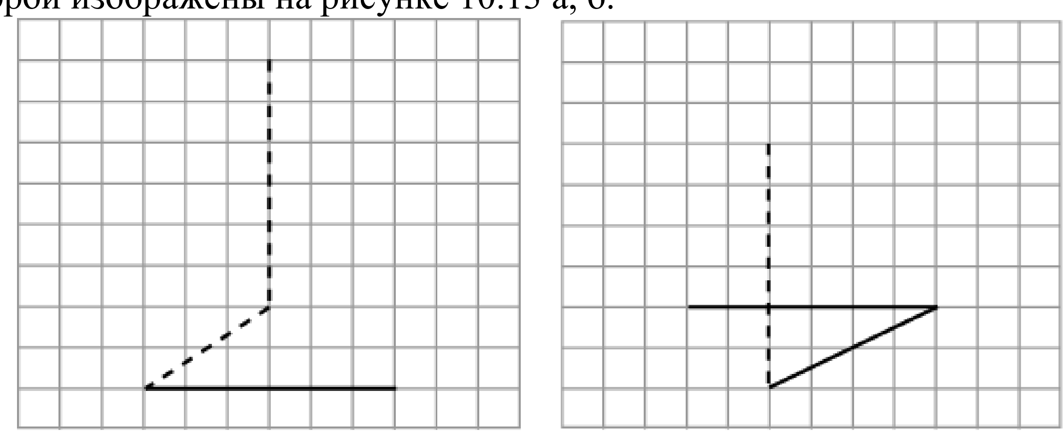


Рис. 10.12

8. На клетчатой бумаге изобразите треугольную призму, три ребра которой изображены на рисунке 10.13 а, б.



а) б)

Рис. 10.13

9. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную призму аналогично данной на рисунке 10.14.

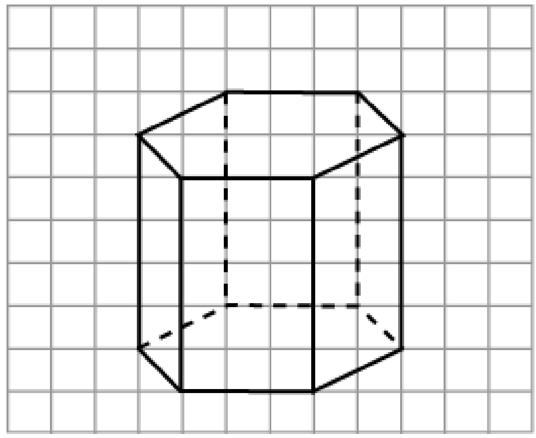
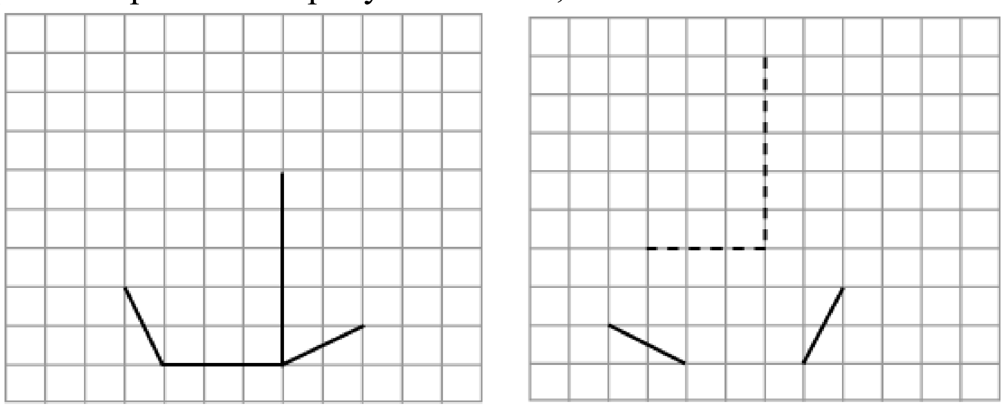


Рис. 10.14

10. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную призму, три ребра которой изображены на рисунке 10.15 а, б.



а) б)

Рис. 10.15

11. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 10.16.

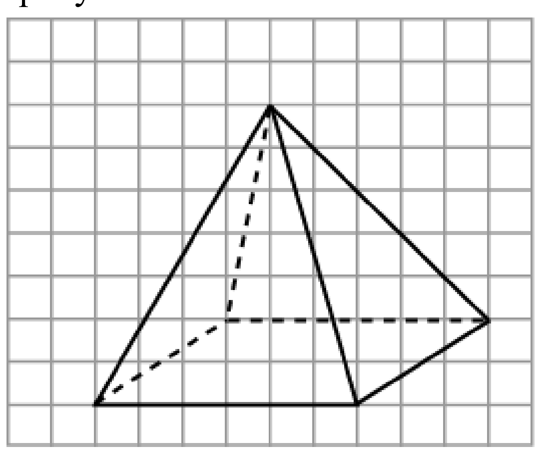
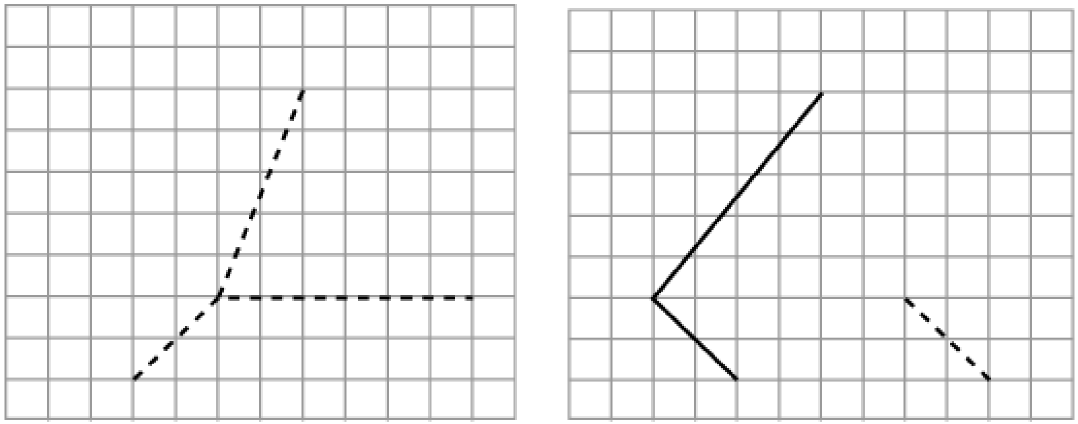


Рис. 10.16

12. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольную пирамиду, три ребра которой изображены на рисунке 10.17 а, б.



а) б)

Рис. 10.17

13. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 10.18.

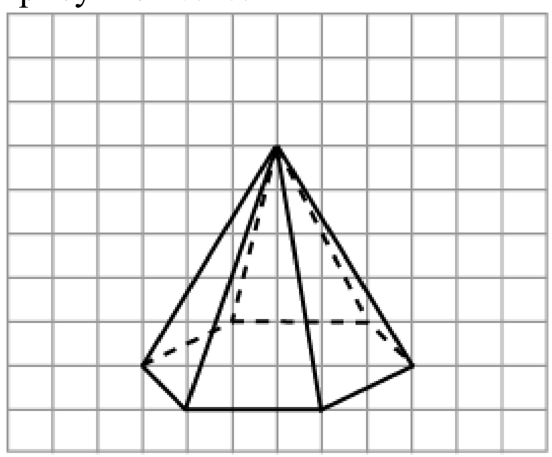
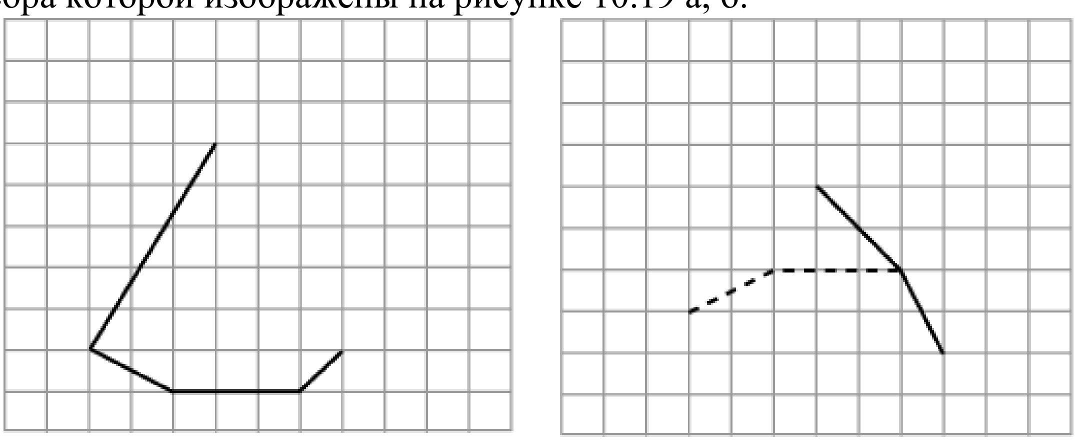


Рис. 10.18

14. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную пирамиду, три ребра которой изображены на рисунке 10.19 а, б.



а) б)

Рис. 10.19

15. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) куб; б) прямоугольный параллелеепипед?

16. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) треугольная призма; б) четырёхугольная призма; в) пятиугольная призма; г) шестиугольная призма?

17. Может ли призма иметь: а) 20 вершин; б) 25 вершин; в) 20 рёбер; г) 30 рёбер; д) 10 граней: е) 15 граней?

18. Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет: а) 18 рёбер; б) 24 вершины; в) 36 граней?

19. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) треугольная пирамида; б) четырёхугольная пирамида; в) шестиугольная пирамида; г) пятиугольная пирамида?

20. Может ли пирамида иметь: а) 10 вершин; б) 15 вершин; в) 10 рёбер; г) 15 рёбер; д) 10 граней: е) 15 граней?

21. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет: а) 8 рёбер; б) 22 вершины; в) 60 граней?

§ 11. Моделирование многогранников

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно вырезать из этого материала многоугольники, равные граням многогранника, и затем склеить соответствующие рёбра. Для удобства склейки многоугольники вырезают с клапанами, по которым и производится склейка.

Например, для изготовления модели куба нужно вырезать шесть квадратов с клапанами, как показано на рисунке 11.1 и склеить их по соответствующим клапанам.

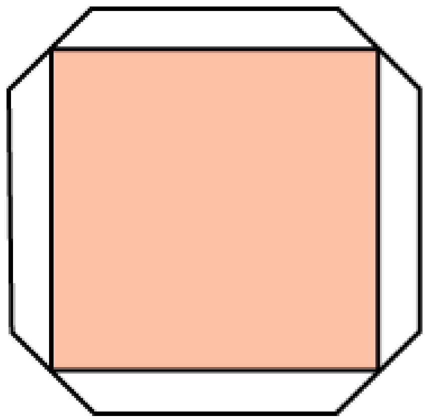


Рис. 11.1

Для изготовления модели прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 3, 4, 5 нужно вырезать пары прямоугольников с клапанами, показанными на рисунке 11.2, и склеить их по клапанам, прилегающих к равным сторонам.

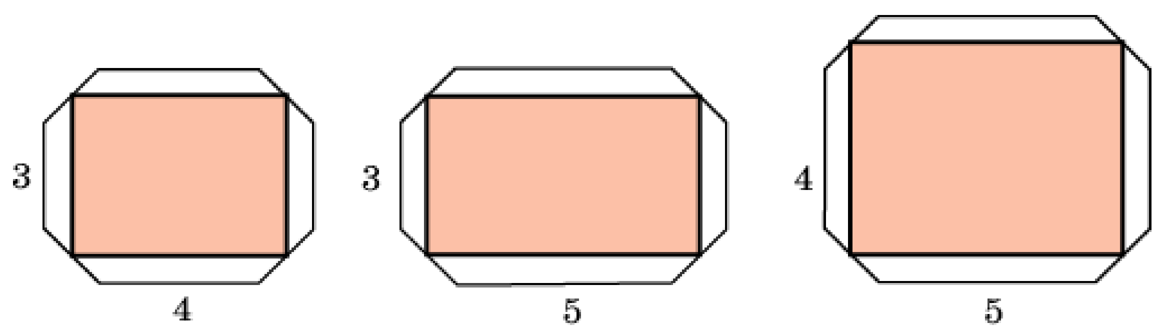


Рис. 11.2

Для изготовления модели наклонного параллелепипеда, гранями которого являются ромбы с острыми углами 60°, нужно вырезать шесть таких ромбов с клапанами, как показано на рисунке 11.3, и склеить их по соответствующим клапанам.

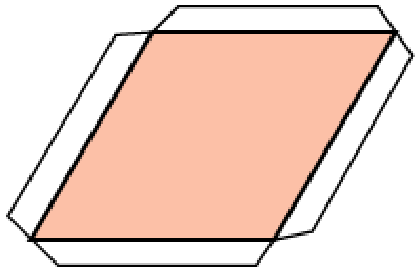


Рис. 11.3

Для изготовления модели правильной треугольной призмы нужно вырезать два равных правильных треугольника с клапанами и три равных прямоугольника с клапанами, одна сторона которых равна стороне треугольника, как показано на рисунке 11.4, и склеить их по соответствующим клапанам.

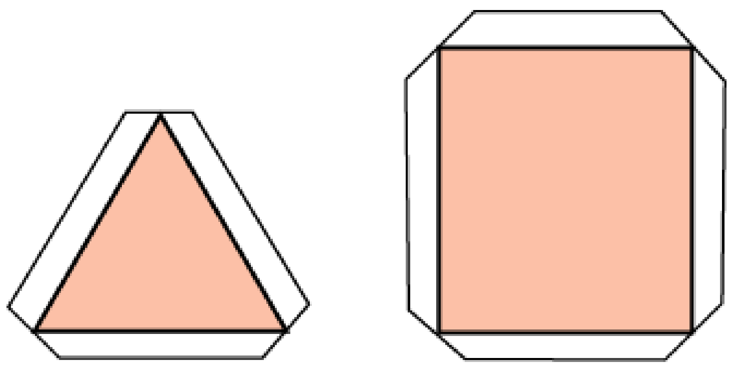


Рис. 11.4

Для изготовления модели правильной шестиугольной призмы нужно вырезать два равных правильных шестиугольника с клапанами и шесть равных прямоугольников с клапанами, одна сторона которых равна стороне шестиугольника, как показано на рисунке 11.5, и склеить их по соответствующим клапанам.

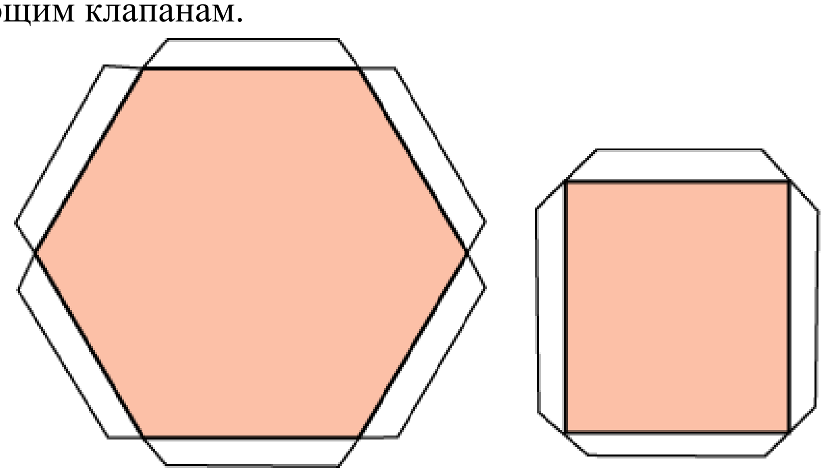


Рис. 11.5

Для изготовления модели правильной треугольной пирамиды нужно вырезать правильный треугольник с клапанами и три равных равнобедренных треугольника с клапанами, одна сторона которых равна стороне правильного треугольника, как показано на рисунке 11.6, и склеить их по соответствующим клапанам.

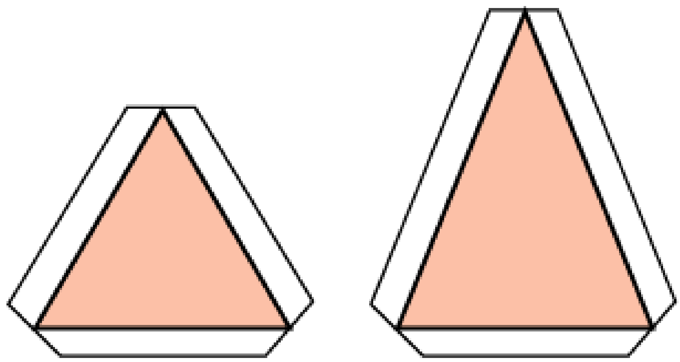


Рис. 11.6

Для изготовления модели правильной шестиугольной пирамиды нужно вырезать правильный шестиугольник с клапанами и шесть равных равнобедренных треугольников с клапанами, одна сторона которых равна стороне правильного шестиугольника, как показано на рисунке 11.7, и склеить их по соответствующим клапанам.

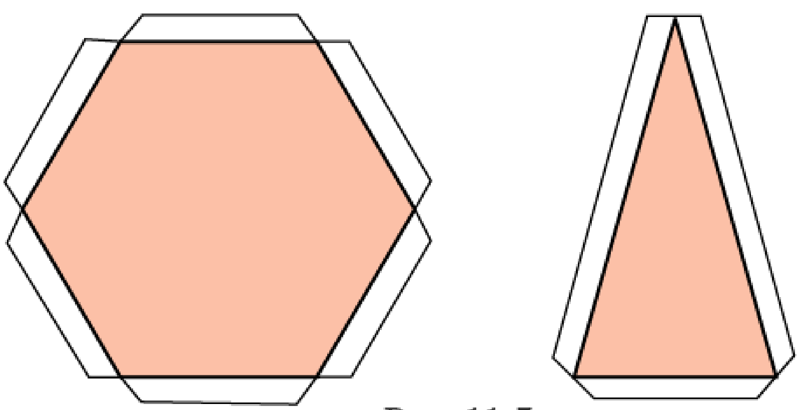


Рис. 11.7

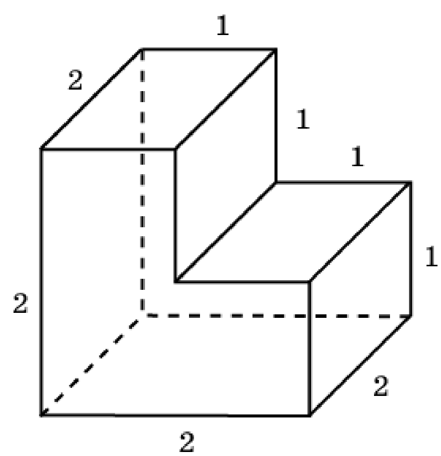


Рис. 11.8

Для изготовления модели невыпуклого многогранника, изображённого на рисунке 11.8, нужно вырезать два равных невыпуклых многоугольника с клапанами, два равных квадрата и четыре равных прямоугольника с клапанами, как показано на рисунке 11.9, и склеить их по соответствующим клапанам.

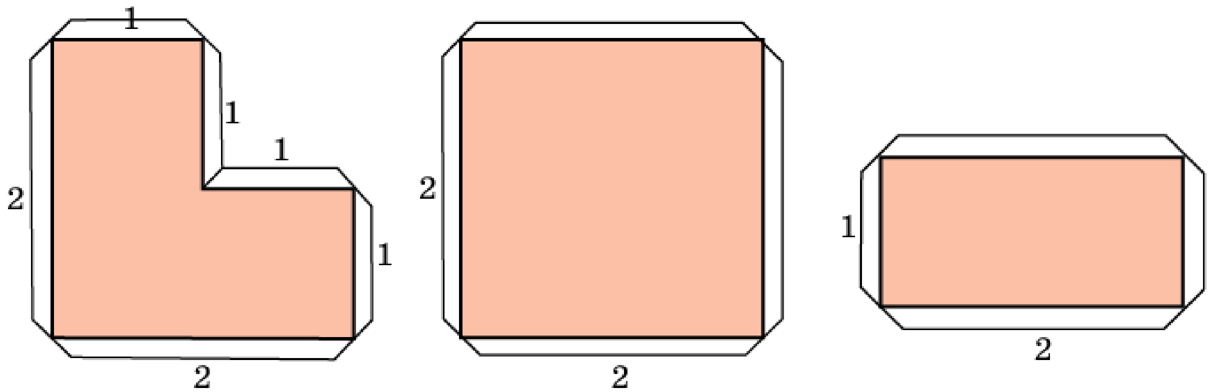


Рис. 11.9

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым рёбрам и развернуть её на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется ***развёрткой*** многогранника. Например, на рисунке 11.10 изображены развёртки куба и треугольной пирамиды.

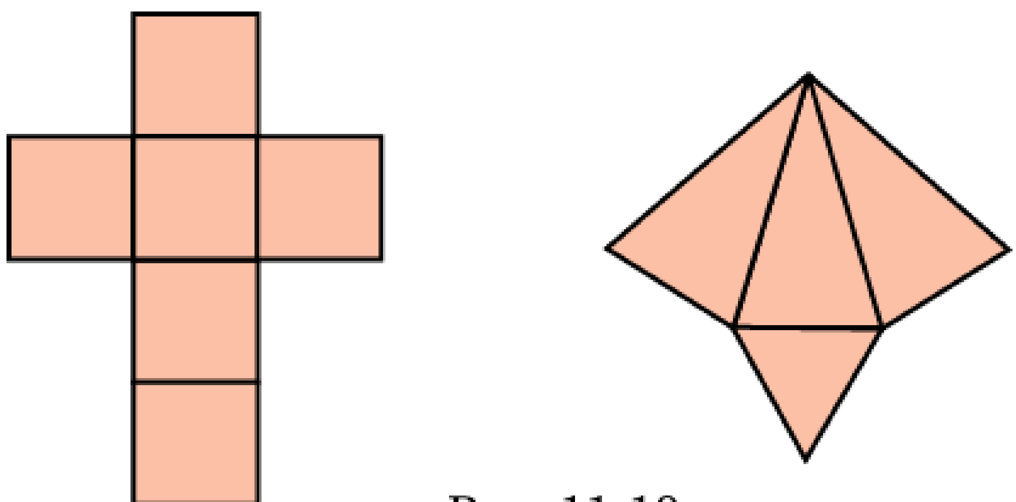


Рис. 11.10

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развёртку и затем склеить соответствующие рёбра. Для удобства склейки развёртку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка. На рисунке 11.11 показана развёртка куба с клапанами.

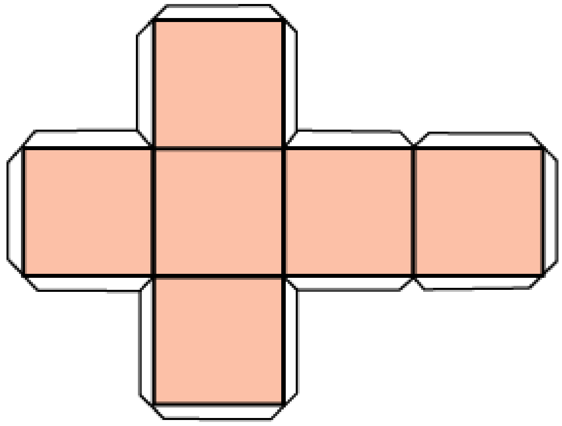


Рис. 11.11

На рисунке 11.12 показаны развёртка наклонного параллелепипеда с клапанами, гранями которого являются ромбы с острыми углами 60^o.

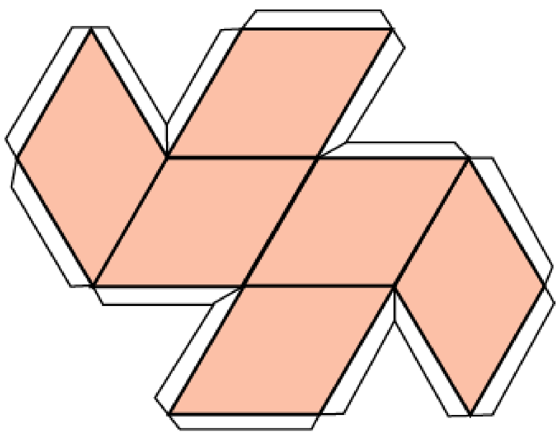


Рис. 11.12

На рисунке 11.13 показаны развёртки треугольной и шестиугольной правильных призм с клапанами.

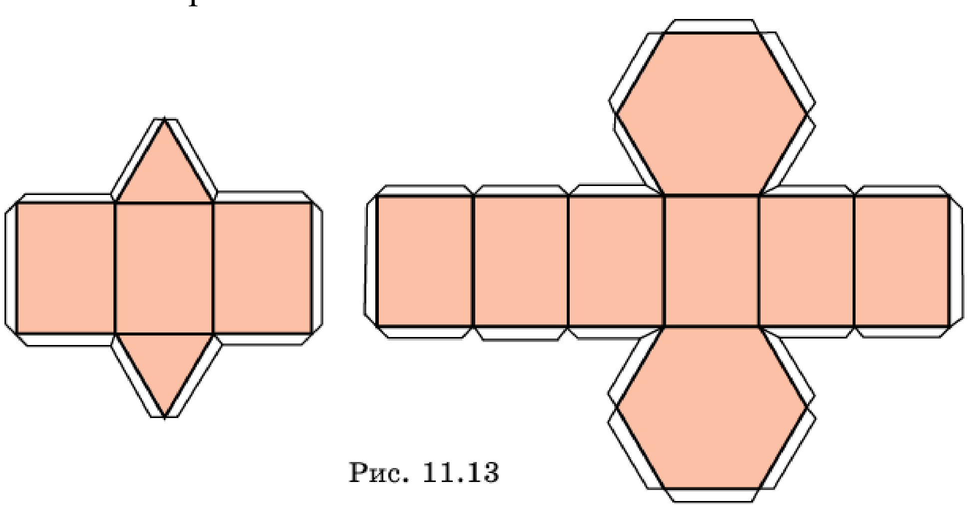


Рис. 11.13

На рисунке 11.14 показаны развёртки треугольной и шестиугольной правильных пирамид.

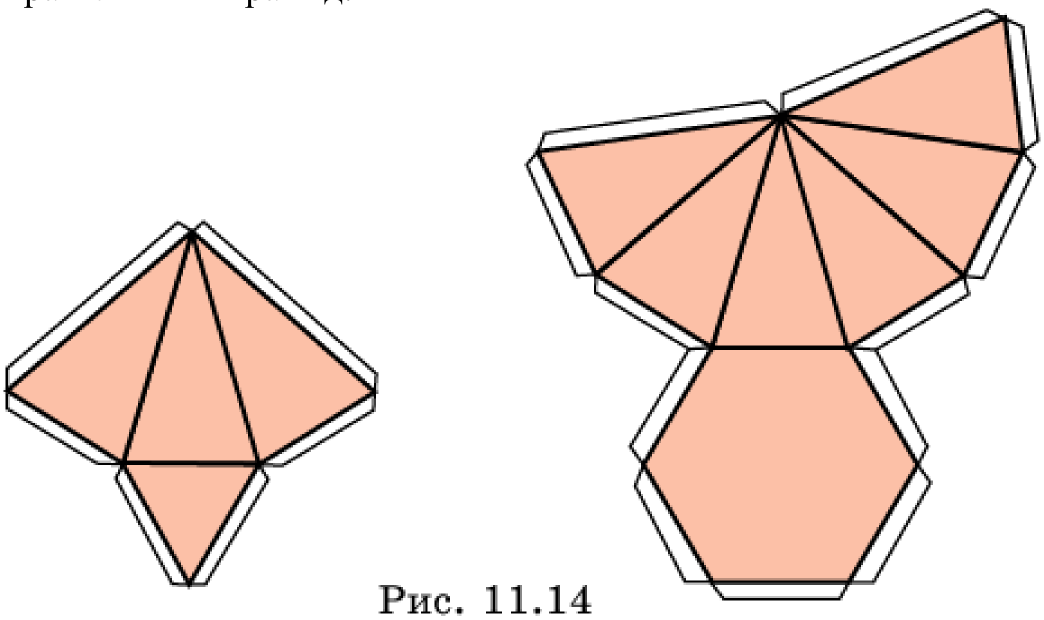


Рис. 11.14

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей многогранников с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами и резиновых колечек - основной крепёжной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 11.15.

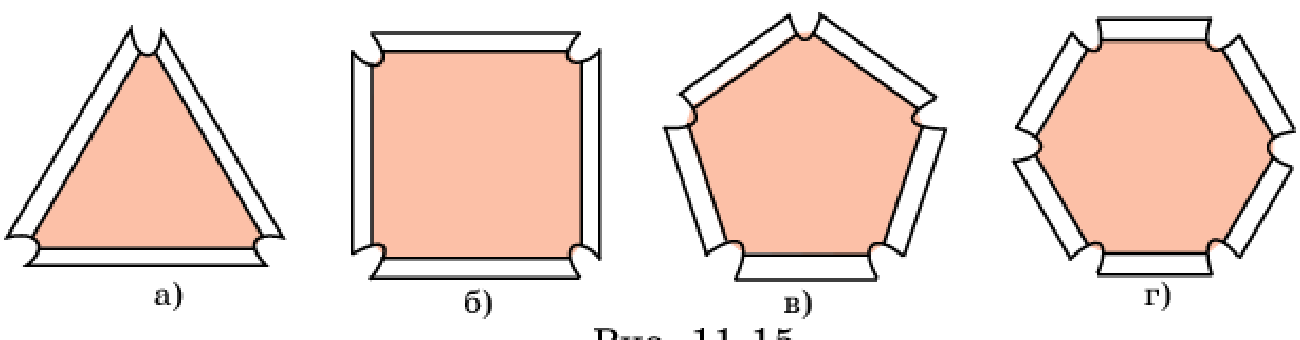


Рис. 11.15

Задачи

1. На рисунке 11.16 укажите развёртки куба.

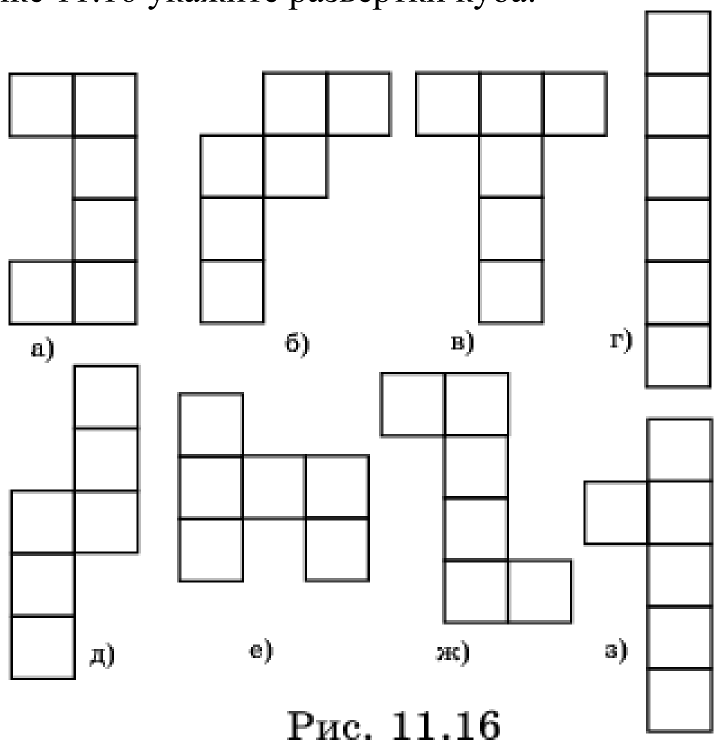


Рис. 11.16

2. На рисунке 11.17 укажите развёртки треугольной призмы.

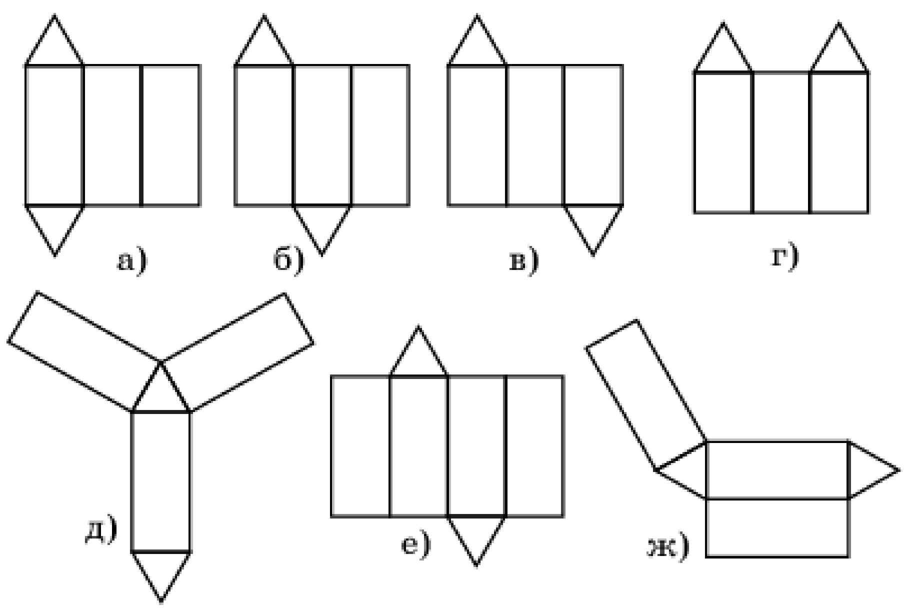


Рис. 11.17

3. На рисунке 11.18 укажите развёртки треугольной пирамиды.

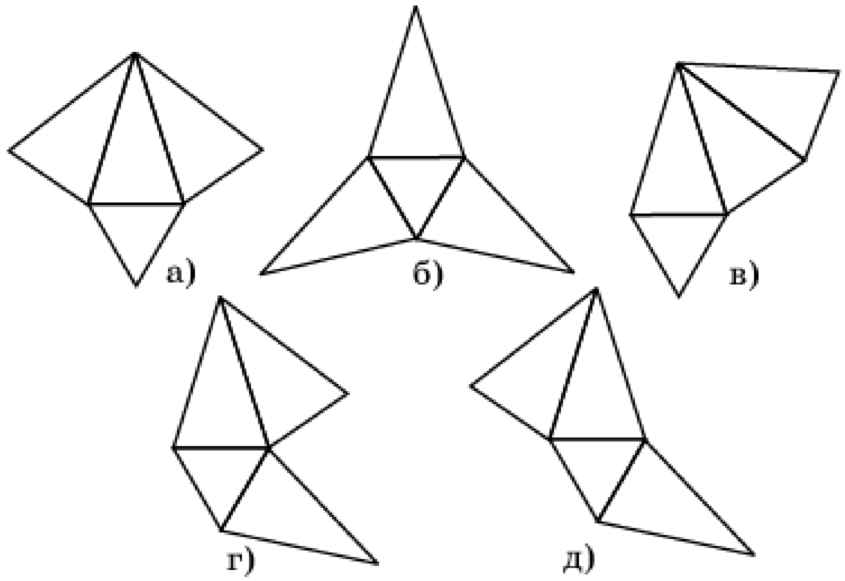


Рис. 11.18

4. На рисунке 11.19 укажите развёртки четырёхугольной пирамиды.

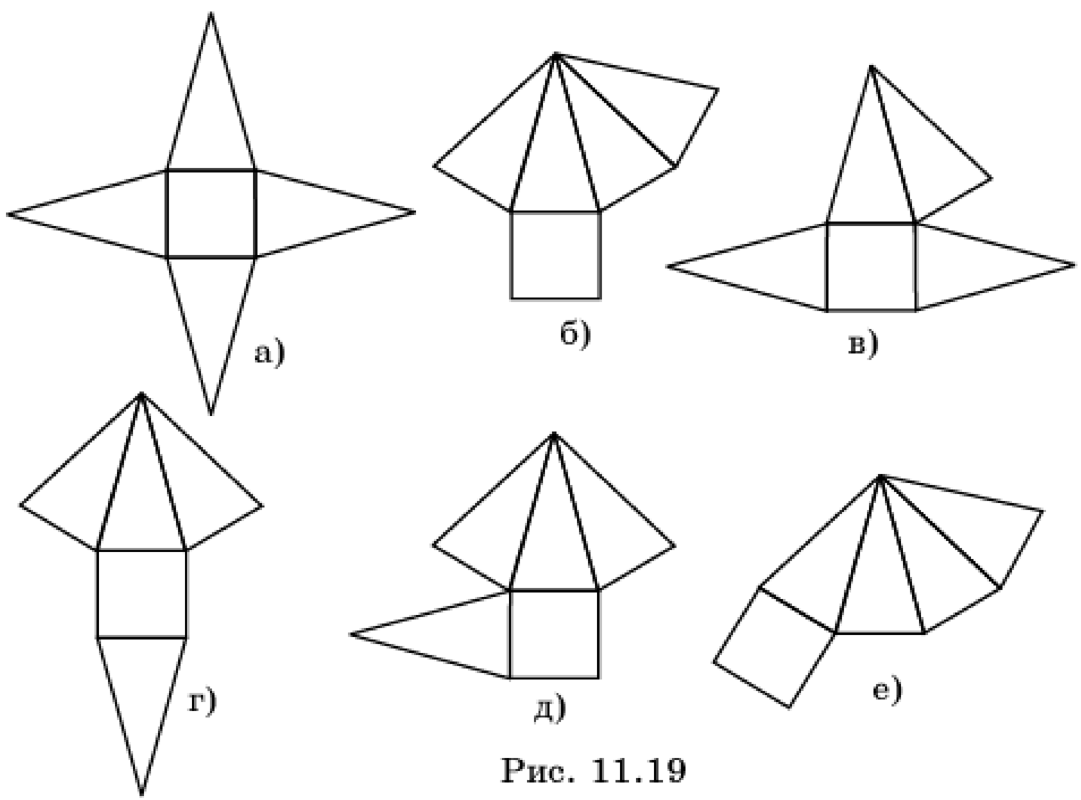


Рис. 11.19

5. По рисункам 11.1 – 11.9 изготовьте модели соответствующих многогранников.

6. По рисункам 11.11 – 11.14 изготовьте модели соответствующих многогранников.

7. Используя конструктор рисунка 11.15, а, б, изготовьте модели куба, треугольной пирамиды, четырёхугольной пирамиды, треугольной призмы.

§ 12. Правильные многогранники

На рисунке 12.1 изображены ***правильные многогранники***. Их гранями являются равные правильные многоугольники, и в вершинах каждого многогранника сходится одинаковое число граней.

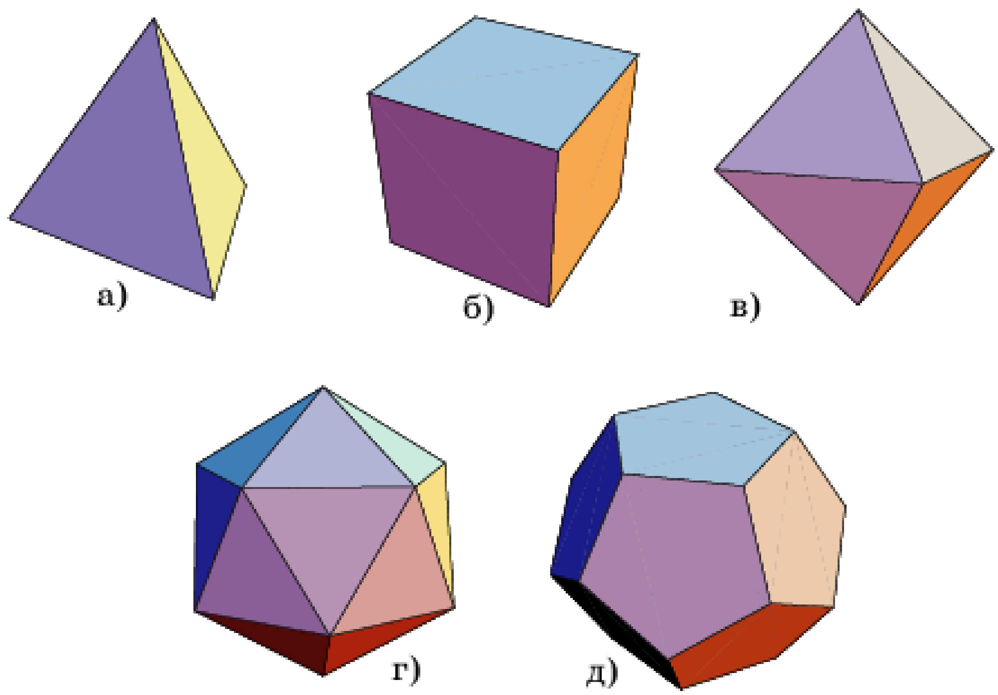


Рис. 12.1

Правильные многогранники с древних времён привлекали к себе внимание учёных. Пифагор и его ученики считали, что всё состоит из атомов, имеющих форму правильных многогранников. В частности, атомы огня имеют форму **тетраэдра** (его гранями являются четыре правильных треугольника, рисунок 12.1, а); земли - **гексаэдра** (**куб** – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рисунок 12.1, б); воздуха – **октаэдра** (его гранями являются восемь правильных треугольников, рисунок 12.1, в); воды – **икосаэдра** (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рисунок 12.1, г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму **додекаэдра** (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рисунок 12.1, д).

Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон. Именно поэтому правильные многогранники называются также **телами Платона**.

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого: "Тетра" - четыре; "Гекса" - шесть; "Окто" - восемь; "Икоси" - двадцать, "Додека" - двенадцать. "Эдра" - грань.

Модели правильных многогранников можно изготовлять с помощью конструктора. Напомним, что он состоит из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами и резиновых колечек - основной крепёжной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных правильных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 12.2.

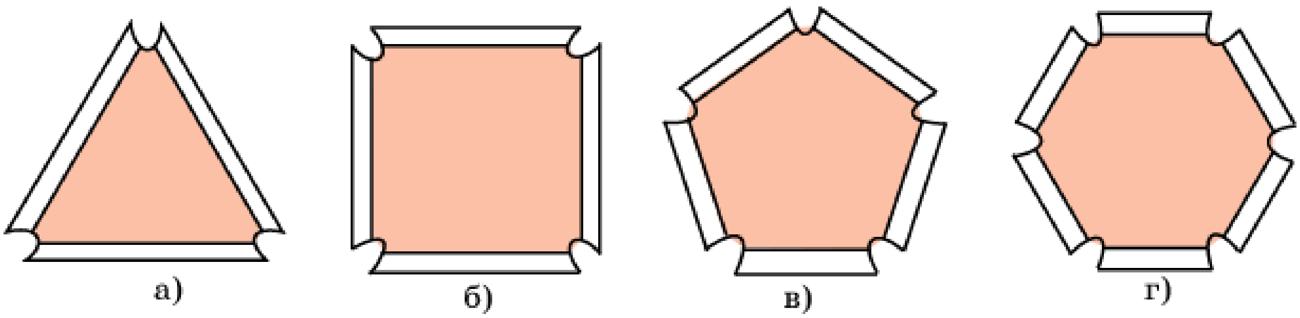


Рис. 12.2

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 12.3.

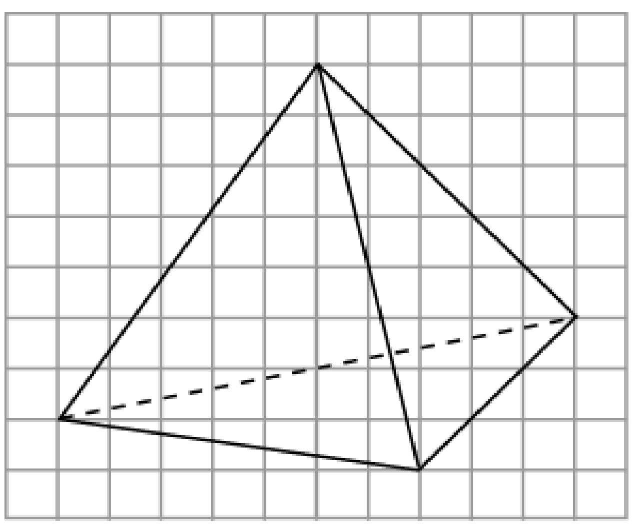


Рис. 12.3

2. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 12.4.

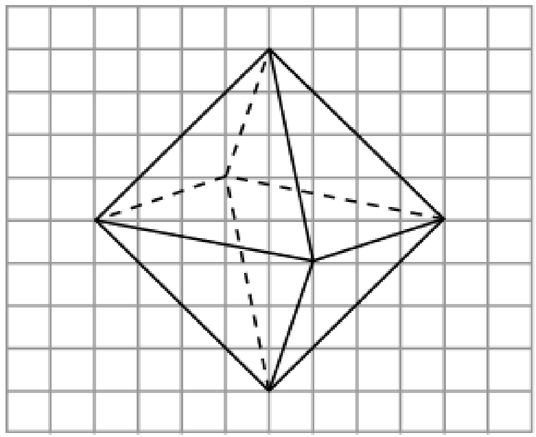


Рис. 12.4

3. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 12.5.

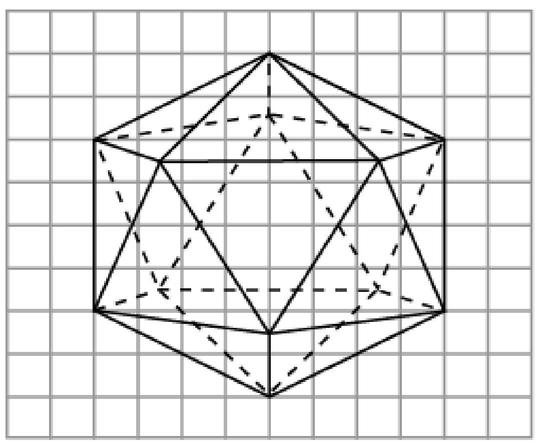


Рис. 12.5

4. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 12.6.

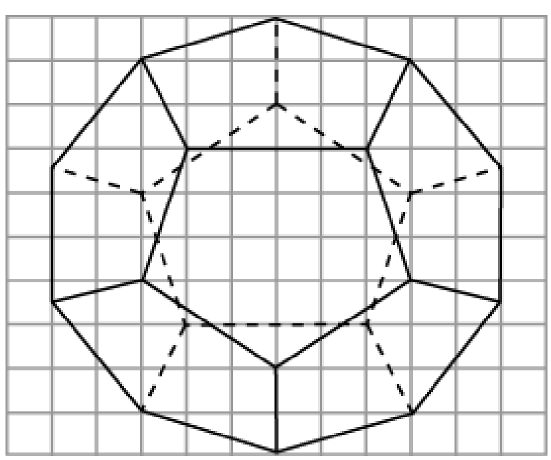


Рис. 12.6

5. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

6. Представьте многогранник - бипирамиду, сложенную из двух равных тетраэдров совмещением каких-нибудь их граней (рис. 12.7). Будет ли он правильным многогранником? Почему?

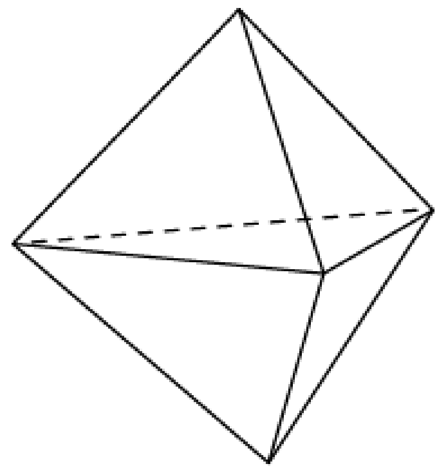


Рис. 12.7

7. На рисунке 12.8 изображён пространственный крест – многогранник, состоящий из семи кубов. Является ли он правильным? Сколько у него вершин (В), рёбер (Р), граней (Г)?

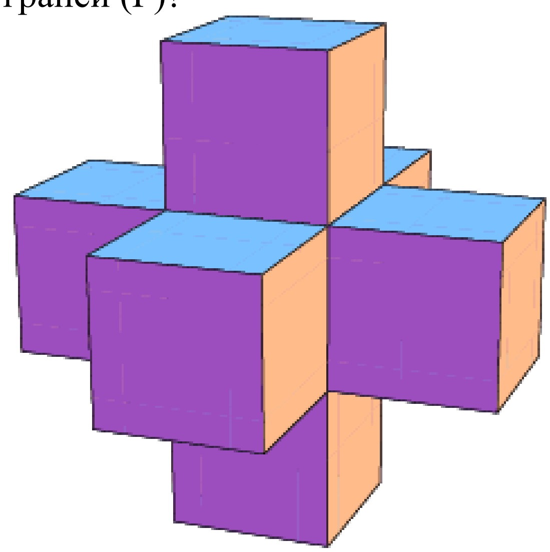


Рис. 12.8

8. На рисунке 12.9 изображён многогранник – звезда Кеплера, составленный из двух тетраэдров. Какой многогранник является общей частью этих тетраэдров?

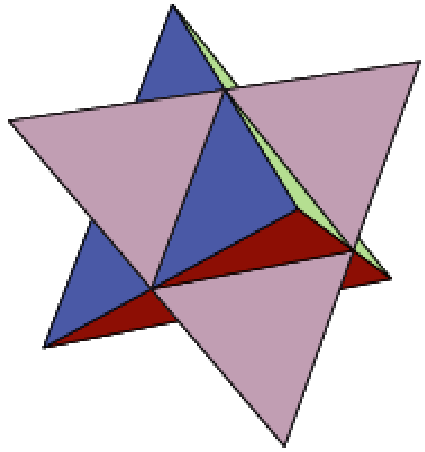


Рис. 12.9

9. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 12.10. Отметьте центры граней куба. Вершинами какого многогранника они являются?

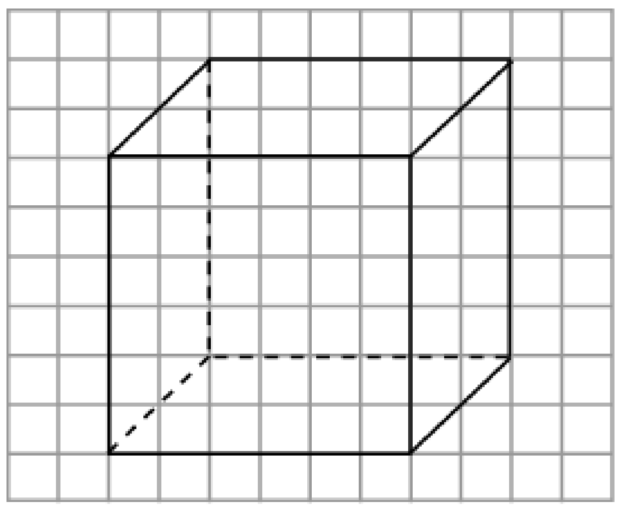


Рис. 12.10

10. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 12.3. Отметьте центры граней тетраэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

11. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 12.4. Отметьте центры граней октаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

12. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 12.5. Отметьте центры граней икосаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

13. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 12.6. Отметьте центры граней додекаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

14. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 12.3. Отметьте середины рёбер тетраэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

15. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется?

16. На рисунке 12.11 укажите развёртки октаэдра.

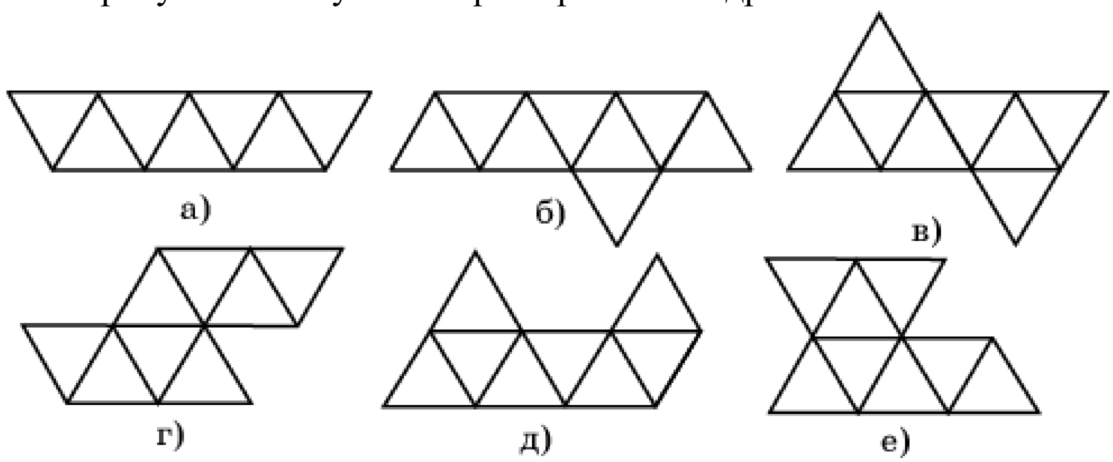


Рис. 12.11

17. Является ли фигура, изображённая на рисунке 12.12, развёрткой икосаэдра?

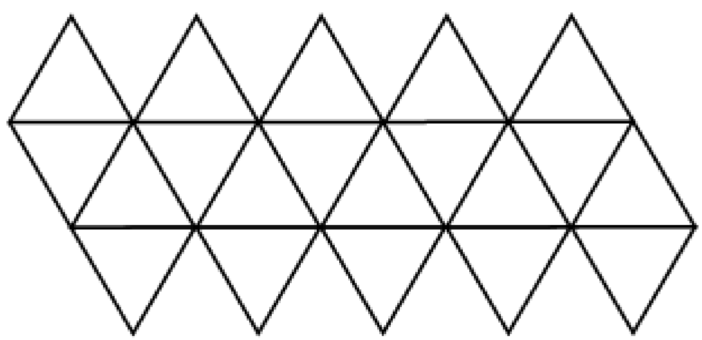


Рис. 12.12

18. Является ли фигура, изображённая на рисунке 12.13, развёрткой додекаэдра?

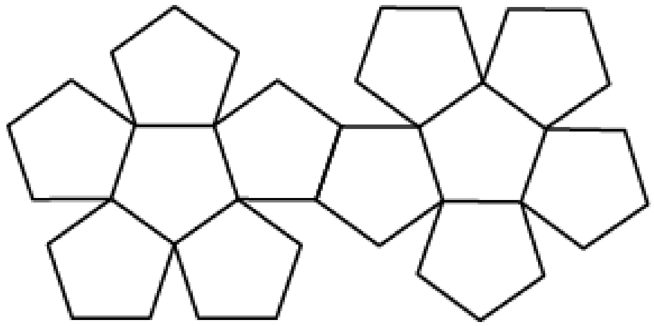


Рис. 12.13

19. Сколько имеется путей длины 2 по рёбрам единичного октаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

20. Сколько имеется путей длины 3 по рёбрам единичного октаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

21. Сколько имеется путей длины 3 по рёбрам единичного икосаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

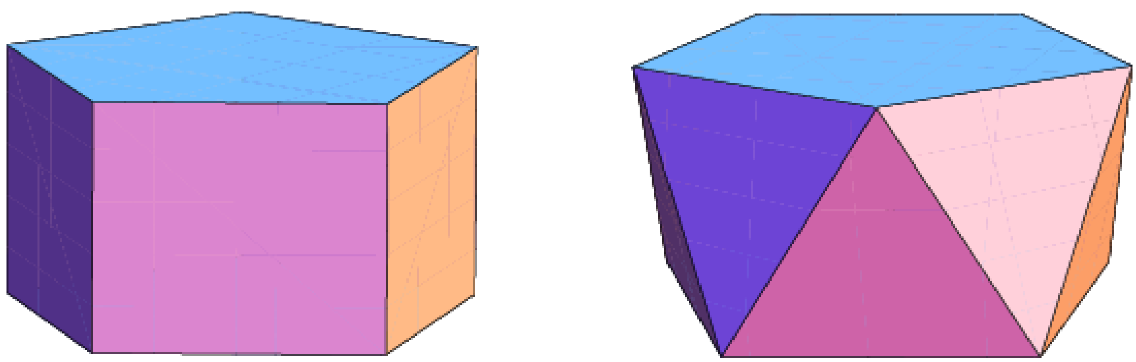
22. Сколько имеется путей длины 5 по рёбрам единичного додекаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

23. Изготовьте модели правильных многогранников из конструктора (рис. 12.2). Резиновые колечки можно вырезать из велосипедной камеры. В зависимости от длины колечек выберите длины сторон правильных многоугольников. Для обычной велосипедной камеры стороны правильных многоугольников можно взять примерно равными 7 см.

§ 13*. Полуправильные многогранники

В предыдущем параграфе мы рассмотрели правильные многогранники – выпуклые многогранники, у которых гранями являются равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Если допустить, что гранями многогранника могут быть правильные многоугольники с различным числом сторон, то получим многогранники, которые называются ***полуправильными***.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы, все рёбра которых равны. Например, правильная пятиугольная призма на рисунке 13.1, а, имеет своими гранями два правильных пятиугольника - основания призмы, и пять квадратов, образующих боковую поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и, так называемые, **антипризмы** с равными рёбрами. На рисунке 13.1, б мы видим пятиугольную антипризму.



а) б)

Рис. 13.1

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется ещё 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед - это **тела Архимеда**.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией "усечения", состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его рёбер, выходящих из одной вершины, то получим **усечённый тетраэдр**, имеющий восемь граней (рис. 13.2, а). Из них четыре - правильные шестиугольники, и четыре - правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно **усечённый октаэдр** (рис. 13.2, б) и **усечённый икосаэдр** (рис. 13.2, в). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усечённого икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить **усечённый куб** (рис. 13.2, г) и **усечённый додекаэдр** (рис. 13.2, д).

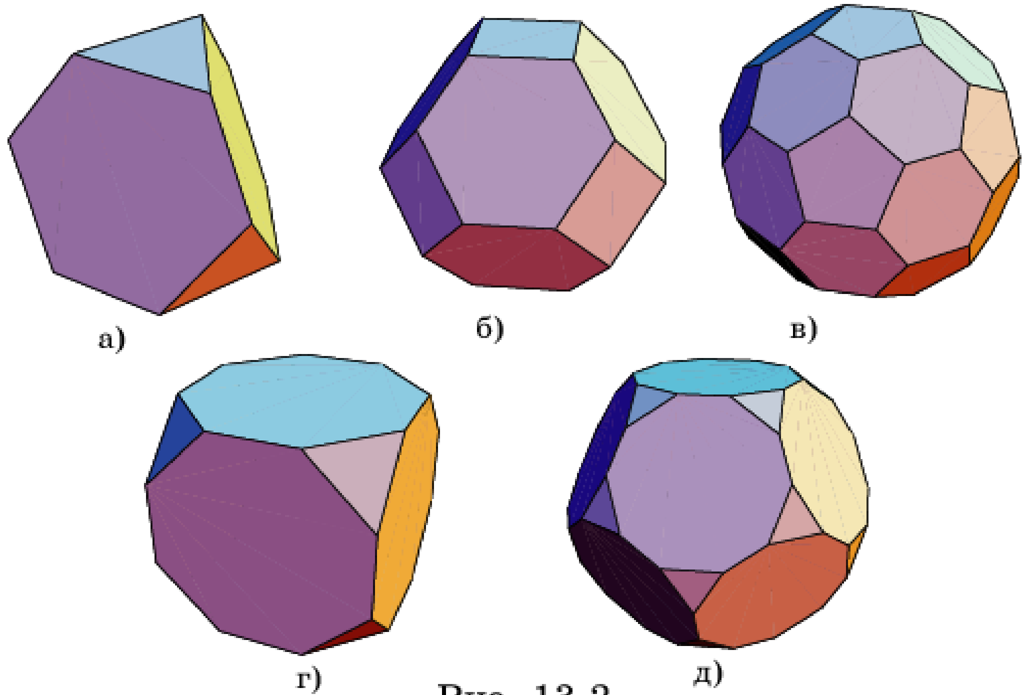


Рис. 13.2

Для того чтобы получить ещё один полуправильный многогранник, проведём в кубе отсекающие плоскости через середины рёбер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется **кубооктаэдром** (рис. 13.3, а). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название - кубооктаэдр.

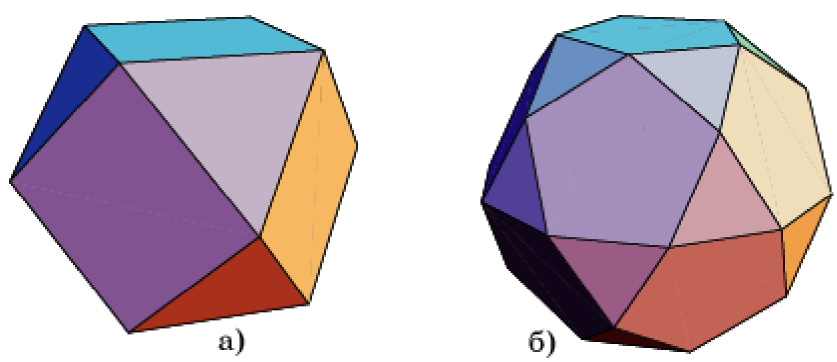
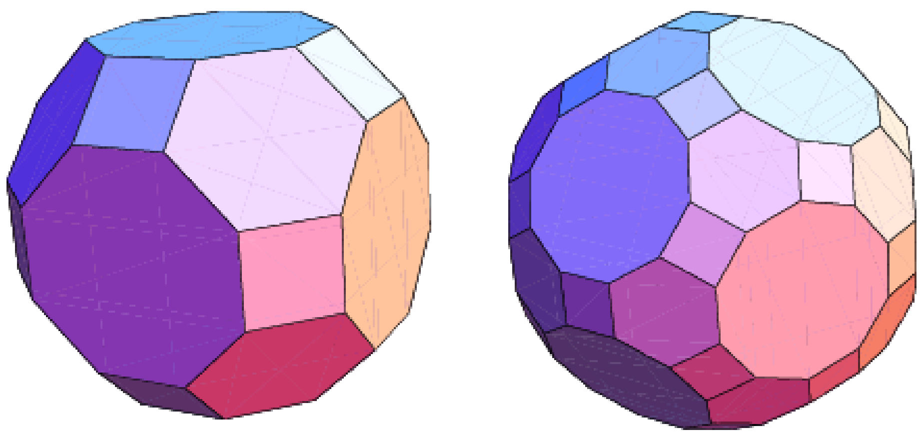


Рис. 13.3

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины рёбер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется **икосододекаэдром** (рис. 13.3, б). У него двадцать граней - правильные треугольники, и двенадцать граней - правильные пятиугольники, т.е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

Хотя к последним двум многогранникам нельзя применить операцию усечения, тем не менее, существуют полуправильные многогранники, которые называются **усечённый кубооктаэдр** (рис. 13.4, а) и **усечённый икосододекаэдр** (рис. 13.4, б).

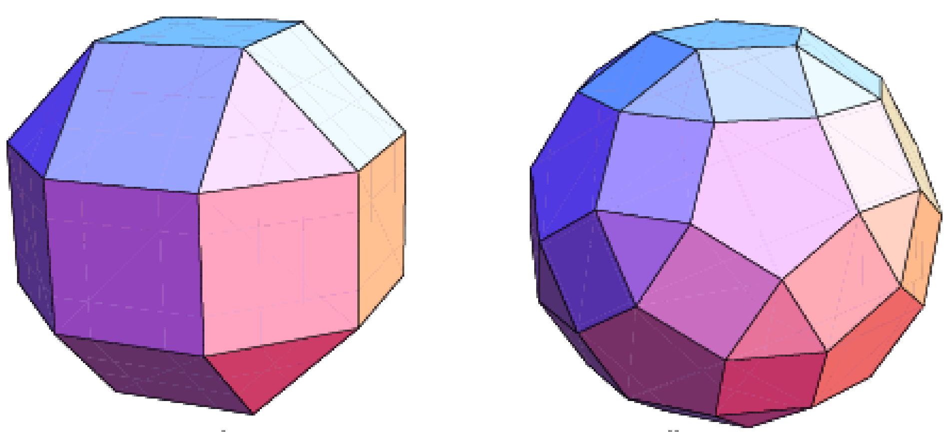


а) б)

Рис. 13.4

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся - многогранники более сложного типа.

На рисунке 13.5, а мы видим **ромбокубооктаэдр**. Его поверхность состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены ещё 12 квадратов.

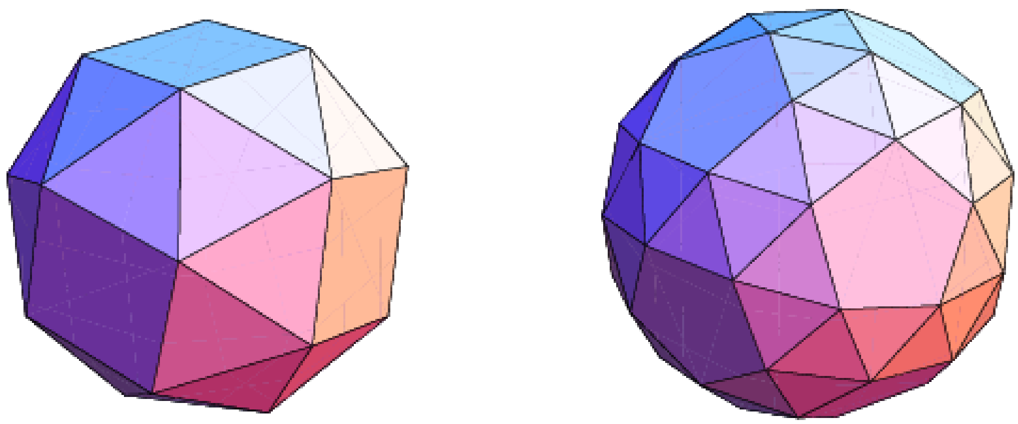


а) б)

Рис. 13.5

На рисунке 13.5, б изображён **ромбоикосододекаэдр**, поверхность которого состоит из граней икосаэдра, додекаэдра и ещё 30 квадратов.

На рисунках 13.6, а и 13.6, б представлены соответственно, так называемые, **плосконосый** (иногда называют **курносый**) **куб** и **плосконосый** (**курносый**) **додекаэдр**, поверхности которых состоят из граней куба или додекаэдра, окружённых правильными треугольниками.



а) б)

Рис. 13.6

Модели полуправильных многогранников можно изготовить из развёрток. Например, на рисунке 13.7 изображена развёртка усечённого тетраэдра.

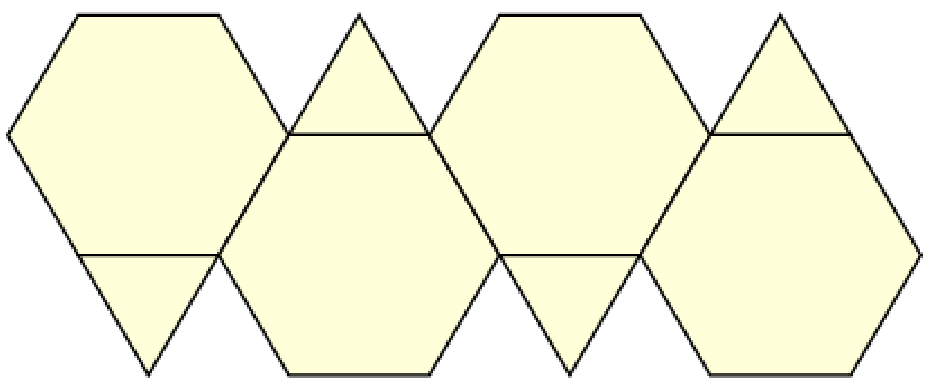


Рис. 13.7

Модели полуправильных многогранников можно изготовлять с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами и резиновых колечек - основной крепёжной детали конструктора (рис. 12.2).

Исторические сведения

Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287-212 гг. до н. э.). Убедившись в том, что нельзя построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноимённые многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число рёбер. Так он получил 13 равноугольно-полуправильных многогранников. До нас дошла работа самого учёного "О многогранниках", в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь учёного телами Архимеда.

Сам Архимед был уникальным учёным - механиком, физиком, математиком, инженером. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение трудов Архимеда интересным и полезным для историков современной математики, для учёных многих специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погружёнными в жидкость. Эта теорема находится в трактате "О плавающих телах" и в современных учебниках по физике называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений учёного известна катапульта - "архимедов винт" (иногда его называют также "кохлея"-улитка) для поднятия наверх воды - это оборонное сооружение. Архимед участвовал в защите своего родного города Сиракузы, при осаде которого и погиб. Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на могиле начертить цилиндр и содержащийся в нём шар и указать соотношение их объёмов. Позже именно по этому памятнику и была найдена могила великого учёного.

Задачи

1. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) пятиугольная призма; б) пятиугольная антипризма?

2. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) усечённый тетраэдр; б) усечённый куб; в) усечённый октаэдр; г) усечённый икосаэдр; д) усечённый додекаэдр?

3. Форму какого многогранника напоминает футбольный мяч?

4. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 12.10. Отметьте середины рёбер куба. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются отмеченные точки. Как он называется? Сколько у него: а) вершин (В); б) рёбер (Р); в) граней (Г)?

5. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 12.4. Отметьте середины рёбер октаэдра. Нарисуйте многогранник,

вершинами которого являются отмеченные точки. Как он называется? Сколько у него: а) вершин (В); б) рёбер (Р); в) граней (Г)?

6. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 12.5. Отметьте середины рёбер икосаэдра. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются отмеченные точки. Как он называется? Сколько у него: а) вершин (В); б) рёбер (Р); в) граней (Г)?

7. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 12.6. Отметьте середины рёбер додекаэдра. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются отмеченные точки. Как он называется? Сколько у него: а) вершин (В); б) рёбер (Р); в) граней (Г)?

8. Развёртка какого многогранника изображена на рисунке 13.8?

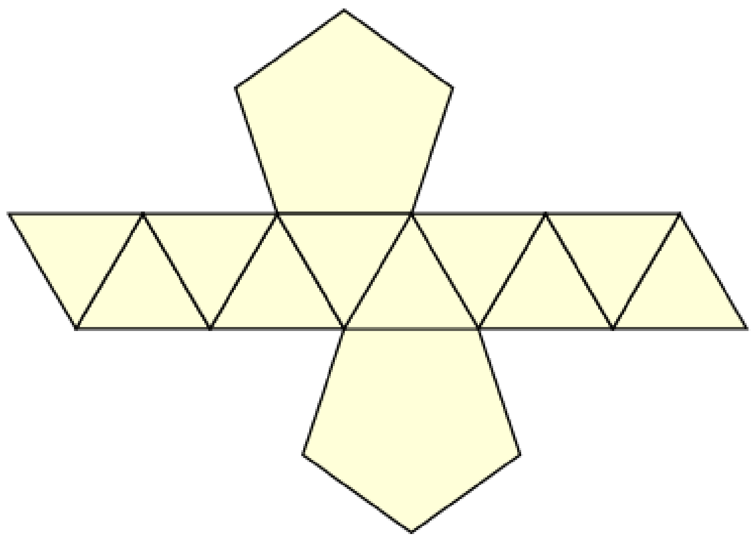


Рис. 13.8

9. Развёртка какого многогранника изображена на рисунке 13.9?

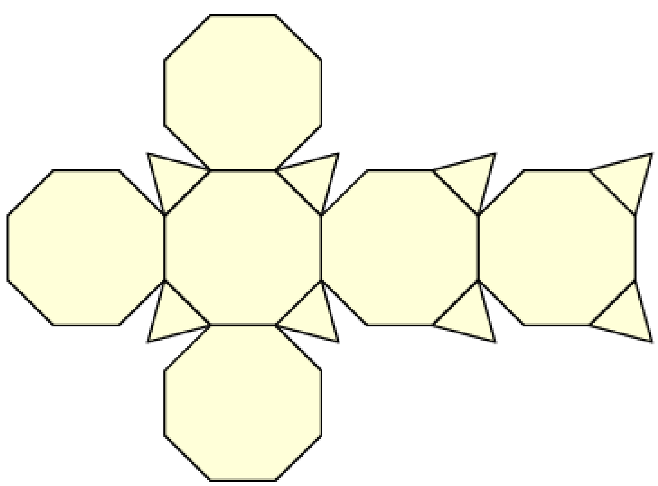


Рис. 13.9

10. Развёртка какого многогранника изображена на рисунке 13.10?

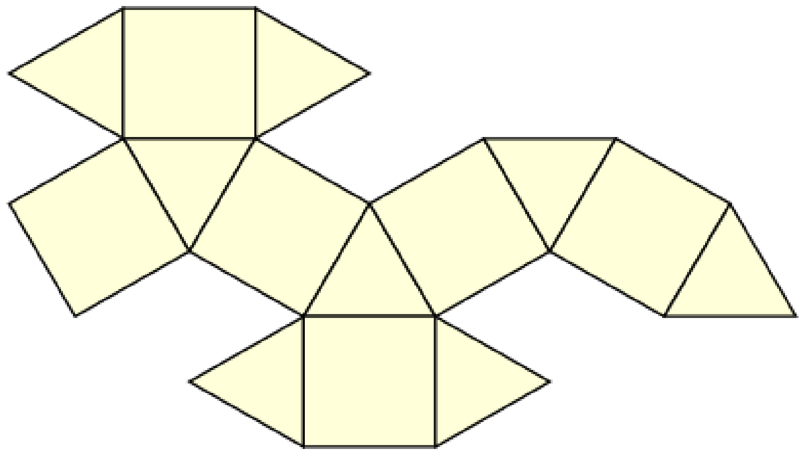


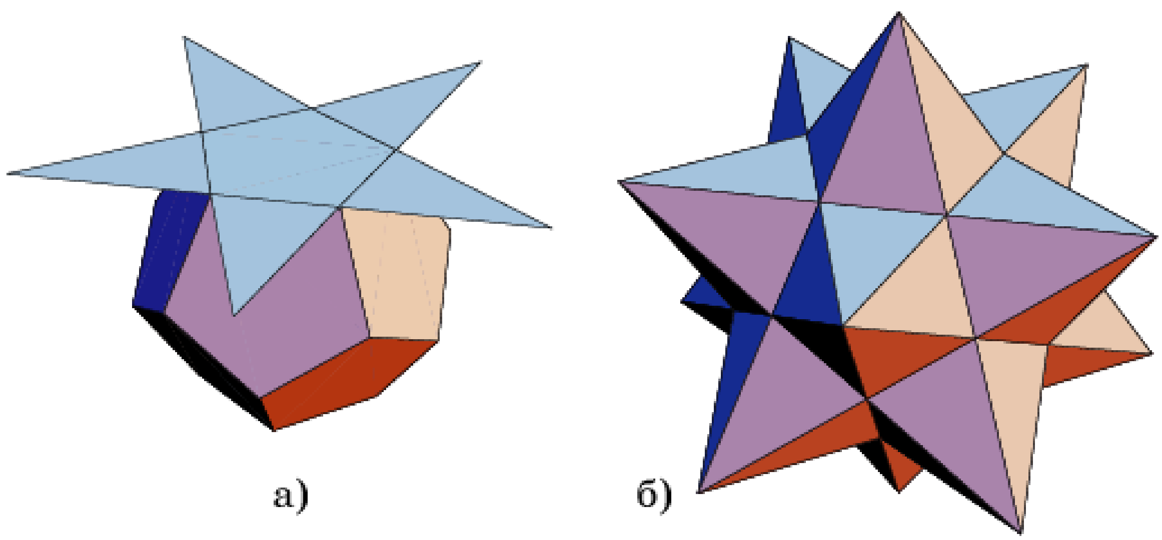
Рис. 13.10

11. Изготовьте модели полуправильных многогранников из конструктора (рис. 12.2). Резиновые колечки можно вырезать из велосипедной камеры. В зависимости от длины колечек выберите длины сторон правильных многоугольников. Для обычной велосипедной камеры стороны правильных многоугольников можно взять примерно равными 7 см.

§ 14*. Звёздчатые многогранники

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют, так называемые, звёздчатые многогранники. Здесь мы рассмотрим правильные звёздчатые многогранники. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером (1571 – 1630), а два других почти 200 лет спустя построил Л. Пуансо (1777-1859). Именно поэтому правильные звёздчатые многогранники называются **телами Кеплера-Пуансо**. Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или рёбер.

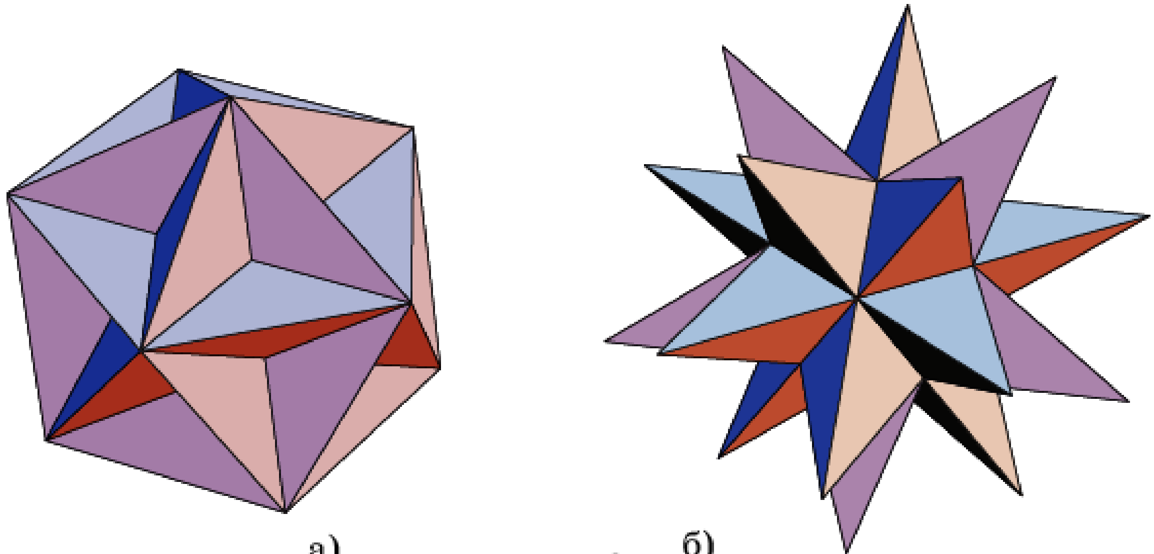
Из тетраэдра, куба и октаэдра звёздчатые многогранники не получаются. Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его рёбер приводит к замене каждой грани звёздчатым правильным пятиугольником (рис. 14.1, а), и в результате возникает многогранник, который называется **малым звёздчатым додекаэдром** (рис. 14.1, б).



а) б)

Рис. 14.1

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Во-первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится так называемый **большой додекаэдр** (рис. 14.2, а). Если же, во-вторых, в качестве граней рассматривать звёздчатые пятиугольники, то получается **большой звёздчатый додекаэдр** (рис. 14.2, б).



а) Рис. 14.2 б)

Икосаэдр имеет одну звёздчатую форму. При продолжении граней икосаэдра получается **большой икосаэдр** (рис. 14.3).

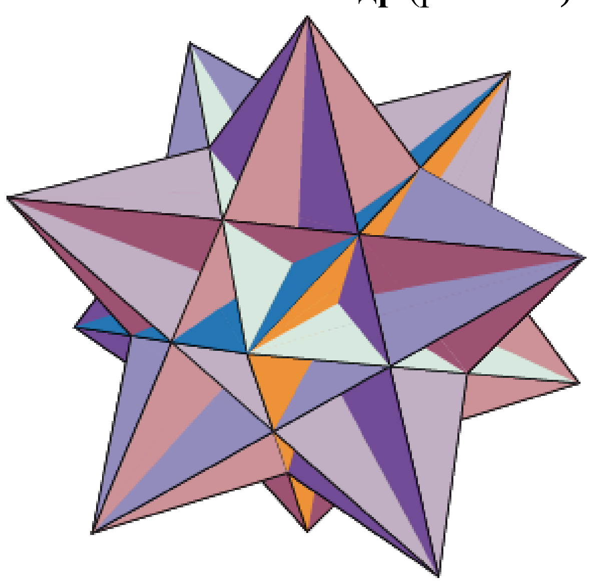


Рис. 14.3

Таким образом, существуют 4 типа правильных звёздчатых многогранников.

Рассмотрим способ изготовления модели малого звёздчатого додекаэдра, который, как сказано выше, получается из додекаэдра путём продолжения его рёбер до самопересечения. Это очень красивый многогранник, который может украсить и школьный кабинет, и домашний рабочий уголок.

Нужно изготовить 12 боковых поверхностей правильных пятиугольных пирамид, сторона основания и боковое ребро которых находятся в отношениии 5:8. Развёртка соответствующей правильной пирамиды показана на рисунке 14.4. Затем склеить эти пирамиды по клапанам, примыкающим к соответствующим сторонам оснований.

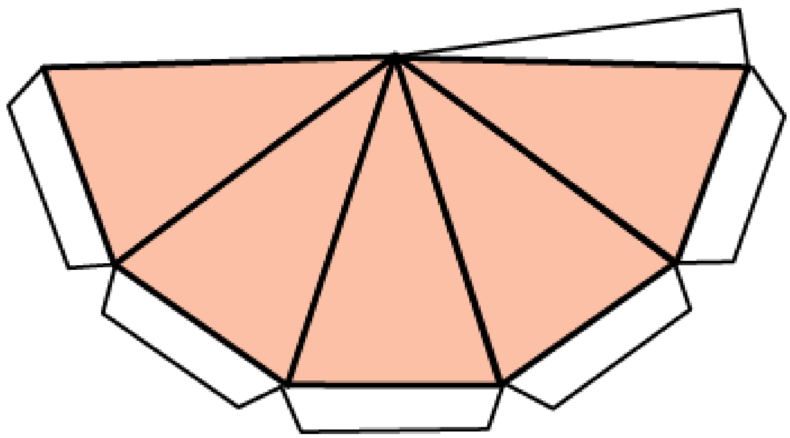


Рис. 14.4

Для изготовления модели большого додекаэдра (рис. 14.2, а) нужно изготовить 20 боковых поверхностей правильных треугольных пирамид, сторона основания и боковое ребро которых находятся в отношении 8:5. Развёртка соответствующей правильной пирамиды показана на рисунке 14.5. Затем склеить эти пирамиды по клапанам, примыкающим к соответствующим сторонам оснований.

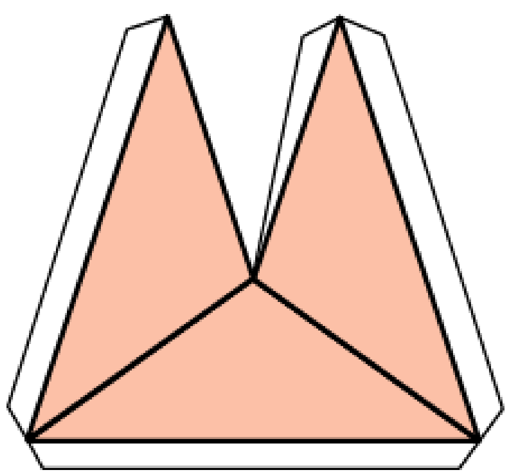


Рис. 14.5

Для изготовления модели большого звёздчатого додекаэдра (рис. 14.2, б) нужно изготовить 20 боковых поверхностей правильных треугольных пирамид, сторона основания и боковое ребро которых находятся в отношении 5:8. Развертка соответствующей правильной пирамиды показана на рисунке 14.6. Затем склеить эти пирамиды по клапанам, примыкающим к соответствующим сторонам оснований.

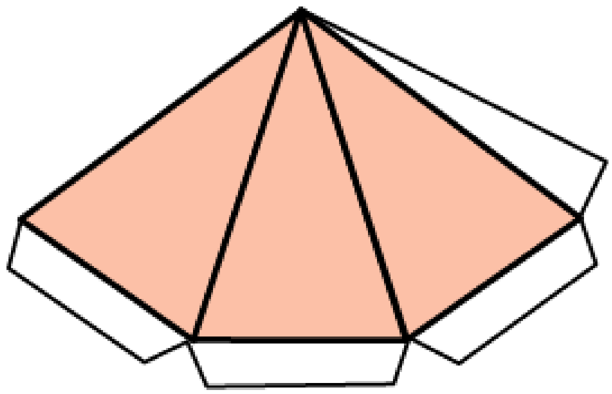


Рис. 14.6

Задачи

1. Сколько тетраэдров изображено на рисунке 14.7?

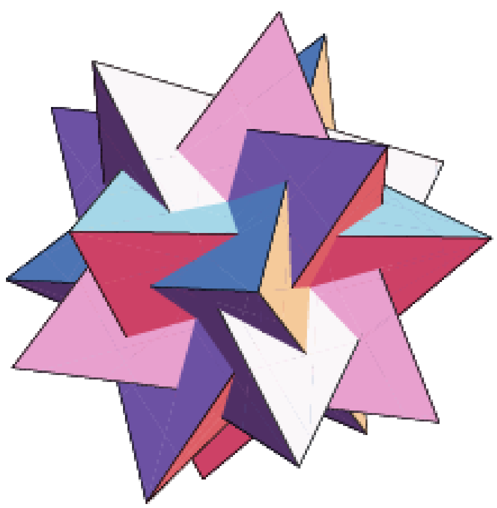


Рис. 14.7

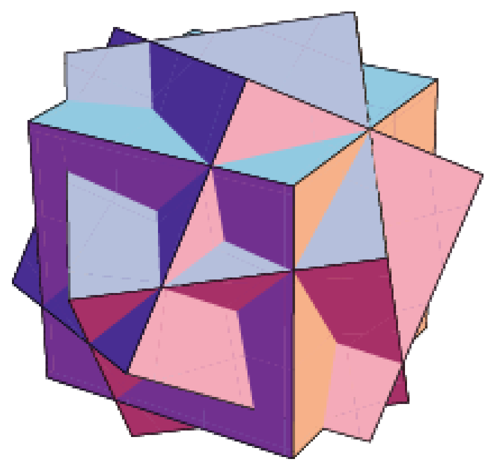


Рис. 14.8

2. Сколько кубов изображено на рисунке 14.8?

3. Сколько октаэдров изображено на рисунке 14.9?

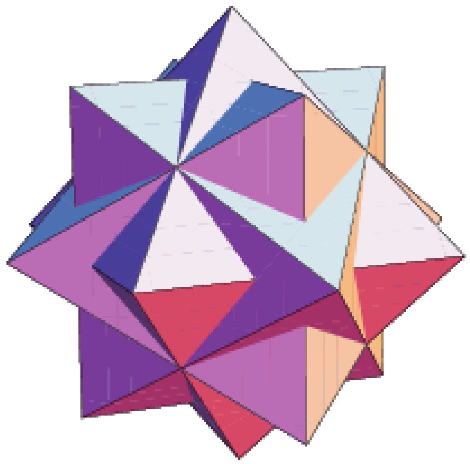


Рис. 14.9

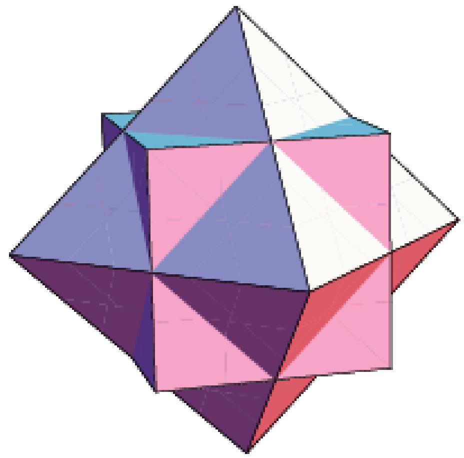


Рис. 14.10

4. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 14.10?

5. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 14.11?

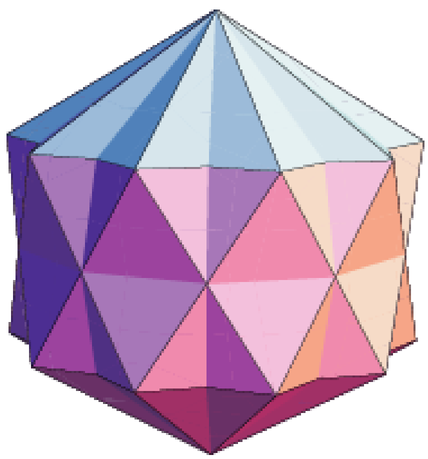


Рис. 14.11

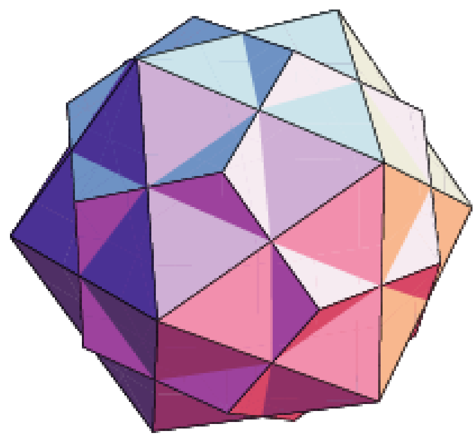


Рис. 14.12

6. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 14.12?

7. Изготовьте модели звёздчатых многогранников из развёрток на рисунках 14.4 – 14.6.

ОТВЕТЫ

§ 1. Точки, прямые, плоскости

1. Одну или ни одной. **2.** Пять прямых, десять точек попарных пересечений. **3.** Точки *A, B, C, D* принадлежат одной прямой. **4.** Прямые *a, b, c, d* пересекаются в одной точке. **6.** Три. **7.** Шесть. **8.** Десять. **9.** Пятнадцать. **10.** Ни одной, одну, две или три (рис. 1).

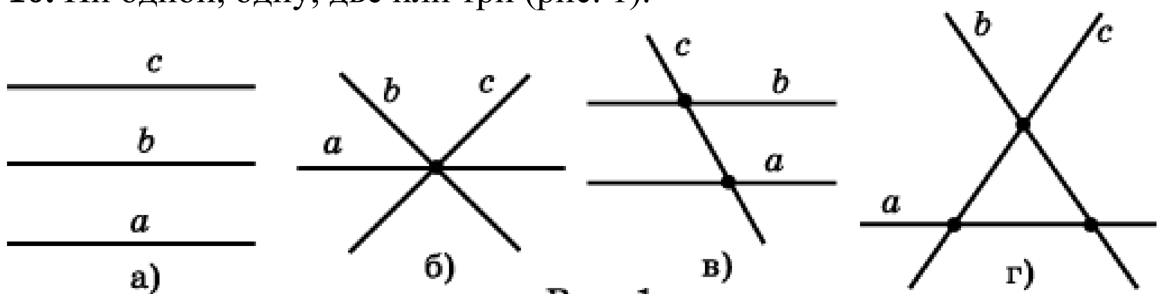


Рис. 1

11. Рисунок 2. **12.** Рисунок 3.

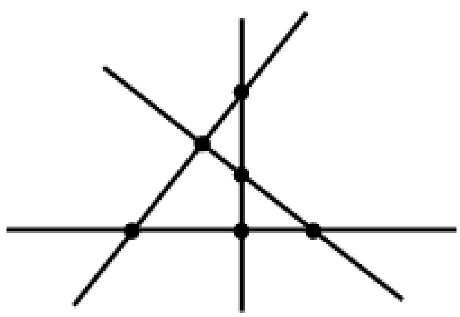


Рис. 2

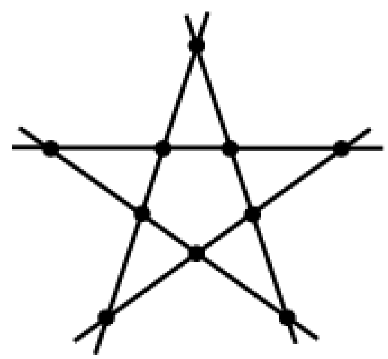


Рис. 3

13. Рисунок 4.

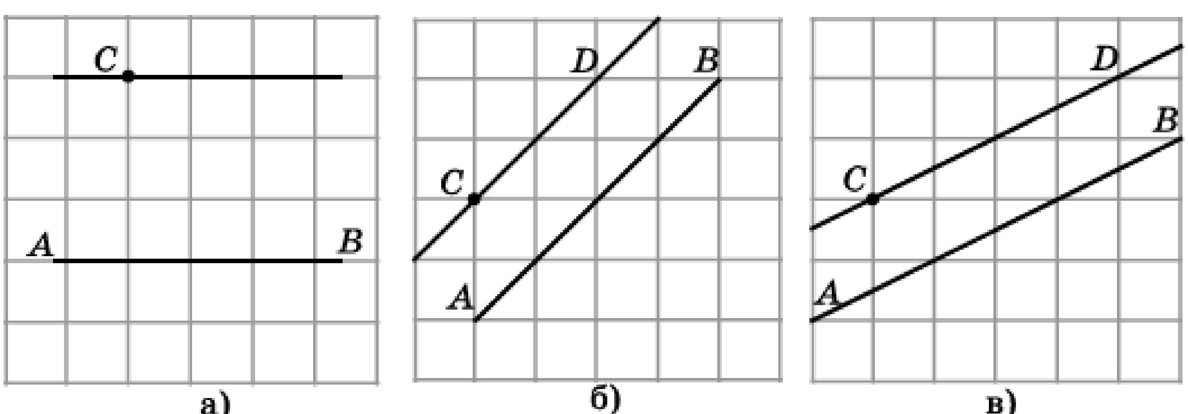
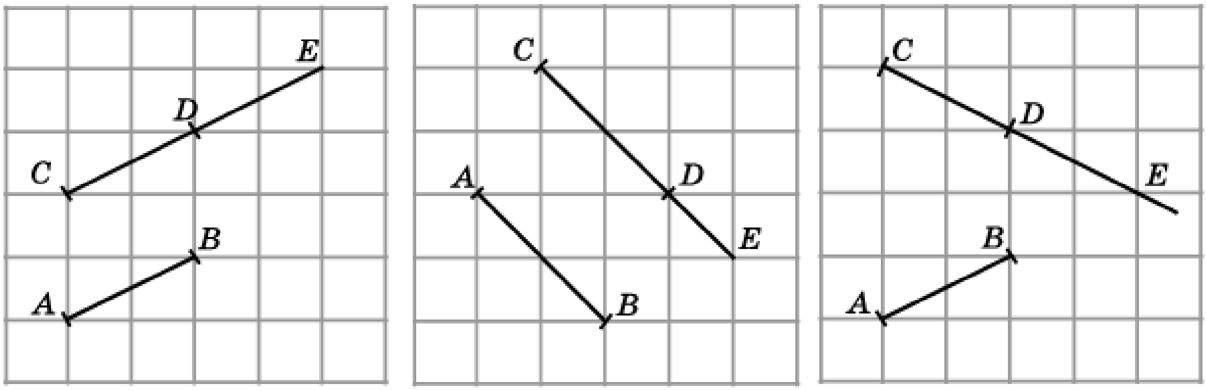


Рис. 4

14. *a* и *f*, *b* и *e*, *c* и *g*, *d* и *h*, *p* и *q*.

§ 2. Лучи, отрезки

1. а) Две; б) три; в) четыре; г) $n + 1$.



а) б) в)

Рис. 5

2. Рисунок 5.

3. а) и д); б) и е); в) и г). **4.** См. рис. 6. **5.** Рисунок 7.

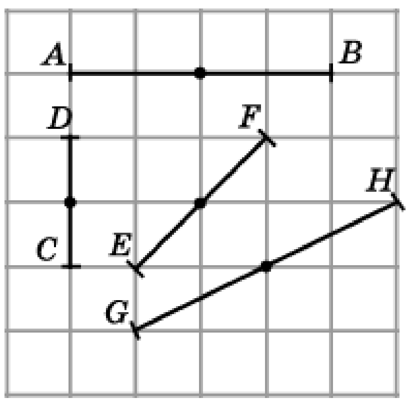


Рис. 6

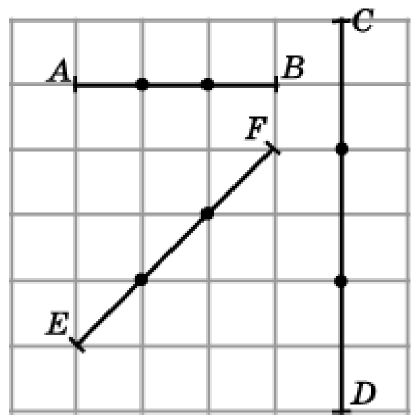
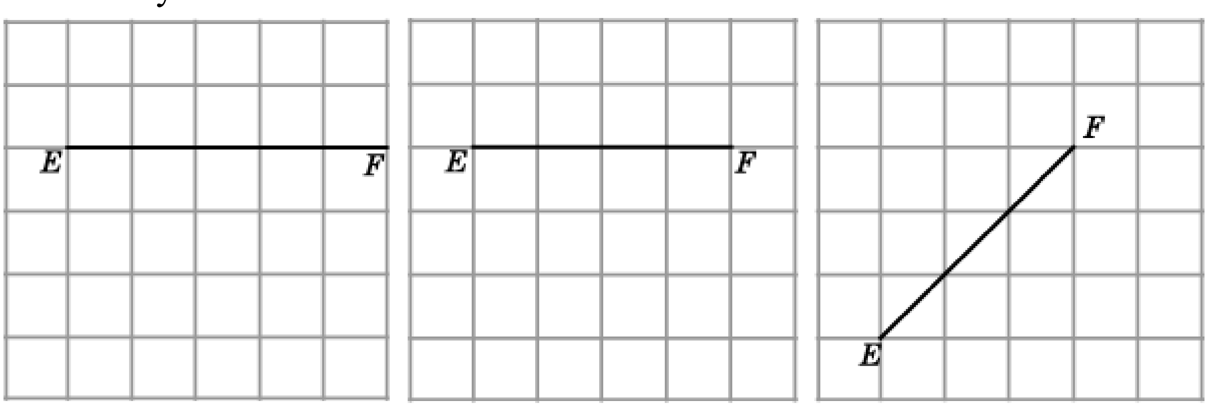


Рис. 7

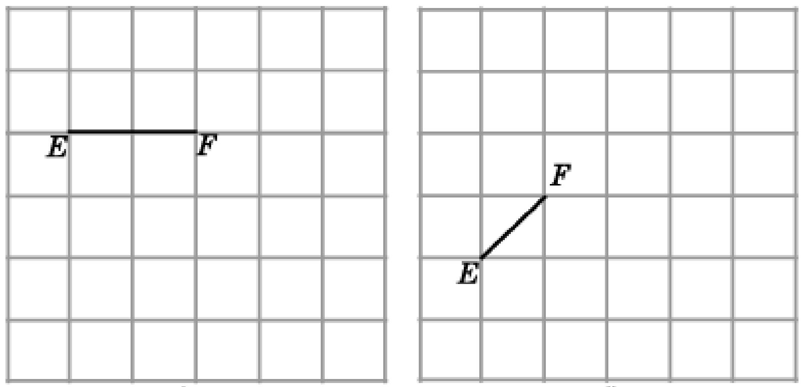
6. Рисунок 8.



а) б) в)

Рис. 8

7. Рисунок 9. **8.** 5, 4, 1, 6, 3, 2. **9.** Отрезки равны.



а) б)

Рис. 9

§ 3. Измерение длин отрезков

1. а) 5 см; б) 7 дм; в) 17 м. **2.** а) 8 см; б) 20 см 5 мм; в) 4 см 5 мм; г) 12 см 5 мм. **3.** *B*. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** $AB = 2CD$. **9.** а) 9 см и 6 см; б) 10 см и 5 см; в) 6 см и 9 см. **11.** 6 см. **12.** 6 см. **13.** 8 см 5 мм. **14.** а) 40 мм; б) 80 мм; в) 20 мм. **15.** 4 см, 8 см и 16 см.

§ 6. Ломаные

1. 9. **2.** 20. **3.** 1, 2, 3, 5, 7. **4.** а) 48; б) 71. **5.** Длины равны. **6.** Длина ломаной AB_1C меньше длины ломаной AB_2C. **7.** Рисунок 10.

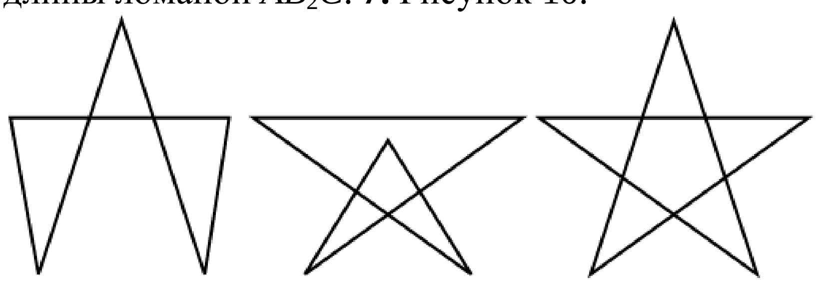
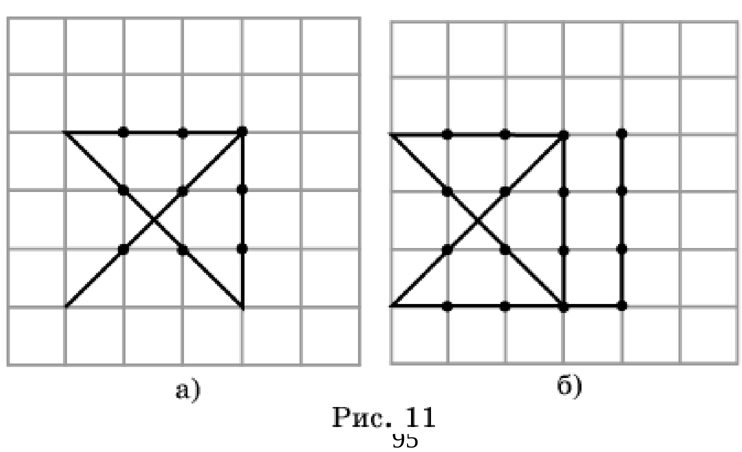


Рис. 10

8. а) *B* внутри, *C* снаружи; б) *B* внутри, *A* и *C* снаружи.

9. Рисунок 11.



а) б)

Рис. 11

10. а) 6; б) 10.

§ 4. Полуплоскость и угол

1. а) 4; б) 7; в) 11. **3.** а), г), е) Да; б), в), д) нет. **4.** а) 6; б) 4. **6.** 12. **7.** а) *AOB*, *BOC*, *COD*; б) *AOC*; в) *AOD*, *BOD*. **8.** а), д), и); б), г) з); в), е), ж). **9.** *PQR*. **10.** 3, 2, 5, 6, 1, 4. **11.** Рисунок 12.

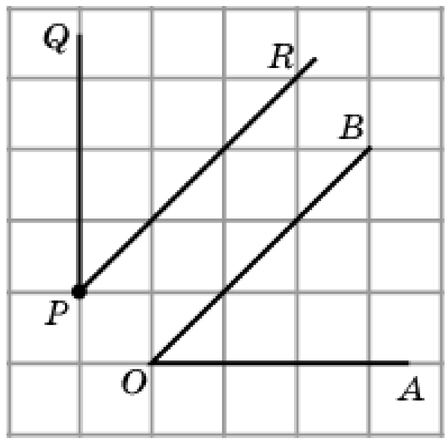
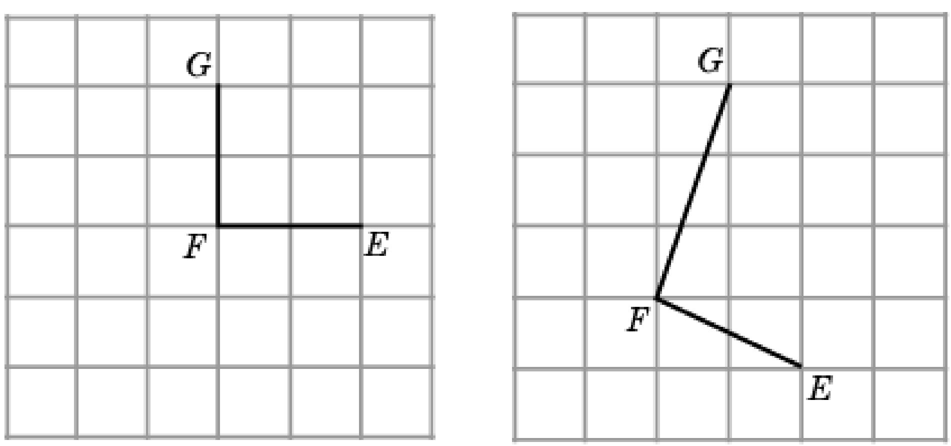


Рис. 12

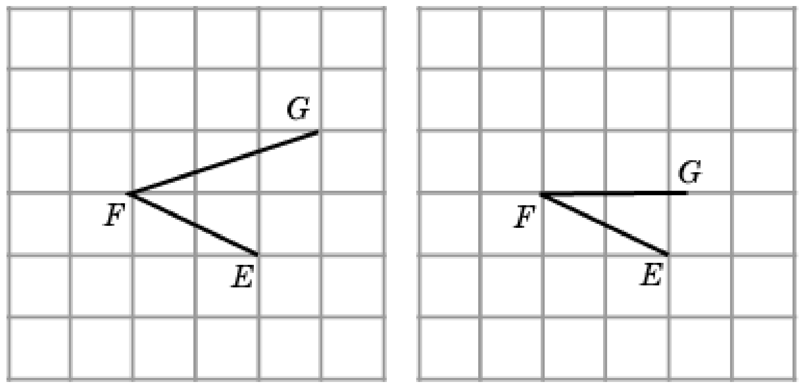
12. Два. **13.** а), в) Нет; б) да. **14.** а) *AOB* и *DOE*, *BOC* и *EOF*, *COD* и *FOA*, *AOC* и *DOF*, *BOD* и *EOA*, *BOF* и *COE*; б) *AOB* и *BOD*, *AOB* и *AOE*, *BOC* и *COE*, *BOC* и *BOF*, *COD* и *DOF*, *COD* и *COA*, *DOE* и *EOA*, *DOE* и *DOB*, *EOF* и *FOB*, *EOF* и *EOC*, *FOA* и *AOC*. **15.** Рисунок 13.



а) б)

Рис. 13

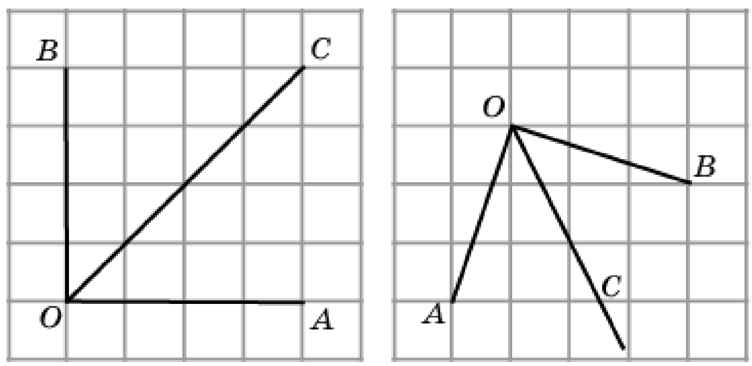
16. Рисунок 14.



а) б)

Рис. 14

17. Рисунок 15.

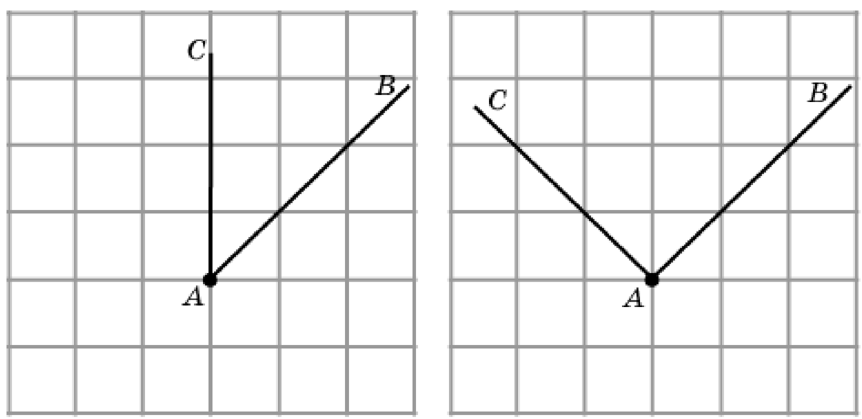


а) б)

Рис. 15

§ 5. Измерение величин углов

1. а) 90°; б) 45°; в) 135°; г) 180°; д) 90°; е) 45°; ж) 135°. **2.** 40°, 70°, 160°, 30°, 120°, 90°. **3.** 40°, 120°, 140°, 80°, 100°, 20°. **5.** а) 36°; б) 30°. **6.** а) 20°; б) 18°. **7.** Рисунок 16.



а) б)

Рис. 16

8. 45°, 135°. **9.** а) 90°; б) 45°; в) 270°; г) 180°; д) 270°; е) 135°. **10.** 45°. **11.** 30°. **12.** 45°. **13.** 90°. **14.** 142°. **15.** 60° и 120°. **16.** а) 75° и 105°; б) 70° и 110°; в) 36° и 144°; г) 90° и 90°. **17.** а) 72° и 108°; б) 54° и 126°; в) 55° и 125°; г) 88° и 92°. **18.** 30°, 150°, 150°. **19.** 36° и 144°. **20.** 126°. **21.** Нет. **22.** 120°. **23.** 70°. **24.** а) 180°; б) 90°. **25.** а) 90°; б) 180°; в) 150°. **26.** а) 120°; б) 60°; в) 300°. **27.** а) 30°; б) 15°; в) 10°.

§ 7. Многоугольники

1. б), г) – Многоугольники; а) в) – нет; г) – выпуклый; б) – нет. **2.** Число вершин равно числу сторон. **5.** а) 2; б) 3; в) 4. **6.** а) 2; б) 5; в) 9. **7.** а), б), в) Нет. **8.** а) Да, пятиугольник; б) да, четырёхугольник; в) да, шестиугольник. **9.** 7. **10.** Рисунок 17.

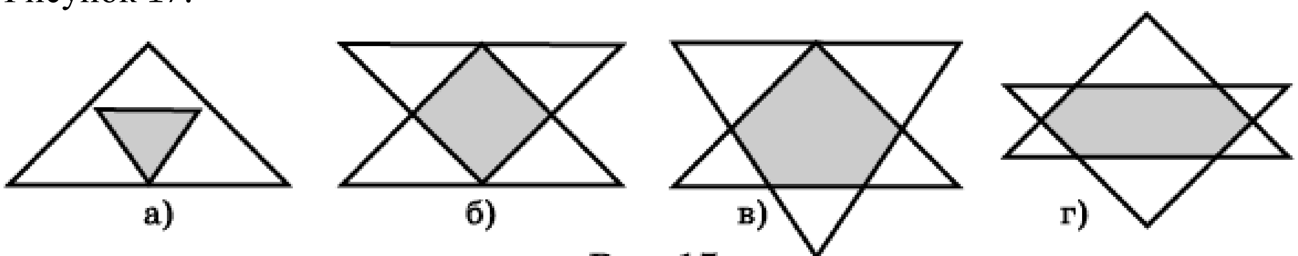


Рис. 17

11. Нет. **12.** Рисунок 18.

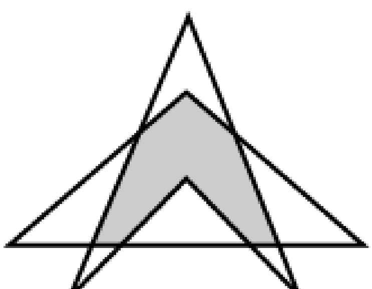


Рис. 18

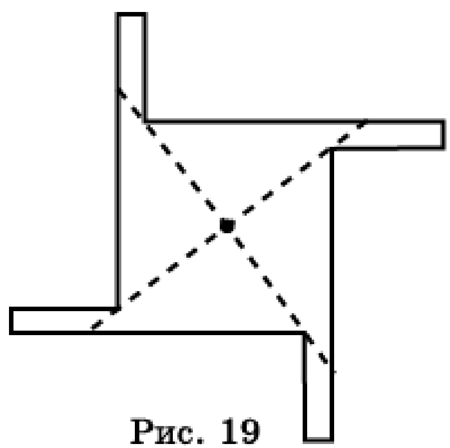
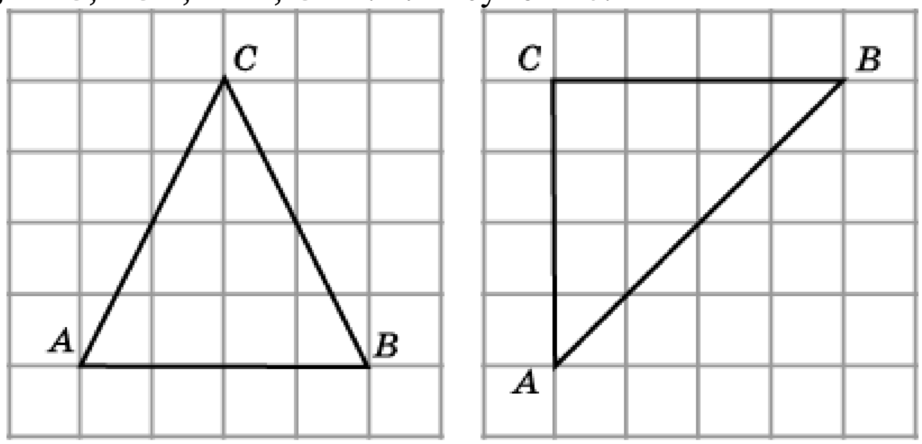


Рис. 19

13. а) 5; б), в) 7. **14.** а) 7; б) 9; в) 16. **15.** Рисунок 19.

§ 8. Треугольники

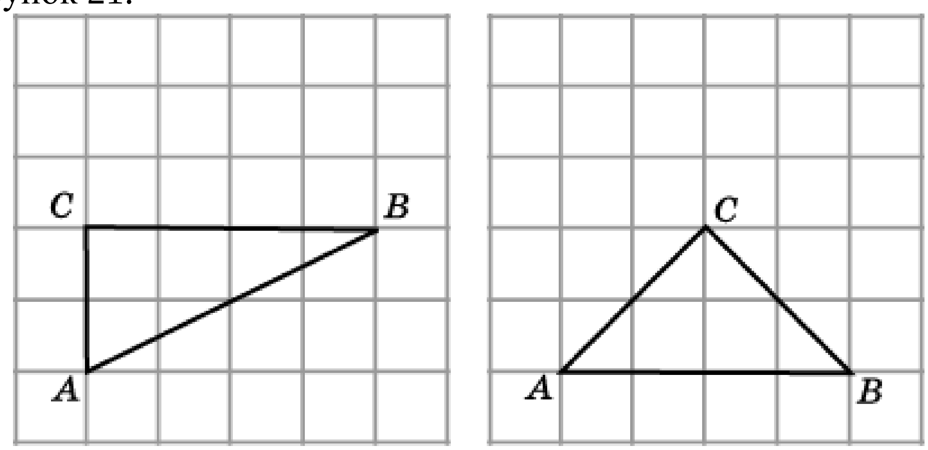
1. *ABC*, *ADC*, *BCD*, *BDE*, *CDE*. **2.** Рисунок 20.



а) б)

Рис. 20

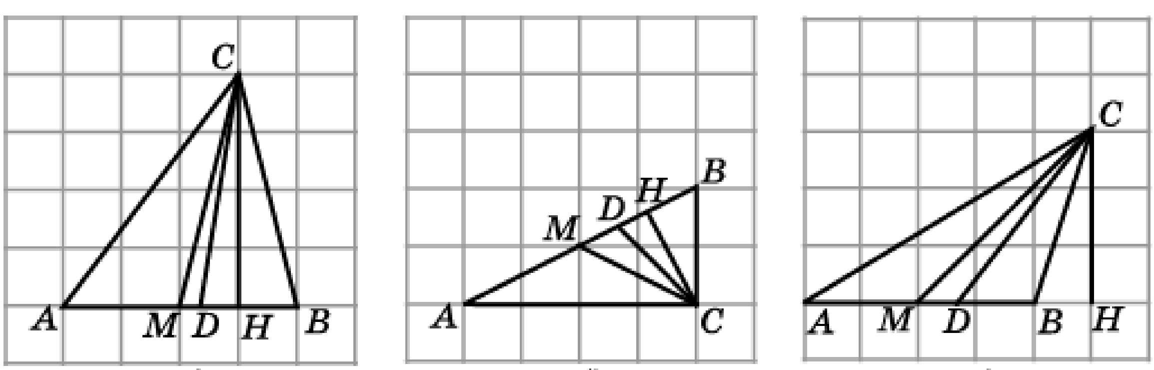
3. Рисунок 21.



а) б)

Рис. 21

4. Рисунок 22.



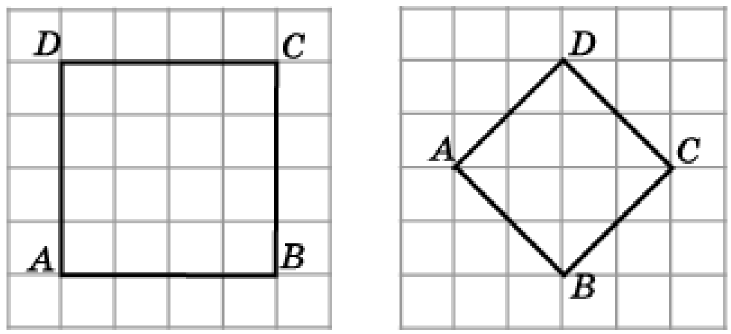
а) б) в)

Рис. 22

5. а), б) Нет; в) да. **6.** 0,8 м. **7.** 3,5 м. **8.** 75 см. **9.** 20 см и 10 см. **10.** 12 см, 18 см, 24 см. **11.** 15 см.

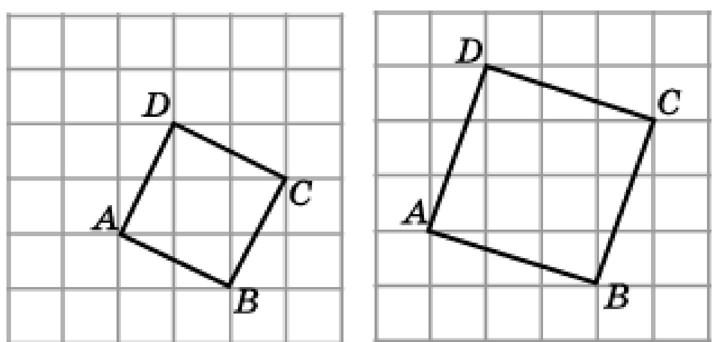
§ 9. Четырёхугольники

1. Рисунок 23.



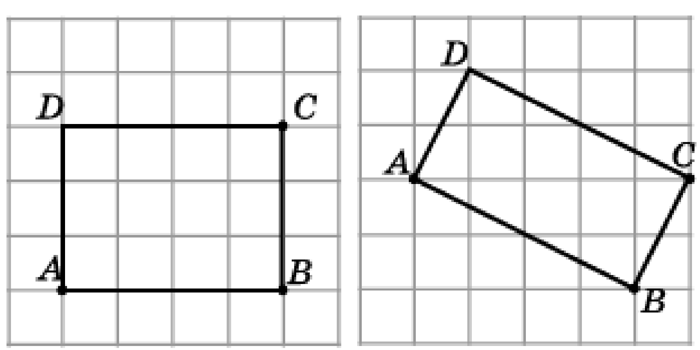
а) **Рис. 23** б)

2. Рисунок 24.



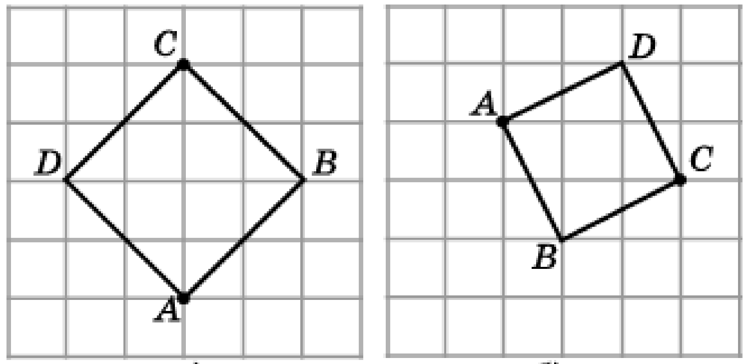
а) **Рис. 24** б)

3. а) 14; б) 5 (рис. 25).



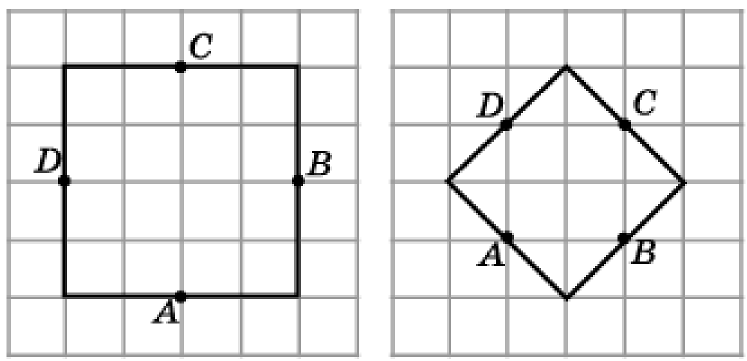
а) **Рис. 25** б)

4. Рисунок 26.



а) Рис. 26 б)

5. а) 16; б) 4 (рис. 27).



а) Рис. 27 б)

6. 3. Один из них показан на рисунке 28.

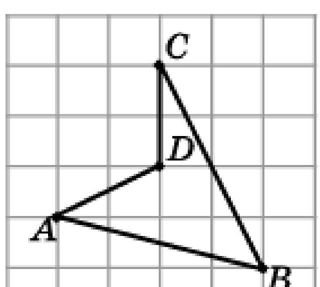
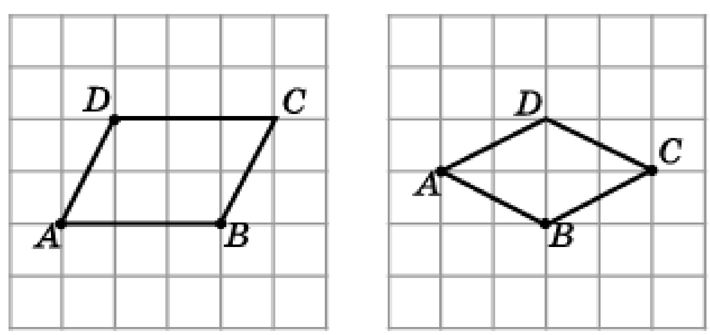
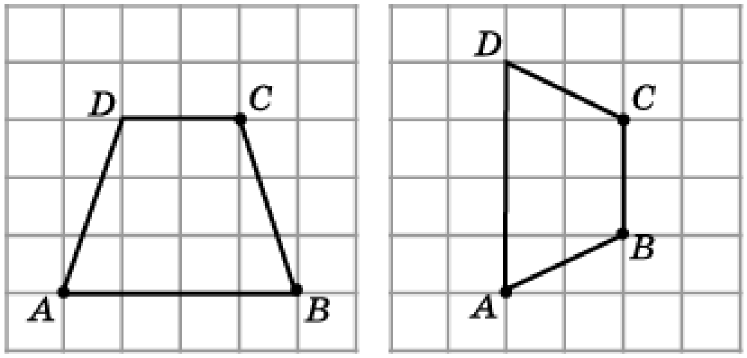


Рис. 28



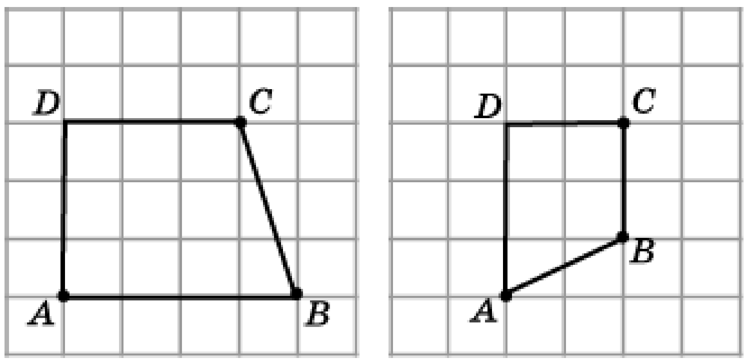
а) Рис. 29 б)

7. 4 и 2 (рис. 29). **8.** 9.
9. а), б) 4 и 2 (рис. 30).



а) Рис. 30 б)

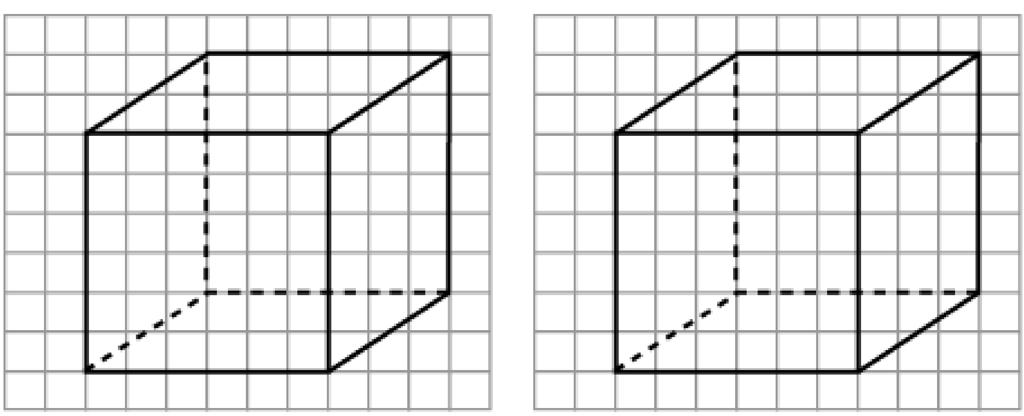
10. а) 4 и 3; б) 3 и 2 (рис. 31).



а) Рис. 31 б)

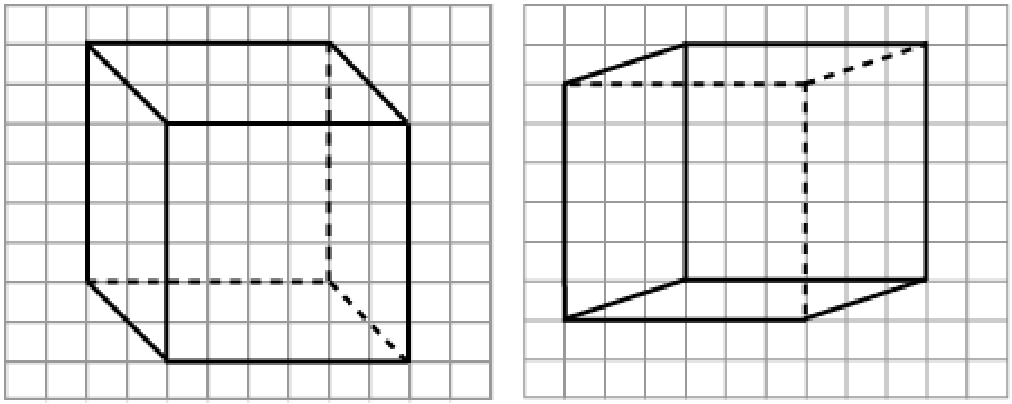
§ 10. Многогранники

2. Рисунок 32.



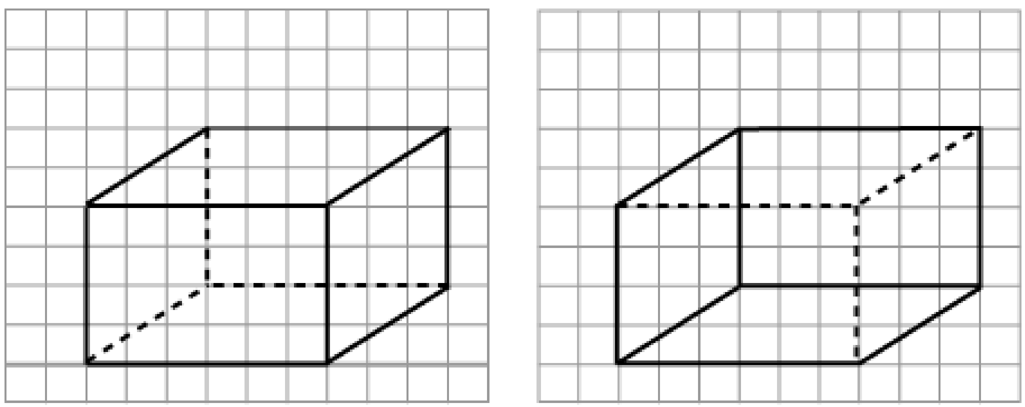
а) Рис. 32 б)

3. Рисунок 33.



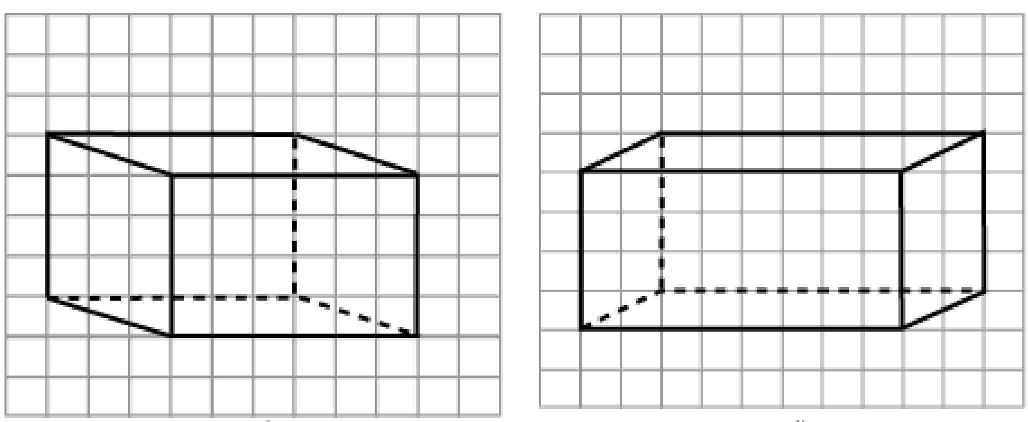
а) Рис. 33 б)

5. Рисунок 34.



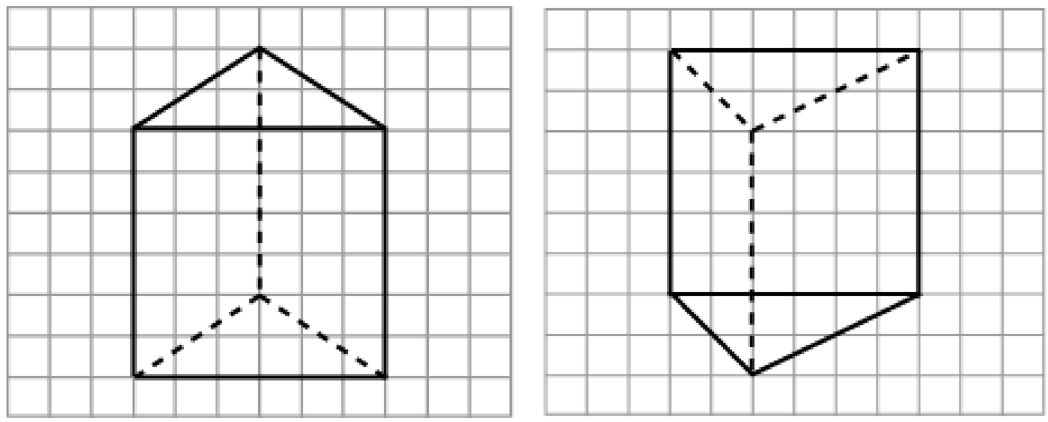
а) Рис. 34 б)

6. Рисунок 35.



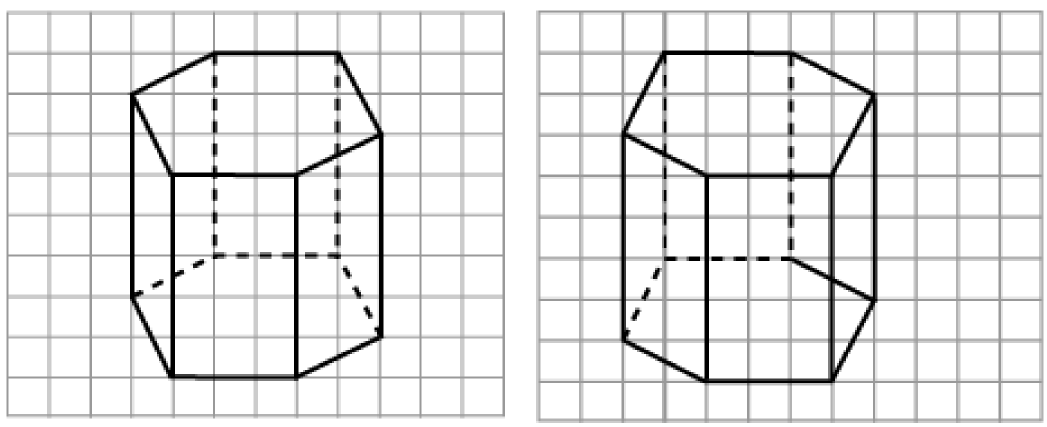
а) Рис. 35 б)

8. Рисунок 36.



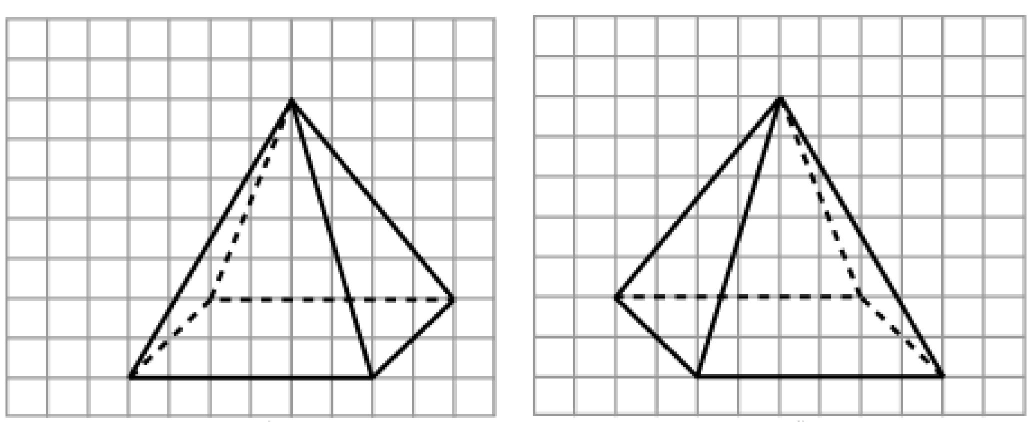
а) Рис. 36 б)

10. Рисунок 37.



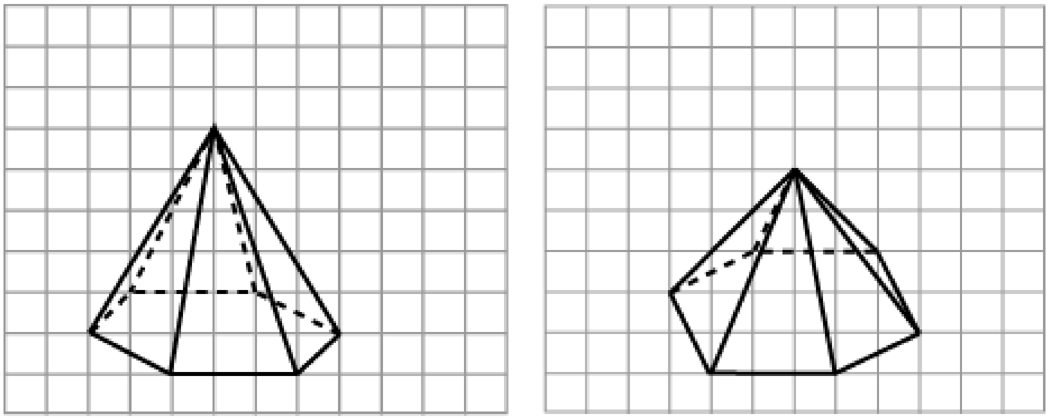
а) Рис. 37 б)

12. Рисунок 38.



а) Рис. 38 б)

14. Рисунок 39



а) б)

Рис. 39

15. а), б) В = 8, Р = 12, Г = 6. **16.** а) В = 6, Р = 9, Г = 5; б) В = 8, Р = 12, Г = 6; в) В = 10, Р = 15, Г = 7; г) В = 12, Р = 18, Г = 8. **17.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) да: е) да. **18.** а) 6-угольник; б) 12-угольник; в) 34-угольник. **19.** а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 5, Р = 8, Г = 5; в) В = 7, Р = 12, Г = 7; г) В = 6, Р = 10, Г = 6. **20.** а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) да: е) да. **21.** а) 4-угольник; б) 21-угольник; в) 59-угольник.

§ 11. Моделирование многогранников

1. в), д), ж). **2.** а), б), в), д), ж). **3.** а), б), в), д). **4.** а), б), д), е).

§ 12. Правильные многогранники

5. а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 8, Р = 12, Г = 6; в) В = 6, Р = 12, Г = 8; г) В = 12, Р = 30, Г = 20; д) В = 20, Р = 30, Г = 12. **6.** Нет. **7.** Не является правильным, В= 32, Р = 60, Г = 30. **8.** Октаэдр. **9.** Октаэдра (рис. 40).

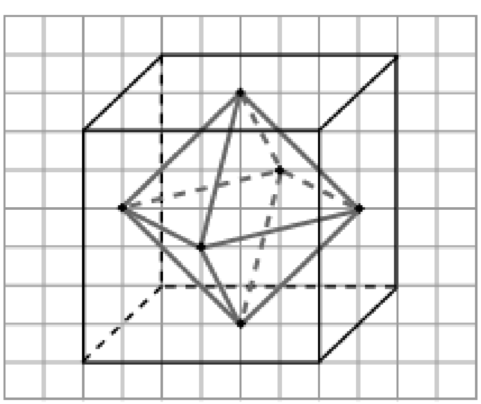


Рис. 40

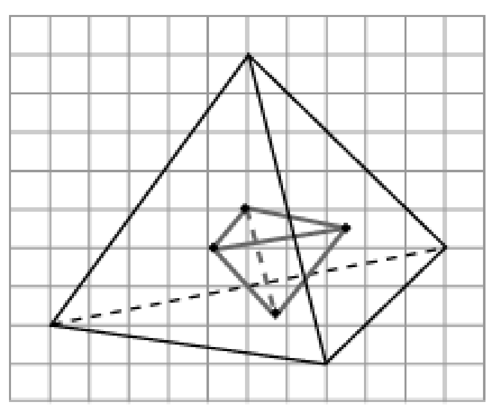


Рис. 41

10. Тетраэдра (рис. 41). **11.** Куба (рис. 42). **12.** Додекаэдра (рис. 43).

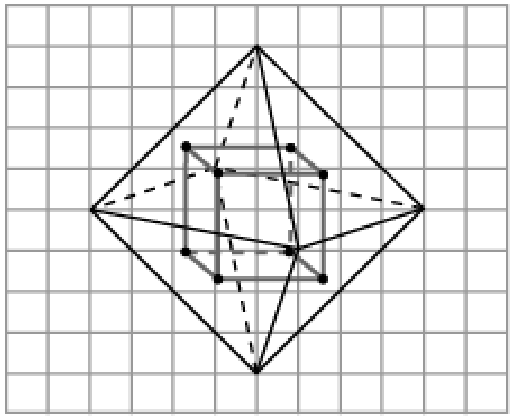


Рис. 42

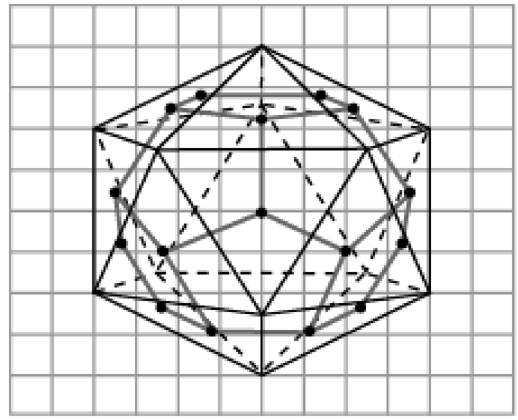


Рис. 43

13. Икосаэдра (рис. 12.13). **14.** Октаэдра (рис. 12.14). **15.** Октаэдр (рис. 12.15).

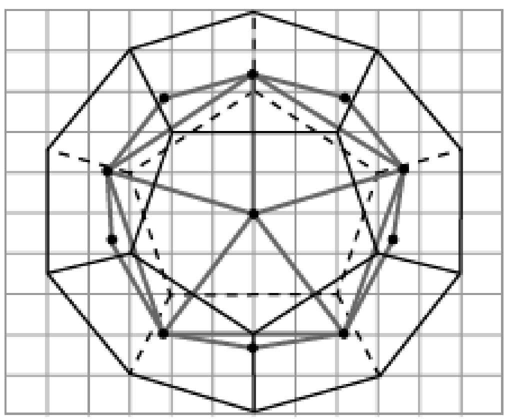


Рис. 44

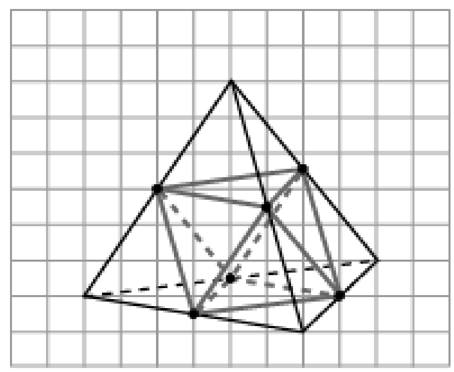


Рис. 45

16. в). **17.** Да. **18.** Да. **19.** 4. **20.** 8. **21.** 10. **22.** 6.

§ 13*. Полуправильные многогранники

1. а) В = 10, Р = 15, Г = 7; б) В = 10, Р = 20, Г = 12. **2.** а) В=12, Р=18, Г=8; б) В=24, Р=36, Г=14; в) В=24, Р=36, Г=14; г) В=60, Р=90, Г=32; д) В=60, Р=90, Г=32. **3.** Усечённого икосаэдра. **4.** Кубооктаэдр (рис. 46)), В= 12, Р = 24, Г = 14. **5.** Кубооктаэдр (рис. 47), В= 12, Р = 24, Г = 14. **6.** Икосододекаэдр (рис. 48), В = 30, Р = 60, Г = 32. **7.** Икосододекаэдр (рис. 49), В = 30, Р = 60, Г = 32.

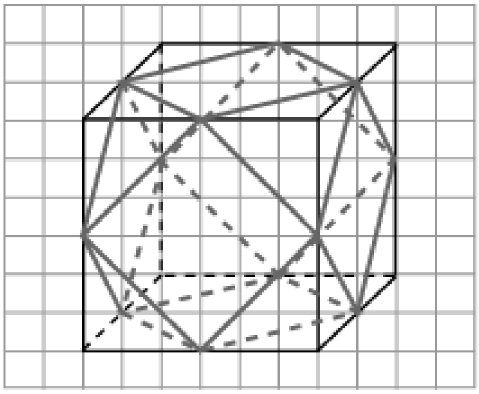


Рис. 46

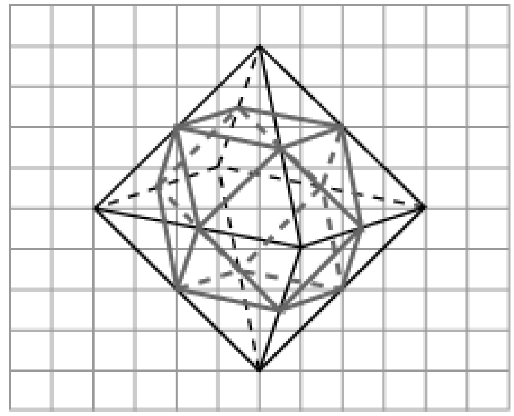


Рис. 47

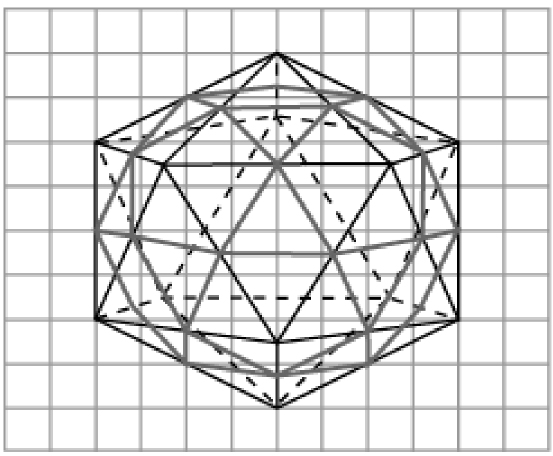


Рис. 48

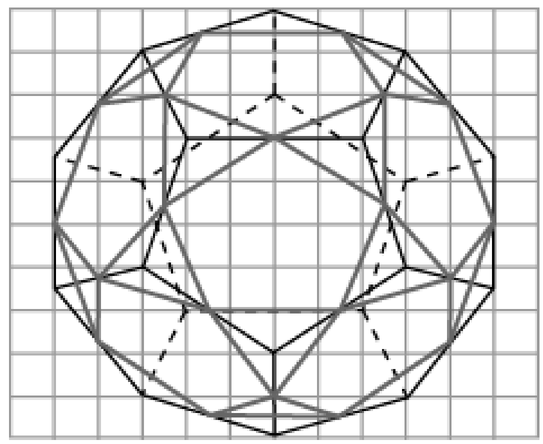


Рис. 49

8. Пятиугольная антипризма. **9.** Усечённый куб. **10.** Кубооктаэдр.

§ 14*. Звёздчатые многогранники

1. 5. **2.** 3. **3.** 3. **4.** Куба и октаэдра. **5.** Двух икосаэдров. **6.** Икосаэдра и додекаэдра.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
для 5-го класса
(1 час в неделю, всего 34 часа)

Параграф учебника	Содержание	Кол-во часов
	5-й класс	
1	Точки, прямые, плоскости	2
2	Лучи, отрезки	2
3	Измерение длин отрезков	2
	Контрольная работа 1	1
4	Ломаные	2
5	Полуплоскость и угол	2
6	Измерение величин углов	2
	Контрольная работа 2	1
7	Многоугольники	2
8	Треугольники	2
9	Четырёхугольники	2
	Контрольная работа 3	1
10	Многогранники	2
11	Моделирование многогранников	2
12	Правильные многогранники	2
13	Полуправильные многогранники	2
14	Звёздчатые многогранники	2
	Контрольная работа 4	1
	Обобщающее повторение	2

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА
для 5-го класса

Основные понятия геометрии (4 ч)

Точки, прямые, плоскости. Лучи и отрезки. Взаимное расположение точек и прямых на плоскости. Параллельные и перпендикулярные прямые.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- понимать, идеализацией каких объектов являются точки, прямые и плоскости;
- изображать, обозначать и называть точки, прямые, лучи, отрезки;
- устанавливать взаимное расположение точек и прямых на плоскости;
- решать задачи комбинаторного характера на взаимное расположение точек и прямых на плоскости.

Отрезки и ломаные (6 ч)

Сравнение отрезков. Равенство отрезков. Сложение и вычитание отрезков. Измерение длин отрезков. Единицы измерения длины.

Ломаная. Простые и замкнутые ломаные. Длина ломаной.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- изображать, обозначать и называть отрезки;
- сравнивать отрезки и устанавливать их равенство;
- измерять длины отрезков с помощью линейки;
- откладывать отрезки заданной длины;
- изображать, обозначать и называть ломаные;
- решать задачи на нахождение длин отрезков и ломаных.

Углы и многоугольники (7 ч)

Полуплоскость и угол. Виды углов: острые, прямые, тупые углы, развёрнутый угол. Смежные и вертикальные углы. Сравнение углов. Равенство углов. Сложение и вычитание углов. Биссектриса угла. Градусная величина угла. Измерение величин углов.

Многоугольник. Диагонали многоугольника. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. Правильные многоугольники. Звёздчатые многоугольники. Периметр многоугольника.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- изображать, обозначать и называть углы;
- устанавливать виды углов;
- сравнивать углы и устанавливать их равенство;
- проводить биссектрису угла;
- измерять градусные величины углов с помощью транспортира;

- изображать углы заданных градусных величин;
- решать задачи на нахождение величин углов;
- изображать, обозначать и называть многоугольники;
- устанавливать вид многоугольников;
- проводить диагонали многоугольника;
- находить периметр многоугольника.

Треугольники и четырёхугольники (4)

Треугольник. Остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равнобедренные, равносторонние треугольники. Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника. Высота, медиана и биссектриса треугольника.

Четырёхугольник. Выпуклые и невыпуклые четырёхугольники. Прямоугольник, квадрат, параллелограмм, ромб, трапеция. Равнобедренная и прямоугольная трапеции.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- изображать, обозначать и называть треугольники и четырёхугольники;
- устанавливать вид треугольников и четырёхугольников;
- проводить высоты, медианы и биссектрисы треугольника;
- решать задачи на нахождение сторон и углов треугольников и четырёхугольников.

Многогранники (11 ч)

Понятие многогранника. Вершины, рёбра и грани многогранника. Выпуклые и невыпуклые многогранники. Куб, параллелепипед, призма, пирамида. Правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники. Развёртки. Моделирование многогранников.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- изображать многогранники;
- устанавливать выпуклость и невыпуклость многогранников;
- находить число вершин, рёбер и граней многогранников;
- изготавливать развёртки многогранников;
- моделировать многогранники.

Обобщающее повторение (2 ч)

СОДЕРЖАНИЕ