В.А. СМИРНОВ, И.М. СМИРНОВА, И.В. ЯЩЕНКО

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6 класс

Москва

2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является продолжением книги «Наглядная геометрия. 5 класс» и предназначена для занятий наглядной геометрией в 6-ом классе, как на основных уроках, так и на кружковых занятиях по математике.

В ней Вы познакомитесь с геометрическими фигурами и их названиями, научитесь их изображать и моделировать, узнаете о геометрических величинах и научитесь их находить. Всё это позволит развить Ваши геометрические представления, выработать необходимые практические навыки и умения, необходимые для изучения систематического курса геометрии в 7-11 классах.

Предлагаемое пособие служит дополнением к учебнику математики 6-го класса и соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту второго поколения, Примерной программе основного общего образования.

Для работы с ним нужно иметь тетрадь в клетку или рабочую тетрадь, в которой Вы будете заносить решения задач, изображать геометрические фигуры, проводить необходимые построения.

В задачах, в формулировках которых участвует клетчатая бумага, мы будем предполагать, что стороны клеток равны 1.

Желаем успехов в изучении наглядной геометрии!

§ 1. Окружность и круг

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от данной точки на данное расстояние (рис. 1.1).

Данная точка называется ***центром окружности***, а данное расстояние – ***радиусом окружности***. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром.

Таким образом, окружность с центром O и радиусом R состоит из всех точек A плоскости, для которых выполняется равенство $OA = R$.

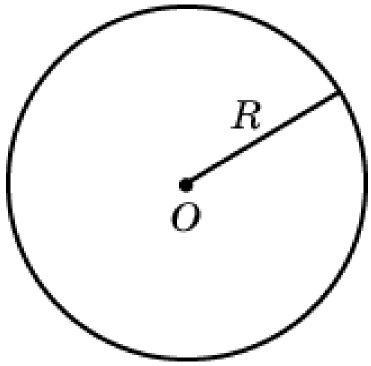


Рис. 1.1

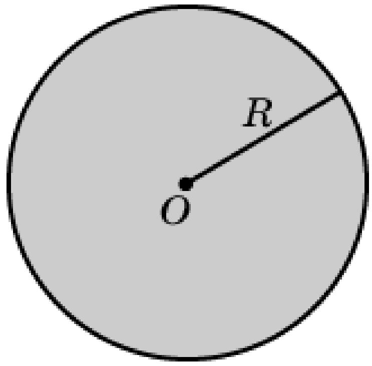


Рис. 1.2

Окружности проводятся на листе бумаги или доске с помощью циркуля.

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от данной точки на расстояние, не превосходящее данное (рис. 1.2).

Данная точка называется ***центром круга***, а данное расстояние – ***радиусом круга***.

Круг можно представлять себе как фигуру, ограниченную окружностью.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки окружности, называется ***хордой*** этой окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром*** этой окружности (1.3).

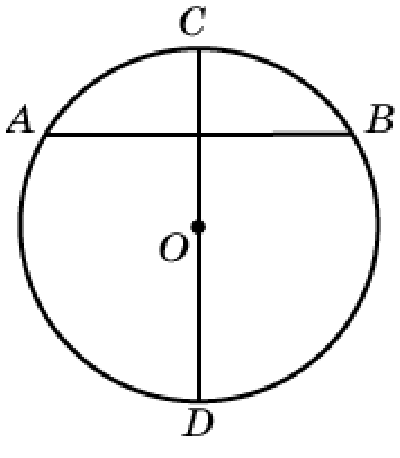


Рис. 1.3

Хордой и диаметром круга называют соответственно хорду и диаметр окружности, ограничивающей этот круг.

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух окружностей.

1) Две окружности могут не иметь общих точек (рис. 1.4). При этом они могут находиться вне друг друга (рис. 1.4, а) или одна внутри другой (рис. 1.4, б).

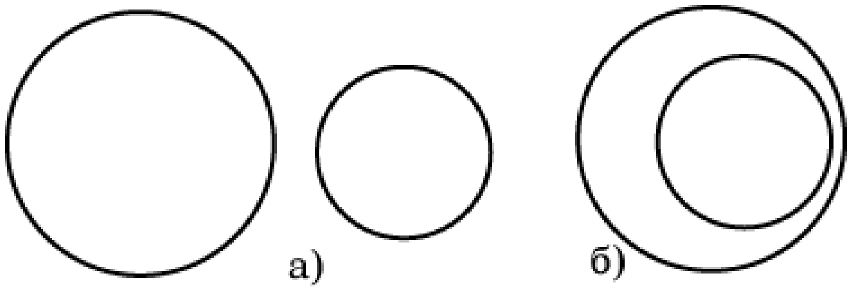


Рис. 1.4

2) Две окружности могут иметь одну общую точку (рис. 1.5). В этом случае говорят, что окружности ***касаются.*** Причём окружности могут касаться внешним образом (рис. 1.5,а) или внутренним образом (рис. 1.5, б).

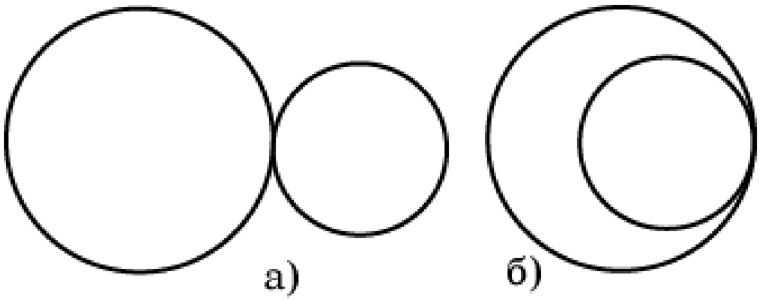


Рис. 1.5

3) Две окружности могут иметь две общие точки (рис. 1.6). В этом случае говорят, что окружности ***пересекаются***.

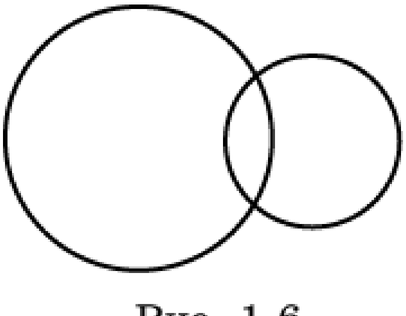


Рис. 1.6

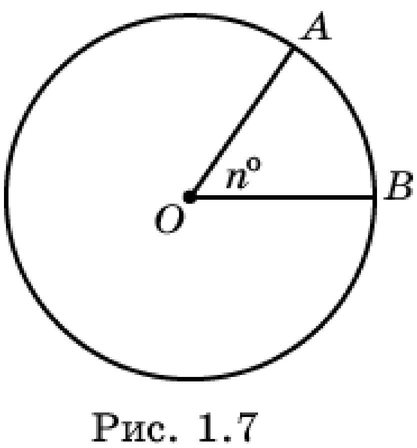


Рис. 1.7

Взаимное расположение двух окружностей зависит от их радиусов и расстояния между центрами.

Для приближённого нахождения ***длины окружности*** радиуса R можно нарисовать эту окружность на бумаге и расположить вдоль неё нитку. Развернув нитку и измерив её длину, найдем приближённую длину окружности.

Оказывается, что длина окружности радиуса R приближённо равна $6R$. Более точное значение длины окружности будет рассмотрено в курсе геометрии 7-9 классов.

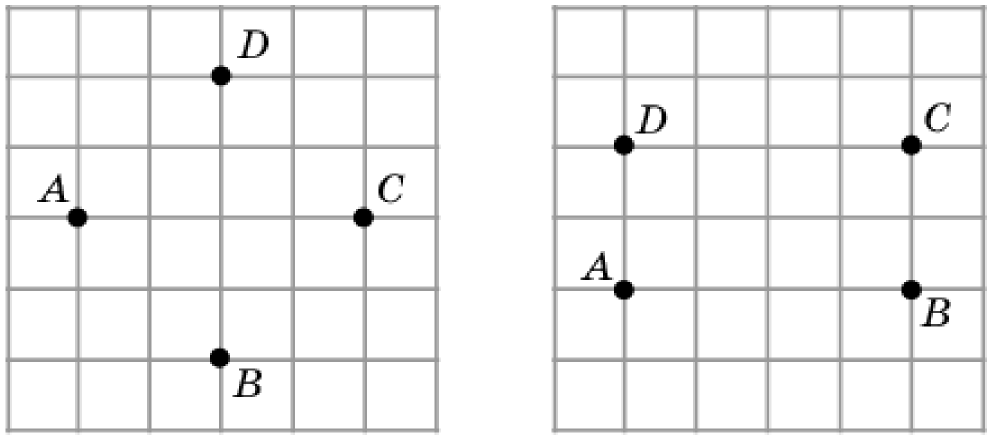
Если окружность имеет длину l, то её дуга, заключённая внутри угла AOB с вершиной в центре O этой окружности и градусной величиной 1°, имеет длину, равную $\frac{l}{360}$, а длина дуги окружности, заключённая внутри угла, градусной величиной n°, равна $\frac{l \cdot n}{360}$ (рис. 1.7).

Вопросы

1. Какая фигура называется окружностью? Что называется: а) центром окружности; б) радиусом окружности?
2. С помощью чего проводятся окружности на листе бумаги или доске?
3. Какая фигура называется кругом? Что называется: а) центром; б) радиусом круга?
4. Что называется: а) хордой; б) диаметром окружности?
5. Какие две окружности касаются?
6. Какие две окружности пересекаются?
7. Чему приближённо равна длина окружности радиуса R?

Задачи

1. Какому неравенству удовлетворяют точки A, лежащие: а) в круге с центром в точке O и радиусом R; б) вне этого круга?
2. Сколько диаметров можно провести через центр окружности?
3. Сколько окружностей может проходить через две заданные точки?
4. Найдите диаметр окружности, если известно, что он на 55 мм больше радиуса.
5. Найдите длину наибольшей хорды в окружности, радиус которой равен 5 см.
6. Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус окружности, проходящей через эти точки.
7. Нарисуйте окружность, которая проходит через данные точки A и B (AB = 6 см) и имеет радиус 3 см.
8. На клетчатой бумаге отметьте точки A, B, C, D, как показано на рисунке 1.8. Укажите центр окружности, проходящей через эти точки.



а) б)

Рис. 1.8

9. Точка A расположена вне окружности радиуса 1 и удалена от центра O этой окружности на расстояние 3. Чему равно наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?

10. Точка A расположена внутри окружности радиуса 3 и удалена от центра O этой окружности на расстояние 1. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?

11. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 5 см и 2 см. Найдите радиус данной окружности.

12. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равны соответственно 20 и 4. Найдите радиус данной окружности.

13. На рисунке 1.9 изображена фигура, называемая ***кольцом***. Сформулируйте определение этой фигуры.

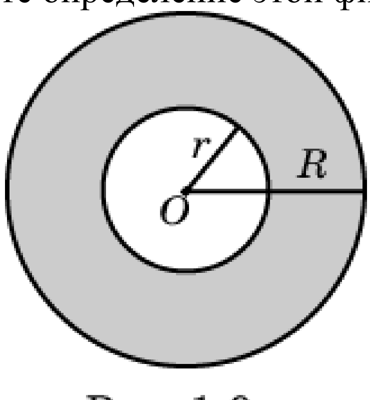


Рис. 1.9

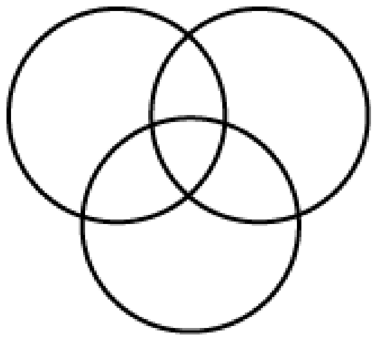


Рис. 1.10

14. На сколько частей окружность разбивает плоскость?

15. Сколько общих точек могут иметь две окружности?

16. На сколько частей могут разбивать плоскость две окружности?

17. Как расположены относительно друг друга две окружности радиусов 1 и 2, расстояние между центрами которых равно: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4? Изобразите эти случаи.

18. На сколько частей разбивают плоскость три окружности, изображённые на рисунке 1.10?

19. Чему равно приближённое значение длины окружности радиуса 1?

20. Диаметр окружности равен 4. Чему равно приближённое значение длины окружности?

21. Радиус окружности равен 3. Чему равно приближённое значение длины полуокружности?

22. Длина окружности равна 12. Чему равно приближённое значение её радиуса?

23. Колесо радиуса 1 м прокатилось по прямой 10 м. Сколько полных оборотов оно сделало (рис. 1.11)?

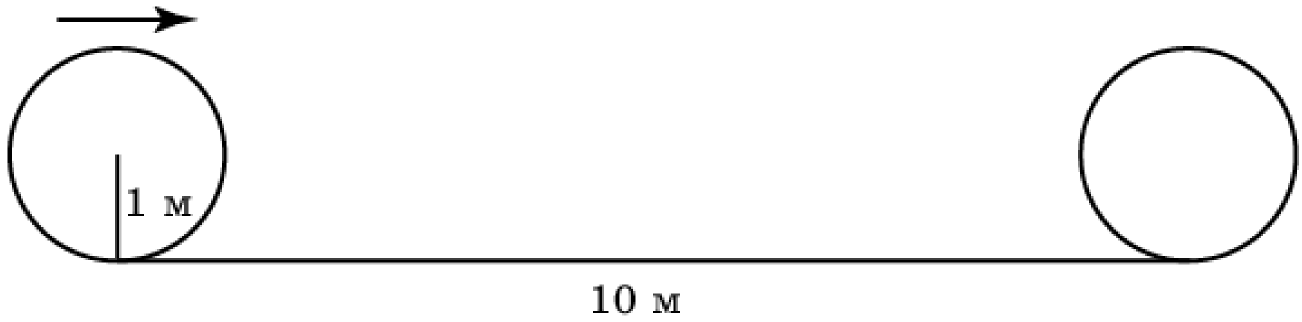


Рис. 1.11

24. Какое наибольшее число людей можно рассадить за круглым столом радиуса 1 м так, чтобы на каждого человека приходилось не менее 60 см длины дуги окружности стола (рис. 1.12)?

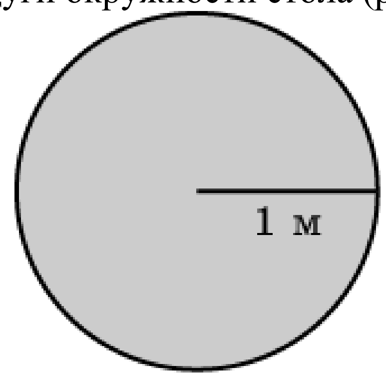


Рис. 1.12

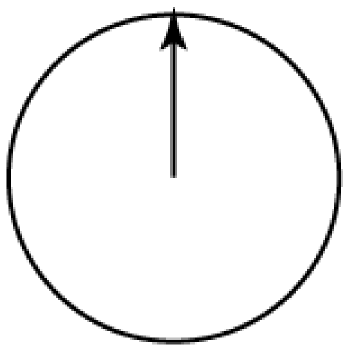


Рис. 1.13

25. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м (рис. 1.13). Найдите приближённую длину окружности (в метрах), которую описывает конец минутной стрелки в течение одного часа.

26. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. Найдите приближённую длину пути (в сантиметрах), который проходит её конец за 1 минуту.

27. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. За сколько минут её конец пройдёт путь длиной 105 см?

28. Под каким углом человек видит ноготь своего указательного пальца вытянутой руки, если ширина ногтя примерно равна 1 см, а расстояние от него до глаза человека примерно равно 60 см? В ответе укажите целое число градусов.

29. Человек среднего роста (1,7 м) виден издали под углом 1°. Найдите расстояние до него. В ответе укажите целое число метров.

30. Длина экватора земного шара примерно равна 40000 км. На сколько метров увеличился бы этот экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 м?

31. Москва и Новороссийск расположены примерно на одном меридиане под 56° и 44° северной широты соответственно (рис. 1.14). Найдите расстояние между ними по земной поверхности, считая длину большой окружности земного шара равной 40000 км. В ответе укажите целое число километров.

Рис. 1.14

32. Луна видна с Земли под углом $0{,}5^\circ$. Найдите приближённое расстояние до Луны, зная, что её диаметр приближённо равен 3400 км. В ответе укажите целое число километров.

33. Солнце видно с Земли под углом $0{,}5^\circ$. Найдите приближённое расстояние до Солнца, зная, что его диаметр приближённо равен 1300000 км. В ответе укажите целое число километров.

34. Придумайте способ приближенного измерения длины окружности колеса велосипеда.

35. Придумайте способ приближенного измерения диаметра круглого ствола дерева.

§ 2. Геометрические места точек

Один из основных способов задания фигур на плоскости заключается в указании свойства, которому удовлетворяют точки этой фигуры.

Фигуры, состоящие из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству, получили особое название «геометрические места точек».

Таким образом, ***геометрическим местом точек*** называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Поясним смысл слов "всех точек, удовлетворяющих заданному свойству" в этом определении. Они означают, что все точки, принадлежащие фигуре, удовлетворяют заданному свойству, и, наоборот, все точки, удовлетворяющие заданному свойству, принадлежат фигуре. Другими словами, точка принадлежит фигуре в том и только том случае, когда для неё выполняется заданное свойство.

Например, окружность с центром O и радиусом R можно определить как геометрическое место точек A, для которых расстояние OA равно R.

Круг с центром O и радиусом R можно определить как геометрическое место точек A, для которых расстояние OA меньше или равно R.

Вопросы

1. Что называется геометрическим местом точек?

2. Сформулируйте определение окружности, используя геометрическое место точек.

3. Сформулируйте определение круга, используя геометрическое место точек.

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите точку O (рис. 2.1). Отметьте точки, расположенные в узлах сетки и удалённые от точки O на расстояние: а) равное 2; б) меньшее 2; в) большее 2 и меньшее 3.

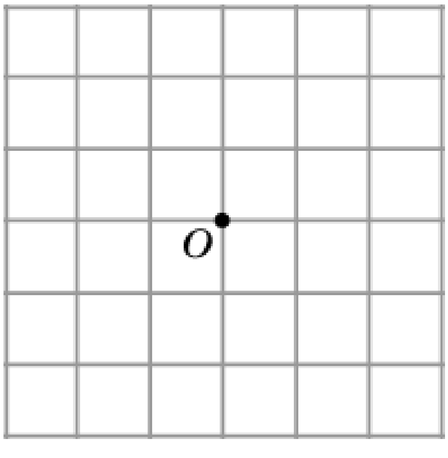
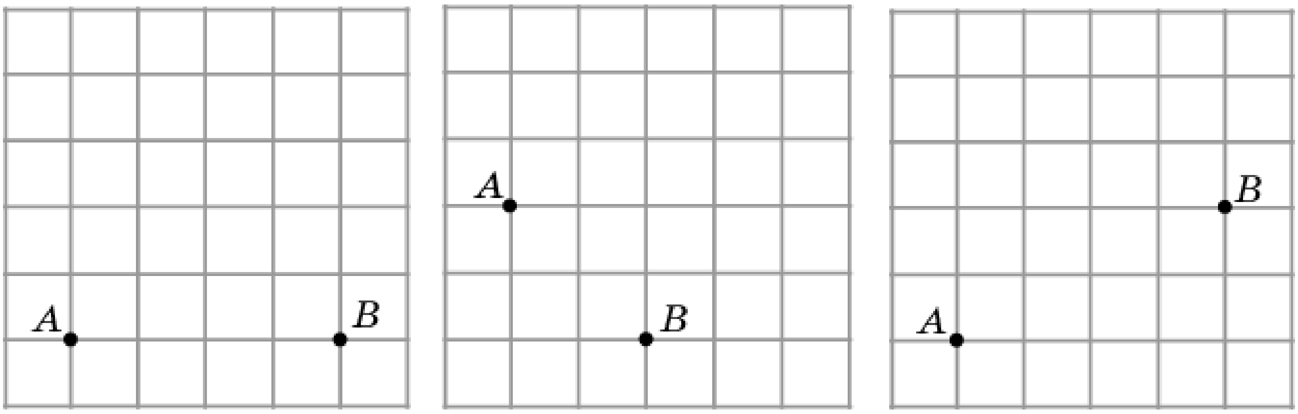


Рис. 2.1

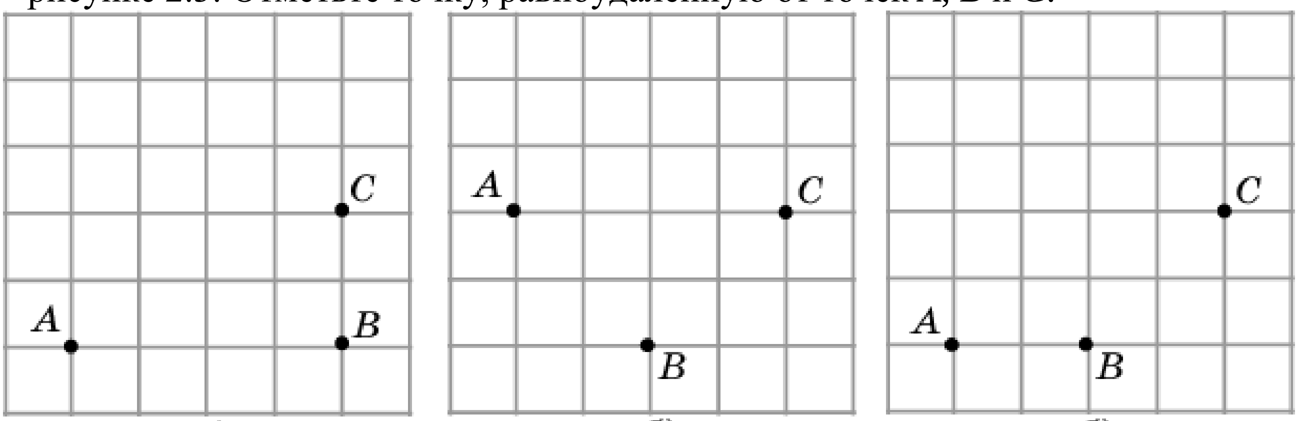
2. На клетчатой бумаге изобразите точки *A* и *B*, как показано на рисунке 2.2. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки и равноудалённые от точек *A* и *B*.



а) б) в)

Рис. 2.2

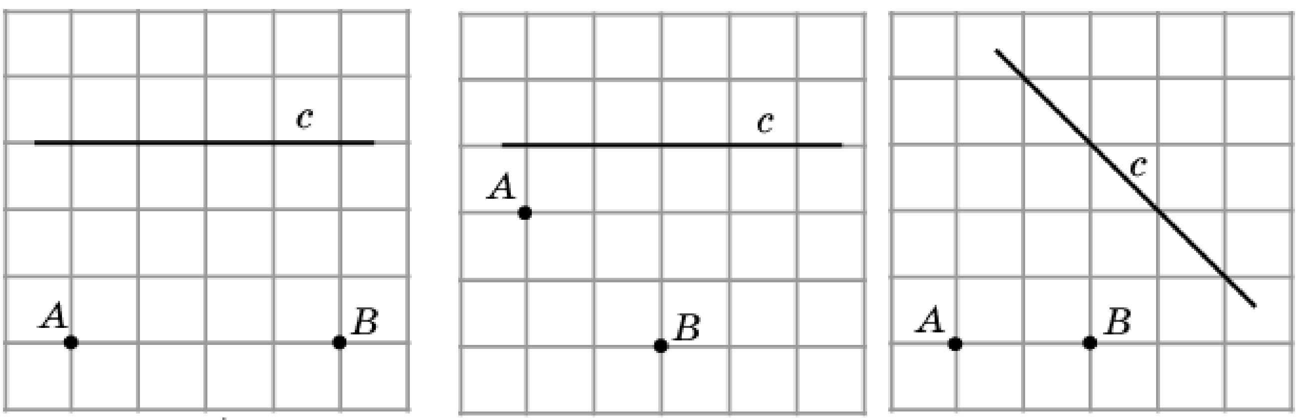
3. На клетчатой бумаге изобразите точки *A*, *B* и *C*, как показано на рисунке 2.3. Отметьте точку, равноудалённую от точек *A*, *B* и *C*.



а) б) б)

Рис. 2.3

4. На клетчатой бумаге изобразите точки *A*, *B* и прямую *c*, как показано на рисунке 2.4.На прямой *c* отметьте точку, равноудалённую от точек *A*, *B*.



а) б) в)

Рис. 2.4

5. На клетчатой бумаге изобразите точки A и B, как показано на рисунке 16.5. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояние от которых до точки A: а) меньше, чем расстояние до точки B (рис. 2.5, а); б) больше, чем расстояние до точки B (рис. 2.5, б).

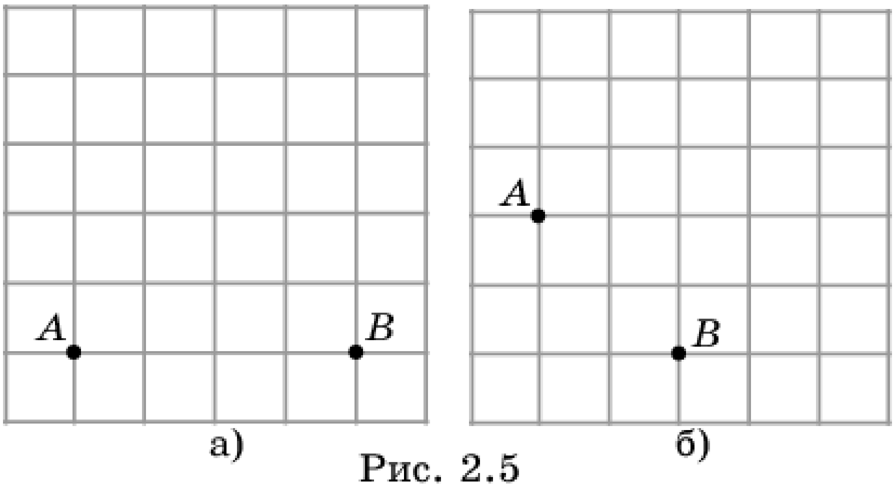


Рис. 2.5

6. Нарисуйте окружности, как показано на рисунке 2.6. Закрасьте область, состоящую из всех точек A, для которых: а) $AO < 1$ и $AP < 1$; б) $AO < 1$ и $AP > 1$.

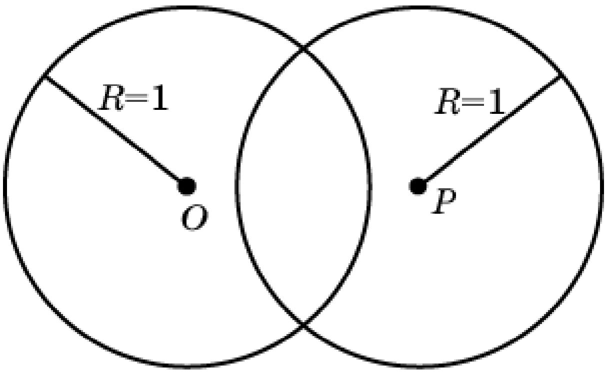


Рис. 2.6

7. На клетчатой бумаге изобразите точки A и B, как показано на рисунке 2.7. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояния от которых до точек A и B: а) меньше трёх; б) меньше или равны двум.

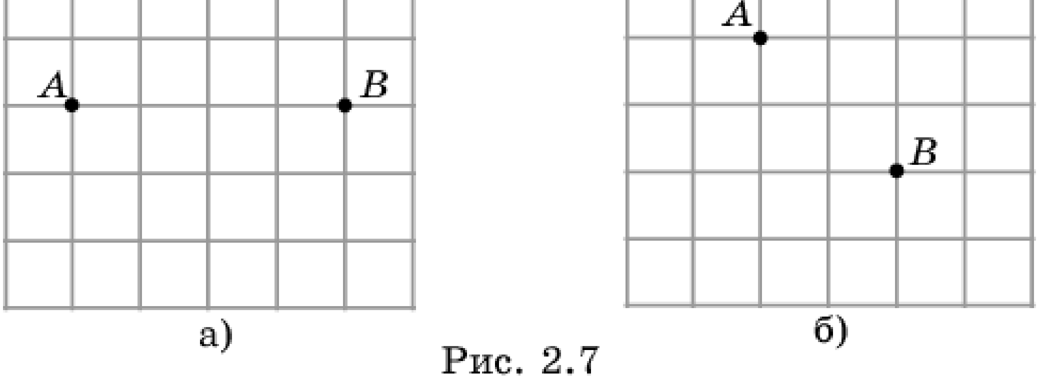


Рис. 2.7

8. На клетчатой бумаге изобразите точки A и B, как показано на рисунке 2.8. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки: а) расстояние от которых до точки A меньше трёх, а расстояние до точки B меньше двух (рис. 2.8, а); б) расстояние от которых до точки A больше двух, а расстояние до точки B меньше двух (рис. 2.8, б).

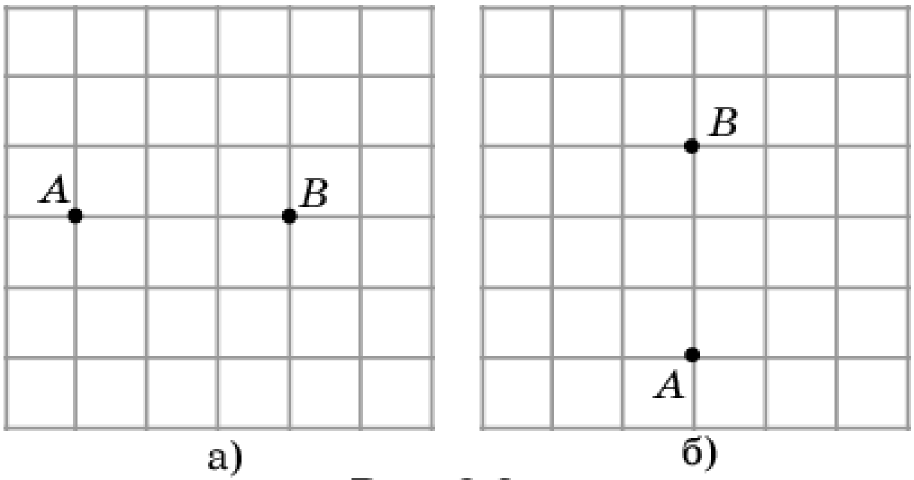


Рис. 2.8

9. На клетчатой бумаге изобразите точки A, B и C, как показано на рисунке 2.9. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки: а) расстояние от которых до точки A меньше, чем расстояние до точки B, и расстояние до точки B меньше, чем расстояние до точки C (рис. 2.9, а); б) расстояние от которых до точки A больше, чем расстояние до точки B, и расстояние до точки B меньше, чем расстояние до точки C (рис. 2.9, б).

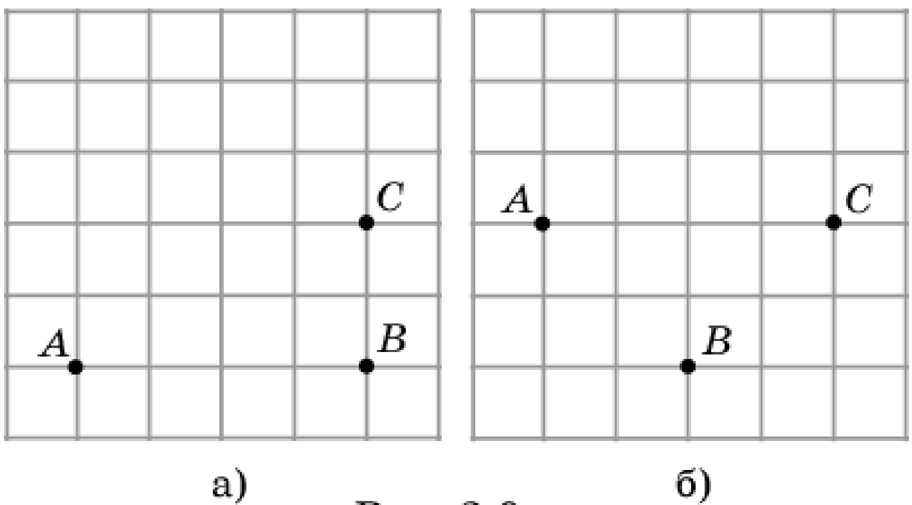


Рис. 2.9

10. Изобразите окружности, как показано на рисунке 2.10. Закрасьте область, состоящую из всех точек A, для которых: а) $AO < 1$, $AP < 1$ и $AQ < 1$; б) $AO < 1$, $AP < 1$ и $AQ > 1$; в) $AO < 1$, $AP > 1$ и $AQ > 1$.

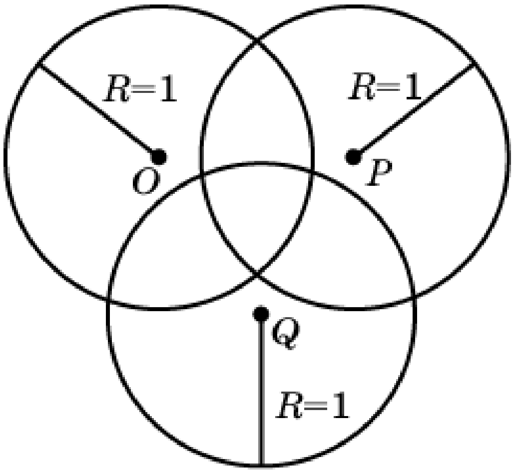


Рис. 2.10

11. На клетчатой бумаге изобразите отрезок *AB*, как показано на рисунке 2.11. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок *AB* виден под углом 90°.

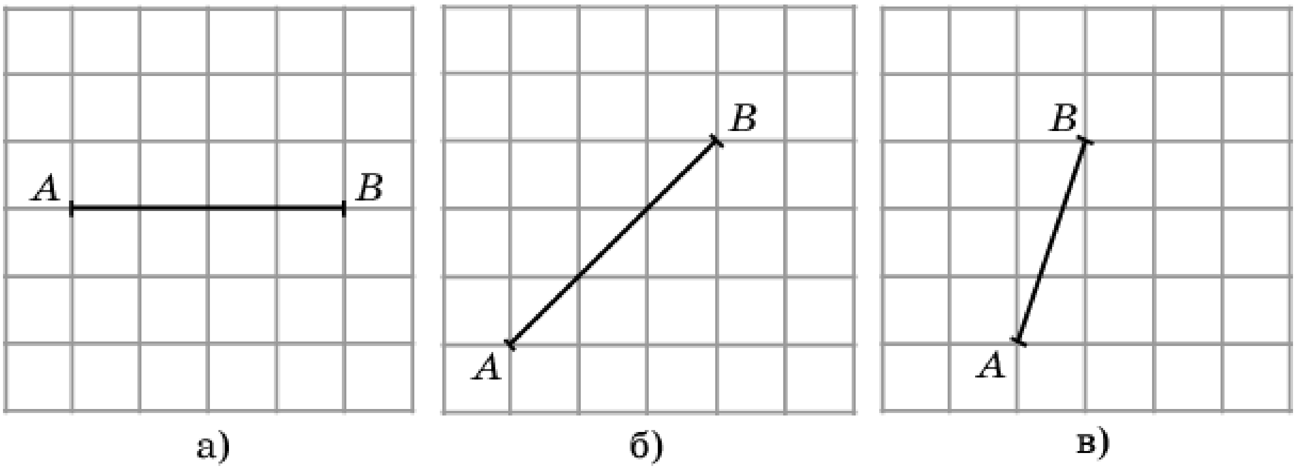


Рис. 2.11

12. На клетчатой бумаге изобразите отрезок *AB*, как показано на рисунке 2.12. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок *AB* виден под углом 45°.

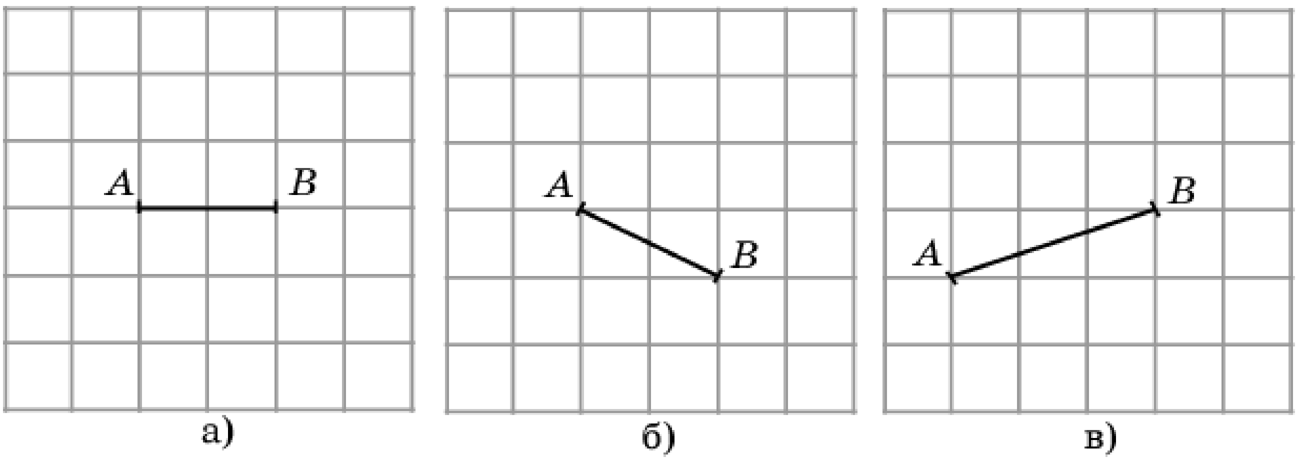


Рис. 2.12

§ 3*. Графы

Фигура образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек, называется ***плоским графом***, или просто ***графом*** (рис. 3.1, а). Точки называются ***вершинами***, а отрезки – ***рёбрами*** графа.

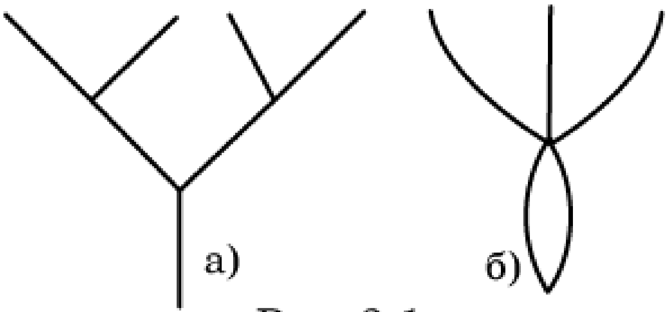


Рис. 3.1

Вместо отрезков в качестве рёбер графов рассматриваются также кривые линии на плоскости (рис. 3.1, б).

Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы выставок и т. д.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад.

Одной из таких задач-головоломок была задача о кёнигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707-1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

Задача. В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (рис. 3.2, где *Л* - левый берег, *П* - правый берег, *А* и *Б* - острова). Можно ли, прогуливаясь по берегам реки, пройти через каждый мост ровно один раз?

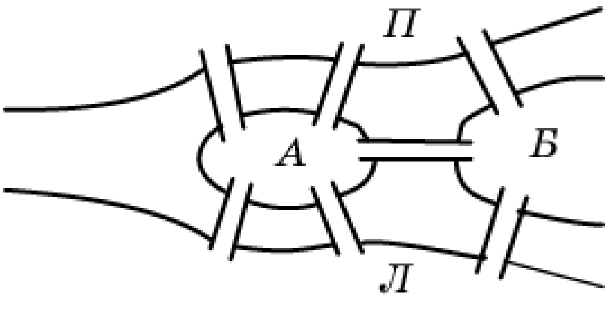


Рис. 3.2

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т. е. "нарисовать одним росчерком". Такие контуры образуют, так называемые, ***уникурсальные графы***.

Задаче о кёнигсбергских мостах Л. Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую Академию наук.

На рисунке 3.3 изображён граф, соответствующий задаче о кёнигсбергских мостах. Требуется доказать, что этот граф является уникурсальным.

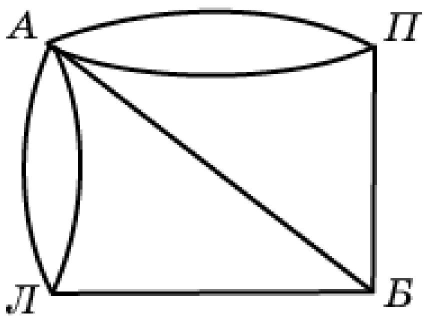


Рис. 3.3

Для этого рассмотрим понятие ***индекса вершины*** - число рёбер графа, сходящихся в данной вершине (рёбра с началом и концом в данной вершине считаются дважды), и покажем, что имеет место следующее утверждение

Для уникурсального графа число вершин нечётного индекса равно нулю или двум.

Действительно, если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют чётный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало и конец не совпадают, то они являются единственными вершинами нечётного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечётным индексом нет.

Приступим теперь к решению задачи. Определим чётность вершин графа на рисунке 3.3. Вершина *А* имеет индекс 5, *Б* - 3, *П* - 3 и *Л* - 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечётного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Отсюда получаем, что во время прогулки по городу нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.

Исторические сведения

Леонард Эйлер – один из величайших математиков, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Л. Эйлер был действительным членом Петербургской Академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и в деле подготовки кадров учёных-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие учёного. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причём последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжёлый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчёты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский учёный П.С. Лаплас сказал: "Читайте Эйлера, он – учитель всех нас".

Вопросы

1. Что называется графом?
2. Какой граф называется уникурсальным?
3. Что называется индексом вершины графа?
4. Сколько вершин нечётного индекса может быть у уникурсального графа?

Задачи

1. Изобразите граф, у которого четыре вершины и каждая имеет индекс три. Сколько у него рёбер?
2. Изобразите граф, у которого пять вершин и каждая имеет индекс четыре. Сколько у него рёбер?
3. Может ли граф иметь пять вершин, каждая из которых имеет индекс три?
4. Может ли граф иметь: а) одну вершину; б) две вершины; в) три вершины; г) четыре вершины нечетного индекса?
5. Какие графы, изображённые на рисунке 3.4, являются уникурсальными?

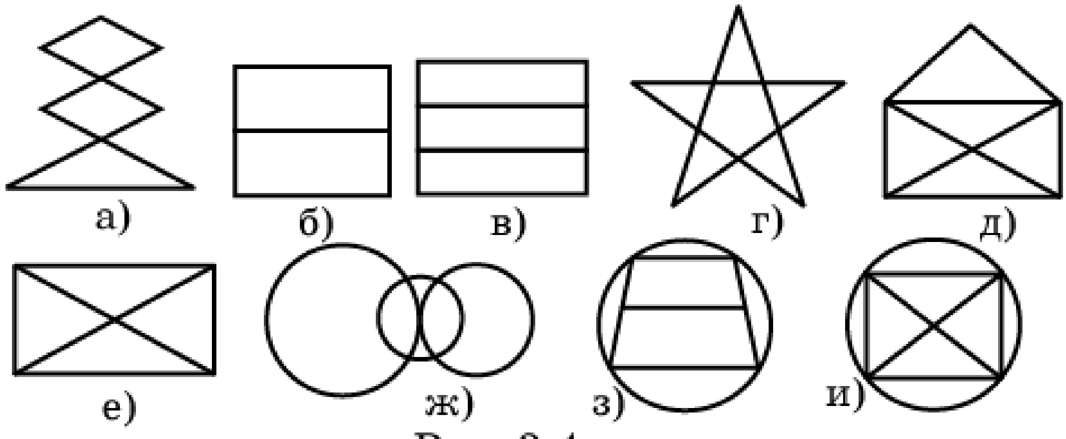


Рис. 3.4

6. Нарисуйте одним росчерком графы, изображённые на рисунке 3.5.

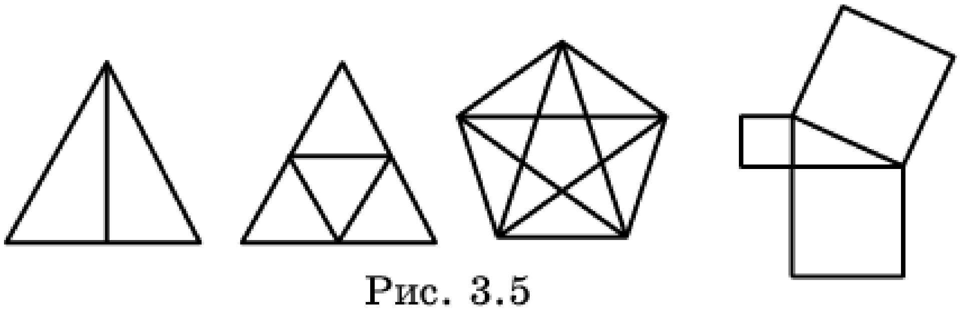


Рис. 3.5

7. Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придётся пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?

8. В вершине куба сидит муха (рис. 3.6). Может ли она проползти по каждому его ребру ровно один раз? Какое наименьшее число рёбер придётся проползти дважды?

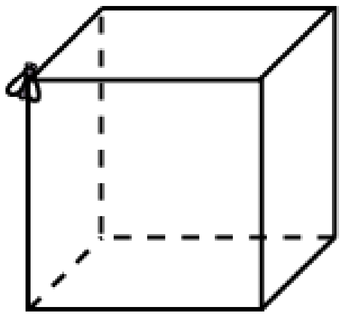


Рис. 3.6

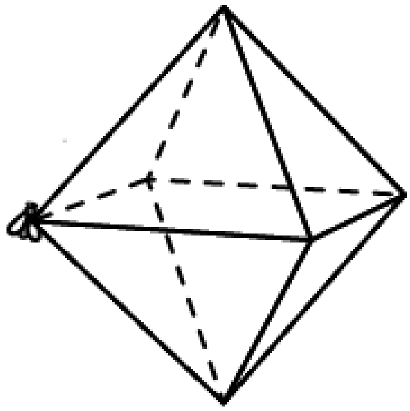


Рис. 3.7

9. В вершине куба сидит муха (рис. 3.6). Она хочет проползти по каждому ребру куба и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?

10. В вершине октаэдра сидит муха (рис. 3.7). Может ли она проползти по каждому его ребру ровно один раз?

11. В вершине икосаэдра сидит муха (рис. 3.8). Она хочет проползти по каждому его ребру и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?

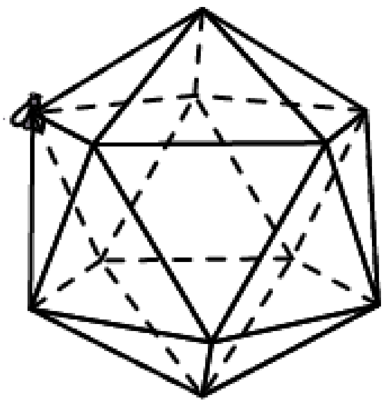


Рис. 3.8

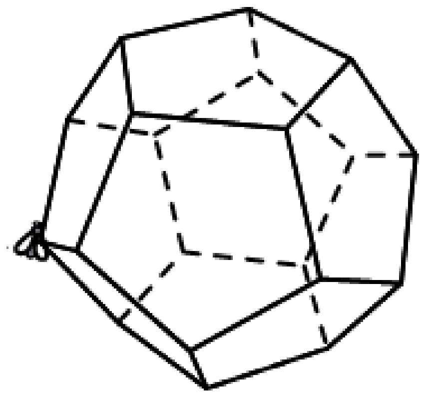


Рис. 3.9

12. В вершине додекаэдра сидит муха (рис. 3.9). Она хочет проползти по каждому его ребру и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?

13. На рисунке 3.10 изображён план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После его смерти наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причём в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью,

которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

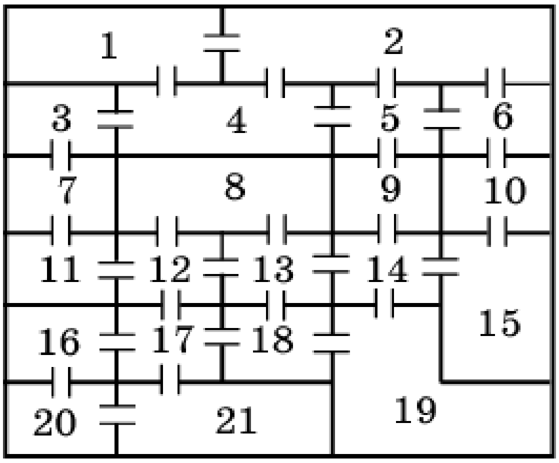


Рис. 3.10

14. Сколько имеется путей из A и B по отрезкам, изображённым на рисунке, в направлениях указанных стрелками (рис. 3.11)?

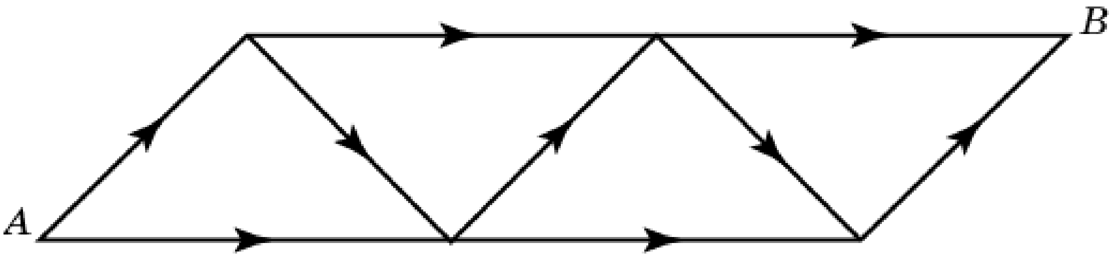


Рис. 3.11

15. На рисунке 3.12 изображены два единичных куба. Сколько имеется путей длины 4 по рёбрам этих кубов из вершины A в вершину D_1?

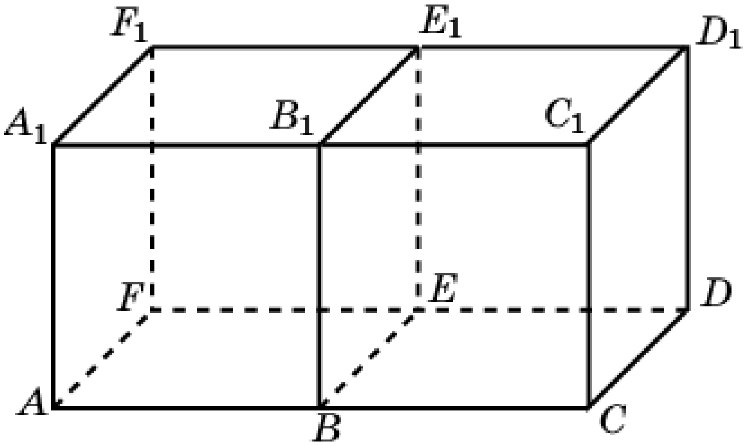


Рис. 3.12

16. На рисунке 3.13 изображена треугольная призма, на сторонах и диагоналях боковых граней которой поставлены стрелки. Сколько имеется путей по этим сторонам и диагоналям из вершины A в вершину C_1, если двигаться разрешается только в направлениях, указанных стрелками?

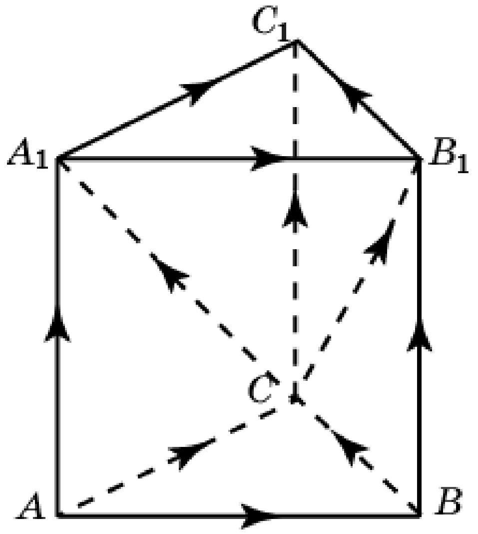


Рис. 3.13

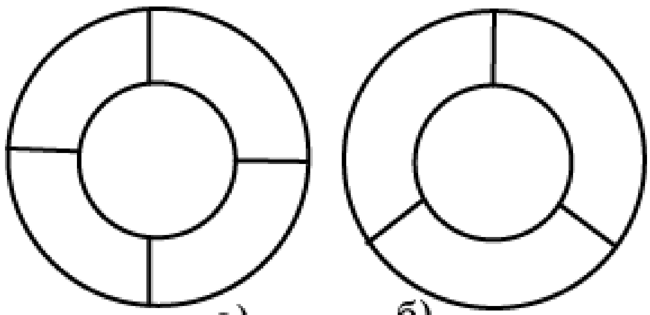
§ 4*. Раскрашивание карт

Ещё одной проблемой, связанной с многоугольниками и графами, является проблема четырёх красок, имеющая почти 150-летнюю историю.

Задача заключается в том, чтобы раскрасить географическую карту так, чтобы пограничные страны (имеющие общую границу) были окрашены в разные цвета (непограничные страны можно окрашивать одним цветом), использовав при этом наименьшее число красок.

Такую раскраску карты, при которой соседние страны окрашены в разные цвета, будем называть ***правильной***.

На рисунке 4.1 изображены карты, странами которых служат области, ограниченные дугами окружностей и отрезками. Для правильной раскраски карты на рисунке 4.1, а требуется три цвета. Для правильной раскраски карты на рисунке 4.1, б трёх цветов недостаточно и требуется четыре цвета.



а) б)

Рис. 4.1

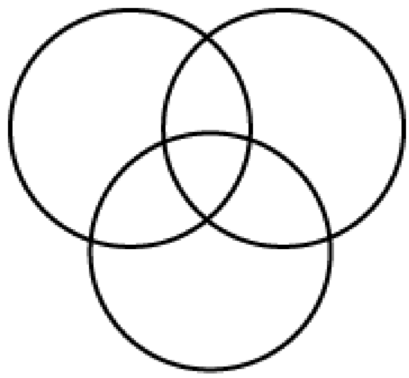
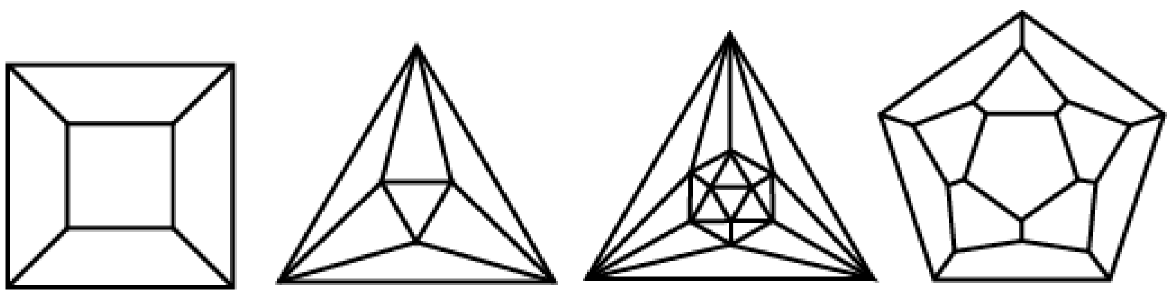


Рис. 4.2

Задачи

1. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски карты, образованной тремя окружностями (рис. 4.2)?

2. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски карт, изображённых на рисунке 4.3?



а) б) в) г)

Рис. 4.3

3. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски карт, изображённых на рисунке 4.4?

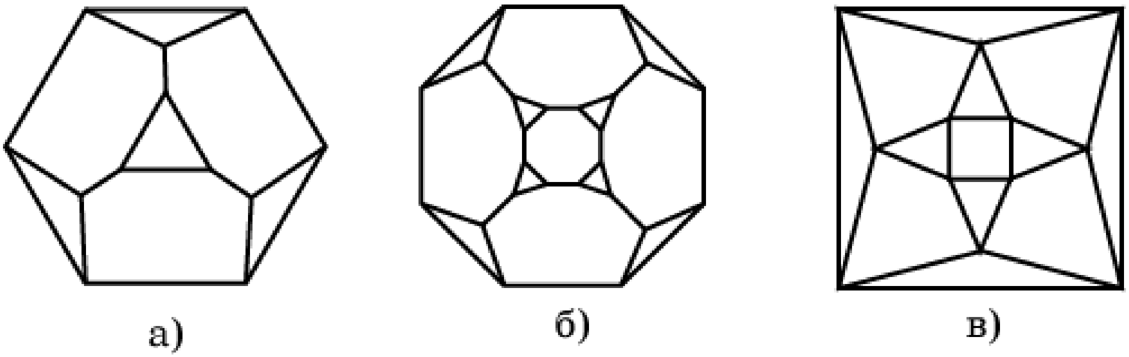


Рис. 4.4

4. Окраска граней многогранника называется правильной, если соседние грани имеют разные цвета. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра (рис. 4.5)?

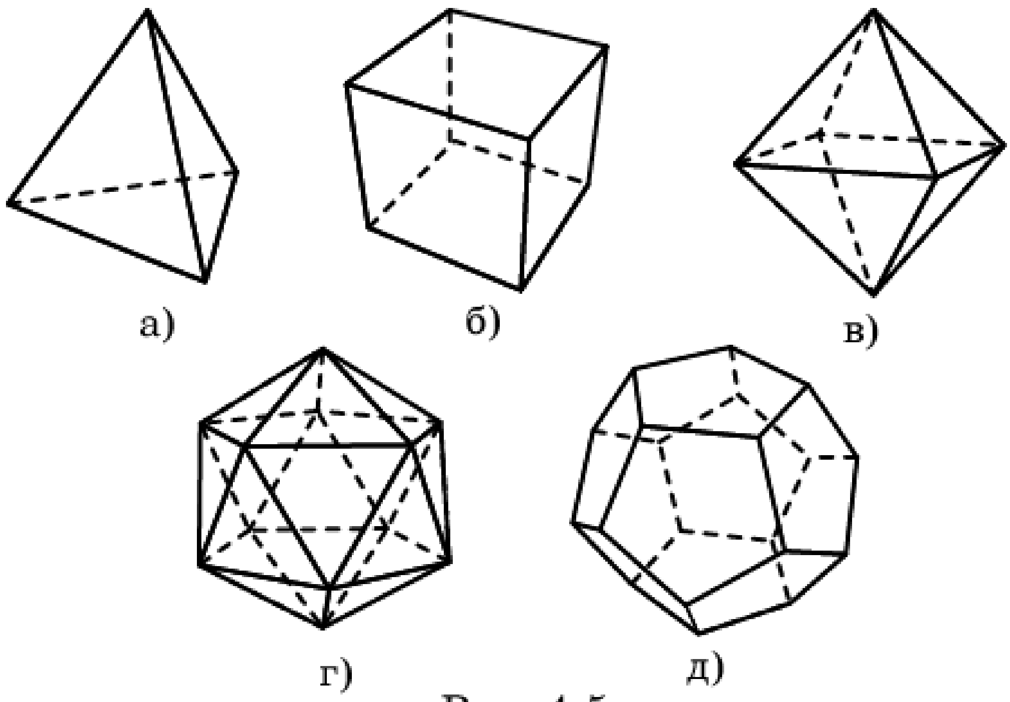


Рис. 4.5

5. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней пятиугольной: а) призмы; б) антипризмы (рис. 4.6)?

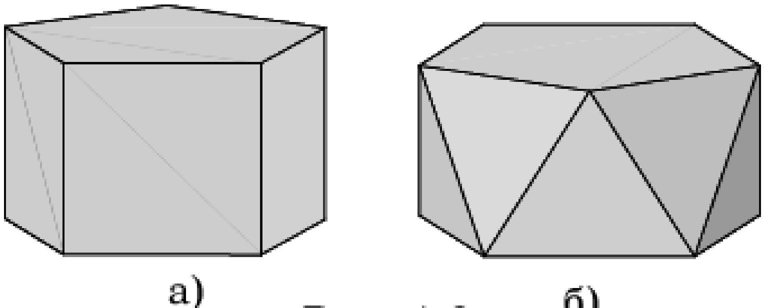


Рис. 4.6

6. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней усечённого: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра (рис. 4.7)?

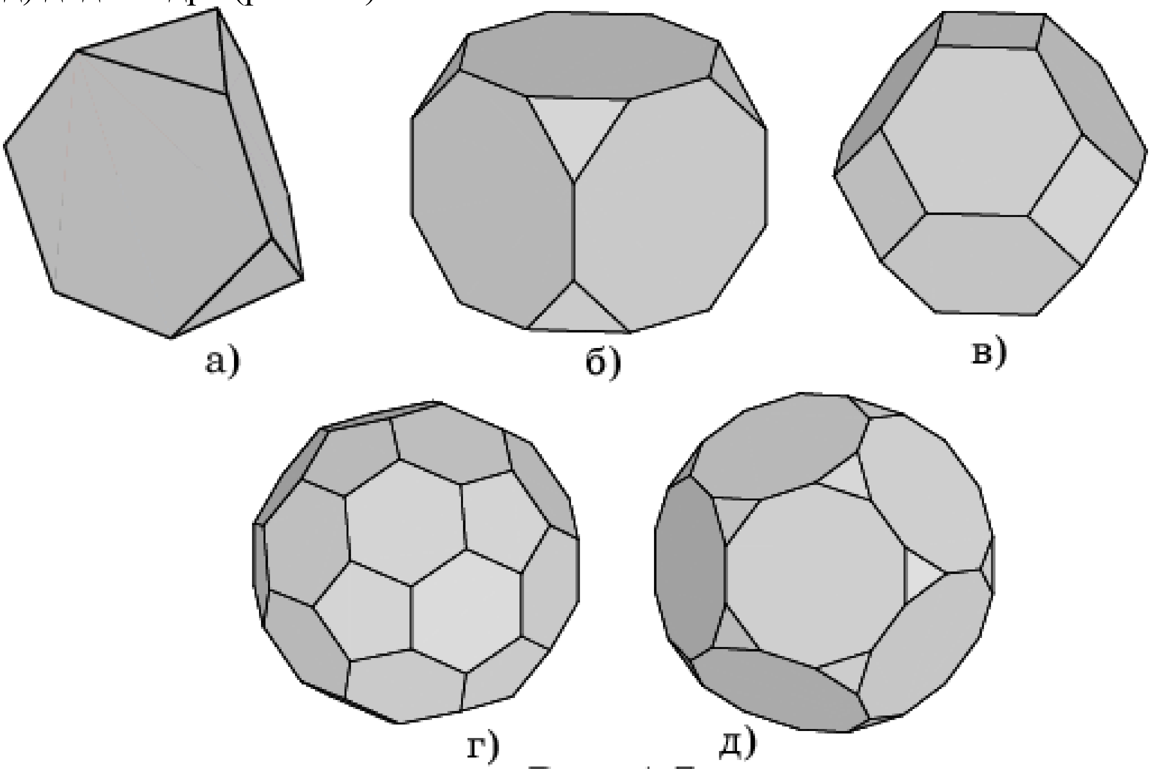


Рис. 4.7

7. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) кубооктаэдра; б) икосододекаэдра (рис. 4.8)?

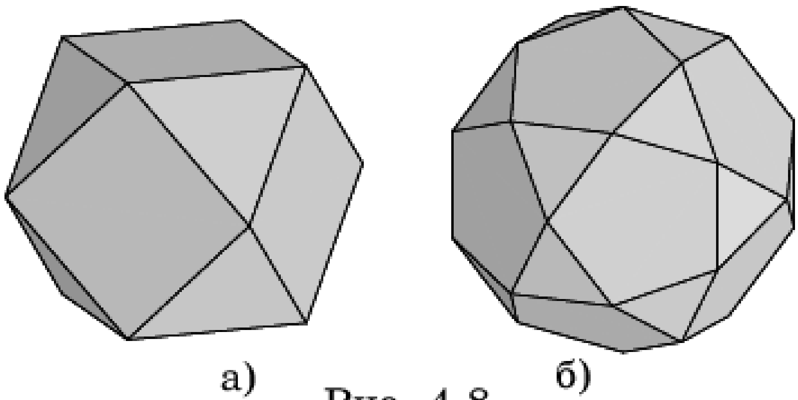
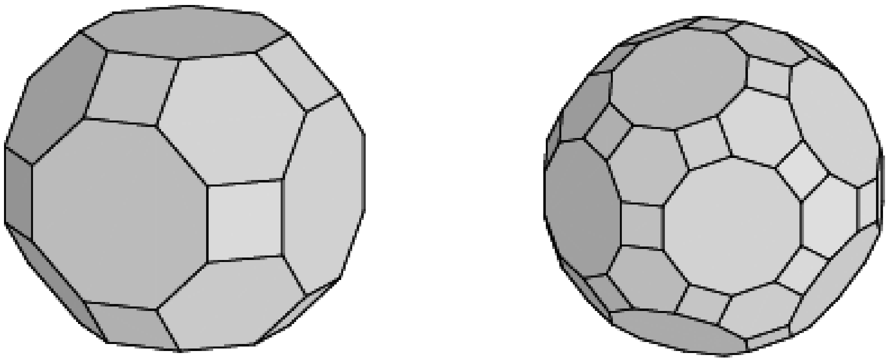


Рис. 4.8

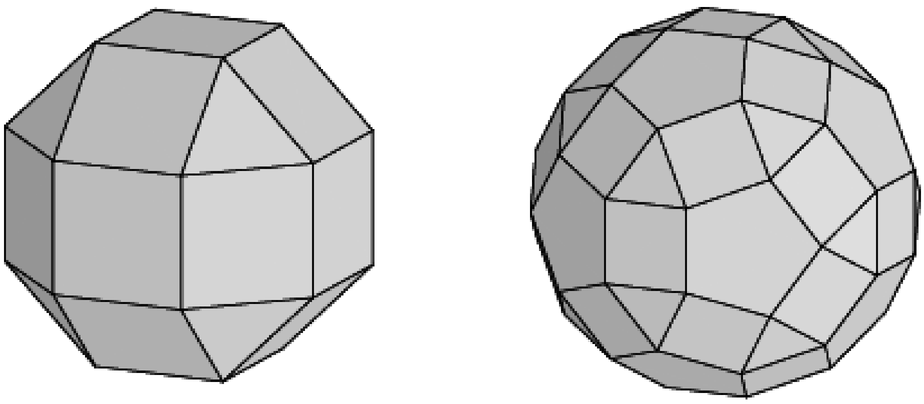
8. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) усечённого кубооктаэдра; б) усечённого икосододекаэдра (рис. 4.9)?



а) б)

Рис. 4.9

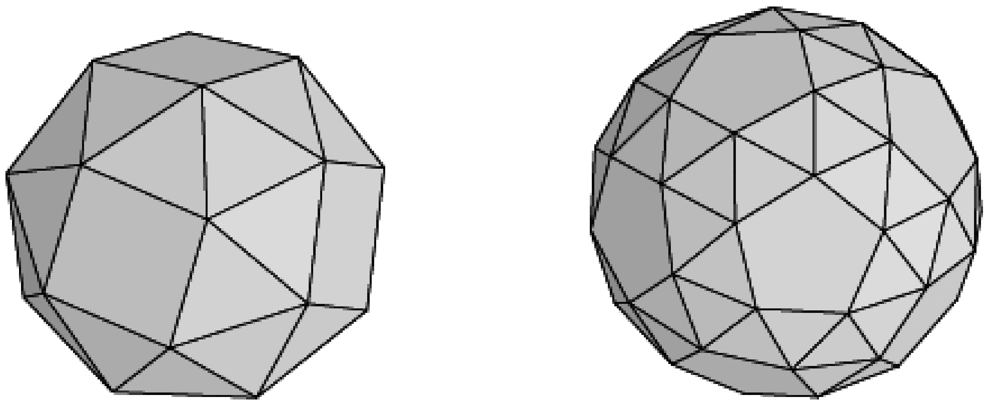
9. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) ромбокубооктаэдра; б) ромбоикосододекаэдра (рис. 4.10)?



а) б)

Рис. 4.10

10. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) курносого куба; б) курносого додекаэдра (рис. 4.11)?



а) б)

Рис. 4.11

§ 5. Центральная симметрия

Точки A и A' называются ***симметричными*** относительно точки O, если O является серединой отрезка AA'. Точка O считается симметричной сама себе (рис. 5.1). Она называется ***центром симметрии***.

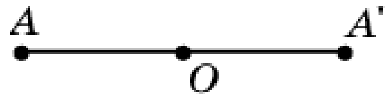


Рис. 5.1

Две фигуры F и F' называются ***центрально-симметричными*** относительно центра O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 5.2).

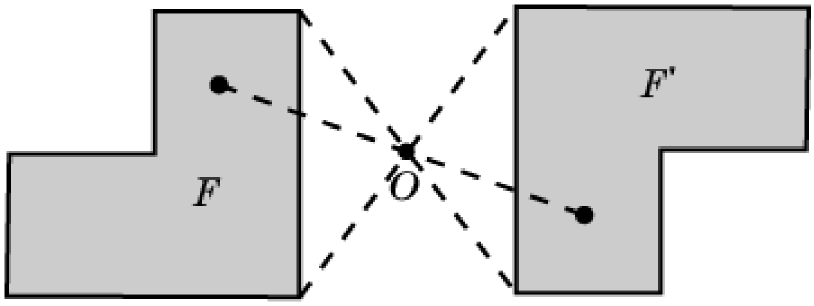


Рис. 5.2

Фигура F называется ***центрально-симметричной*** относительно центра O, если она симметрична сама себе (рис. 5.3).

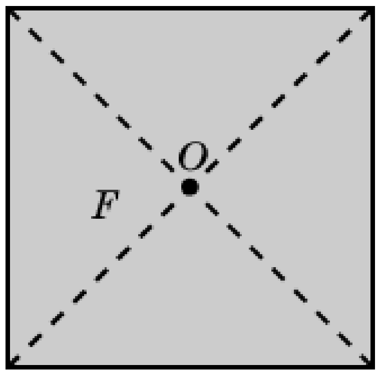


Рис. 5.3

Вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно точки?
2. Какая точка считается симметричной сама себе?
3. Какие фигуры называются центрально-симметричными?
4. Какая фигура называется центрально-симметричной?

Задачи

1. Что является центром симметрии отрезка?

2. Имеет ли центр симметрии: а) луч; б) прямая; в) окружность?

3. Может ли фигура иметь несколько центров симметрии?

4. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?

5. Какие из фигур, изображённых на рисунке 5.4, имеют центр симметрии?

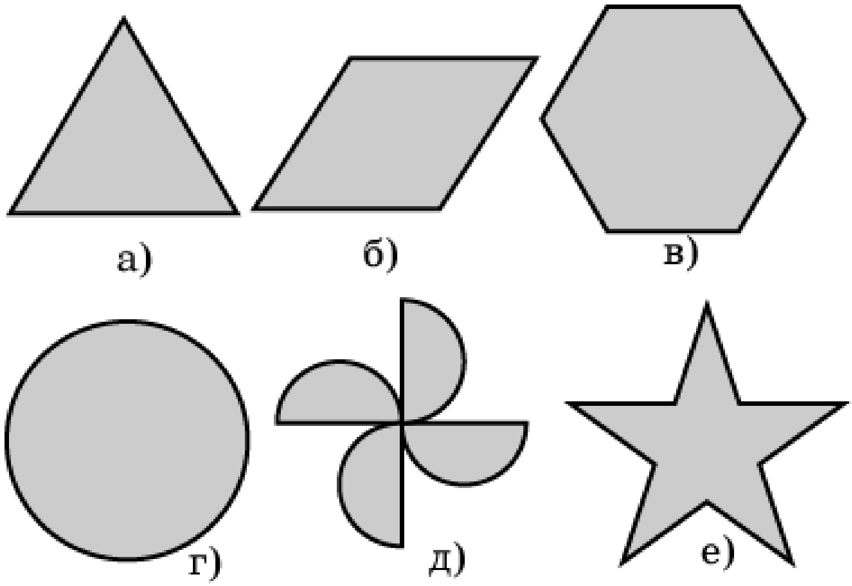


Рис. 5.4

6. На клетчатой бумаге нарисуйте точки, как показано на рисунке 5.5. Изобразите точку, симметричную данной точке *A* относительно точки *O*.

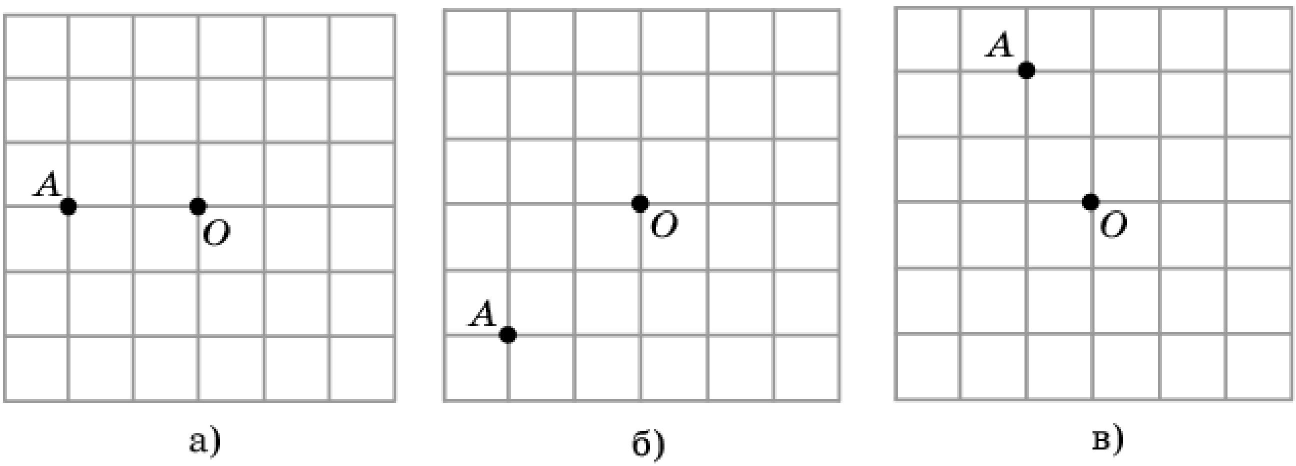


Рис. 5.5

7. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и отрезок, как показано на рисунке 5.6. Изобразите отрезок, симметричный данному отрезку *AB* относительно точки *O*.

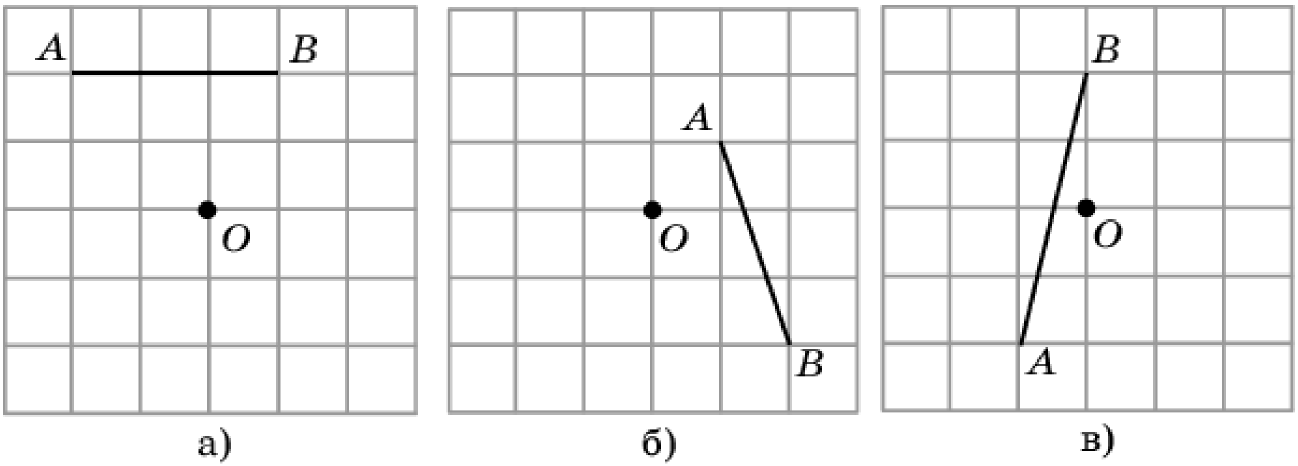


Рис. 5.6

8. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и треугольник, как показано на рисунке 5.7. Изобразите треугольник, симметричный данному треугольнику *ABC* относительно точки *O*.

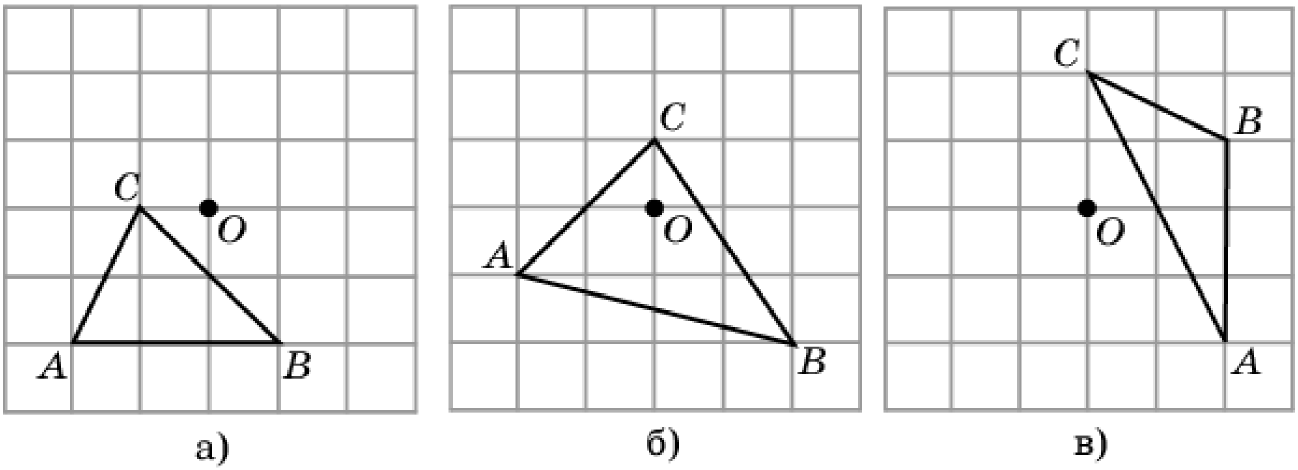


Рис. 5.7

9. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и четырёхугольник, как показано на рисунке 5.8. Изобразите четырёхугольник, симметричный данному четырёхугольнику *ABCD* относительно точки *O*.

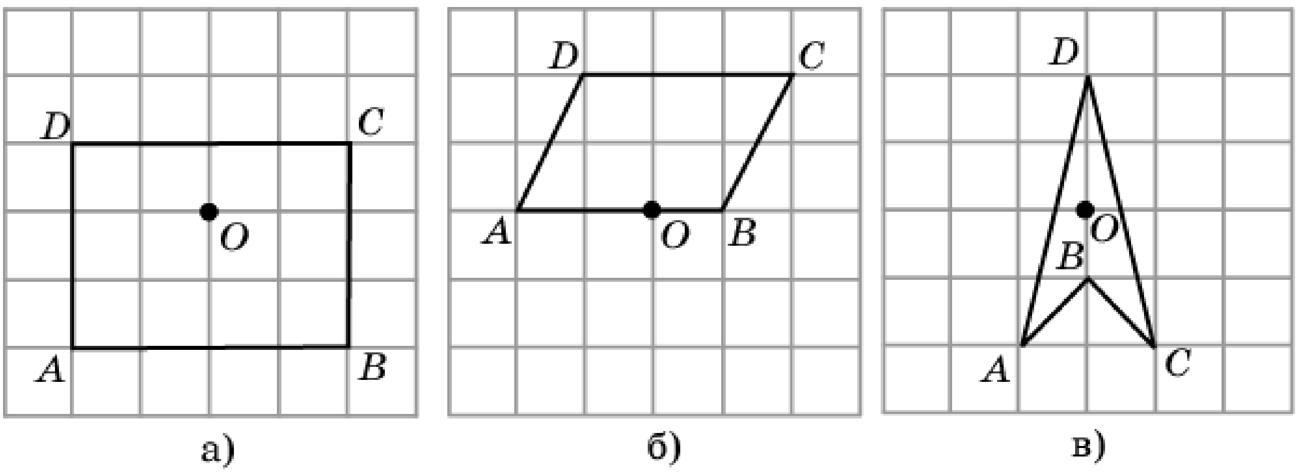
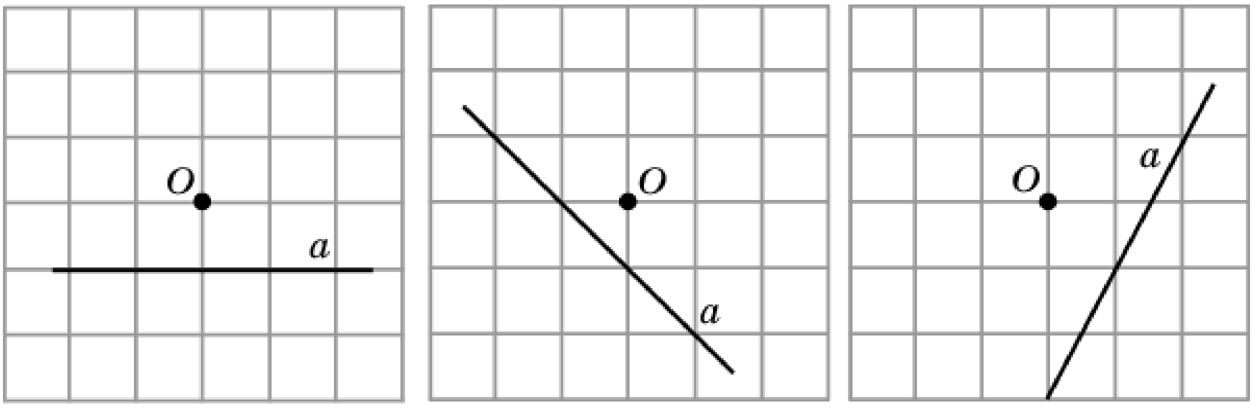


Рис. 5.8

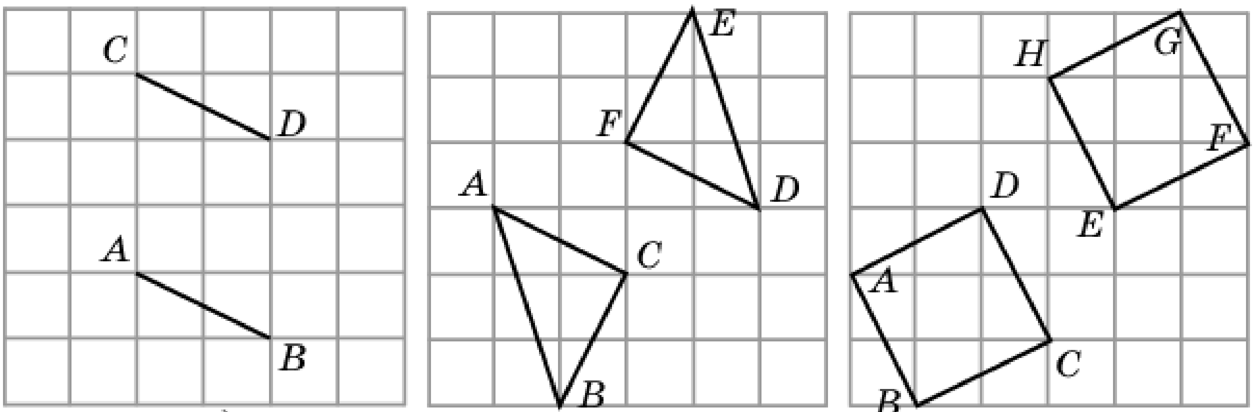
10. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и прямую, как показано на рисунке 5.9. Изобразите прямую, симметричную данной прямой *a* относительно точки *O*.



а) б) в)

Рис. 5.9

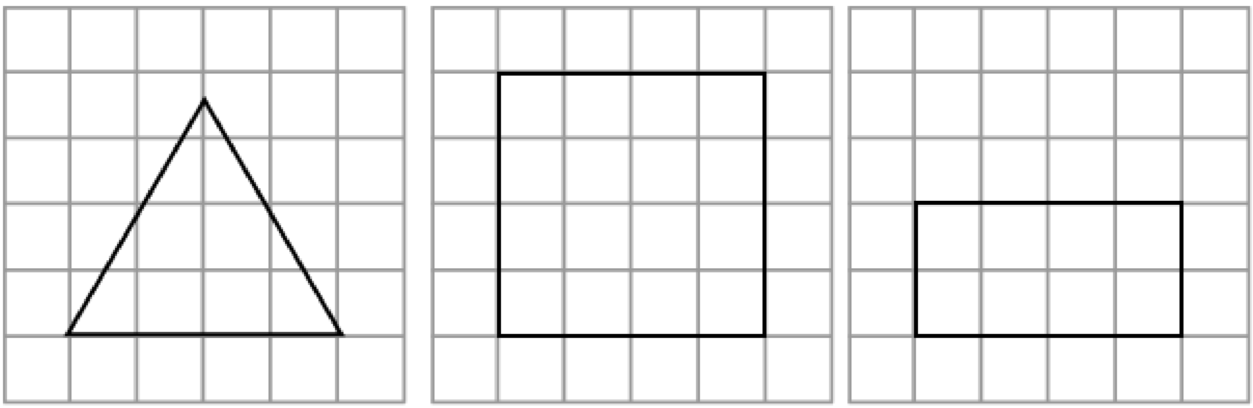
11. На клетчатой бумаге нарисуйте фигуры, как показано на рисунке 5.10. Укажите центр симметрии для двух симметричных: а) отрезков; б) треугольников; в) четырёхугольников.



а) б) в)

Рис. 5.10

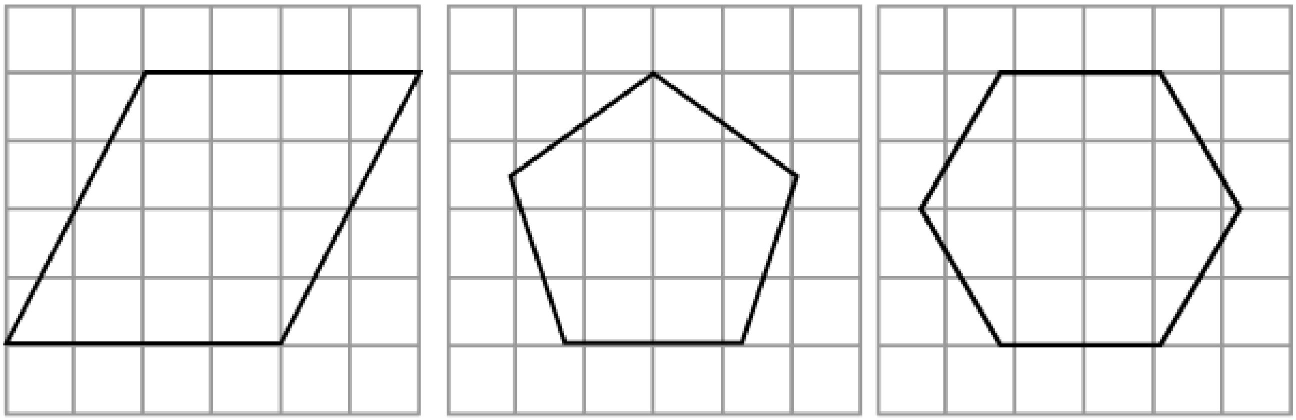
12. Имеет ли центр симметрии: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) прямоугольник (рис. 5.11)? Если да, укажите его.



а) б) в)

Рис. 5.11

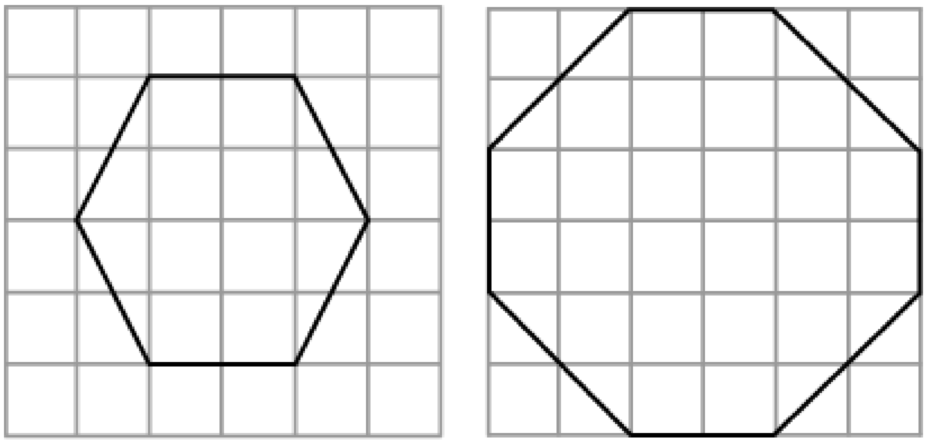
13. Имеет ли центр симметрии: а) параллелограмм; б) правильный пятиугольник; в) правильный шестиугольник (рис. 5.12)? Если да, укажите его.



а) б) в)

Рис. 5.12

14. Имеет ли центр симметрии: а) шестиугольник; б) восьмиугольник, изображённый на рисунке 5.13? Если да, укажите его.



а) б)

Рис. 5.13

15. Какие буквы русского алфавита, изображённые на рисунке 5.14, имеют центр симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р

С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

Рис. 5.14

16. Какие буквы латинского алфавита, изображённые на рисунке 5.15, имеют центр симметрии?

A B C D E F G H I J K L M

N O P Q R S T U V W X Y Z

Рис. 5.15

§ 6. Осевая симметрия

Две точки A и A' называются ***симметричными*** относительно прямой c, если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Каждая точка прямой c считается ***симметричной*** самой себе (рис. 6.1). Прямая c называется ***осью симметрии***.

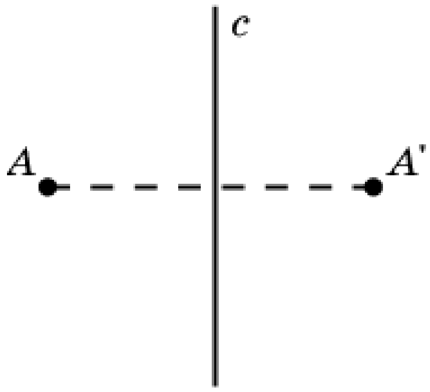


Рис. 6.1

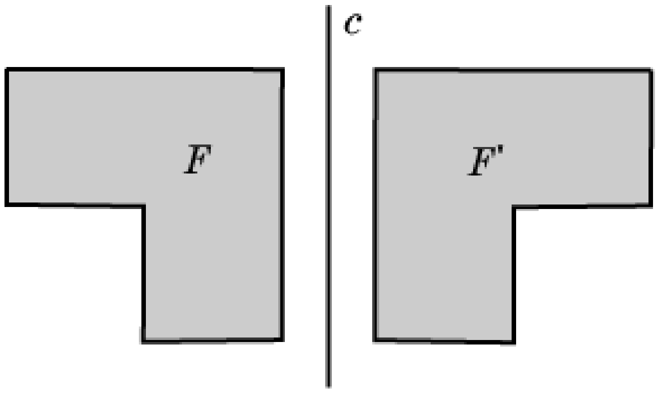


Рис. 6.2

Две фигуры F и F' называются ***симметричными*** относительно прямой c, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 6.2).

Фигура F называется ***симметричной*** относительно прямой c, если она симметрична сама себе (рис. 6.3).

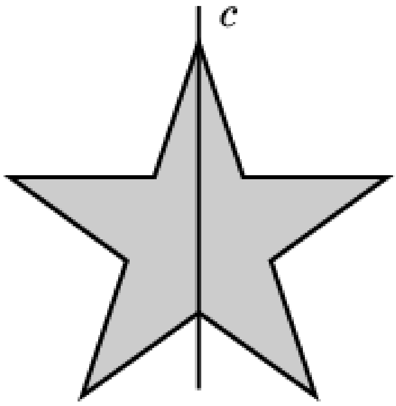


Рис. 6.3

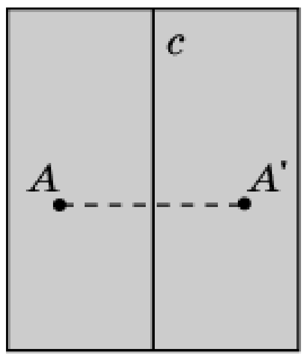


Рис. 6.4

Представление об осевой симметрии даёт, например, перегибание и складывание листа бумаги. Действительно, если перегнуть и сложить лист бумаги, то линию сгиба c можно считать изображающей часть прямой (рис. 6.4). Если при этом точка A на листе бумаги совмещается с точкой A', то эти точки будут симметричными относительно линии сгиба c.

Используя перегибание и складывание листа бумаги, можно получать различные плоские фигуры.

Квадрат. Для того чтобы из прямоугольного листа бумаги *ABCD* (рис. 6.5, а) получить квадрат, перегнём этот лист бумаги так, чтобы меньшая сторона *AB* пошла по большей стороне *BC*. Тогда точка *A* совместится с некоторой точкой *E*, а пересечение линии сгиба со стороной *AD* даст точку *F* (рис. 6.5, б). Проведём линию *EF*. Развернём лист бумаги и разрежем его по линии *EF*. Четырёхугольник *ABEF* будет искомым квадратом (рис. 6.5, в).

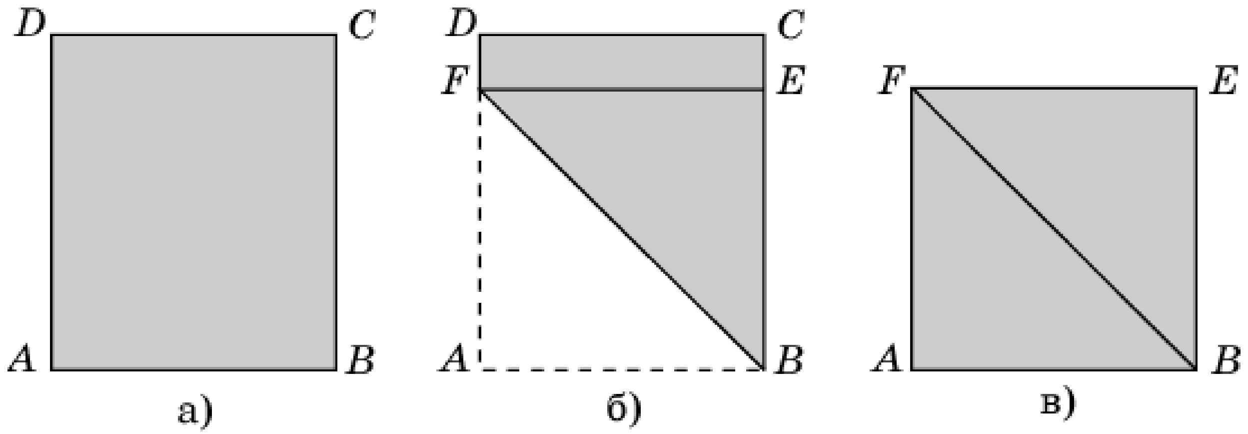


Рис. 6.5

Равносторонний треугольник. Для того чтобы из прямоугольного листа бумаги *ABCD* получить равносторонний треугольник, сначала перегнём и сложим лист бумаги так, чтобы большая сторона *AD* совместилась со стороной *BC*. Линию сгиба обозначим *EF* (рис. 6.6, а). Затем перегнём и сложим лист бумаги так, чтобы точка *A* осталась на месте, а точка *B* совместилась с некоторой точкой *G* на линии сгиба *EF* (рис. 6.6, б). Развернём лист бумаги и

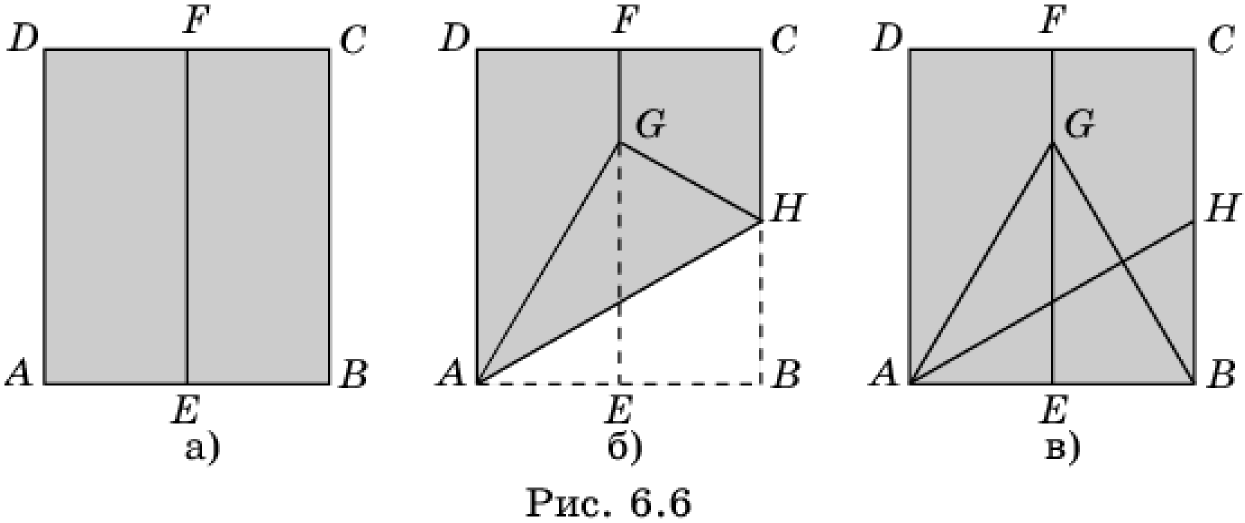


Рис. 6.6

проведём линии *AG* и *BG*. Треугольник *ABG* будет искомым (рис. 6.6, в). Действительно, сторона *AB* этого треугольника равна стороне *AG*, так как при перегибании и складывании листа относительно линии *AH* они совмещаются. Сторона AG равна стороне BG, так как при перегибании листа относительно линии EF они совмещаются. Таким образом, все стороны треугольника ABG равны, т. е. он – равносторонний. Вырежем его из листа бумаги.

Правильный шестиугольник. Для того чтобы из прямоугольного листа бумаги $ABCD$ получить правильный шестиугольник, сначала перегнём и сложим лист бумаги так, чтобы большая сторона AD совместилась со стороной BC. Линию сгиба обозначим EF (рис. 6.6, а). Затем перегнём и сложим этот лист так, чтобы сторона AD совместилась с отрезком EF. Линию сгиба обозначим E_1F_1. Перегнём и сложим этот лист ещё раз так, чтобы сторона BC совместилась с отрезком EF. Линию сгиба обозначим E_2F_2 (рис. 6.7, а).

Перегнём лист бумаги так, чтобы точка E_1 осталась на месте, а точка E_2 совместилась с некоторой точкой G_1 на стороне AD. Проведём отрезок E_1G_1. Аналогично, перегнём лист бумаги так, чтобы точка E_2 осталась на месте, а точка E_1 совместилась с некоторой точкой G_2 на стороне BC. Проведём отрезок E_2G_2 (рис. 6.7, б) Перегнём лист бумаги относительно линии G_1G_2 и обозначим H_1, H_2 точки, с которыми совместятся соответственно точки E_1, E_2. Шестиугольник $E_1E_2G_2H_2H_1G_1$ будет искомым правильным шестиугольником (рис. 6.7, в). Вырежем его из листа бумаги.

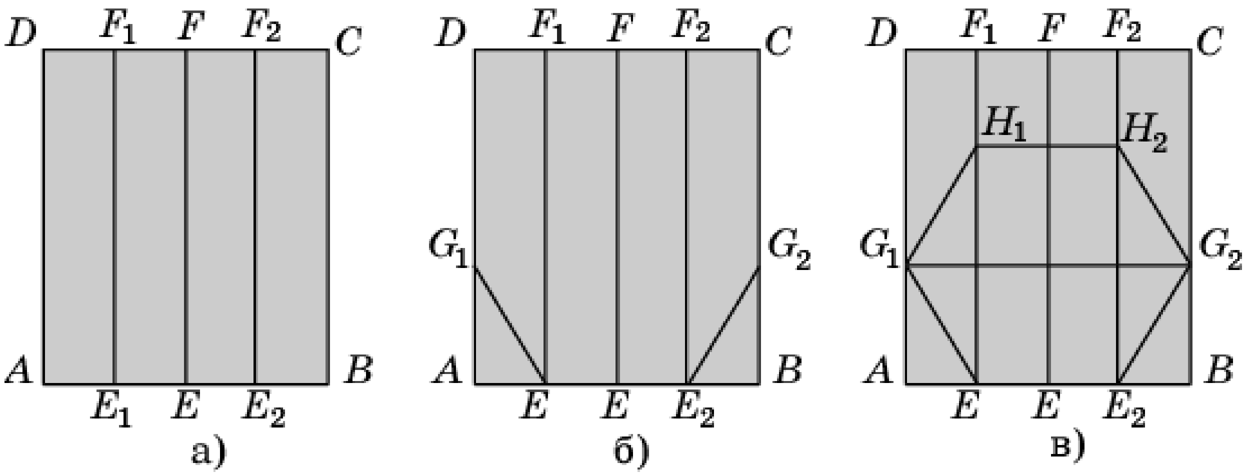


Рис. 6.7

4. Правильный восьмиугольник. Для того чтобы из прямоугольного листа бумаги $ABCD$ получить правильный восьмиугольник, сначала получим квадрат $ABEF$ как это было сделано выше. Далее перегнём и сложим лист бумаги так, чтобы сторона AF совместилась со стороной BE. Линию сгиба обозначим GH. Перегнём лист так, чтобы точки A и B совместились соответственно с точками F и E. Линию сгиба обозначим PQ. Соединим точки G и Q, Q и H, H и P, P и G. Получим квадрат $GQHP$ (рис. 6.8, а). Перегнём лист бумаги так, чтобы точка G осталась на месте, а точка B совместилась с некоторой точкой на стороне GQ. Аналогично, перегнём лист бумаги так, чтобы точка Q осталась на месте, а точка B совместилась с некоторой точкой на стороне GQ. Обозначим B_1 точку пересечения обеих линий сгибов (рис. 6.8, б). Сделаем то же самое для точек E, F, A. Получим точки E_1, F_1, A_1. Соединим получившиеся точки соответственно с точками G, Q, H, P. Получим искомый правильный восьмиугольник $GB_1QE_1HF_1PA_1$ (рис. 6.8, в). Вырежем его из листа бумаги.

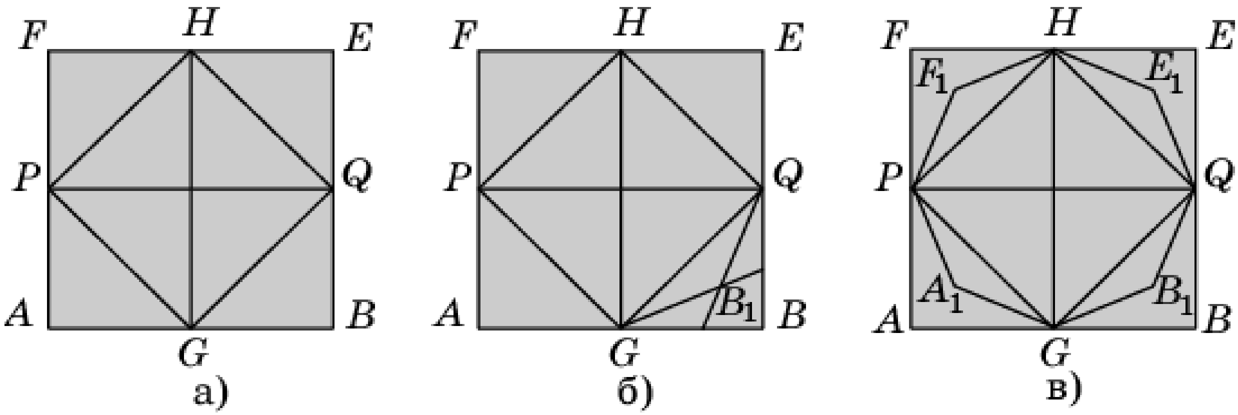


Рис. 6.8

Вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно прямой?
2. Какие точки симметричны сами себе относительно данной прямой?
3. Какие фигуры называются симметричными относительно прямой?
4. Какая фигура называется симметричной относительно прямой?
5. Что называется осью симметрии?

Задачи

1. Какая прямая является осью симметрии отрезка?
2. Имеет ли ось симметрии: а) луч; б) прямая; в) окружность?
3. Какие фигуры, изображённые на рисунке 6.9, имеют оси симметрии?

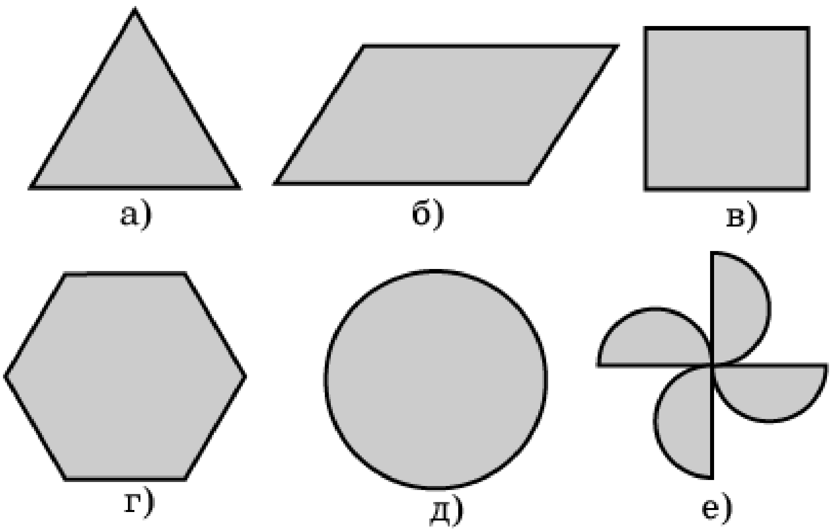
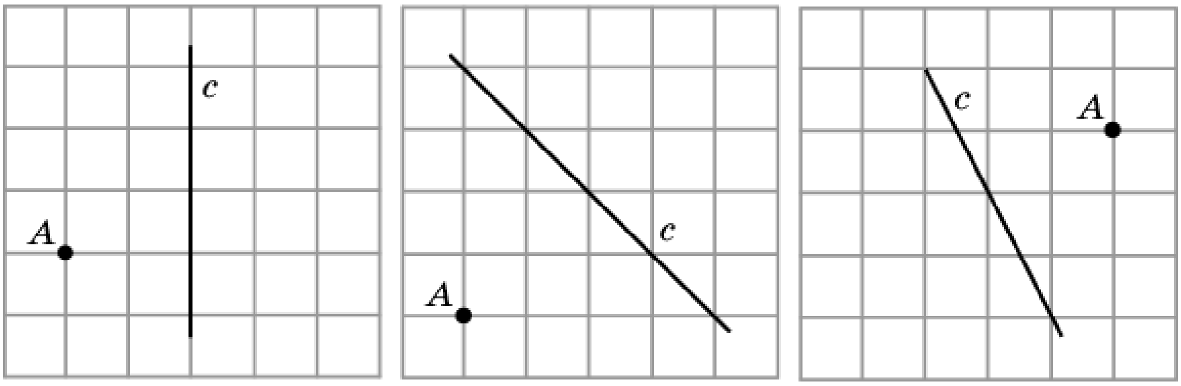


Рис. 6.9

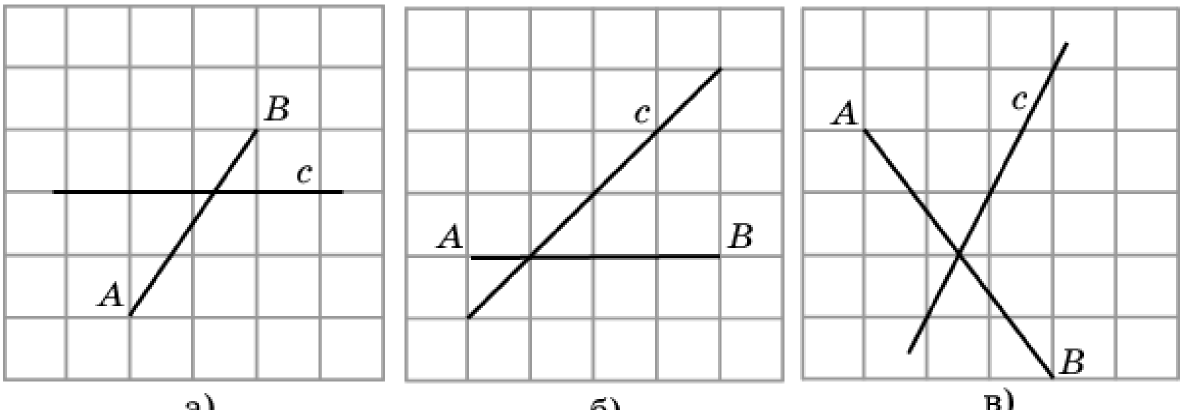
4. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и прямую, как показано на рисунке 6.10. Изобразите точку, симметричную данной точке *A* относительно прямой *c*.



а) б) в)

Рис. 6.10

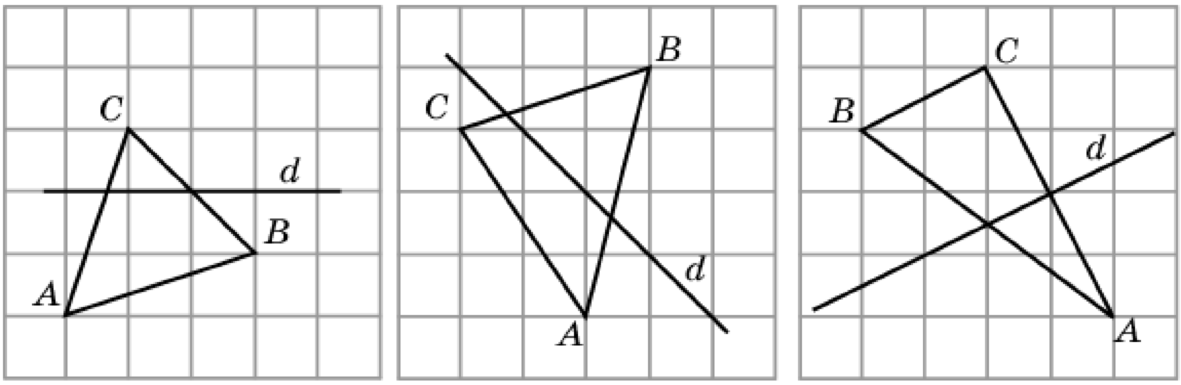
5. На клетчатой бумаге нарисуйте отрезок и прямую, как показано на рисунке 6.11. Изобразите отрезок, симметричный данному отрезку *AB* относительно прямой *c*.



а) б) в)

Рис. 6.11

6. На клетчатой бумаге нарисуйте треугольник и прямую, как показано на рисунке 6.12. Изобразите треугольник, симметричный данному треугольнику относительно прямой *d*.



а) б) в)

Рис. 6.12

7. На клетчатой бумаге нарисуйте треугольники, как показано на рисунке 6.13. Изобразите прямую, относительно которой они симметричны.

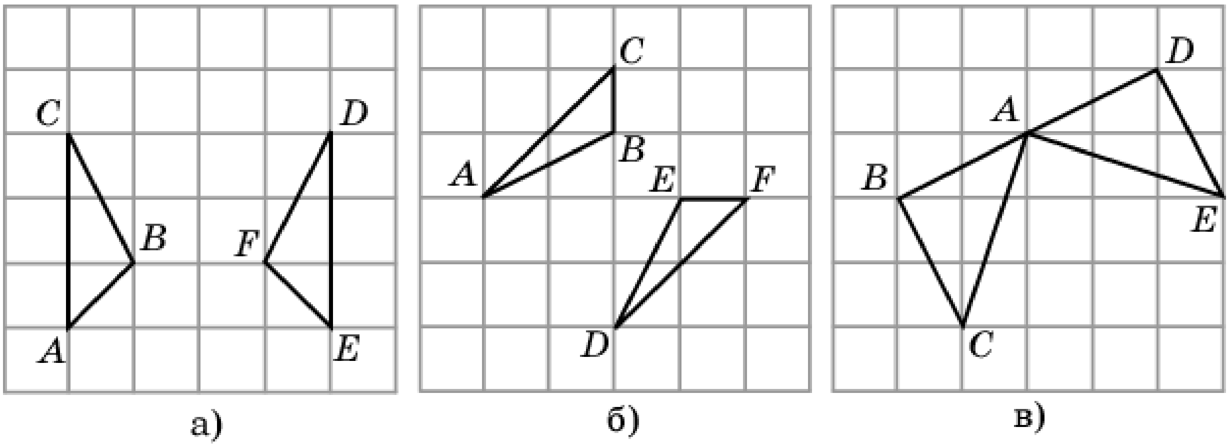


Рис. 6.13

8. Сколько осей симметрии имеет четырёхугольник, изображённый на рисунке 6.14?

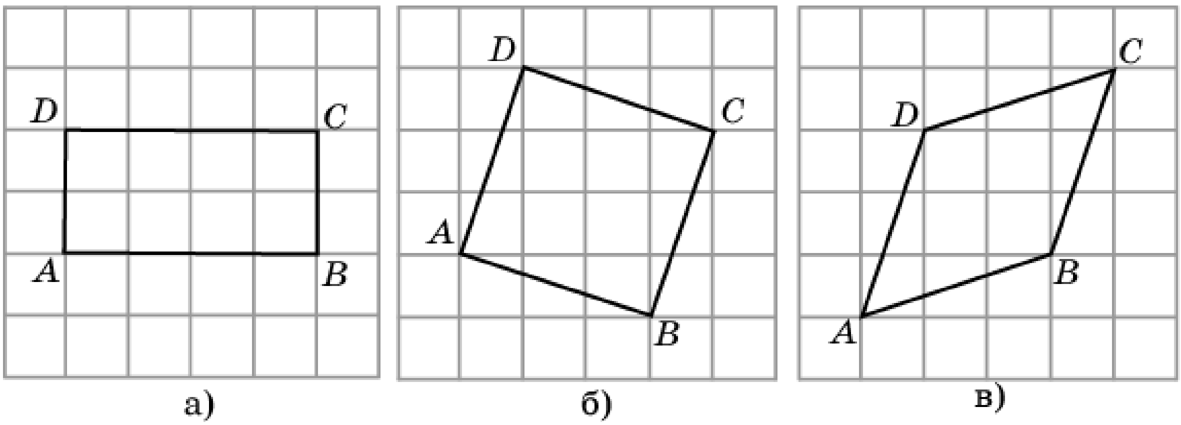


Рис. 6.14

9. Сколько осей симметрии имеет правильный: а) треугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник (рис. 6.15)?

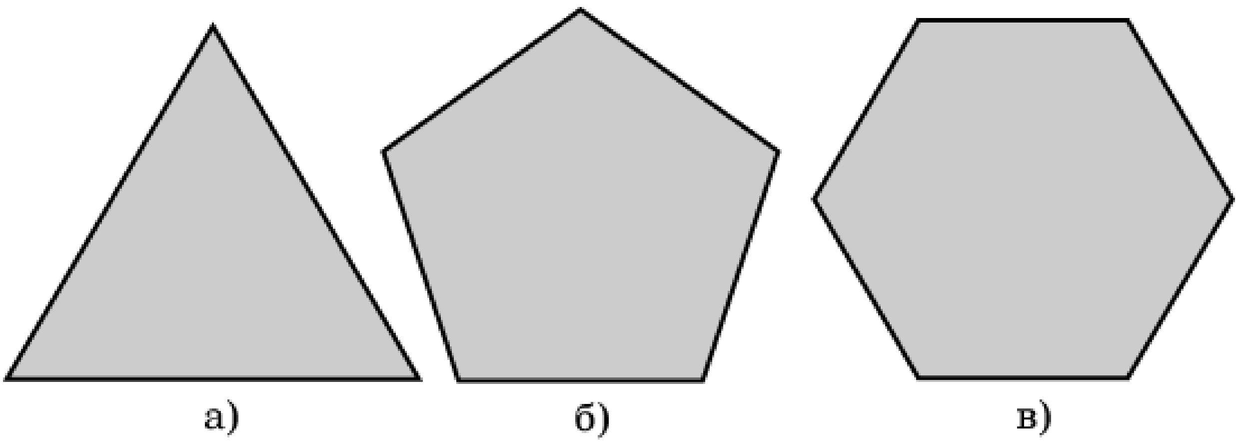
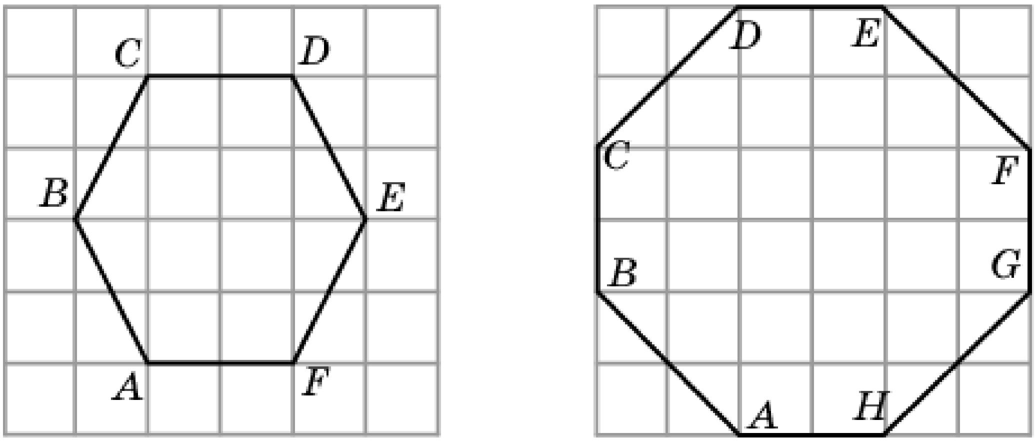


Рис. 6.15

10. Сколько осей симметрии имеет: а) шестиугольник; б) восьмиугольник, изображённый на рисунке 6.16?



а) б)

Рис. 6.16

11. Сколько осей симметрии имеет: а) правильная пятиугольная звезда; б) правильная шестиугольная снежинка, изображённая на рисунке 6.17?

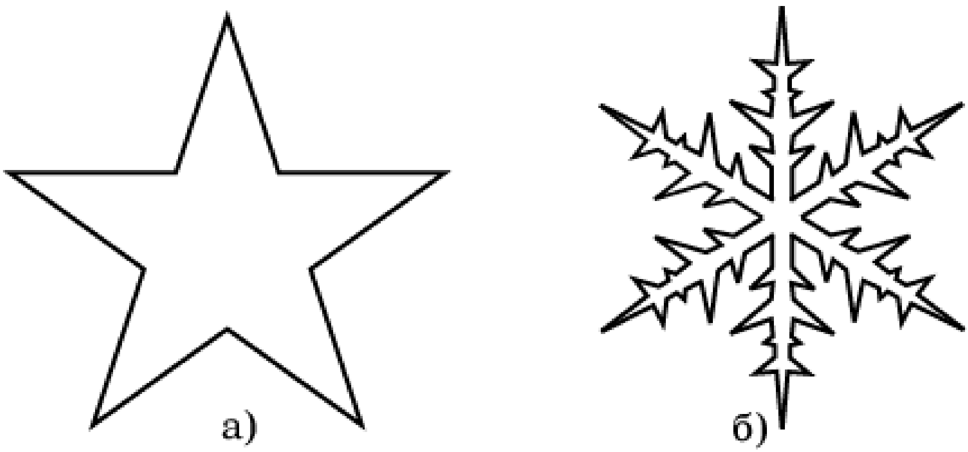


Рис. 6.17

12. Какие буквы русского алфавита, изображённые на рисунке 6.18, имеют оси симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р

С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

Рис. 6.18

13. Какие буквы латинского алфавита, изображённые на рисунке 6.19, имеют оси симметрии?

A B C D E F G H I J K L M

N O P Q R S T U V W X Y Z

Рис. 6.19

14. Перегибая и складывая прямоугольный лист бумаги, получите и вырежьте из бумаги: а) квадрат; б) равносторонний треугольник; в) правильный шестиугольник; г) правильный восьмиугольник.

15. Перегибая и складывая прямоугольный лист бумаги, получите и вырежьте из бумаги правильный двенадцатиугольник.

§ 7. Поворот

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A ***поворотом*** вокруг точки O на угол φ (против часовой стрелки), если $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \varphi$ (рис. 7.1). Точка O называется ***центром поворота***.

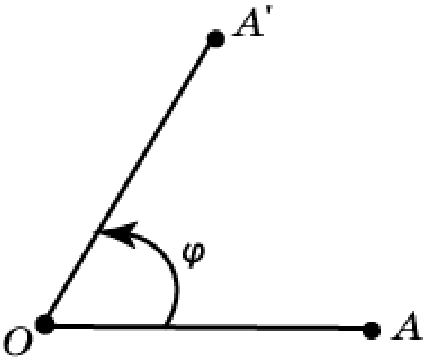


Рис. 7.1

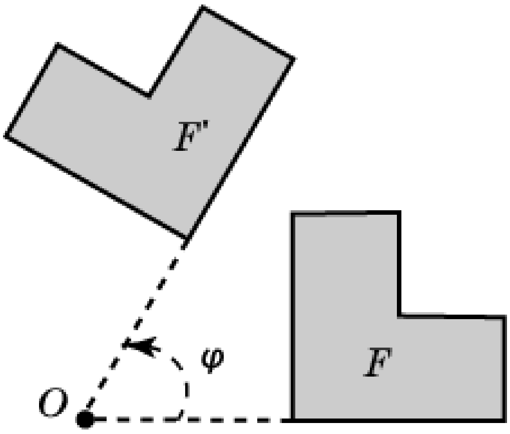


Рис. 7.2

Говорят, что фигура F' получается ***поворотом*** фигуры F вокруг точки O на угол φ (против часовой стрелки), если все точки фигуры F' получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг точки O на угол φ (против часовой стрелки) (рис. 7.2).

Точка O называется ***центром симметрии n-го порядка*** фигуры F, если при повороте фигуры F вокруг точки O на угол $\frac{360°}{n}$ (против часовой стрелки) фигура F совмещается сама с собой. На рисунке 7.3 изображён квадрат, точка пересечения диагоналей которого является центром симметрии четвёртого порядка.

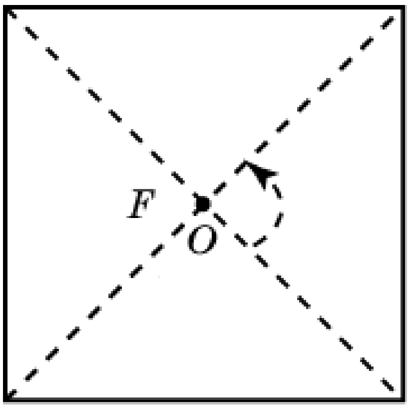


Рис. 7.3

Ясно, что центр симметрии второго порядка является просто центром симметрии.

Аналогичным образом определяются повороты по часовой стрелке.

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите точку, полученную поворотом данной точки *A* вокруг точки *O* на угол 90°: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке (рис. 7.4).

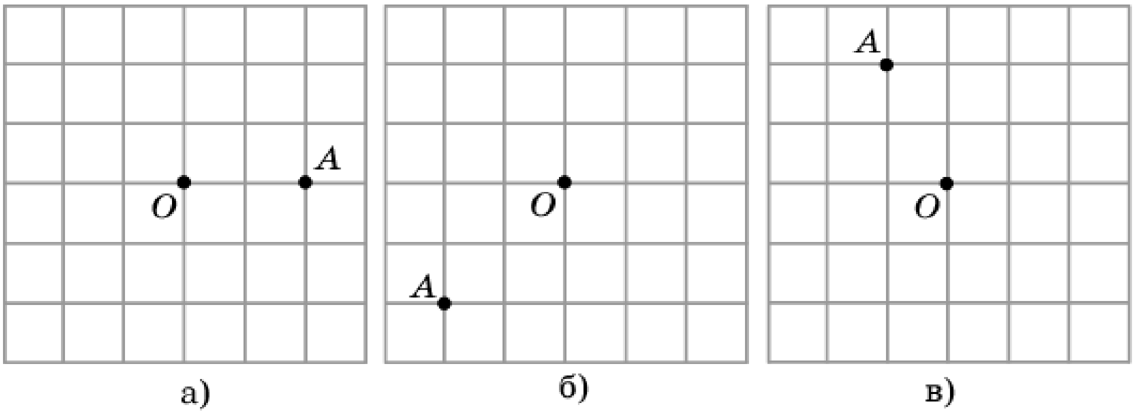


Рис. 7.4

2. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, полученный поворотом данного треугольника *ABC* вокруг точки *O* на угол 90°: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке (рис. 7.5).

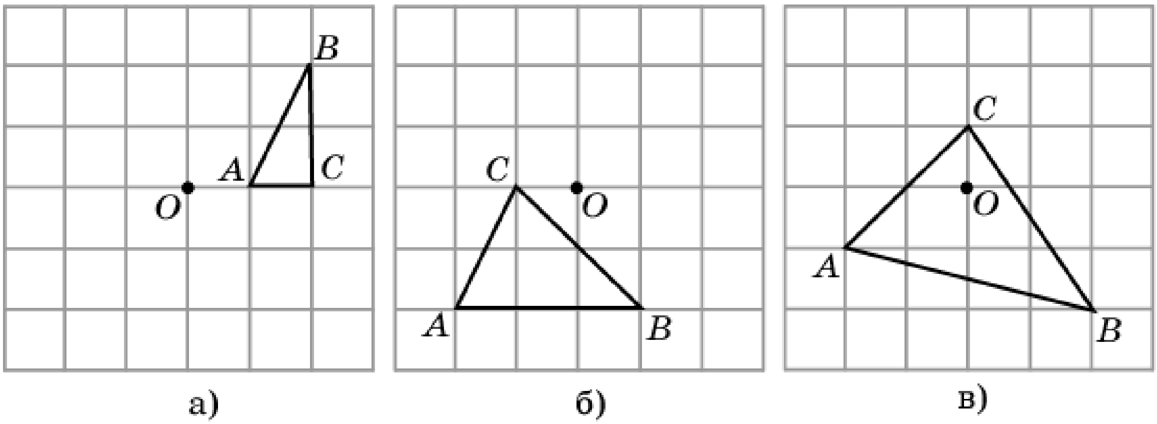


Рис. 7.5

3. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, полученный поворотом данного четырёхугольника *ABCD* вокруг точки *O* на угол 90° против часовой стрелки (рис. 7.6).

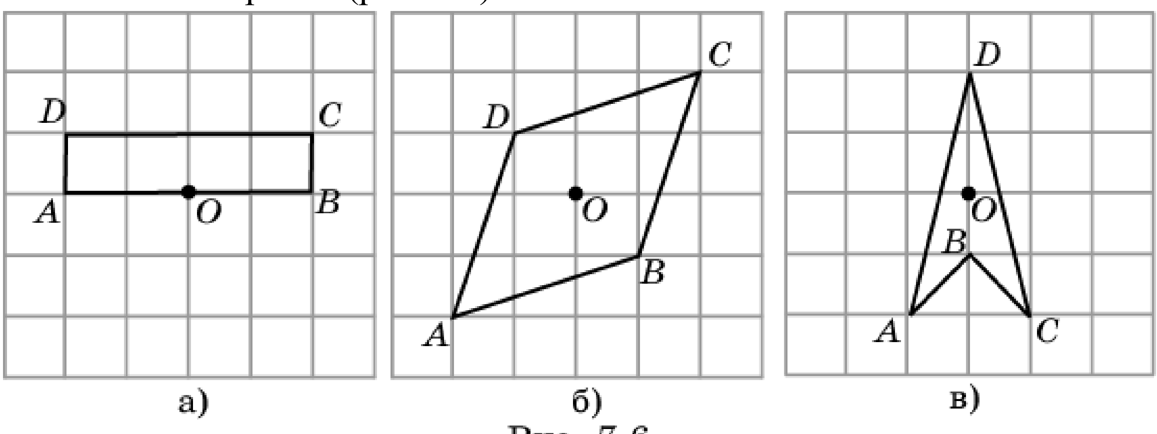
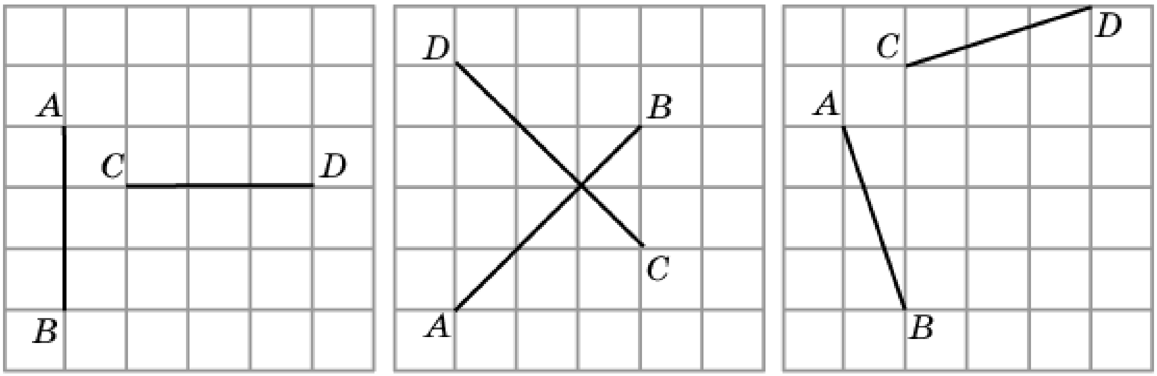


Рис. 7.6

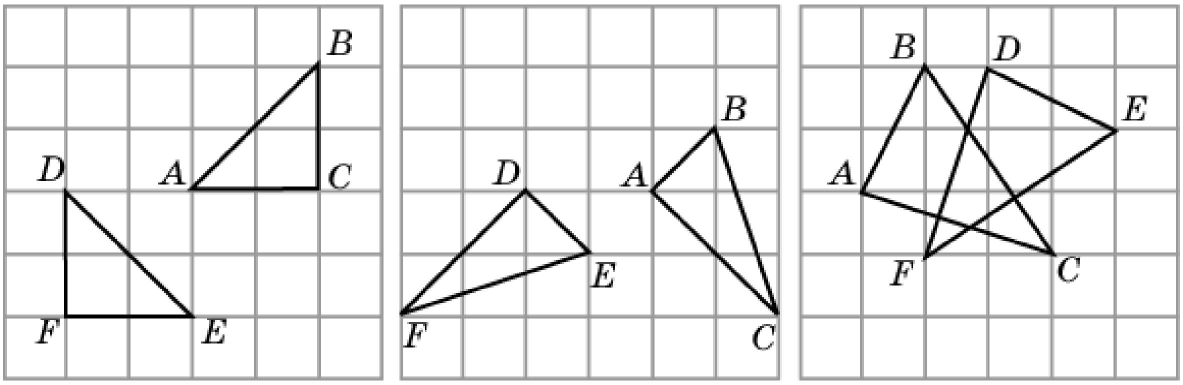
4. Отрезок *CD* получен поворотом отрезка *AB* на угол 90° против часовой стрелки (рис. 7.7). Укажите центр поворота.



а) б) в)

Рис. 7.7

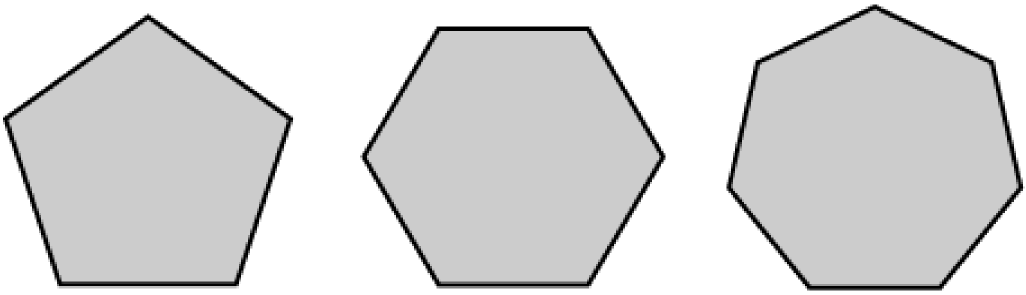
5. Треугольник *DEF* получен поворотом треугольника *ABC* на угол 90° по часовой стрелке (рис. 7.8). Укажите центр поворота.



а) б) в)

Рис. 7.8

6. Центр симметрии какого порядка имеет правильный: а) пятиугольник; б) шестиугольник; в) семиугольник (рис. 7.9)?



а) б) в)

Рис. 7.9

7. Центром симметрии какого порядка является точка *O* для: а) шестиугольника; б) восьмиугольника, изображённого на рисунке 7.10?

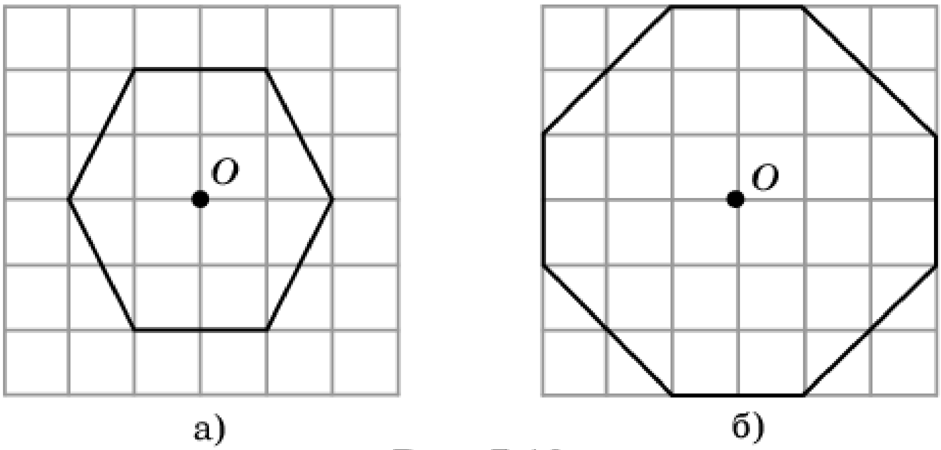


Рис. 7.10

8. Центром симметрии какого порядка является точка O для многоугольников, изображённых на рисунке 7.11?

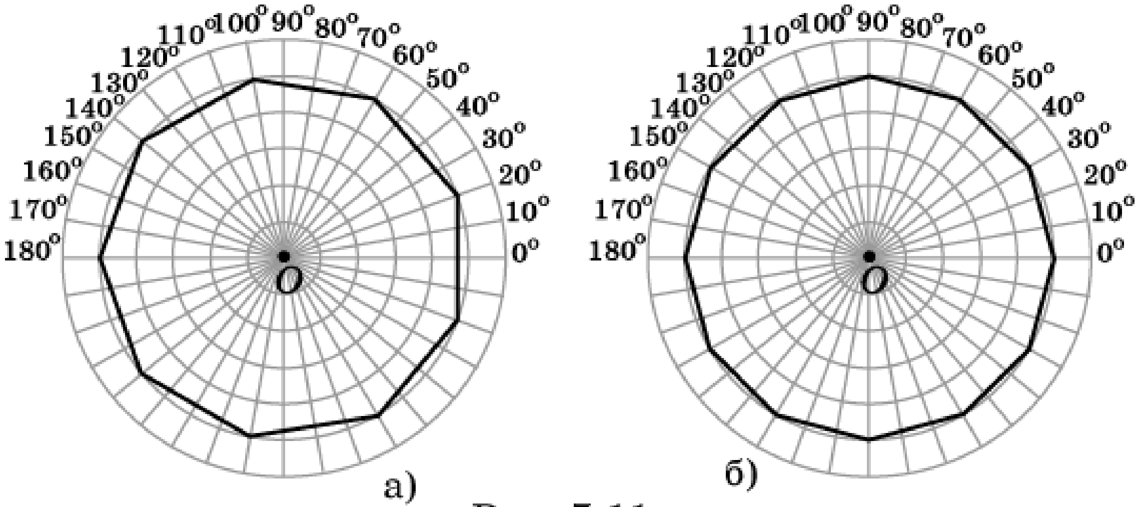


Рис. 7.11

9. Центр симметрии какого порядка имеют снежинки (рис. 7.12)?

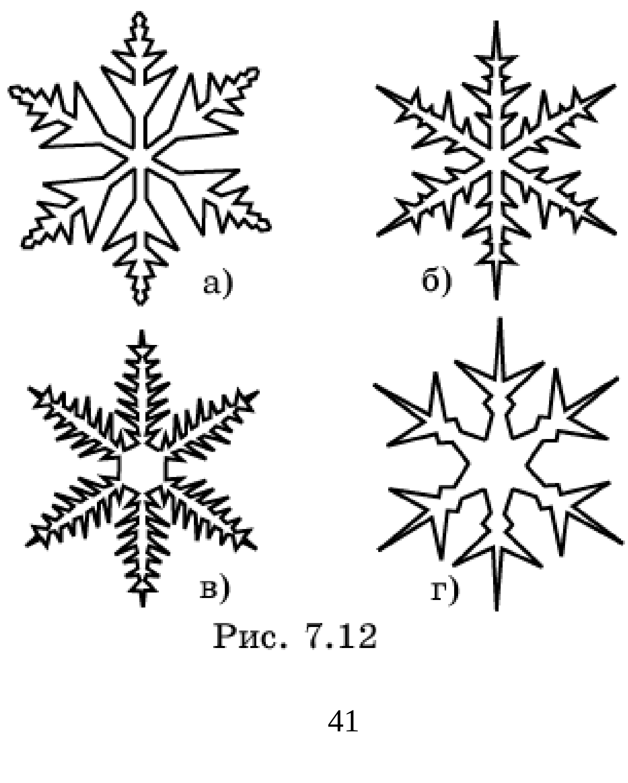


Рис. 7.12

§ 8*. Паркеты

Паркетом на плоскости называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

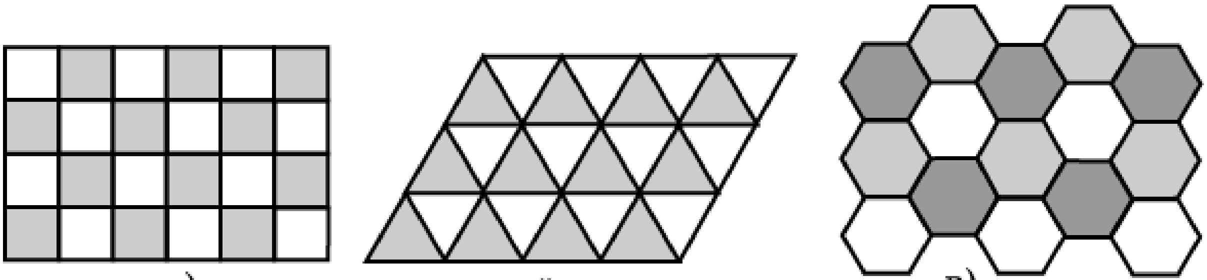
Паркет называется ***правильным***, если он состоит из правильных многоугольников, и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

Примеры правильных паркетов дают заполнения плоскости (рис. 8.1):

а) квадратами;

б) правильными треугольниками;

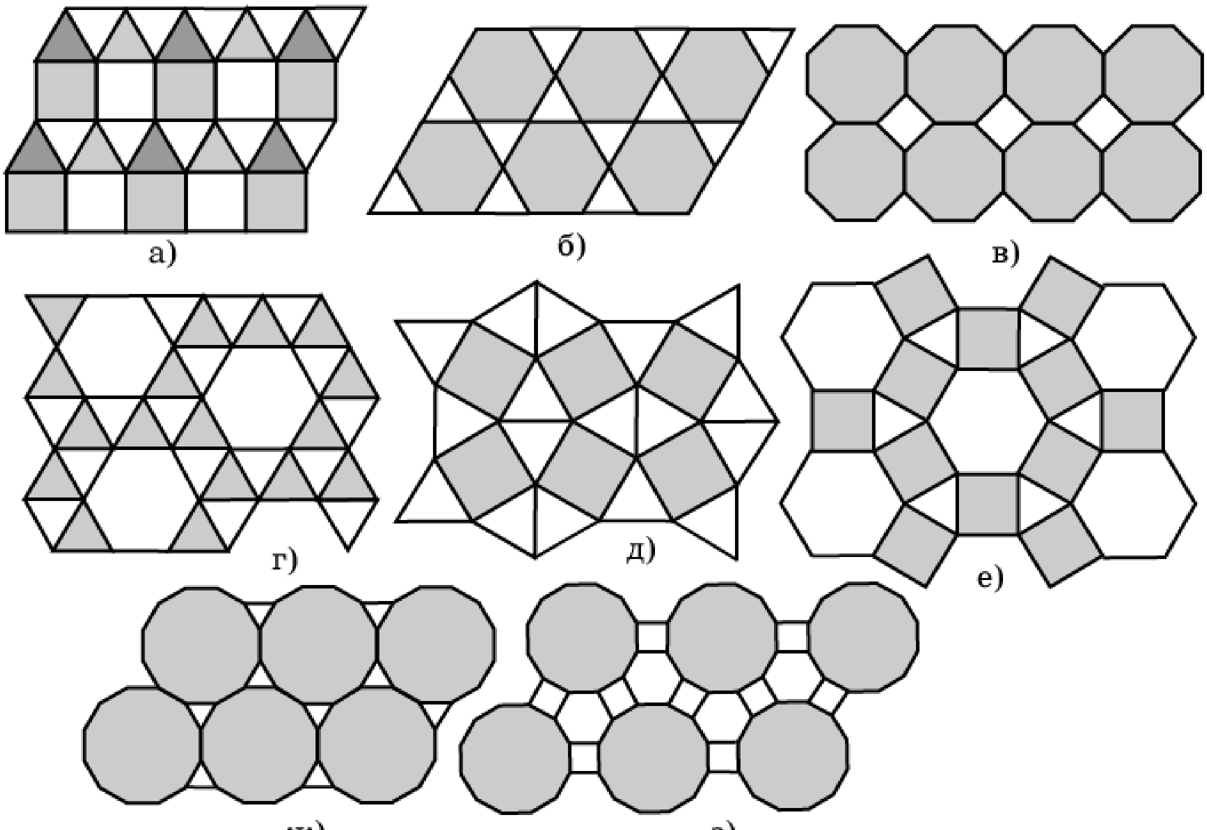
в) правильными шестиугольниками.



а) б) в)

Рис. 8.1

На рисунках 8.2 представлены фрагменты правильных паркетов, составленных из правильных многоугольников с разным числом сторон.



а) б) в) г) д) е) ж) з)

Рис. 8.2

Вопросы

1. Что называется паркетом?
2. Какой паркет называется правильным?

Задачи

1. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов, равных данному на рисунке 8.3, аналогичный паркету на рисунке 8.1, а. Раскрасьте квадраты так, чтобы соседние квадраты были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

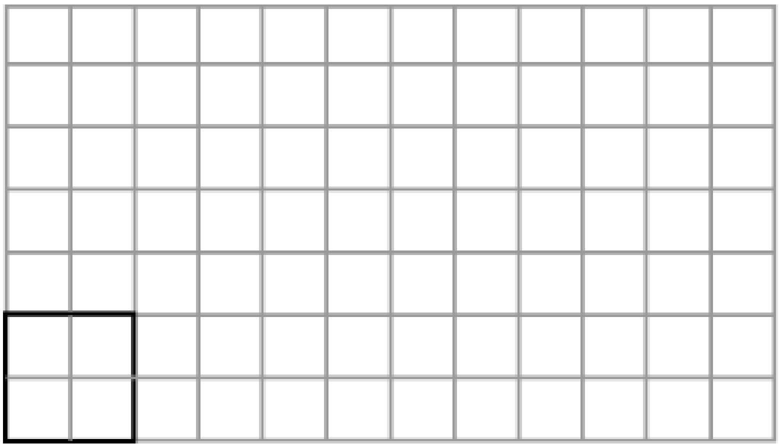


Рис. 8.3

2. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке 8.4, аналогичный паркету на рисунке 8.1, б. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

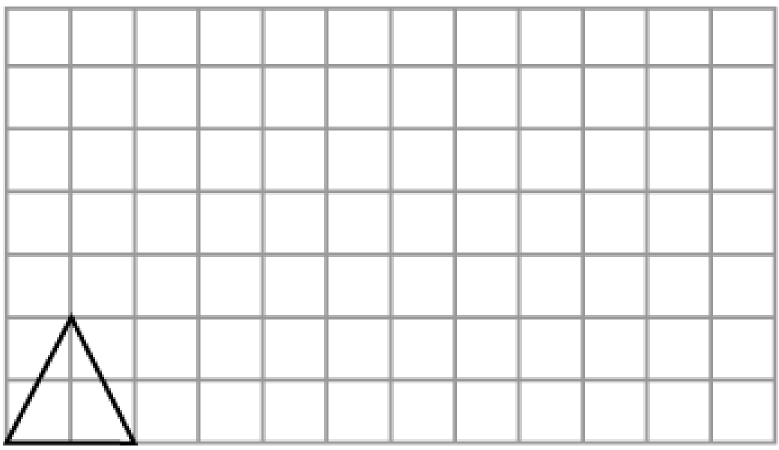


Рис. 8.4

3. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке 8.5, аналогичный паркету на рисунке 8.1, в. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

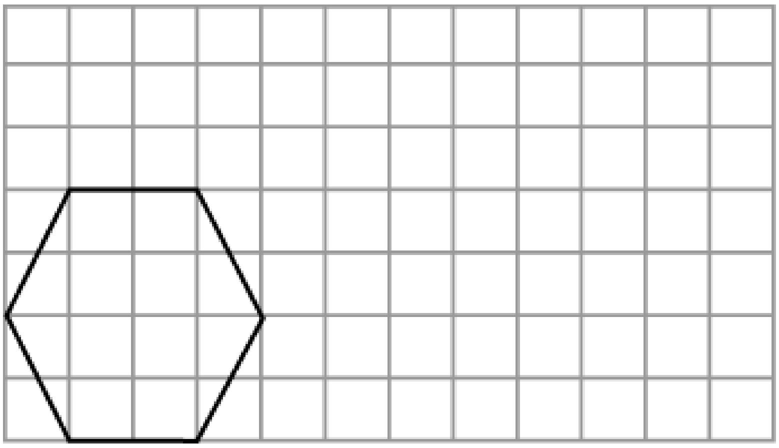


Рис. 8.5

4. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов и треугольников, равных данным (рис. 8.6), аналогично паркету на рисунке 8.2, а. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

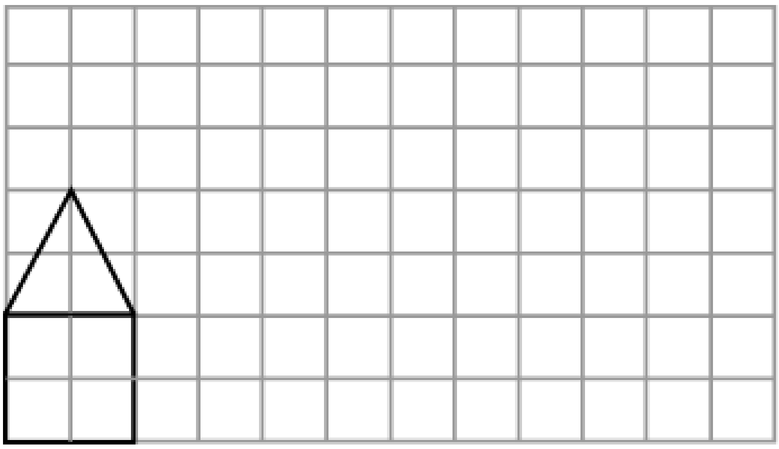


Рис. 8.6

5. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников и треугольников, равных данным (рис. 8.7), аналогично паркету на рисунке 8.2, б. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

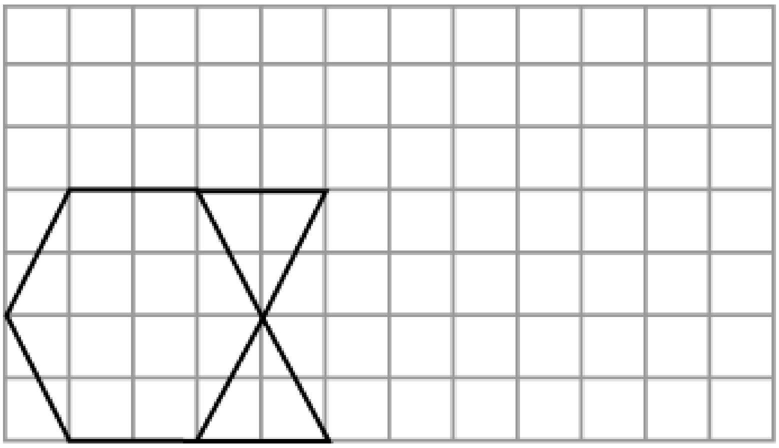


Рис. 8.7

6. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из восьмиугольников и квадратов, равных данным (рис. 8.8), аналогично паркету на рисунке 8.2, в. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

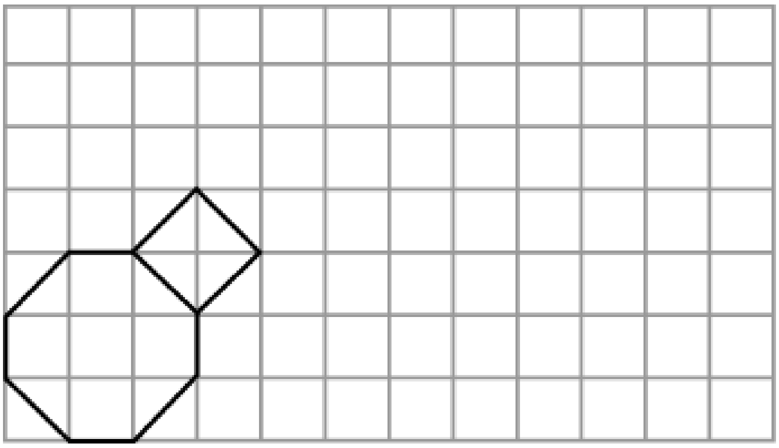


Рис. 8.8

7. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников и треугольников, равных данным (рис. 8.9), аналогично паркету на рисунке 8.2, г. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

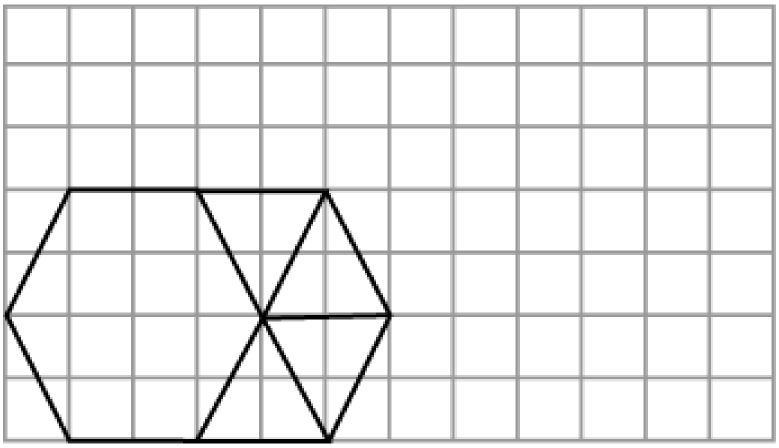


Рис. 8.9

8. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов и треугольников, равных данным (рис. 8.10), аналогично паркету на рисунке 8.2, д. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

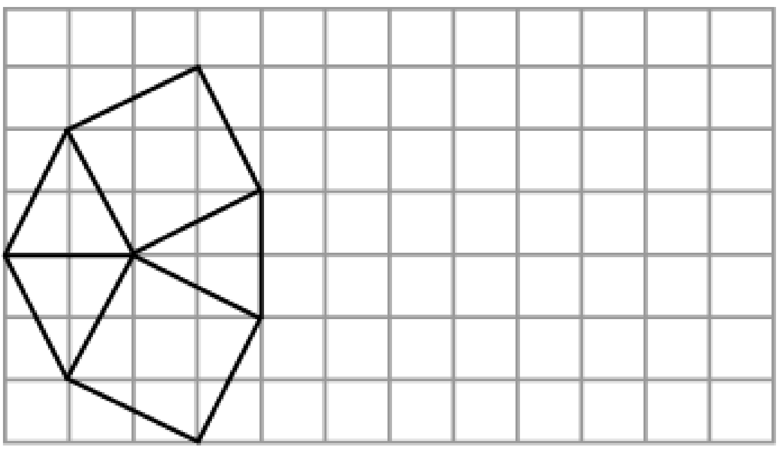


Рис. 8.10

9. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, квадратов и треугольников, равных данным (рис. 8.11), аналогично паркету на рисунке 8.2, е. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

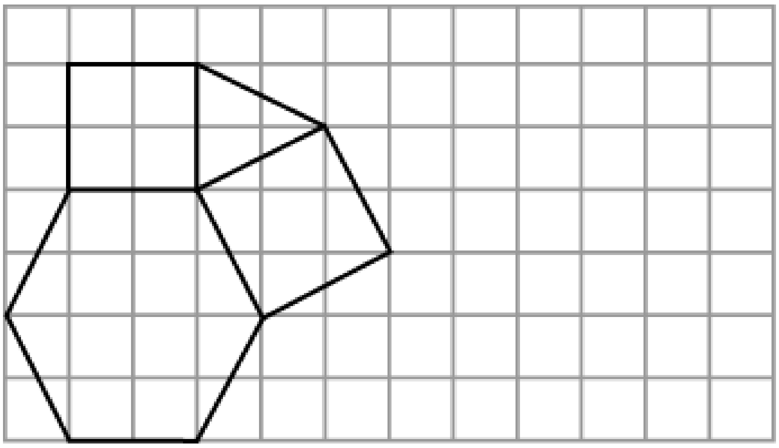


Рис. 8.11

10. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из двенадцатиугольников и треугольников, равных данным (рис. 8.12), аналогично паркету на рисунке 8.2, ж. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

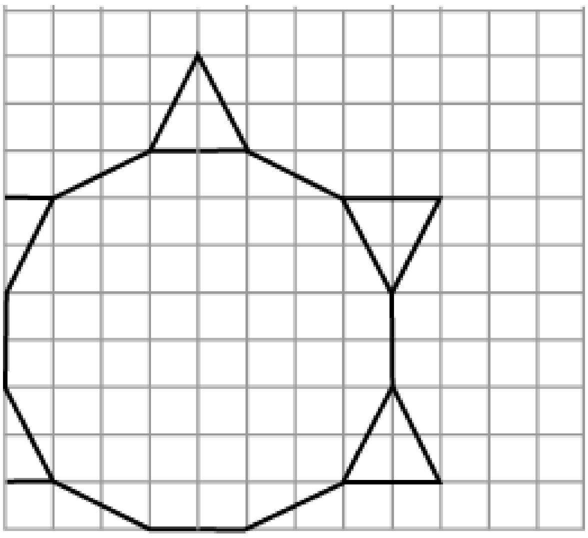


Рис. 8.12

11. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из двенадцатиугольников шестиугольников и квадратов, равных данным (рис. 8.13), аналогично паркету на рисунке 8.2, з. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

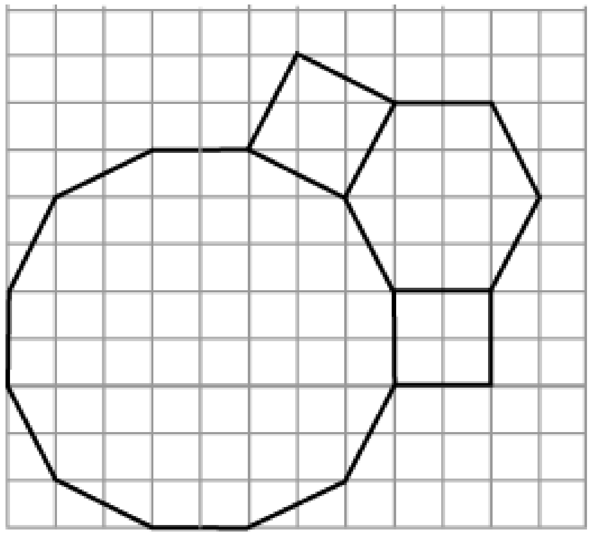


Рис. 8.13

12. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке 8.14. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

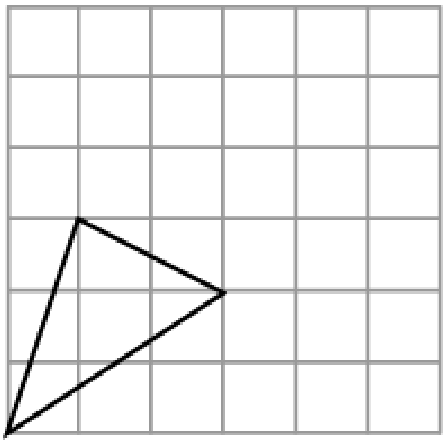


Рис. 8.14

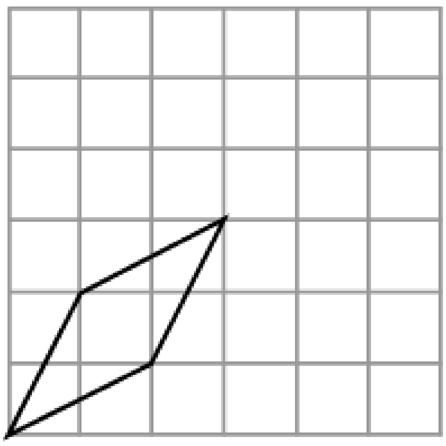


Рис. 8.15

13. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке 8.15. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

14. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке 8.16. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

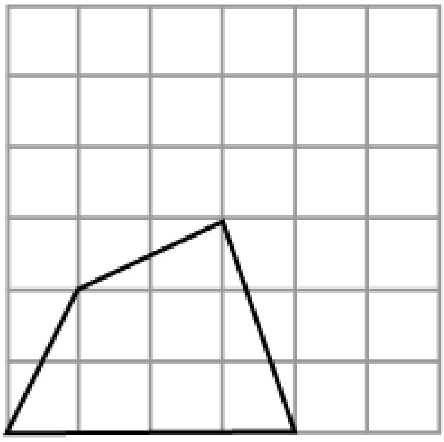


Рис. 8.16

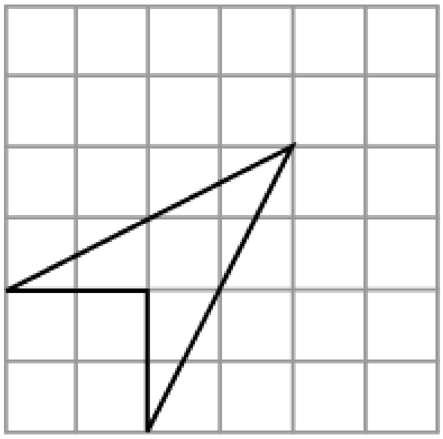


Рис. 8.17

15. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке 8.17. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

16. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке 8.18. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

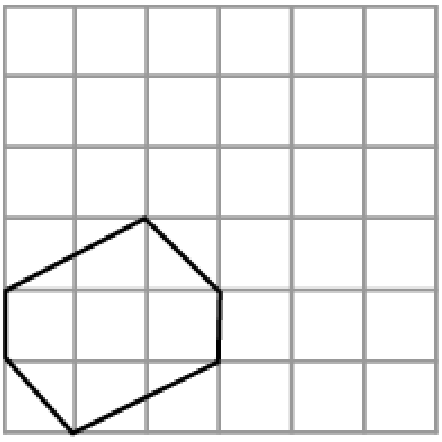


Рис. 8.18

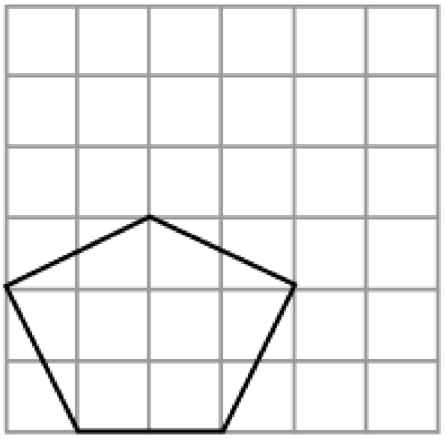


Рис. 8.19

17. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из пятиугольников, равных данному на рисунке 8.19. Раскрасьте пятиугольники так, чтобы соседние пятиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

18. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному на рисунке 8.20. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние многоугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

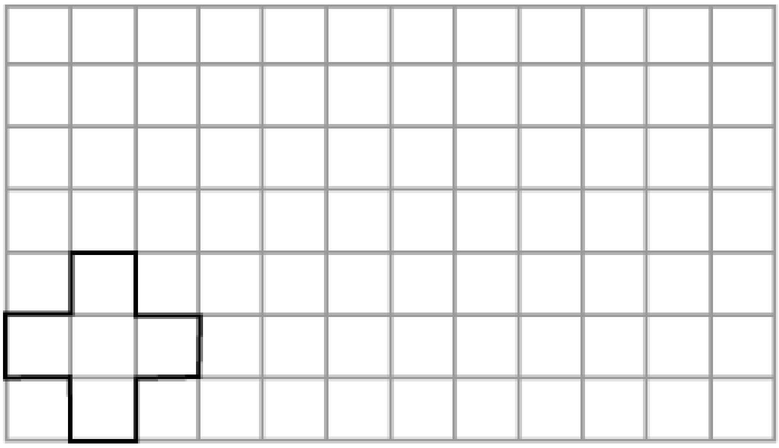


Рис. 8.20

19. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному на рисунке 8.21. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние многоугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

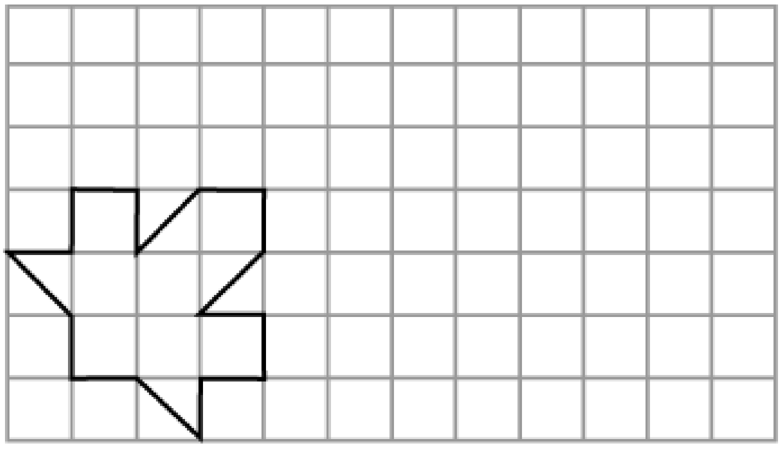


Рис. 8.21

§ 9*. Кривые

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки.

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на окружности, катящейся по прямой, называется ***циклоидой*** (рис. 9.1), что в переводе с греческого языка означает кругообразная.

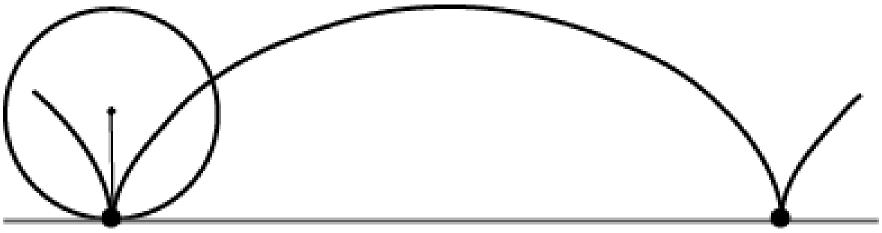


Рис. 9.1

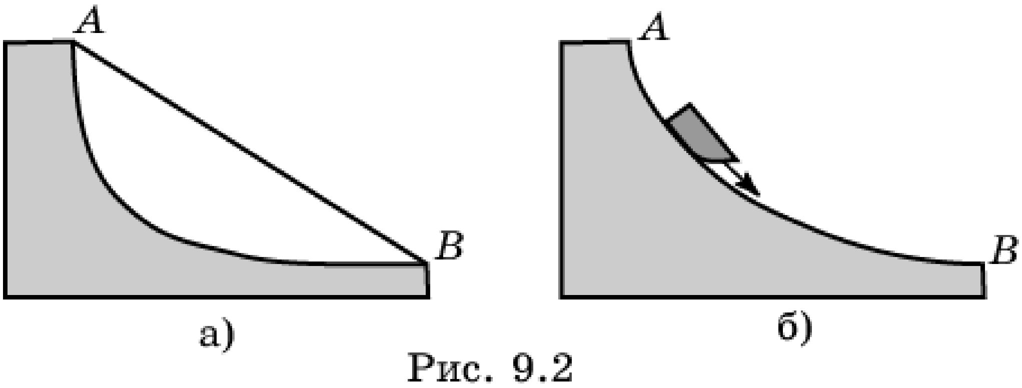
Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564 – 1642). Он же придумал и её название.

Циклоиду, например, описывает точка, закреплённая на ободе колеса велосипеда, катящегося по ровной дороге.

Циклоида обладает целым рядом замечательных свойств. Упомянем о некоторых из них.

Свойство 1. (Ледяная гора.) В 1696 году И. Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или, иначе говоря, задачу о том, какова должна быть форма ледяной горки, чтобы, скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время.

Ясно, что кратчайшим путем из точки A в точку B является отрезок AB (рис. 9.2, а). Однако при таком прямолинейном движении скорость набирается медленно и затраченное на спуск время оказывается большим.



а) б)

Рис. 9.2

Скорость набирается тем быстрее, чем круче спуск. Однако при крутом спуске удлиняется путь по кривой и тем самым увеличивается время его прохождения (рис. 9.2 б).

Среди математиков, решавших эту задачу, были: Г. Лейбниц, И. Ньютон, Г. Лопиталь и Я. Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является перевёрнутая циклоида.

Свойство 2. (Часы с маятником.) Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды (рис. 9.3, а). Чем больше амплитуда, тем больше период. Голландский учёный Христиан Гюйгенс (1629 – 1695) задался вопросом, по какой кривой должен двигаться шарик на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды. Заметим, что в обычном маятнике кривой, по которой движется шарик, является окружность.

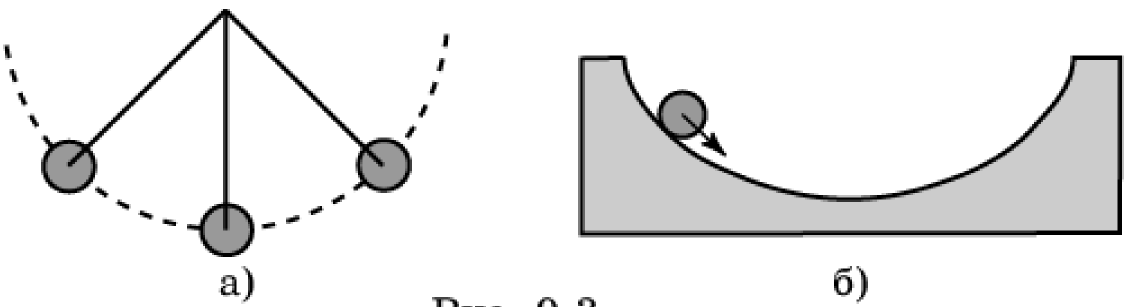


Рис. 9.3

Искомой кривой оказалась перевёрнутая циклоида (рис. 9.3, б). Если, например, в форме перевёрнутой циклоиды изготовить жёлоб и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды.

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой, называется ***удлинённой циклоидой*** (рис. 9.4).

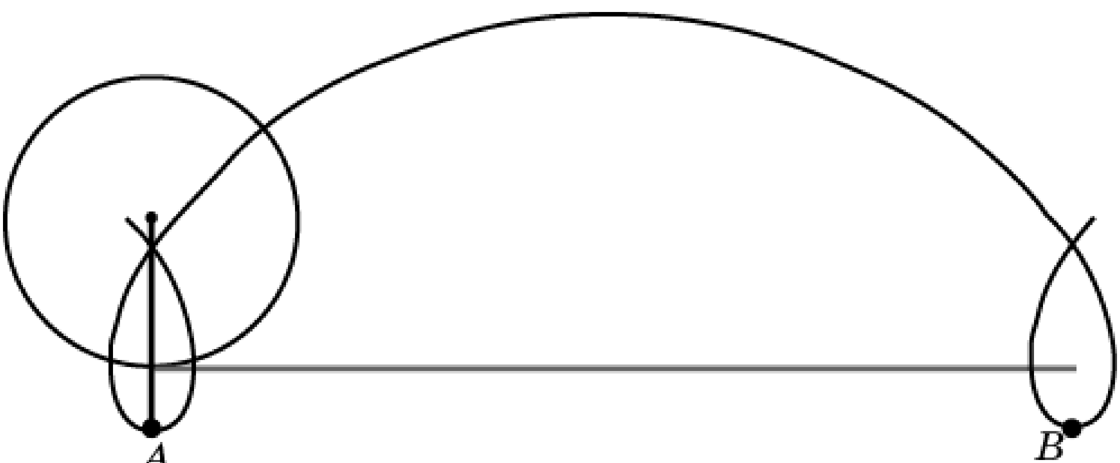


Рис. 9.4

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на радиусе внутри окружности, катящейся по прямой, называется ***укороченной циклоидой*** (рис. 9.5).

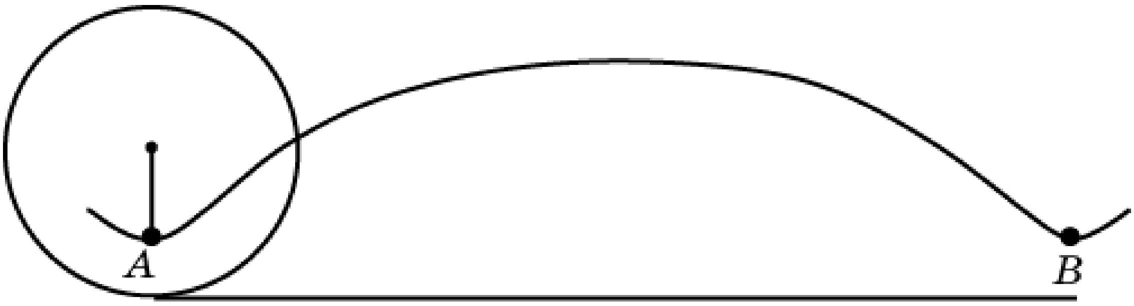


Рис. 9.5

Задачи

1. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок *AB*, равный длине окружности, как показано на рисунке 9.6. Разделите отрезок *AB* на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплена на окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) *B*; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите циклоиду.

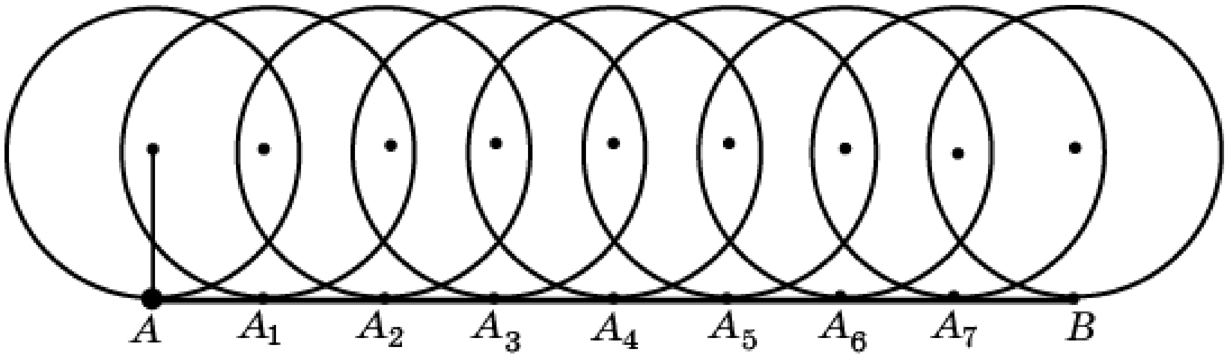


Рис. 9.6

2. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок *AB*, равный длине окружности, как показано на рисунке 9.7. Разделите отрезок *AB* на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплена на продолжении радиуса окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) *B*; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите удлинённую циклоиду.

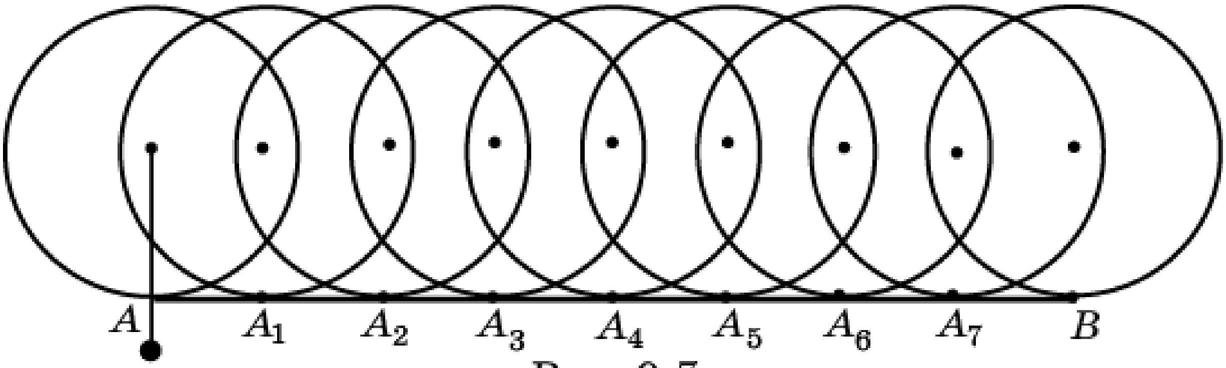


Рис. 9.7

3. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке 9.8. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплена на окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите укороченную циклоиду.

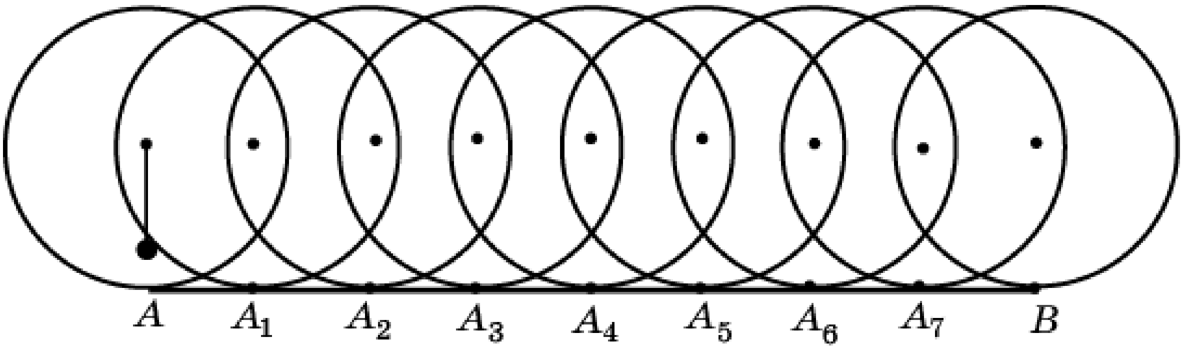


Рис. 9.8

4. Пусть правильный треугольник катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите треугольники, как показано на рисунке 9.9. Отметьте положения закрёпленной точки, когда сторона треугольника займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по прямой.

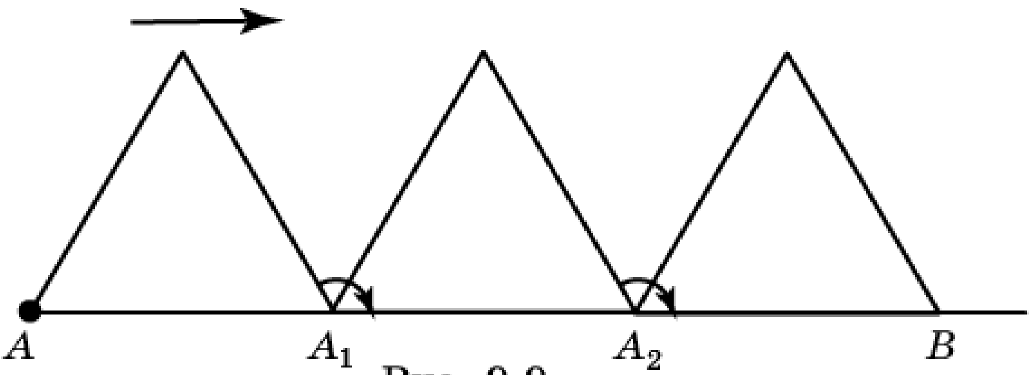


Рис. 9.9

5. Пусть квадрат катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите квадраты, как показано на рисунке 9.10.

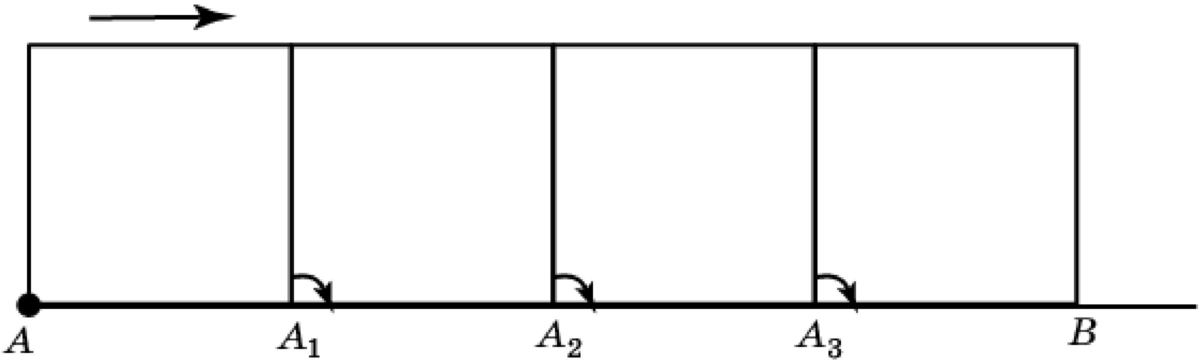


Рис. 9.10

Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2A_3; в) A_3B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по прямой.

6. Пусть правильный шестиугольник катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите шестиугольники, как показано на рисунке 9.11. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона шестиугольника займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2A_3; в) A_3A_4; г) A_4A_5; д) A_5B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины шестиугольника, катящегося по прямой.

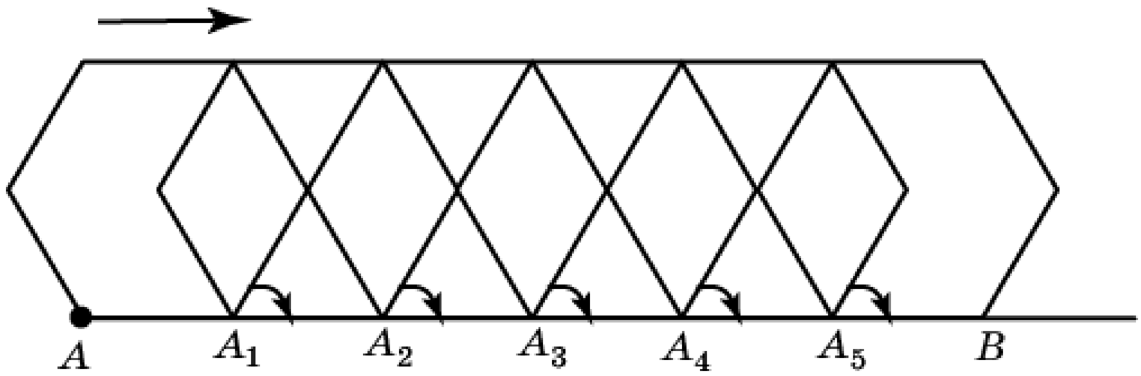


Рис. 9.11

Траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса, называется ***кардиоидой*** (рис. 9.12).

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на продолжении радиуса окружности, катящейся по другой окружности, называется ***удлинённой кардиоидой*** (рис. 9.13).

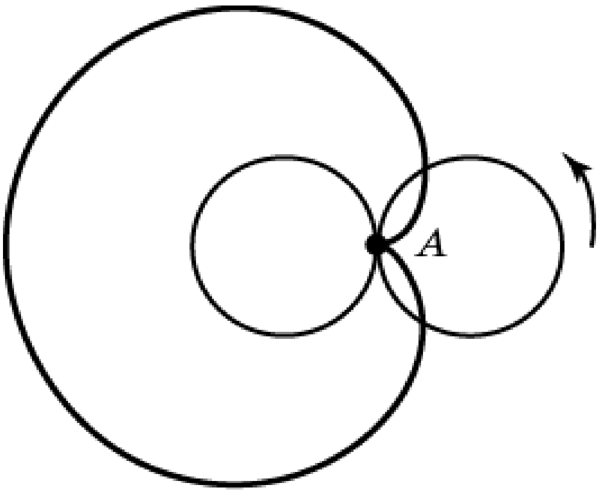


Рис. 9.12

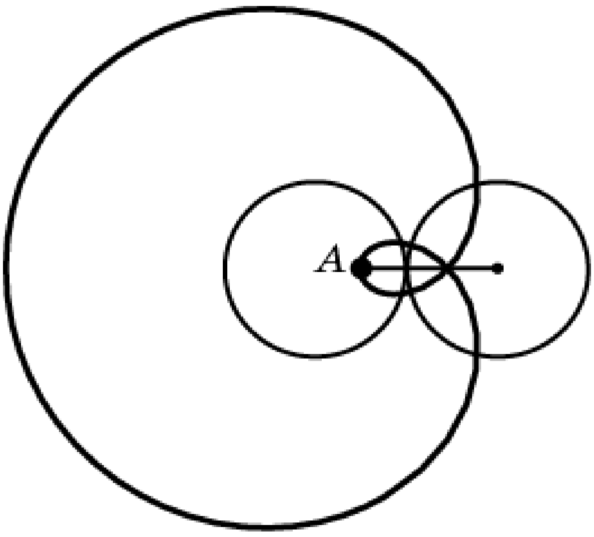


Рис. 9.13

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на радиусе внутри окружности, катящейся по другой окружности, называется ***укороченной кардиоидой*** (рис. 9.14).

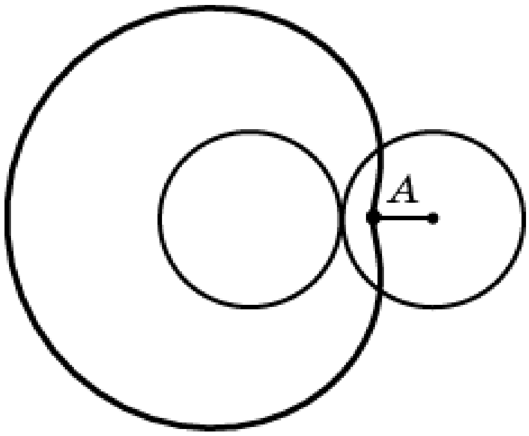


Рис. 9.14

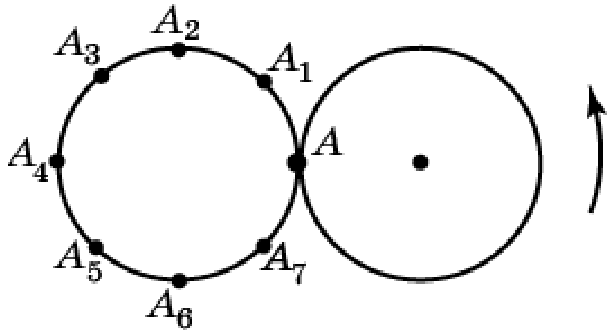


Рис. 9.15

Задачи

7. Изобразите окружности, как показано на рисунке 9.15. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите кардиоиду.

8. Изобразите окружности, как показано на рисунке 9.16. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на продолжении радиуса окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите удлинённую кардиоиду.

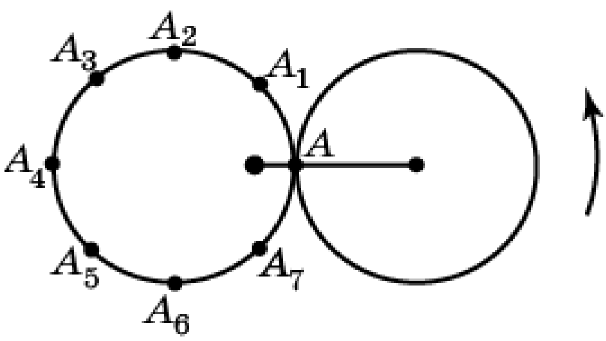


Рис. 9.16

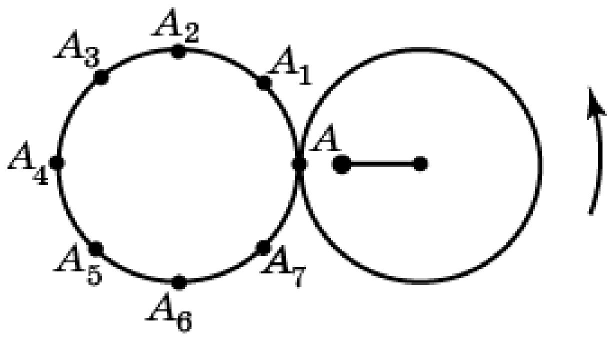


Рис. 9.17

9. Изобразите окружности, как показано на рисунке 9.17. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на радиусе окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой

точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите укороченную кардиоиду.

10. Пусть правильный треугольник катится по другому правильному треугольнику *ABC*. Точка закреплена в вершине *A* (рис. 9.18). Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона треугольника займёт положение: а) *BC*; б) *CA*. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по другому правильному треугольнику.

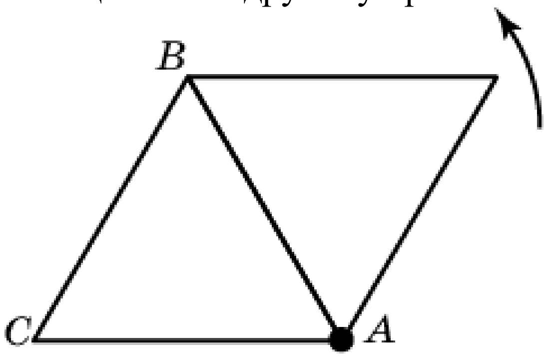


Рис. 9.18

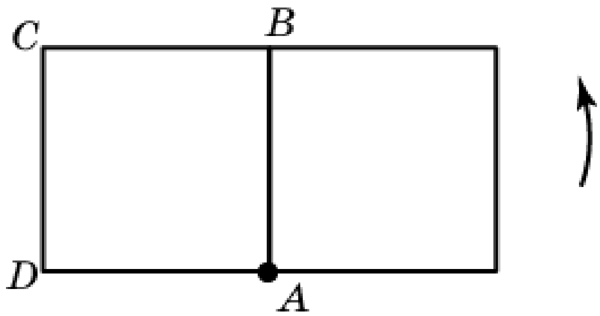


Рис. 9.19

11. Пусть квадрат катится по другому квадрату *ABCD*. Точка закреплена в вершине *A* (рис. 9.19). Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение: а) *BC*; б) *CD*; в) *DA*. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по другому квадрату.

12. Пусть правильный шестиугольник катится по другому правильному шестиугольнику *ABCDEF*. Точка закреплена в вершине *A* (рис. 9.20). Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение: а) *BC*; б) *CD*; в) *DE*; г) *EF*; д) *FA*. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по другому квадрату.

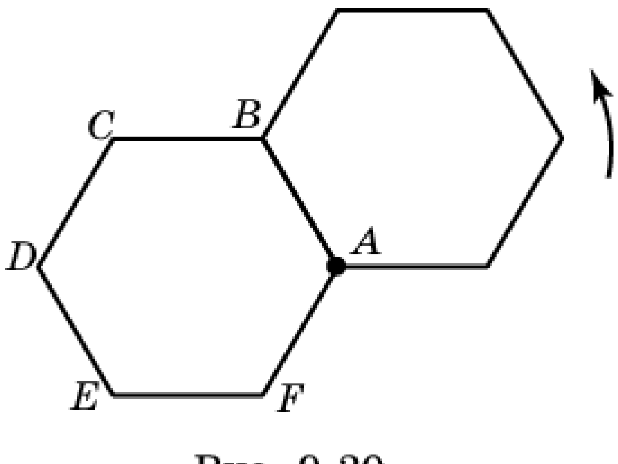


Рис. 9.20

13. Изобразите окружности, касающиеся внешним образом другой окружности, в 3 раза большего радиуса, как показано на рисунке 9.21. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 3 раза меньше длины большой окружности.) Соедините полученные точки плавной кривой.

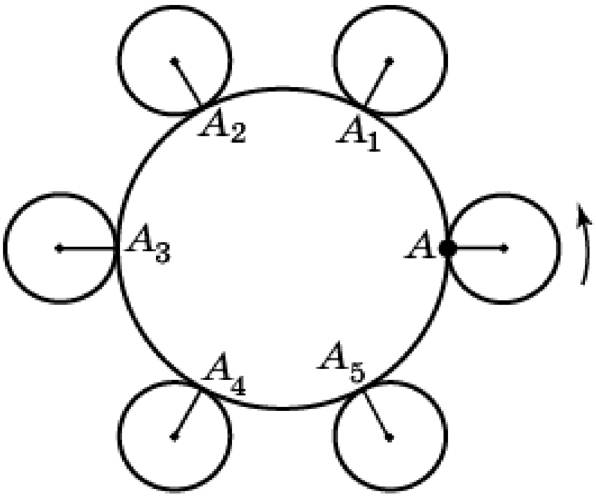


Рис. 9.21

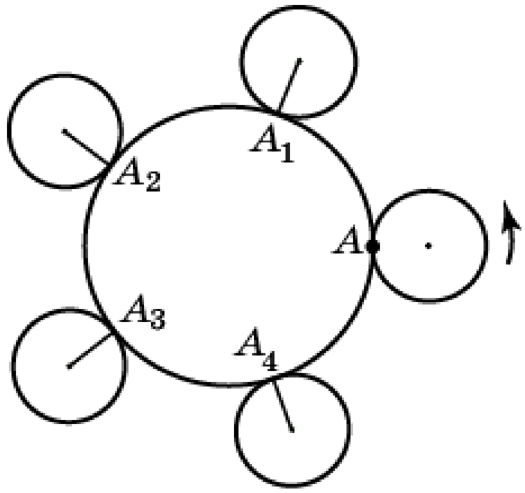


Рис. 9.22

14. Изобразите окружности, касающиеся внешним образом другой окружности, в 2,5 раза большего радиуса, как показано на рисунке 9.22. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 2,5 раза меньше длины большой окружности.) Соедините полученные точки плавной кривой.

15. Изобразите окружности, касающиеся внутренним образом другой окружности, в 4 раза большего радиуса, как показано на рисунке 9.23. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5; е) A_6; ж) A_7. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 3 раза меньше длины большой окружности.) Соедините полученные точки плавной кривой. Полученная кривая называется ***астроидой***.

16. Изобразите окружности, касающиеся внутренним образом другой окружности, в 2,5 раза большего радиуса, как показано на рисунке 9.24. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5; е) A_6; ж) A_7. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 3 раза меньше длины большой окружности.) Соедините полученные точки плавной кривой.

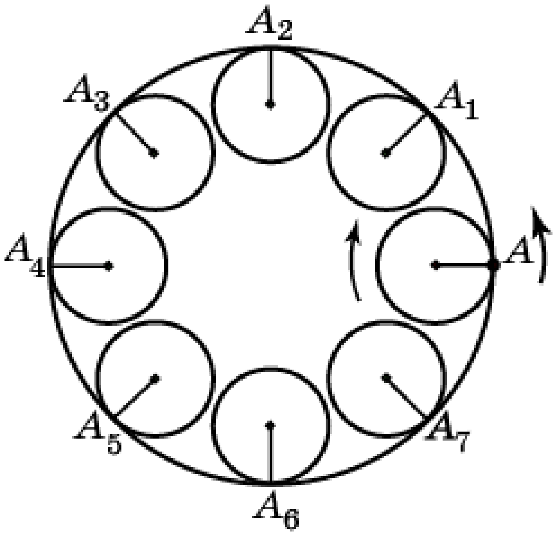


Рис. 9.23

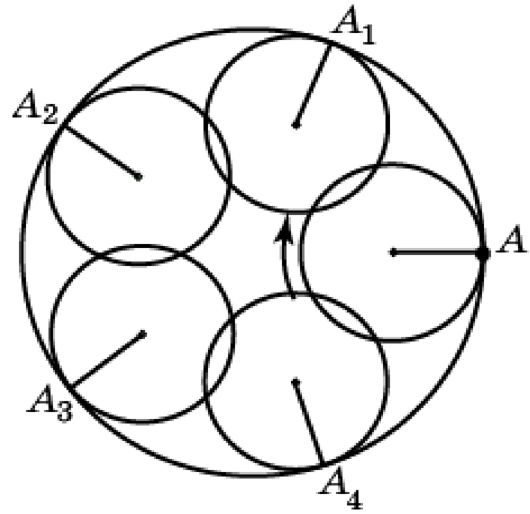


Рис. 9.24

17. Пусть квадрат *AEFG* катится внутри другого квадрата *ABCD*. Точка закреплена в вершине *A* (рис. 9.25). На клетчатой бумаге изобразите квадраты и траекторию движения точки, закреплённой в вершине квадрата.

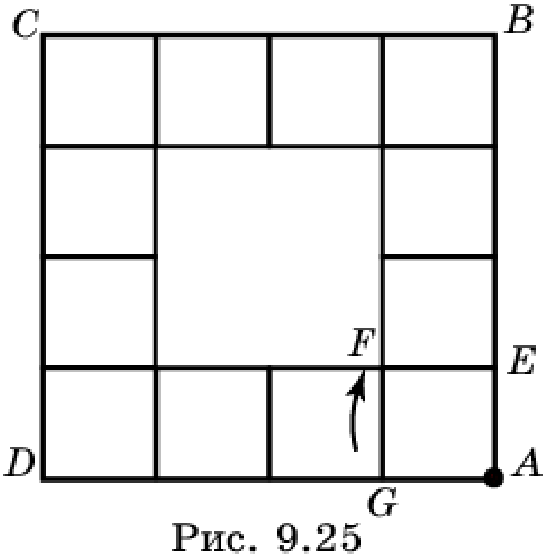
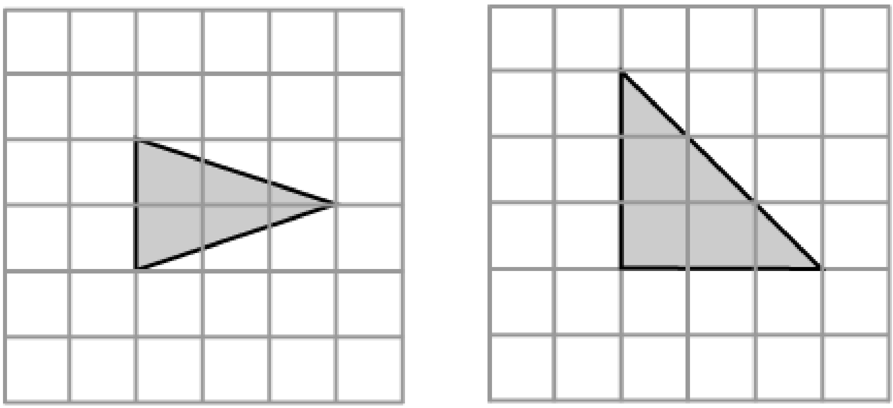


Рис. 9.25

§ 10. Разрезания

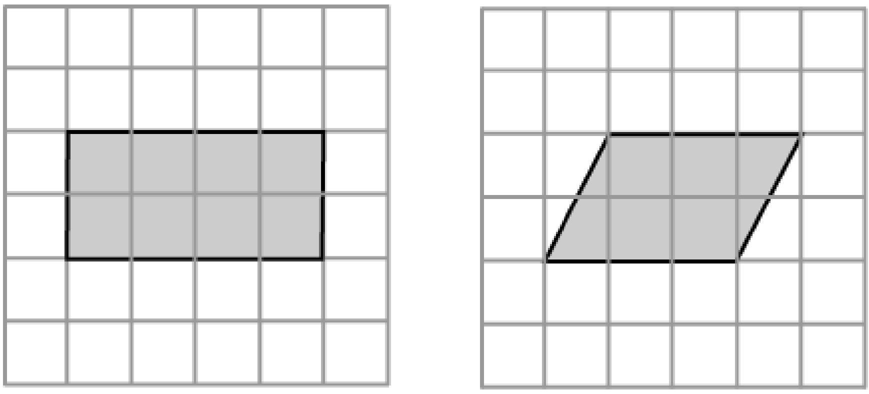
1. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как на рисунке 10.1. Проведите какую-нибудь прямую, делящую этот треугольник на две равные части.



а) б)

Рис. 10.1

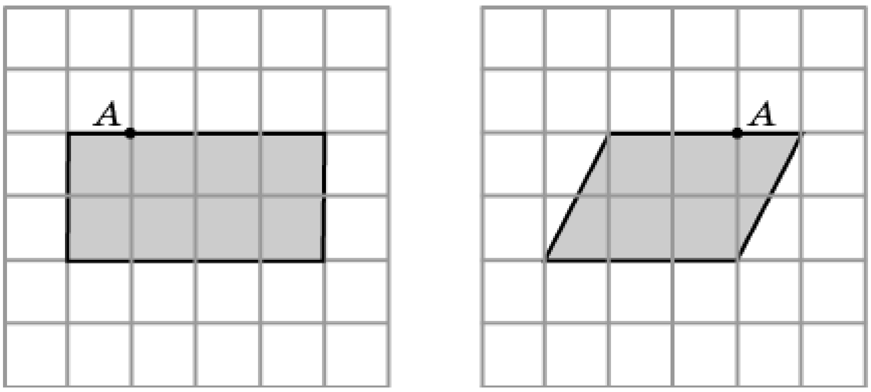
2. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, как на рисунке 10.2. Проведите какую-нибудь прямую, делящую этот четырёхугольник на две равные части.



а) б)

Рис. 10.2

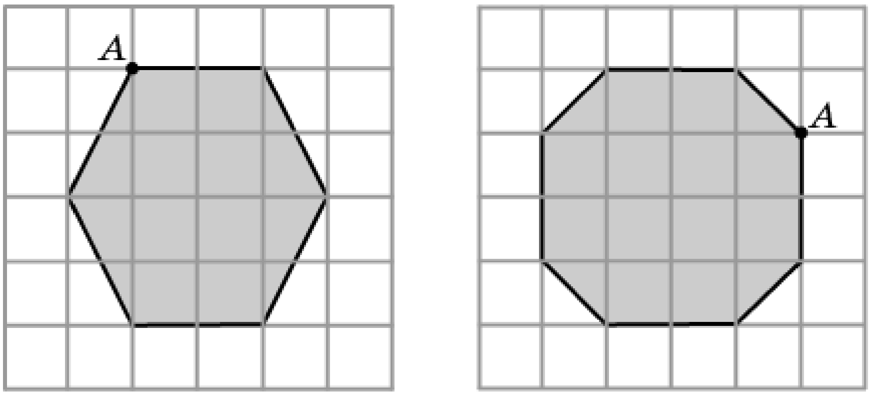
3. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, как на рисунке 10.3. Через точку A проведите прямую, делящую этот четырёхугольник на две равные части.



а) б)

Рис. 10.3

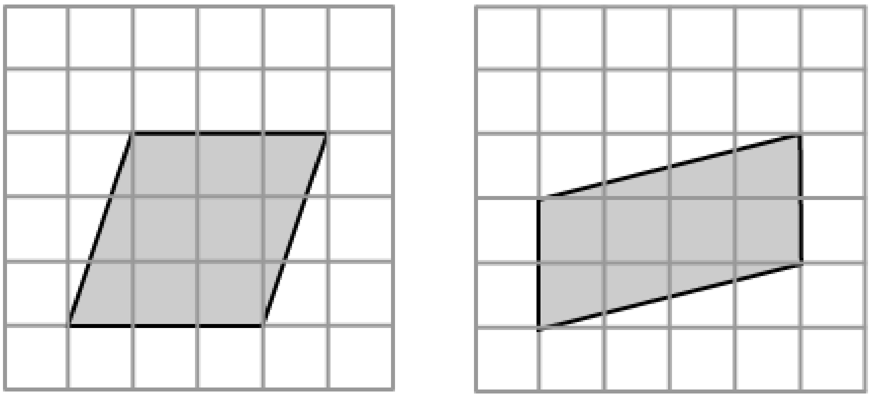
4. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 10.4. Через точку *A* проведите прямую, делящую этот многоугольник на две равные части.



а) б)

Рис. 10.4

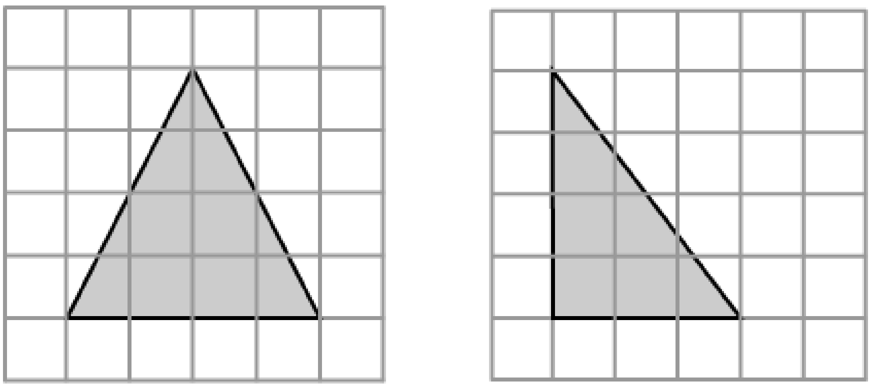
5. На клетчатой бумаге изобразите параллелограмм, как на рисунке 10.5. Проведите прямую, разрезав по которой этот параллелограмм, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



а) б)

Рис. 10.5

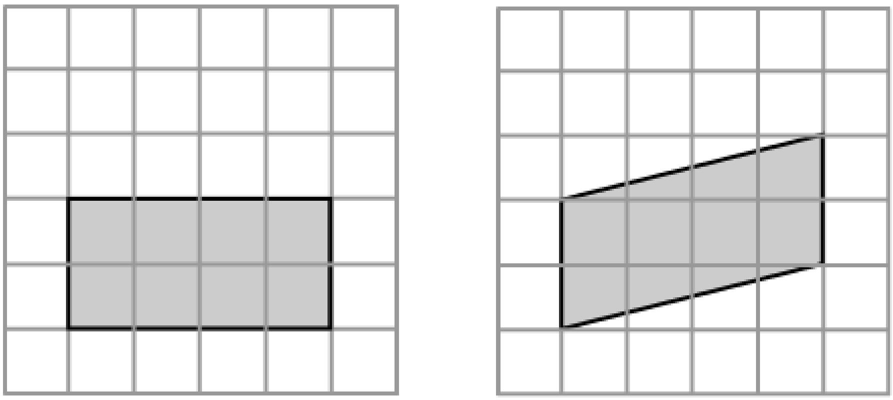
6. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как на рисунке 10.6. Проведите прямую, разрезав по которой этот треугольник, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



а) б)

Рис. 10.6

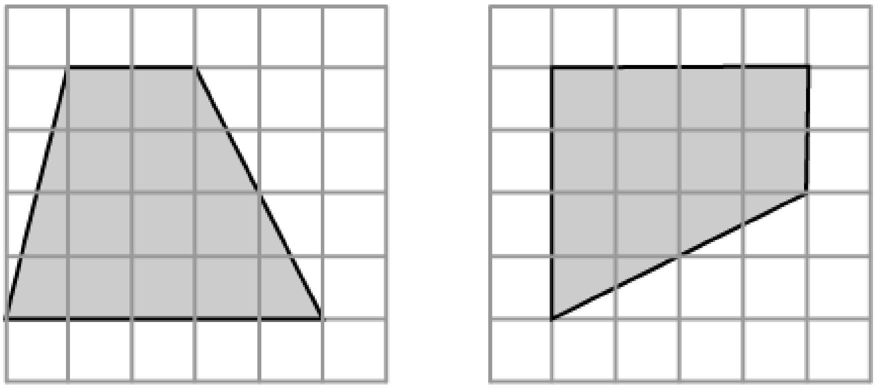
7. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, как на рисунке 10.7. Проведите прямую, разрезав по которой этот четырёхугольник, из полученных частей можно сложить треугольник.



а) б)

Рис. 10.7

8. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, как на рисунке 10.8. Проведите прямую, разрезав по которой этот четырёхугольник, из полученных частей можно сложить треугольник.



а) б)

Рис. 10.8

9. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольник, как на рисунке 10.9. Проведите прямую, разрезав по которой этот многоугольник, из полученных частей можно сложить параллелограмм.

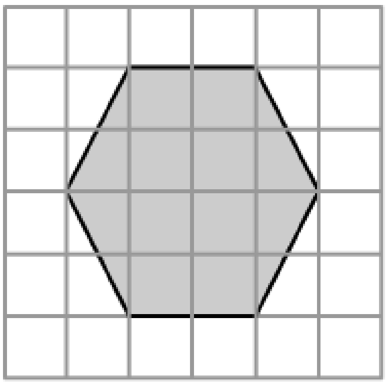
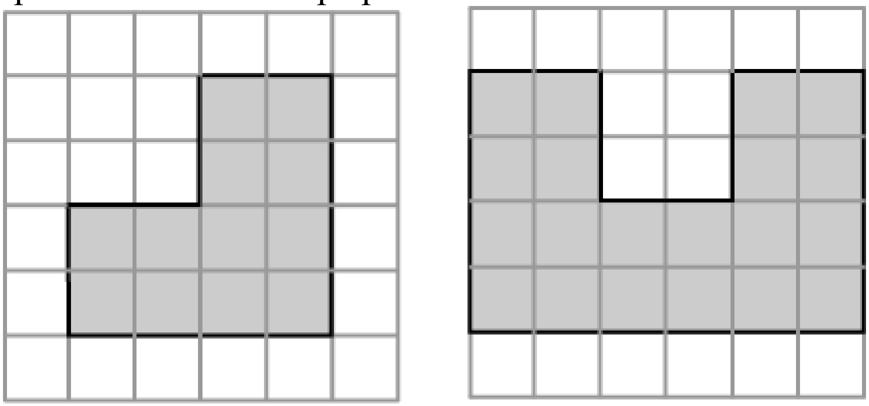


Рис. 10.9

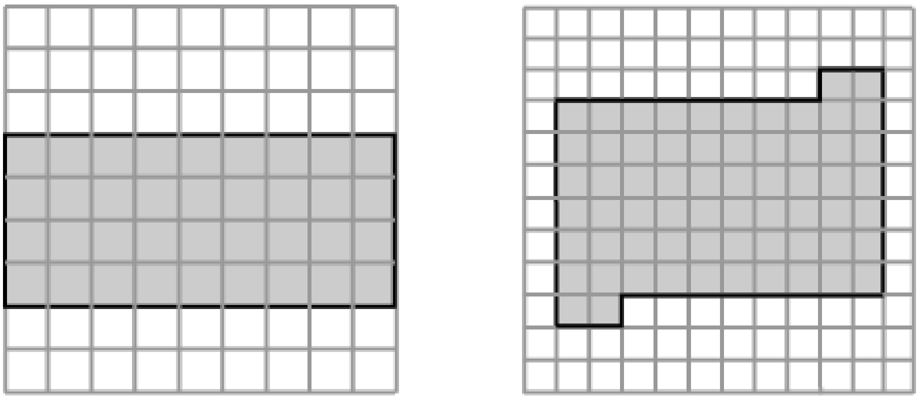
10. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 10.10. Разрежьте его на четыре равные части.



а) б)

Рис. 10.10

11. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 10.11. Разрежьте его на две части, из которых можно сложить квадрат.



а) б)

Рис. 11.11

12. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 10.12. Разрежьте его на несколько частей, из которых можно сложить

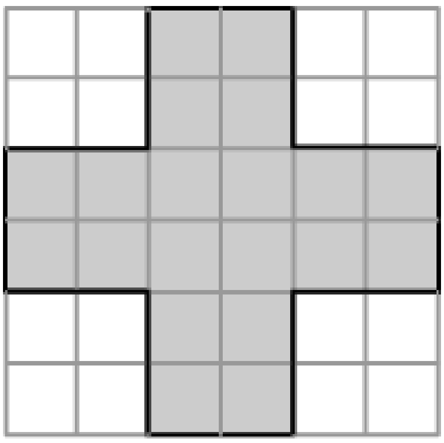
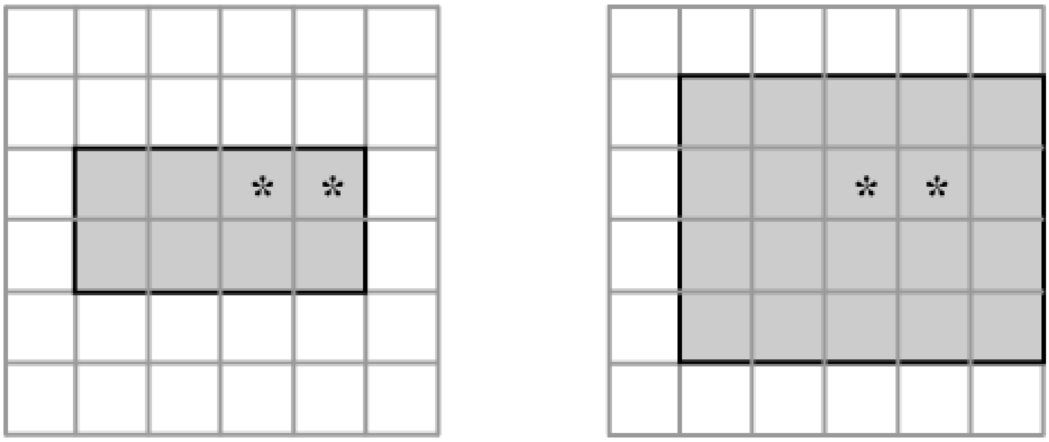


Рис. 10.12

квадрат.

13. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 10.13. Разрежьте его на две равные части так, чтобы в каждой из них была звёздочка.



а) б)

Рис. 10.13

§ 11. Площадь

Площадь фигуры характеризует величину части плоскости, которую занимает эта фигура.

Измерение площади фигуры, как и измерение длины отрезка, основано на сравнении этой фигуры с фигурой, площадь которой принимается за единицу.

За единицу измерения площади принимается квадрат со стороной, равной единице измерения длины. Он называется ***единичным квадратом***. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой квадрат называется квадратным миллиметром, квадратным сантиметром или квадратным метром соответственно.

Поскольку площадь фигуры зависит от единицы измерения, то в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после величины площади S указывают единицу измерения. Например, S мм^2, S см^2, S м^2.

Для площадей плоских фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам длин отрезков.

Свойство 1. Равные фигуры имеют равные площади.

Свойство 2. Если фигура составлена из двух или нескольких фигур, то её площадь равна сумме площадей этих фигур.

Две фигуры называются ***равновеликими***, если они имеют одинаковую площадь.

Рассмотрим примеры нахождения площадей фигур.

Пример 1. На рисунке 11.1 показан прямоугольник со сторонами 4 и 3. Ясно, что в нём укладывается 12 единичных квадратов, следовательно, его площадь равна 12.

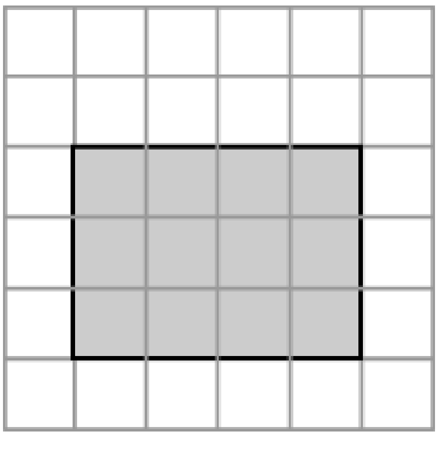


Рис. 11.1

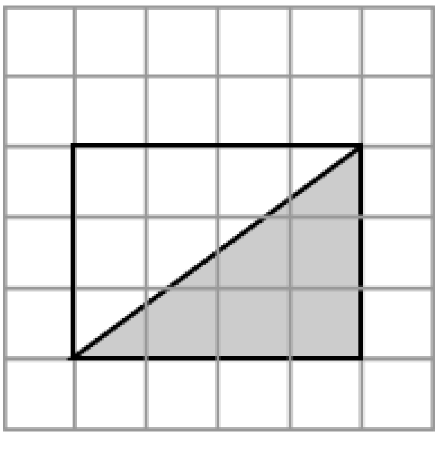


Рис. 11.2

В общем случае, площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон, т. е. для площади S прямоугольника, соседние стороны которого равны a и b, имеет место формула

$$S = a \cdot b.$$

В частности, площадь квадрата со стороной a равна a^2.

Пример 2. На рисунке 11.2 показан прямоугольный треугольник, катеты которого равны 4 и 3. Два таких треугольника составляют прямоугольник со сторонами 4 и 3. Следовательно, площадь прямоугольного треугольника равна половине площади прямоугольника, т. е. равна 6.

В общем случае площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, т. е. для площади S прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b, имеет место формула

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

Пример 3. На рисунке 11.3 показан параллелограмм, одна сторона которого равна 4, а высота, опущенная на неё, равна 3. Этот параллелограмм будет составлен из трапеции $FBCD$ и треугольника AFD. Прямоугольник $FECD$ составлен из той же трапеции и треугольника BEC. Причем площадь треугольника AFD равна площади треугольника BEC. Следовательно, площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $FECD$, т. е. равна 12.

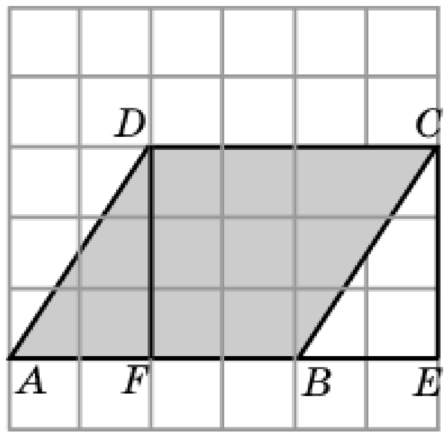


Рис. 11.3

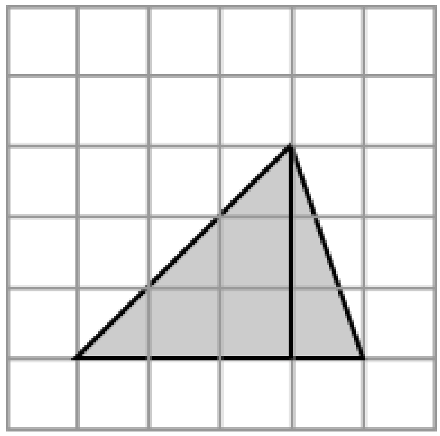


Рис. 11.4

В общем случае, для площади S параллелограмма со стороной a и высотой h, проведённой к ней, имеет место формула

$$S = a \cdot h.$$

Пример 4. На рисунке 11.4 показан треугольник, одна сторона которого равна 4, а высота, опущенная на нее, равна 3. Этот треугольник составлен из двух прямоугольных треугольников, площади которых равны 4,5 и 1,5. Площадь исходного треугольника равна сумме площадей этих прямоугольных треугольников, т. е. равна 6.

В общем случае, для площади S треугольника со стороной a и высотой h, проведённой к ней, имеет место формула

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Пример 5. Площадь многоугольника можно вычислять, разбивая его на прямоугольники, параллелограммы и треугольники. На рисунке 11.5 показан шестиугольник, разбитый на прямоугольник и два треугольника. Площадь прямоугольника равна 8, площади треугольников равны 2. Следовательно, площадь шестиугольника равна 12.

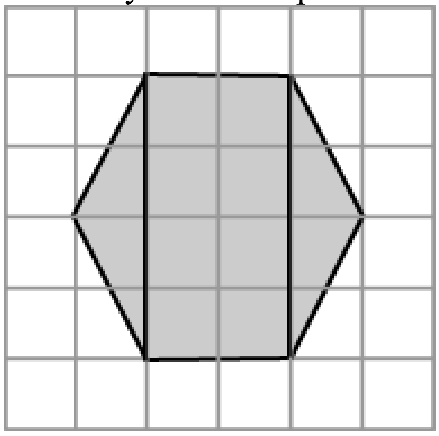


Рис. 11.5

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения площади?
2. Какие две фигуры называются равновеликими?
3. Чему равна площадь прямоугольника?
4. Чему равна площадь прямоугольного треугольника?
5. Чему равна площадь параллелограмма?
6. Чему равна площадь треугольника?
7. Как вычисляется площадь многоугольника?

Задачи

1. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его стороны увеличить в: а) 2 раза; б) 3 раза (рис. 11.6)?

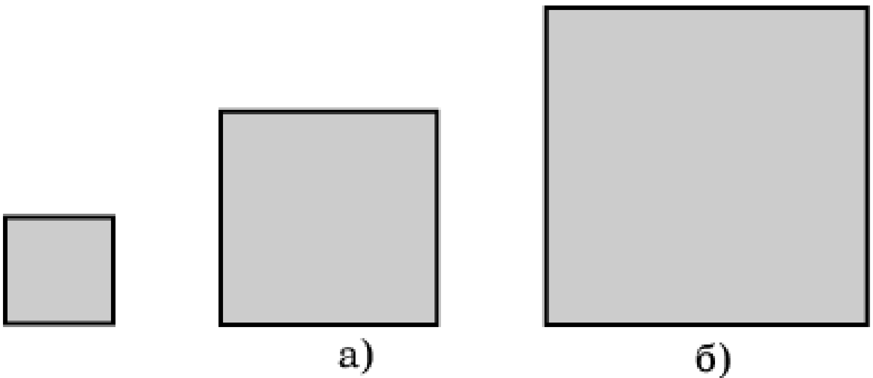


Рис. 11.6

2. Во сколько раз уменьшится площадь прямоугольника, если его стороны уменьшить в: а) 2 раза; б) 3 раза (рис. 11.7)?

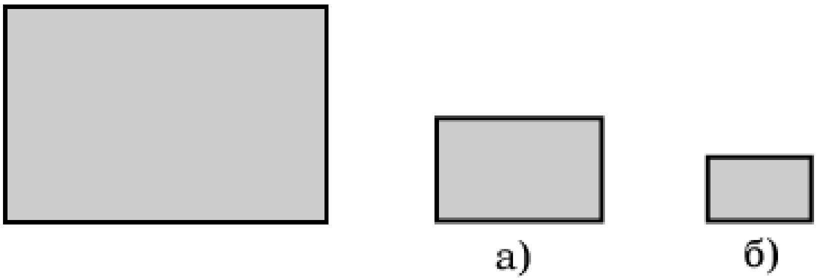


Рис. 11.7

3. Как измениться площадь прямоугольника, если одну его сторону: а) уменьшить в 2 раза; б) увеличить в 3 раза (рис. 11.8)?

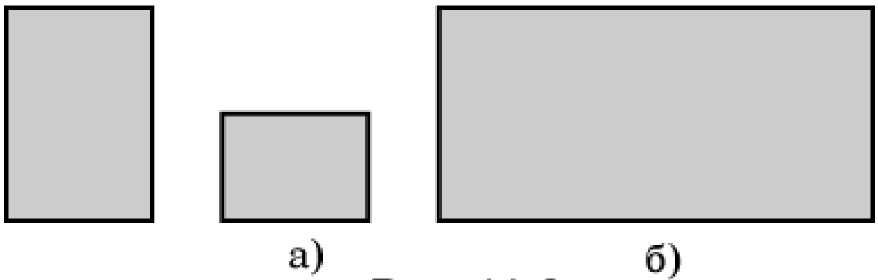


Рис. 11.8

4. На рисунке 11.9 укажите равновеликие фигуры.

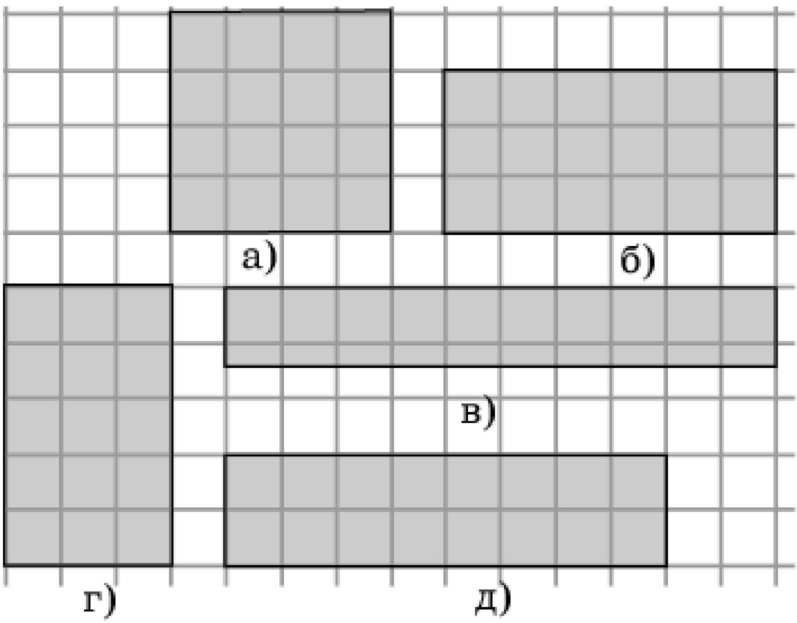


Рис. 11.9

5. Найдите площадь фигур на рисунке 11.10.

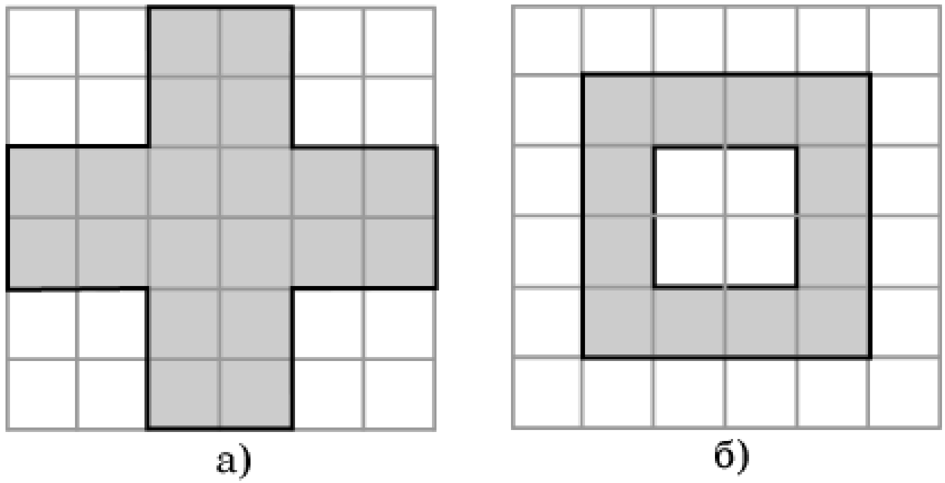


Рис. 11.10

6. Найдите площади многоугольников, изображённых на рисунке 11.11, все углы которых прямые.

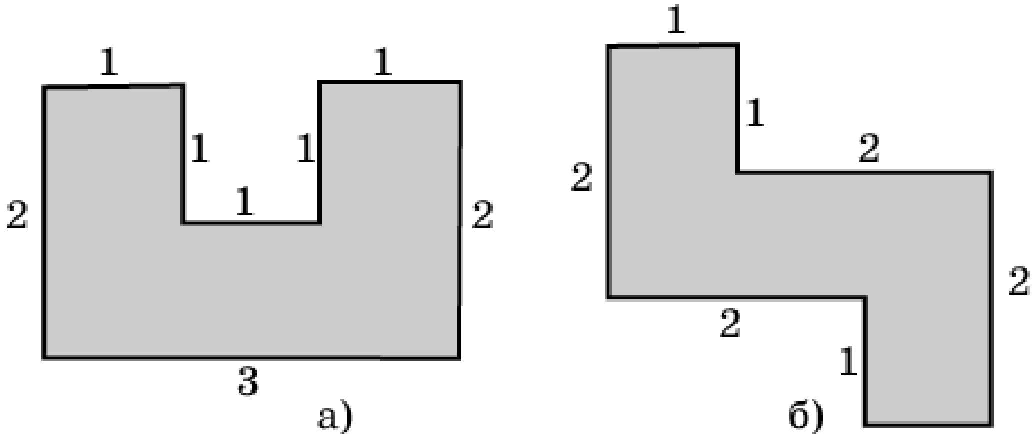


Рис. 11.11

7. Найдите площадь фигуры, являющейся объединением двух единичных квадратов, вершина одного из которых расположена в центре другого, как показано на рисунке 11.12.

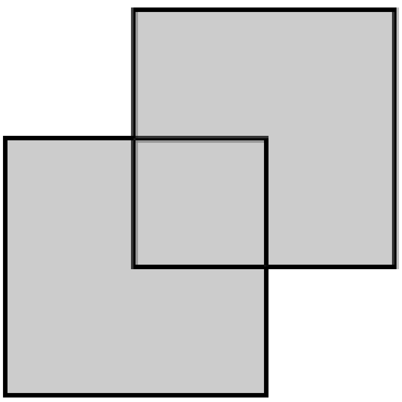


Рис. 11.12

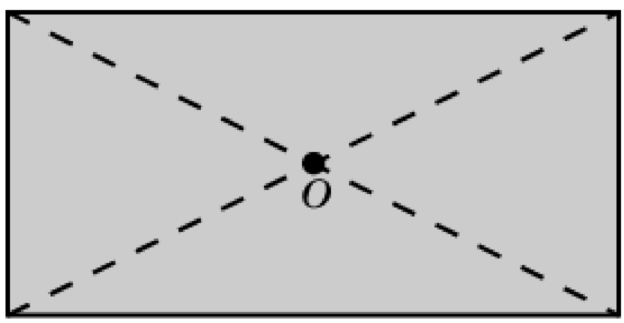


Рис. 11.13

8. Прямоугольник со сторонами 2 и 4 повёрнут вокруг точки O пересечения его диагоналей на угол 90° (рис. 11.13). Найдите площадь общей части исходного прямоугольника и повёрнутого.

9. Найдите площади треугольников, изображённых на рисунке 11.14.

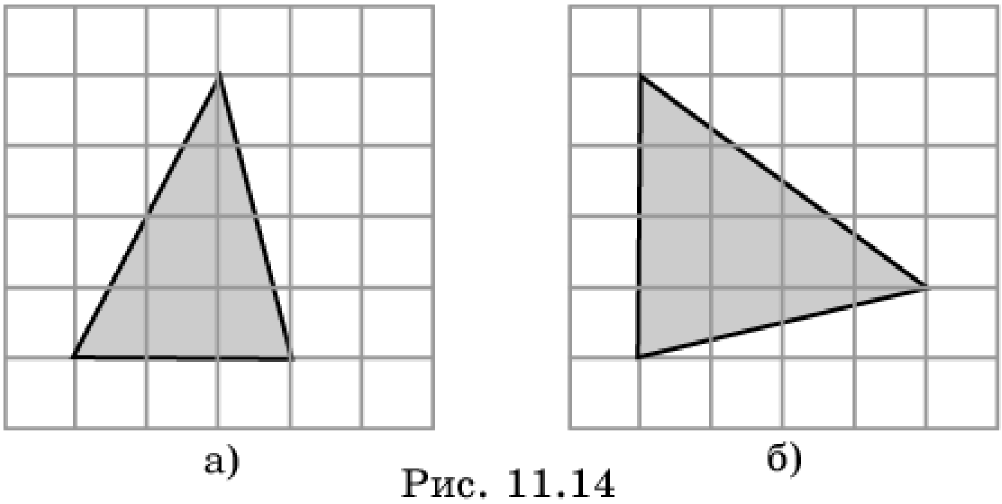


Рис. 11.14

10. Найдите площади треугольников, изображённых на рисунке 11.15.

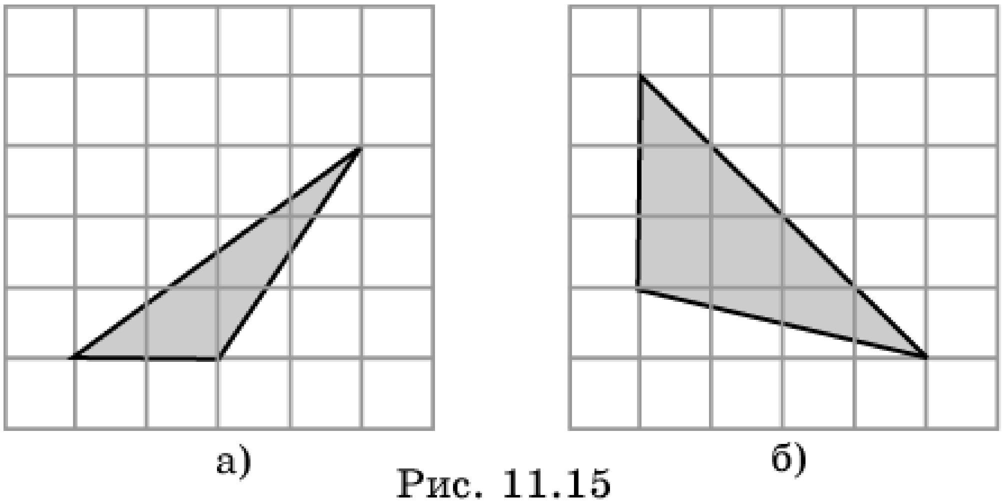


Рис. 11.15

11. На рисунке 11.16 укажите равновеликие фигуры.

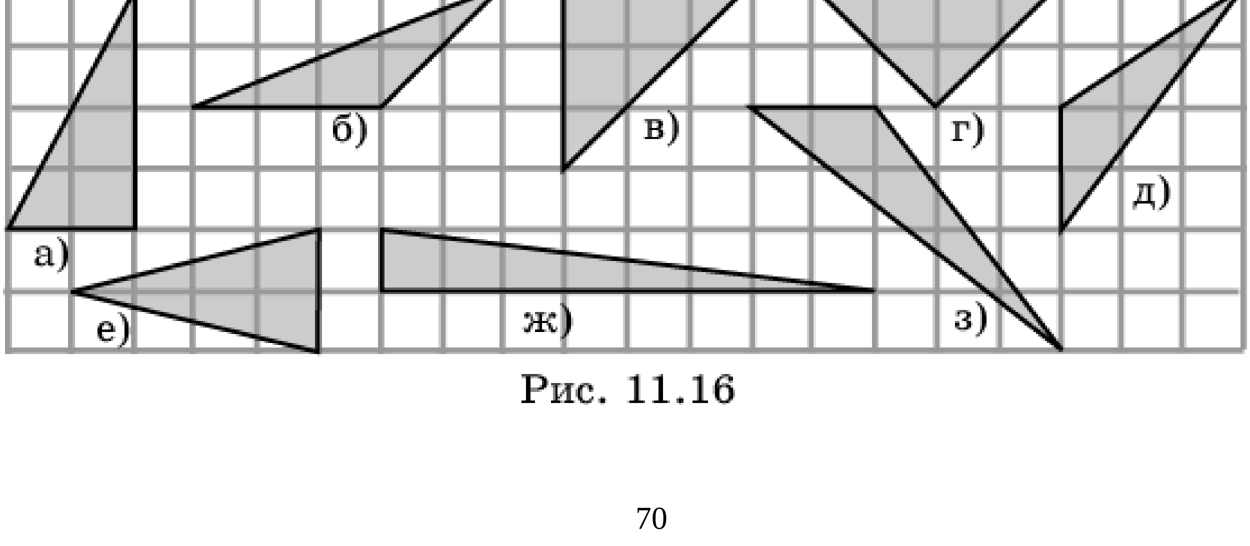
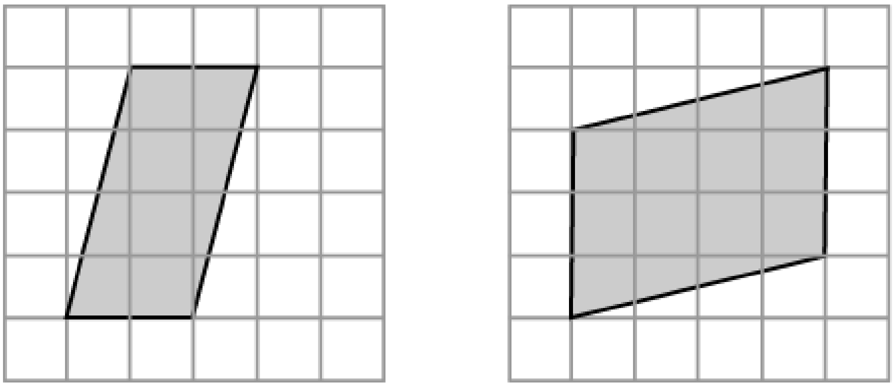


Рис. 11.16

12. Найдите площадь параллелограммов на рисунке 11.17.



а) б)

Рис. 11.17

13. На рисунке 11.18 укажите равновеликие фигуры.

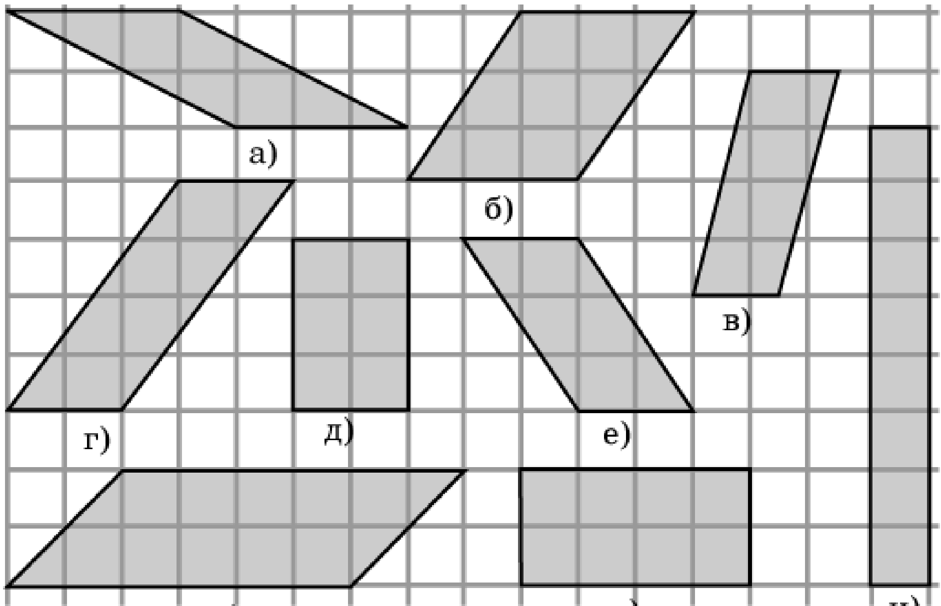
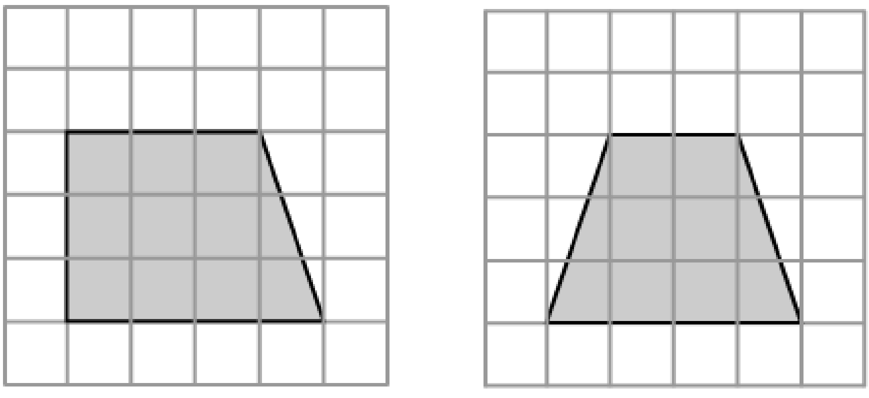


Рис. 11.18

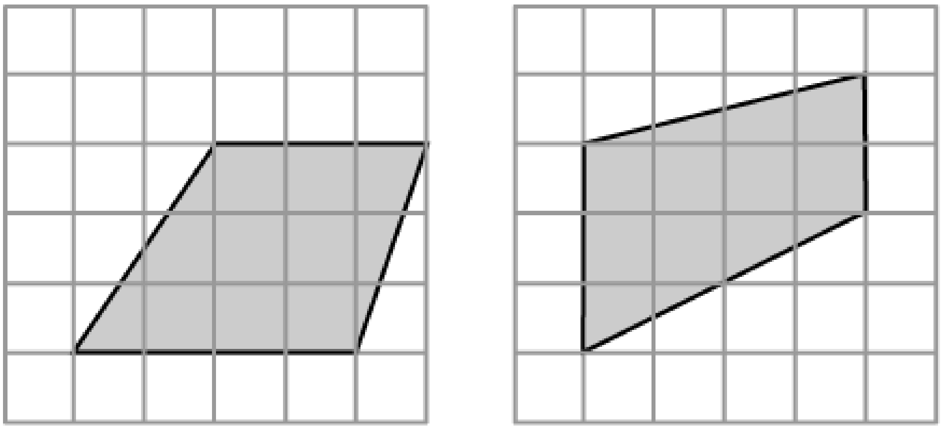
14. Найдите площадь четырёхугольников на рисунке 11.19.



а) б)

Рис. 11.19

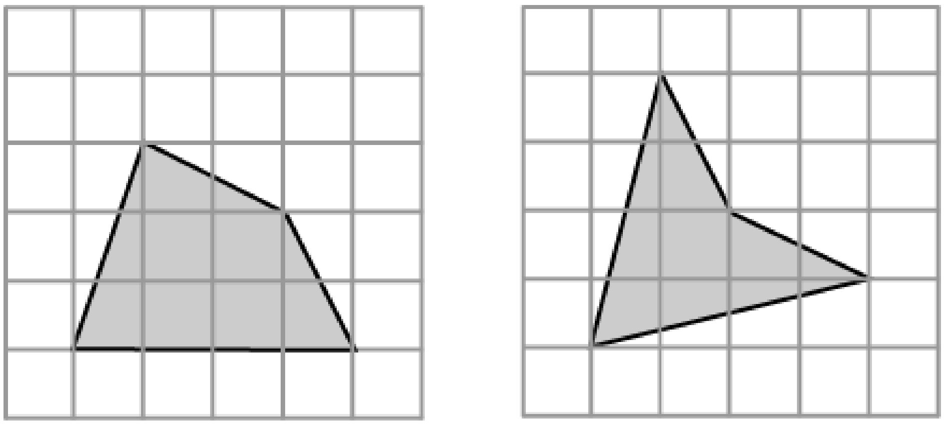
15. Найдите площадь четырёхугольников на рисунке 11.20.



а) б)

Рис. 11.20

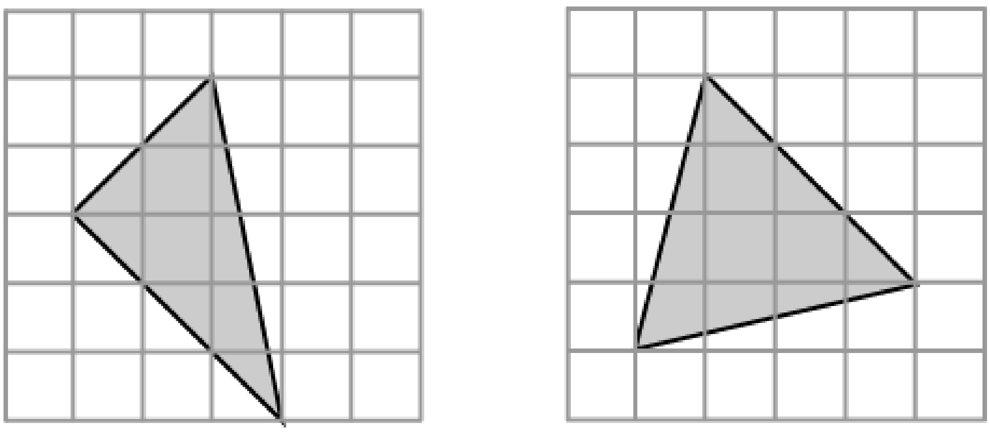
16. Найдите площадь четырёхугольников на рисунке 11.21.



а) б)

Рис. 11.21

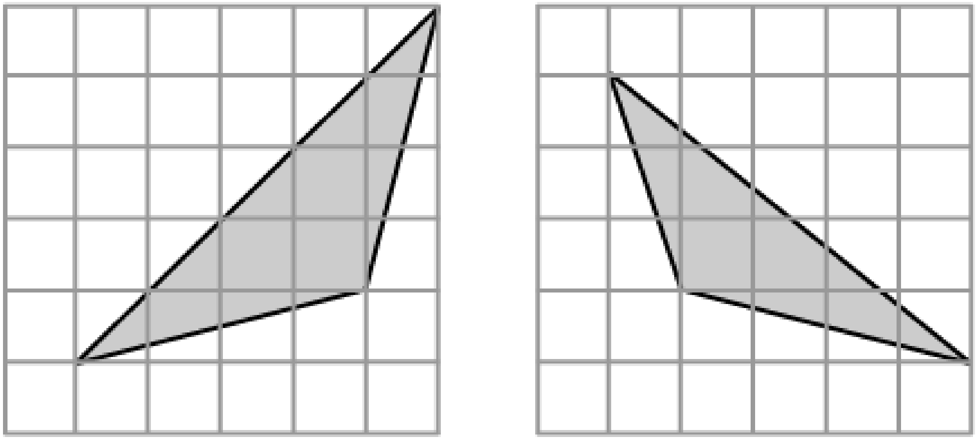
17. Найдите площадь треугольников на рисунке 11.22.



а) б)

Рис. 11.22

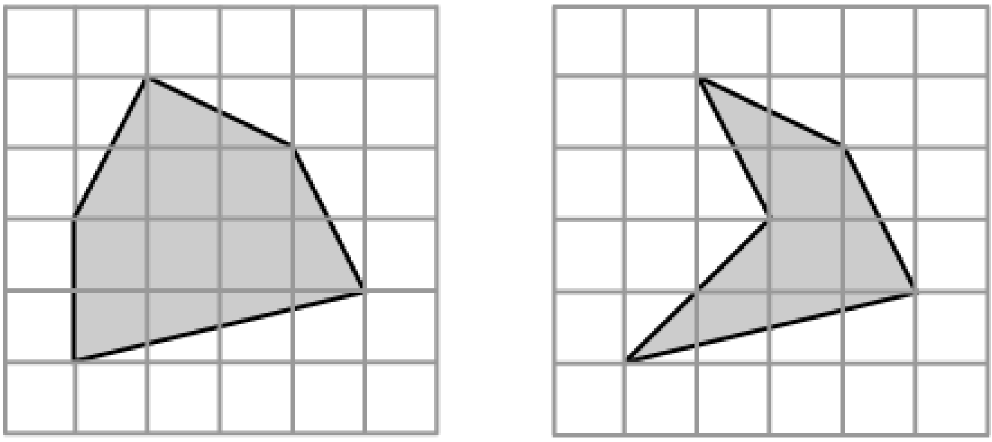
18. Найдите площадь треугольников на рисунке 11.23.



а) б)

Рис. 11.23

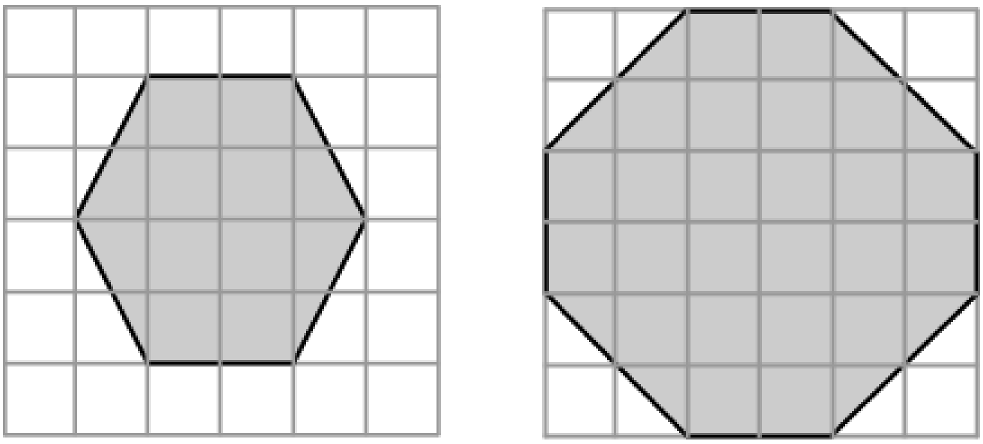
19. Найдите площадь пятиугольников на рисунке 11.24.



а) б)

Рис. 11.24

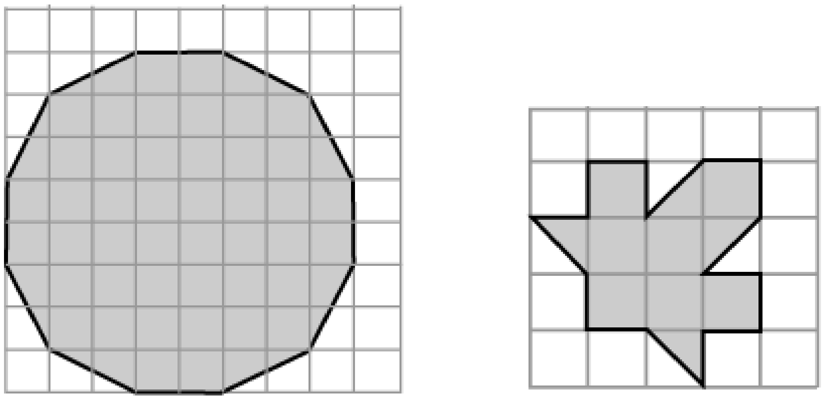
20. Найдите площадь многоугольников на рисунке 11.25.



а) б)

Рис. 11.25

21. Найдите площадь многоугольников на рисунке 11.26.



а) б)

Рис. 11.26

22. ***Круговым сектором*** называется часть круга, заключённая внутри угла с вершиной в центре этого круга (рис. 11.27).

Какую часть площади круга составляет площадь кругового сектора с углом, равным: а) 90°; б) 45°; в) 60°?

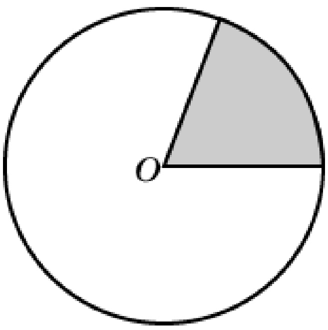


Рис. 11.27

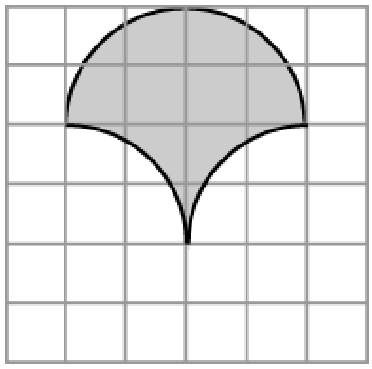
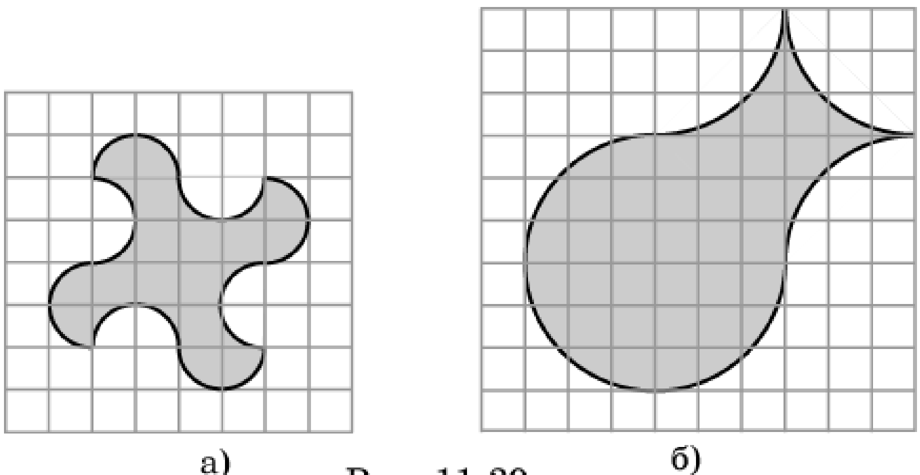


Рис. 11.28

23. Найдите площадь фигуры, ограниченной тремя дугами окружности радиуса 2 (рис. 11.28).

24. Найдите площадь фигур, изображенных на рисунке 11.29, а, б.



а) б)

Рис. 11.29

§ 12. Объём

Объём фигуры характеризует величину части пространства, которую занимает эта фигура.

Измерение объёма фигуры, как и измерения длины отрезка, основано на сравнении этой фигуры с фигурой, объём которой принимается за единицу.

За единицу измерения объёма принимается куб с ребром, равным единице измерения длины. Он называется ***единичным кубом***. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объёма принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром, соответственно.

Поскольку объём фигуры зависит от единицы измерения, то в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после величины объёма V указывают единицу измерения. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объёмов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам длин отрезков.

Свойство 1. Равные фигуры имеют равные объёмы.

Свойство 2. Если фигура составлена из двух или нескольких фигур, то её объём равен сумме объёмов этих фигур.

Рассмотрим примеры нахождения объёмов пространственных фигур.

Пример 1. На рисунке 12.1, а показан прямоугольный параллелепипед, рёбра которого равны 4, 3 и 2. Ясно, что в нём укладывается 24 единичных куба. Следовательно, его объём равен 24.

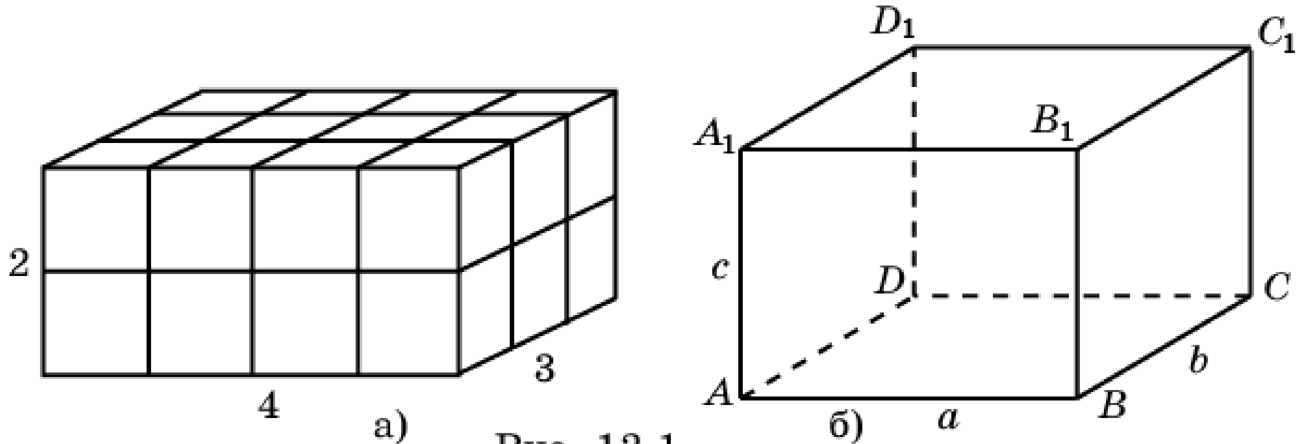


Рис. 12.1

В общем случае объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений, т. е. если рёбра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b и c, то его объём V выражается формулой $V = a \cdot b \cdot c$ (рис. 12.1, б).

Объём прямой призмы равен произведению площади её основания на высоту, т. е. если площадь основания равна S, а высота равна h, то объём V призмы выражается формулой $V = S \cdot h$ (рис. 12.2).

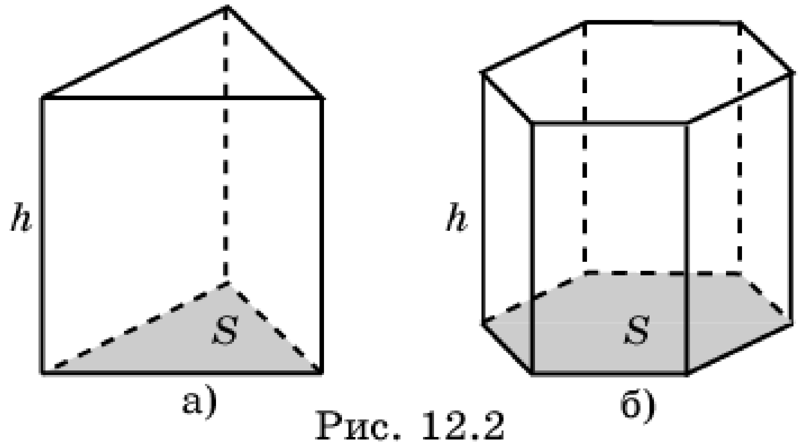


Рис. 12.2

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения объёма?
2. Какие свойства выполняются для объёмов пространственных фигур?
3. Чему равна площадь прямоугольного параллелепипеда?
4. Чему равна площадь прямой призмы?

Задачи

1. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза (рис. 12.3)?

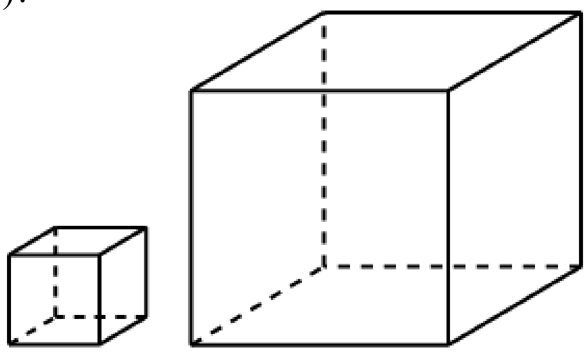


Рис. 12.3

2. Во сколько раз уменьшится объём прямоугольного параллелепипеда, если все его рёбра уменьшить в 2 раза (рис. 12.4)?

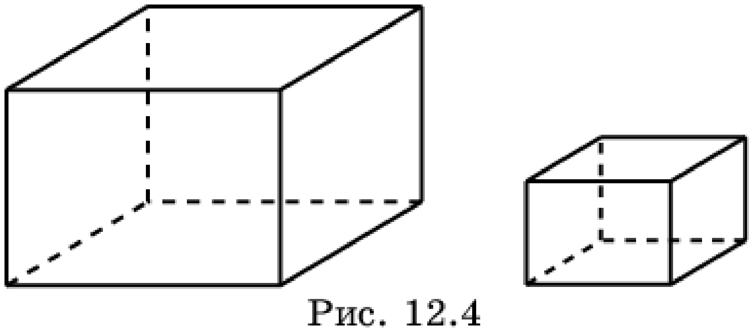


Рис. 12.4

3. Найдите объём фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 12.5 (все углы – прямые).

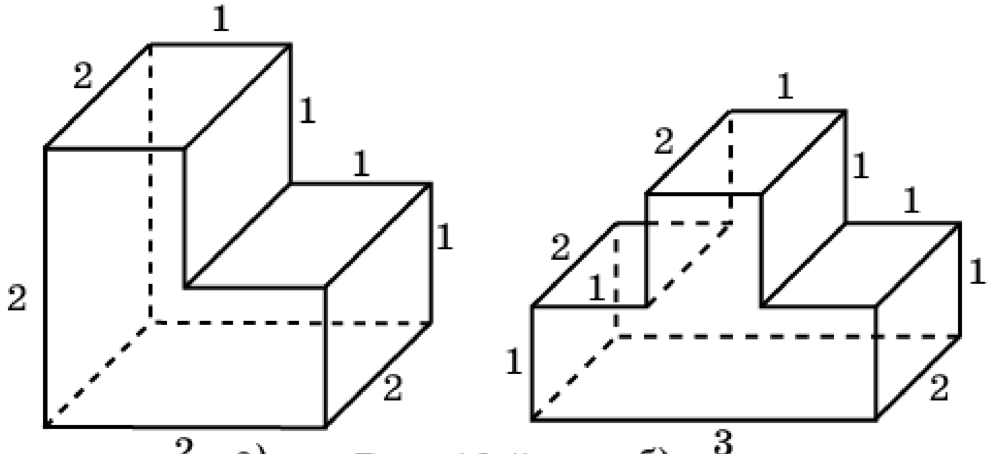


Рис. 12.5

4. Найдите объём фигуры, изображённой на рисунке 12.6 (все углы –

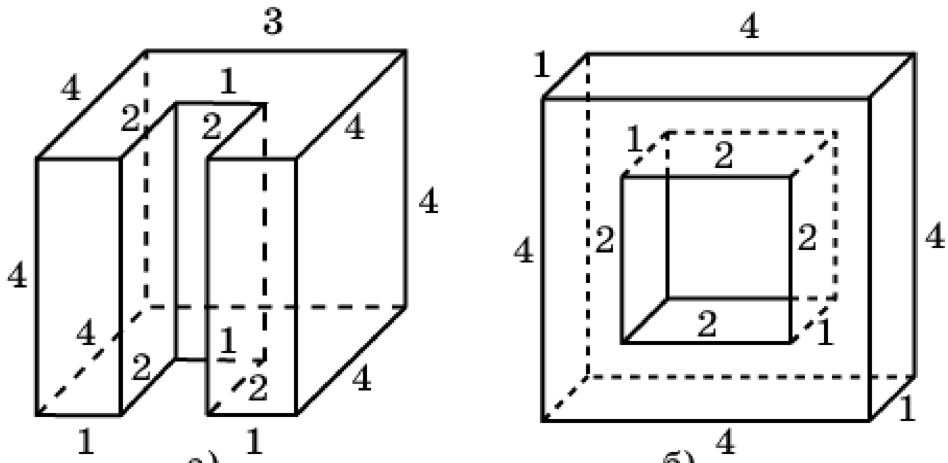


Рис. 12.6

прямые).

5. Найдите объём фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 12.7 (все углы – прямые).

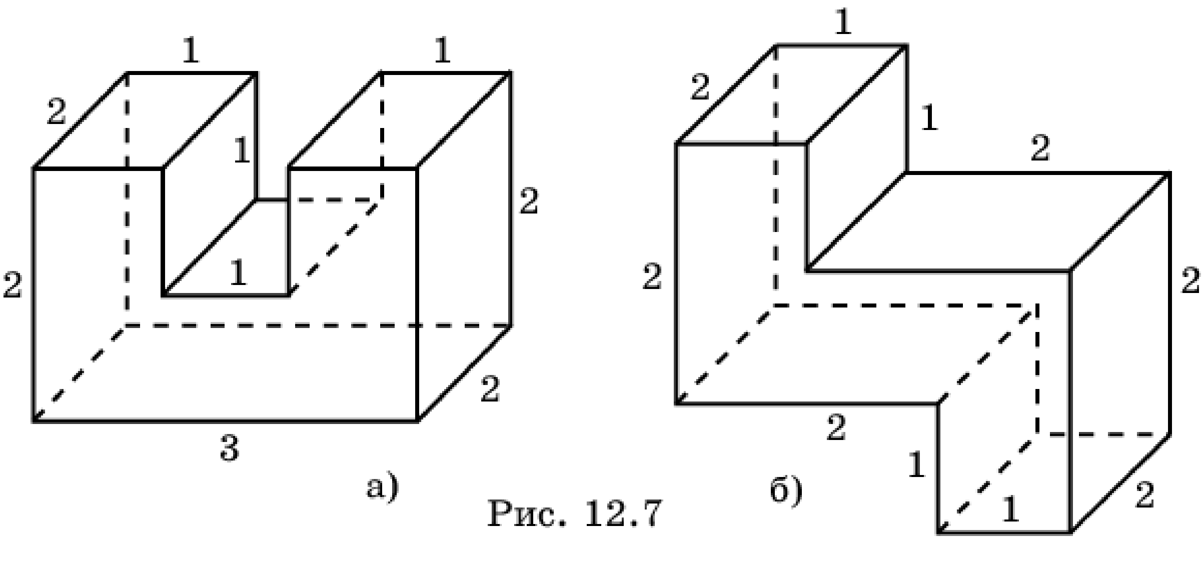
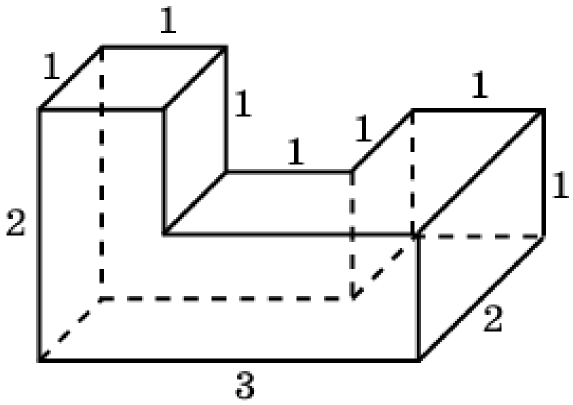


Рис. 12.7

6. Найдите объём фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 12.8 (все углы – прямые).



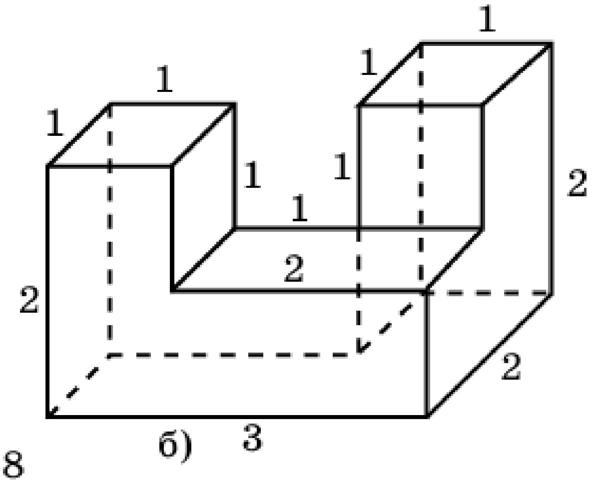


Рис. 12.8

7. Найдите объём общей части (пересечения) двух единичных кубов, вершина одного из которых расположена в центре другого (рис. 12.9).

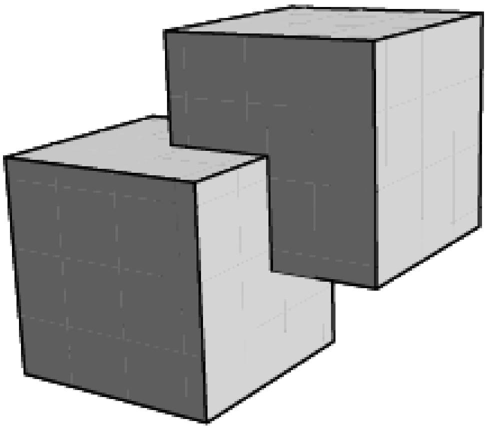


Рис. 12.9

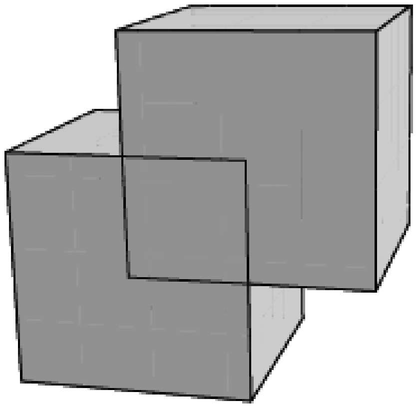


Рис. 12.10

8. Найдите объём фигуры, составленной из двух единичных кубов, две вершины одного из которых расположены в центрах граней другого (рис. 12.10).

9. В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см (рис. 12.11). Найдите объём оставшейся части.

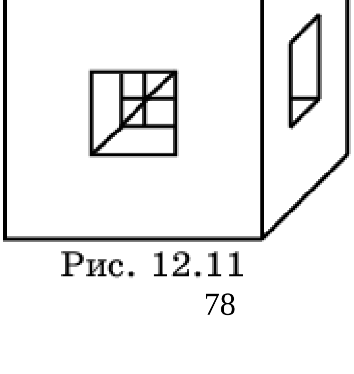


Рис. 12.11

10. Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько граммов весит игрушечный кирпич из того же материала, все размеры которого в четыре раза меньше (рис. 12.12)?

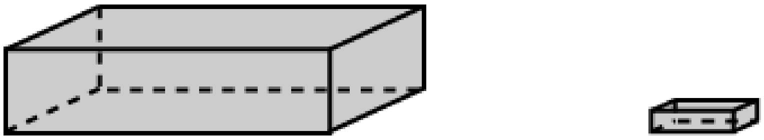


Рис. 12.12

11. Какова должна быть площадь кабинета высотой 3,5 м для класса в 28 человек, если на каждого ученика нужно 7,5 м^3 воздуха (рис. 12.13)?

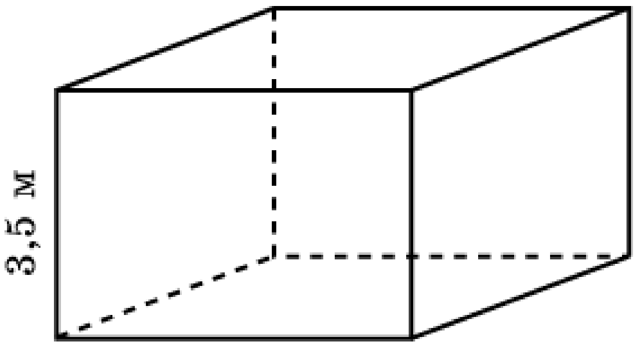


Рис. 12.13

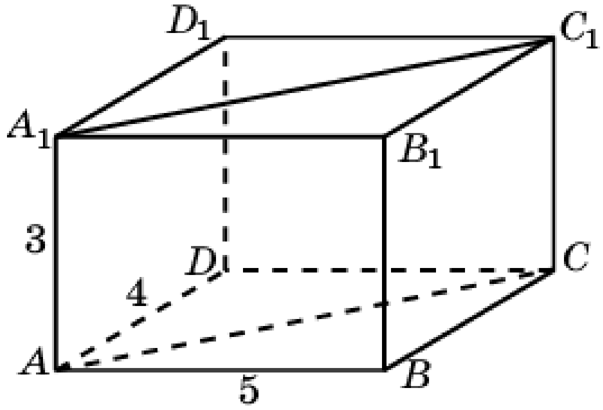


Рис. 12.14

12. Рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходящие из одной вершины, равны 5, 4, 3. Найдите объём треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.14).

13. Рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходящие из одной вершины, равны 5, 4, 3. Найдите объём треугольной призмы $ABOA_1B_1O_1$ (рис. 12.15).

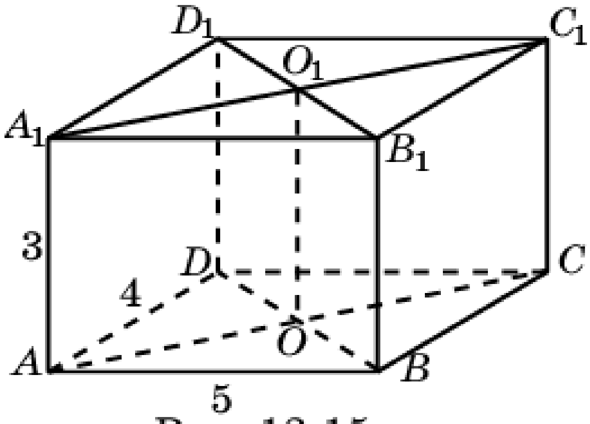


Рис. 12.15

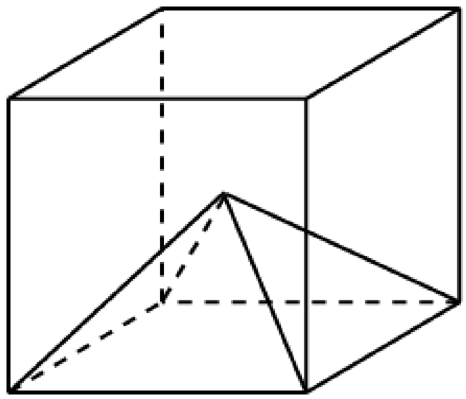


Рис. 12.16

14. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань единичного куба, а вершиной – центр этого куба (рис. 12.16).

15. Основанием аквариума является прямоугольник со сторонами 40 см и 50 см. Уровень воды в нём находится на высоте 80 см. Эту воду перелили в другой аквариум, основанием которого является прямоугольник со сторонами 80 см и 100 см. На какой высоте будет находиться уровень воды (рис. 12.17)?

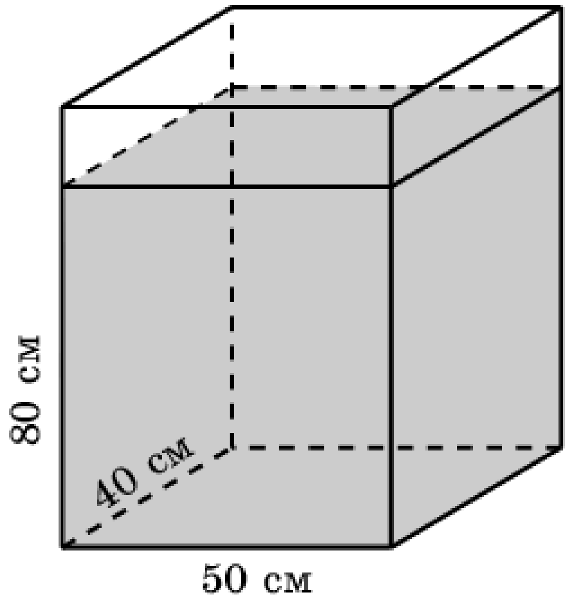


Рис. 12.17

§ 13. Площадь поверхности

Площадью поверхности произвольного многогранника называется сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Задачи

1. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, рёбра которого, выходящие из одной вершины, равны 5, 4, 3 (рис. 13.1).

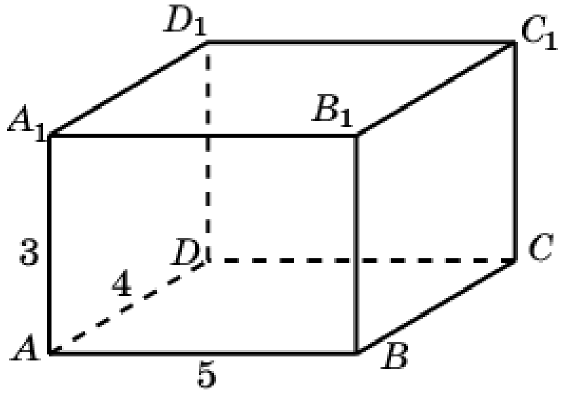


Рис. 13.1

2. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза (рис. 13.2)?

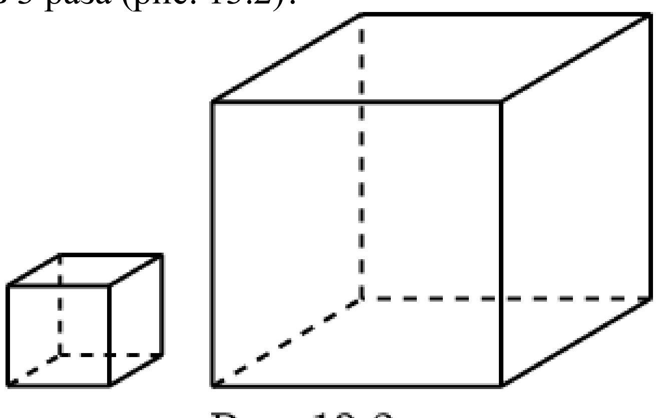


Рис. 13.2

3. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если все его рёбра уменьшить в 2 раза (рис. 13.3)?

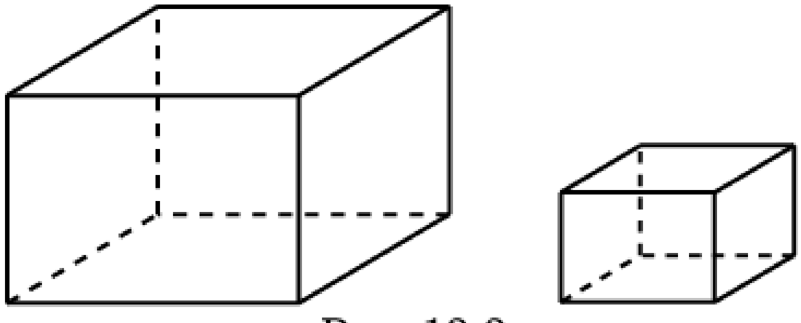
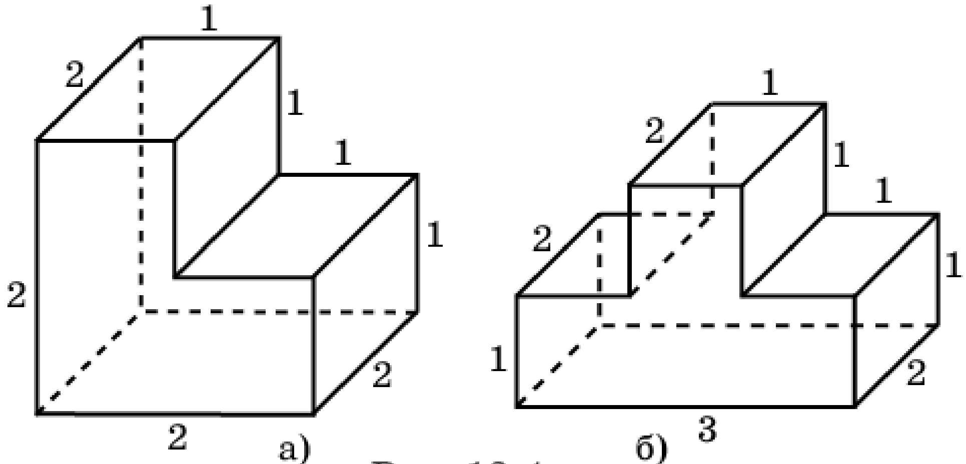


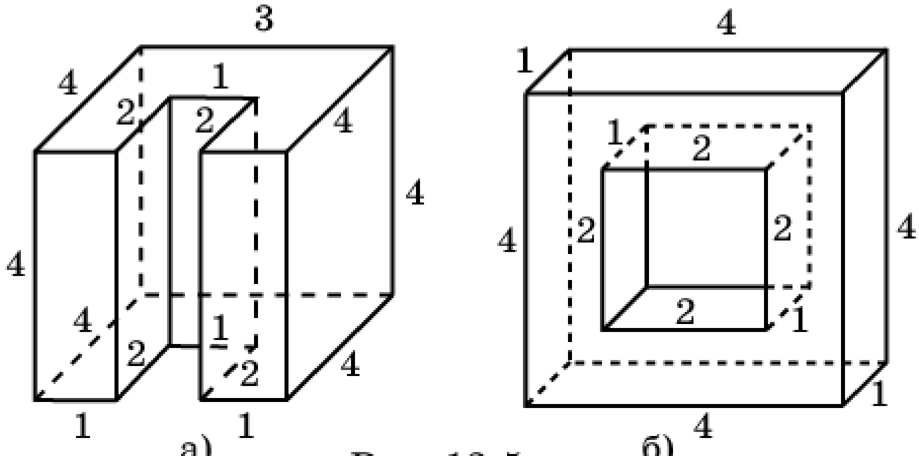
Рис. 13.3

4. Найдите площадь поверхности фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 13.4 (все углы – прямые).



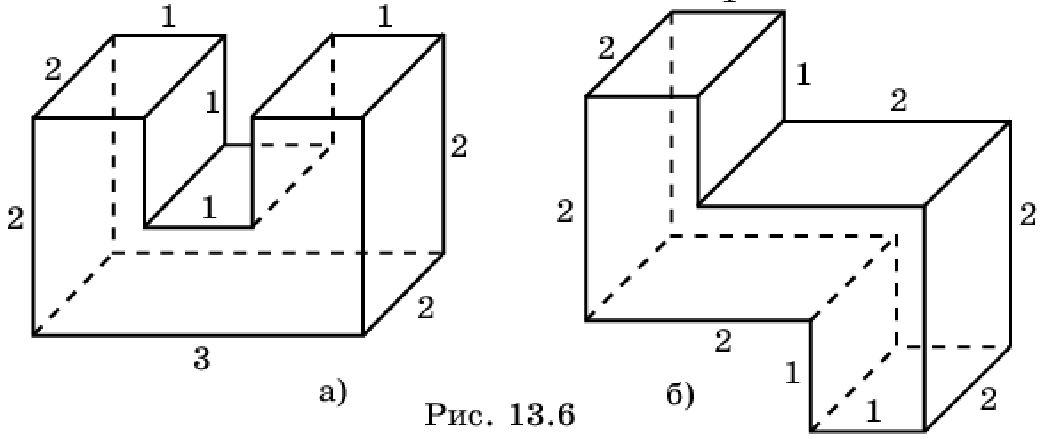
а) б)
Рис. 13.4

5. Найдите площадь поверхности фигуры, изображённой на рисунке 13.5 (все углы – прямые).



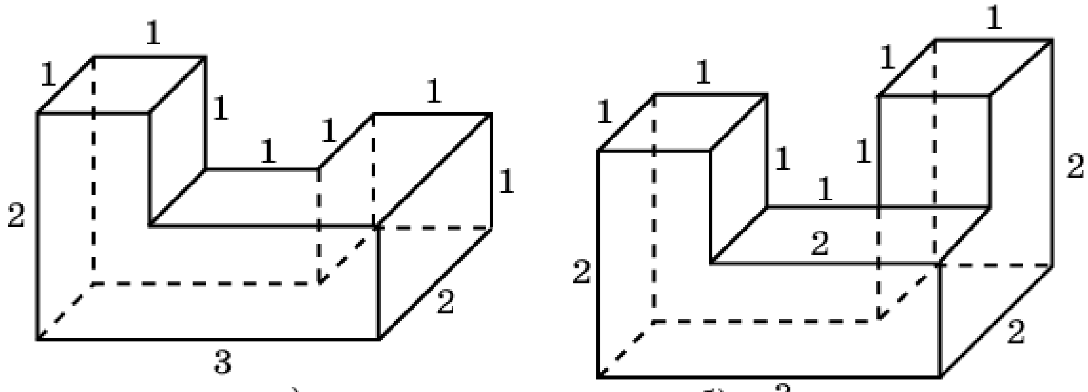
а) б)
Рис. 13.5

6. Найдите площадь поверхности фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 13.6 (все углы – прямые).



а) б)
Рис. 13.6

7. Найдите площадь поверхности фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 13.7 (все углы – прямые).



а) Рис. 13.7 б)

8. Найдите площадь поверхности общей части (пересечения) двух единичных кубов, вершина одного из которых расположена в центре другого

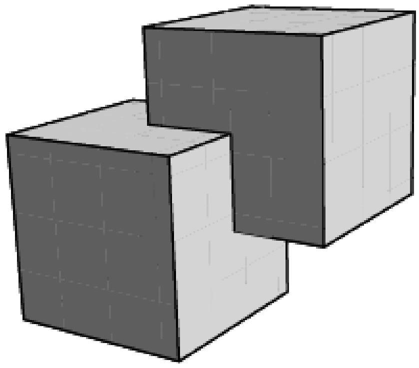


Рис. 13.8

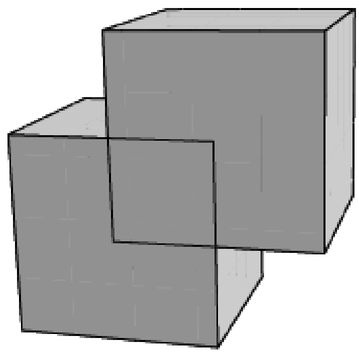


Рис. 13.9

(рис. 13.8).

9. Найдите площадь поверхности фигуры, составленной из двух единичных кубов, две вершины одного из которых расположены в центрах граней другого (рис. 13.9).

10. Чему равна площадь поверхности пространственного креста (рис. 13.10), если рёбра образующих его кубов равны единице?

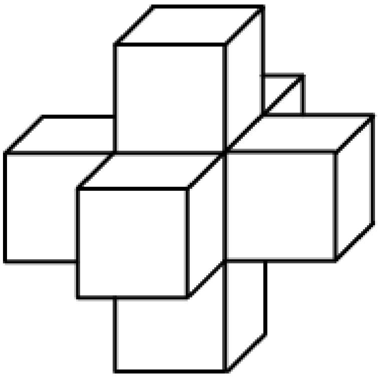


Рис. 13.10

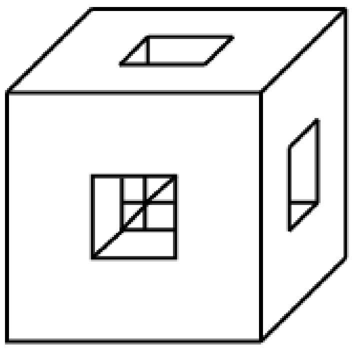


Рис. 13.11

11. В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см (рис. 13.11). Найдите площадь поверхности оставшейся части.

12. Объём куба равен 27. Найдите площадь его поверхности.

13. Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объём.

14. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2. Каким должно быть третье ребро, выходящее из той же вершины, чтобы площадь поверхности этого параллелепипеда равнялась 40?

§ 14. Координаты

Координатной прямой, или ***координатной осью***, называется прямая, на которой выбраны точка *O*, называемая ***началом координат***, и единичный отрезок *OE*, указывающий положительное направление координатной прямой (рис. 14.1).

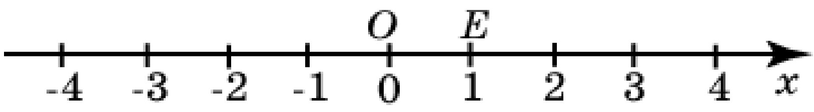


Рис. 14.1

Координатой точки *A* на координатной прямой называется расстояние от точки *A* до начала координат *O*, взятое со знаком "+", если *A* принадлежит положительной полуоси, и со знаком "–", если *A* принадлежит отрицательной полуоси.

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат (рис. 14.2).

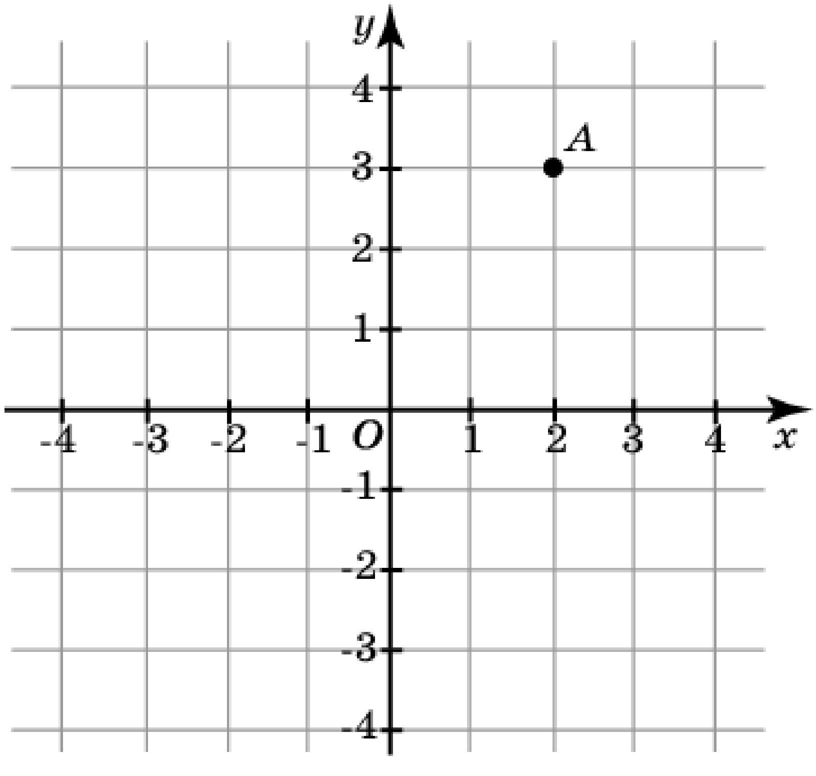


Рис. 14.2

Начало координат обозначается буквой *O*, а ***координатные прямые*** обозначаются *Ox, Oy* и называются соответственно осью абсцисс и осью ординат.

Плоскость, с заданной прямоугольной системой координат, называется ***координатной плоскостью***.

Пусть A – точка на координатной плоскости. Через точку A проведём прямую, перпендикулярную оси Ox. Координата этой точки на оси Ox называется ***абсциссой*** точки A и обозначается x. Аналогично через точку A проведём прямую, перпендикулярную оси Oy. Координата этой точки на оси Oy называется ***ординатой*** точки A и обозначается y.

Таким образом, каждой точке A на координатной плоскости соответствует пара чисел (x, y), называемая координатами точки на плоскости относительно данной системы координат. Точка A с координатами (x, y) обозначается $A(x, y)$. На рисунке 14.2 отмечена точка $A(2, 3)$.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596-1650), поэтому прямоугольную систему координат называют также декартовой системой координат, а сами координаты – декартовыми координатами. Введение прямоугольных координат на плоскости позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи – к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется ***методом координат***.

Вопросы

1. Какая прямая называется координатной?
2. Что называется координатой точки на координатной прямой?
3. Что называется прямоугольной системой координат на плоскости?
4. Что называется координатной плоскостью?
5. Что называется абсциссой, ординатой точки на координатной плоскости?

Задачи

1. Для заданных точек на координатной плоскости (рис. 14.3) найдите их координаты.

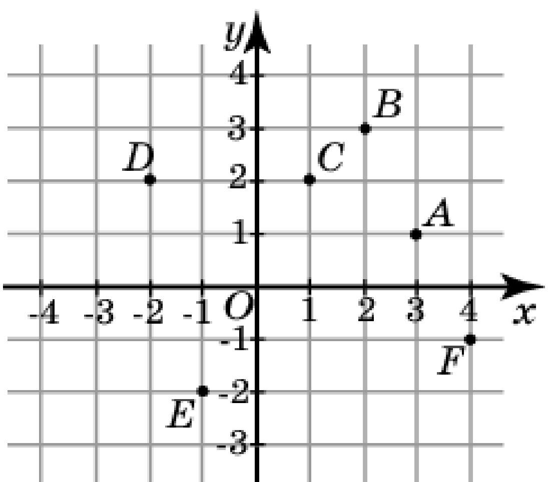


Рис. 14.3

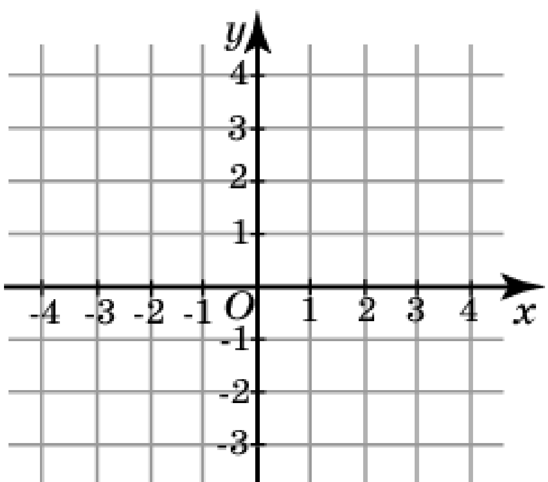


Рис. 14.4

2. Изобразите координатную плоскость как на рисунке 14.4. Отметьте точки $A(2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(4, 2)$, $D(-3, 2)$, $E(-2, -3)$, $F(3, -2)$.

3. На координатной плоскости изобразите отрезок, концы которого имеют координаты: а) (0, 0) и (3, 3); б) (-1, 1) и (2, 1); в) (-2, -1) и (1, -3).

4. На координатной плоскости изобразите угол *AOB*, для которого: а) *A*(3, 0), *O*(0, 0), *B*(0, 3); б) *A*(3, 0), *O*(0, 0), *B*(3, 3); в) *A*(3, 0), *O*(0, 0), *B*(-3, 3). Найдите его величину.

5. На координатной плоскости изобразите угол *ABC*, для которого: а) *A*(2, 1), *B*(-1, 1), *C*(2, -2); б) *A*(2, -1), *B*(-1, 2), *C*(1, 4); в) *A*(-1, 0), *B*(3, 2), *C*(2, 4). Найдите его величину.

6. На координатной плоскости нарисуйте ломаную *ABCDE*, для которой: а) *A*(2, 0), *B*(2, 3), *C*(-1, 3), *D*(-1, 1), *E*(1, 1). Найдите её длину.

7. На координатной плоскости изобразите треугольник *ABC*, для которого *A*(-2, -1), *B*(2, -1), *C*(0, 1). Какой это треугольник?

8. На координатной плоскости изобразите треугольник *ABC*, для которого *A*(-2, 2), *B*(2, -2), *C*(0, 1). Какой это треугольник?

9. На координатной плоскости изобразите четырёхугольник *ABCD*, для которого *A*(-2, 0), *B*(0, -2), *C*(2, 0), *D*(0, 2). Какой это четырёхугольник?

10. На координатной плоскости изобразите четырёхугольник *ABCD*, для которого *A*(-2, 1), *B*(2, -1), *C*(3, 1), *D*(-1, 3). Какой это четырёхугольник?

11. На координатной плоскости изобразите четырёхугольник *ABCD*, для которого *A*(-2, 1), *B*(2, 2), *C*(1, 4), *D*(-3, 3). Какой это четырёхугольник?

12. На координатной плоскости изобразите четырёхугольник *ABCD*, для которого *A*(-2, -1), *B*(2, -1), *C*(1, 2), *D*(-1, 2). Какой это четырёхугольник?

13. Найдите координаты середины отрезка: а) *AB*; б) *CD*; в) *EF*, изображённого на рисунке 14.5.

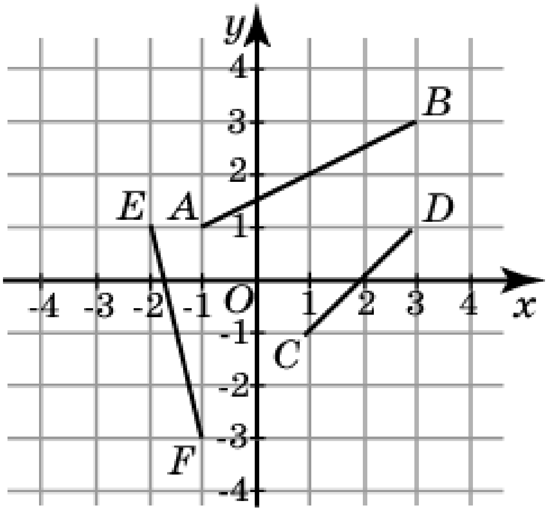


Рис. 14.5

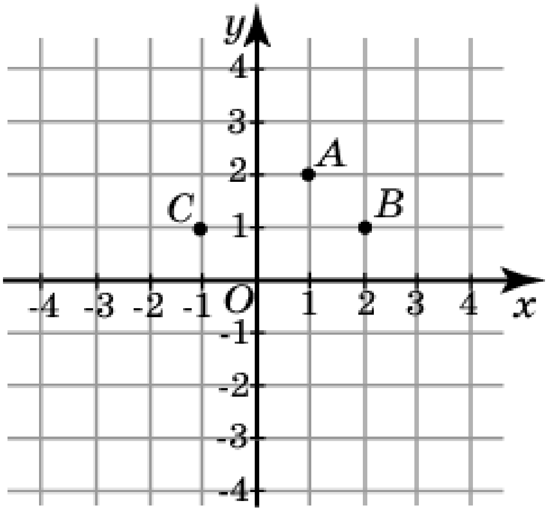


Рис. 14.6

14. Найдите координаты точки, симметричной точке *A*(1, 2) (рис. 14.6) относительно точки: а) *O*(0, 0); б) *B*(2, 1); в) *C*(-1, 1). Изобразите эти точки на координатной плоскости.

15. Найдите координаты точки, симметричной точке *A*(2, 3) (рис. 14.7) относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат. Изобразите эти точки на координатной плоскости.

16. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $A(2, 3)$ (рис. 14.7) вокруг начала координат на угол 90^{o}: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке. Изобразите эти точки на координатной плоскости.

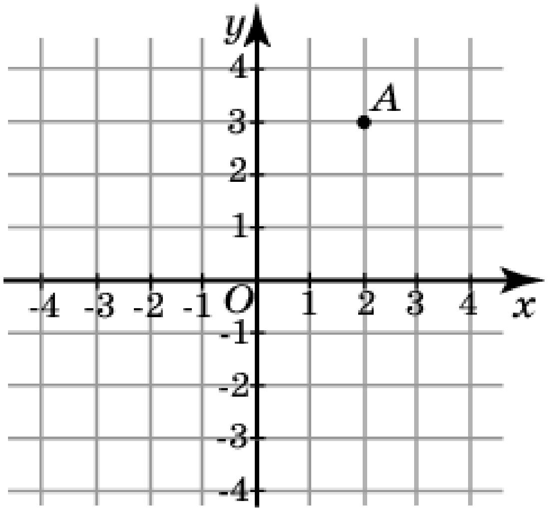


Рис. 14.7

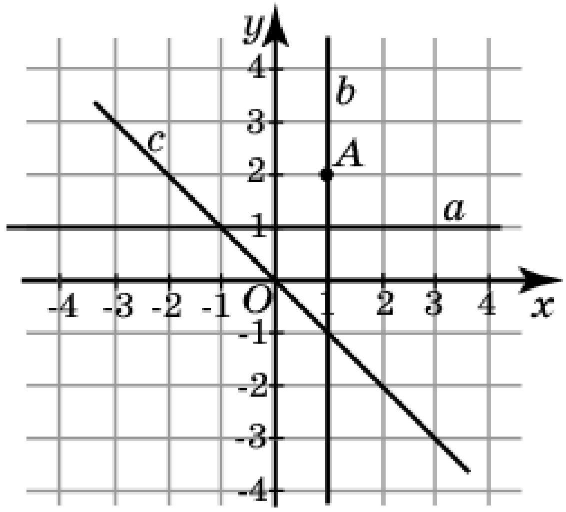


Рис. 14.8

17. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(2, 3)$ (рис. 14.8) относительно прямой: а) a; б) b; в) c. Изобразите эти точки на координатной плоскости.

18. Точки $N(\ldots, 3)$ и $M(2, \ldots)$ симметричны относительно оси ординат. Найдите пропущенные координаты этих точек.

19. На координатной плоскости изобразите точки с целочисленными координатами (x, y), для которых выполняется равенство: а) $y = x$; б) $x + y = 1$.

20. На координатной плоскости изобразите точки с целочисленными координатами (x, y), для которых выполняются неравенства: а) $x^2 + y^2 < 2$; б) $1 < x^2 + y^2 < 3$.

21. На координатной плоскости изобразите точки с целочисленными координатами (x, y), для которых одновременно выполняются неравенства $0 < x < 3$, $-3 < y < 2$.

22. На координатной плоскости нарисуйте квадрат, две противоположные вершины которого имеют координаты: (0, 0), (3, 3). Найдите его площадь.

23. На координатной плоскости нарисуйте квадрат, две противоположные вершины которого имеют координаты: (-3, 0), (3, 0). Найдите его площадь.

24. На координатной плоскости нарисуйте четырёхугольник, вершины которого имеют координаты: (3, 3), (-1, 3), (-1, -1), (3, -1). Найдите его площадь.

25. На координатной плоскости нарисуйте четырёхугольник, вершины которого имеют координаты: (-3, 1), (1, -3), (3, -1), (-1, 3). Найдите его площадь.

26. На координатной плоскости нарисуйте четырёхугольник, вершины которого имеют координаты: (-3, -3), (1, -1), (3, 3), (-1, 1). Найдите его площадь.

27. На координатной плоскости нарисуйте шестиугольник, вершины которого имеют координаты: (2, 0), (1, 2), (-1, 2), (-2, 0), (-1, -2), (1, -2). Найдите его площадь.

28. На координатной плоскости нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (1, 0), (2, 1), (1, 3), (2, 4), (1, 4,5), (1, 6), (1,5, 5,5), (2,5, 5,5), (3, 6), (3, 4,5), (2, 4), (3, 3), (4,5, 2,5), (4,5, 0), (5, 2,5), (5, 0). Очертания какого животного она напоминает?

29. На координатной плоскости нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (4, 0), (3, 1,5), (1, 2), (-1, 2), (-4, 0,5), (-6, 2), (-5,5, 0), (-6, -2), (-4, -0,5), (-1, -2), (1, -2), (3, -1,5), (4, 0). Очертания кого она напоминает?

30. На координатной плоскости нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (-5, 1), (-6, 0,5), (-7, 1), (-4,5, 2,5), (-3,5, 2,5), (-4,5, 1), (5,5, 1), (5,5, -0,5), (4,5, -1,5), (4,5, -1), (5, -0,5), (5, 0,5), (4, 0,5), (4,5, 0), (3,5, -2), (3, -2), (3, -1), (2, -0,5), (-2, -0,5), (-3,5, -1), (-4,5, -2), (-5,5, -2), (-5, -1), (-4,5, -1), (-4,5, 2), (-5, 1), (-5,5, -1), (-5, -1). Очертания какой породы собаки она напоминает?

31. На координатной плоскости нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (0, 0), (-1, 1), (-3, 1), (-2, 3), (-3, 3), (-4, 6), (0, 8), (2, 5), (2, 11), (6, 10), (3, 9), (4, 5), (3, 0), (2, 0), (1, -7), (3, -8), (0, -8), (0, 0). Очертания какой птицы она напоминает?

ОТВЕТЫ

§ 1. Окружность и круг

1. а) $OA \le R$; б) $OA > R$. **2.** Бесконечно много. **3.** Бесконечно много. **4.** 110 мм. **5.** 10 см. **6.** 1 см. **8.** Рисунок 1.

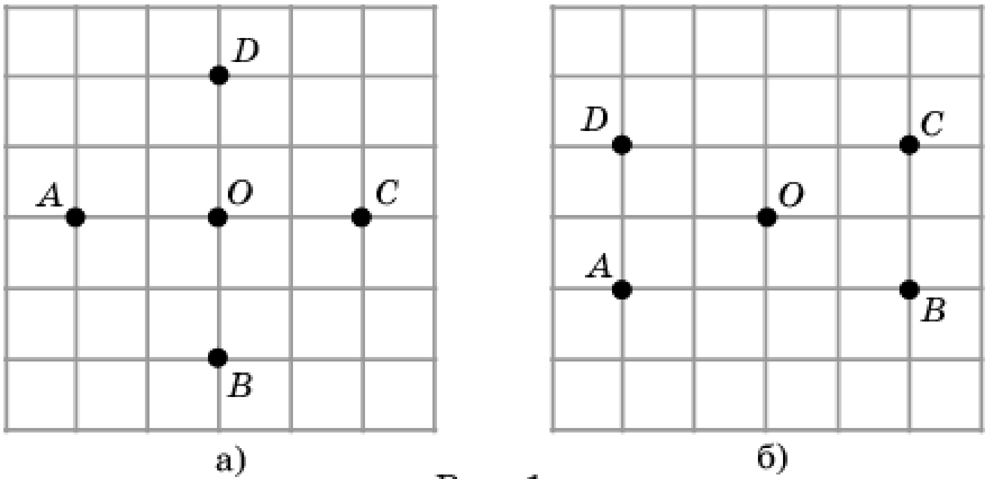


Рис. 1

9. 2 и 4. **10.** 2 и 4. **11.** 1,5 см. **12.** 12. **13.** Кольцом называется фигура, состоящая из всех точек A плоскости, удалённых от данной точки O на расстояние OA, для которого для некоторых положительных чисел r и R выполняются неравенства $r \le OA \le R$. **14.** Две. **15.** Ни одной, одну или две. **16.** 3 или 4. **17.** а) Касаются внутренним образом; б) пересекаются; в) касаются внешним образом; г) не имеют общих точек (рис. 2).

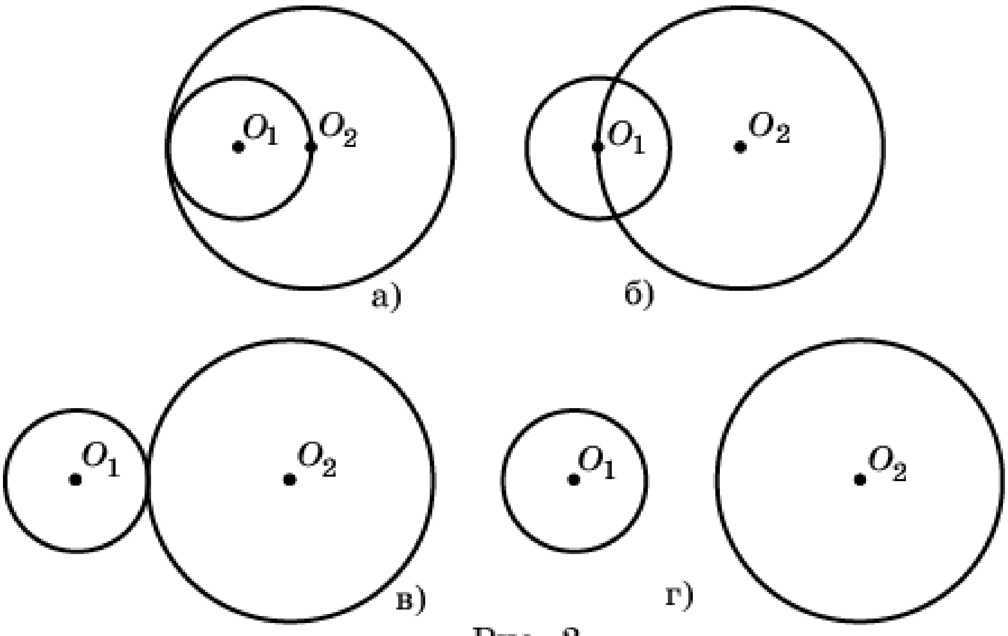


Рис. 2

18. 8. **19.** 6. **20.** 12. **21.** 9. **22.** 2. **23.** 1. **24.** 10. **25.** 21 м. **26.** 35 см. **27.** 3 мин. **28.** 1°. **29.** 102 м. **30.** 6 м. **31.** 1333 км. **32.** 408 000 км. **33.** 156 000 000 км.

§ 2. Геометрические места точек

1. Рисунок 3.

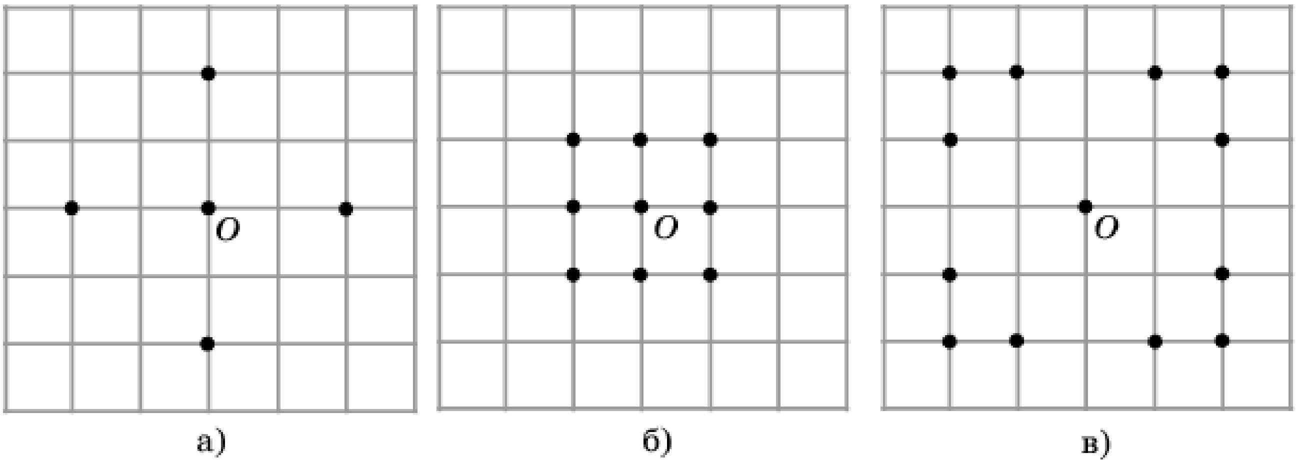


Рис. 3

2. Рисунок 4.

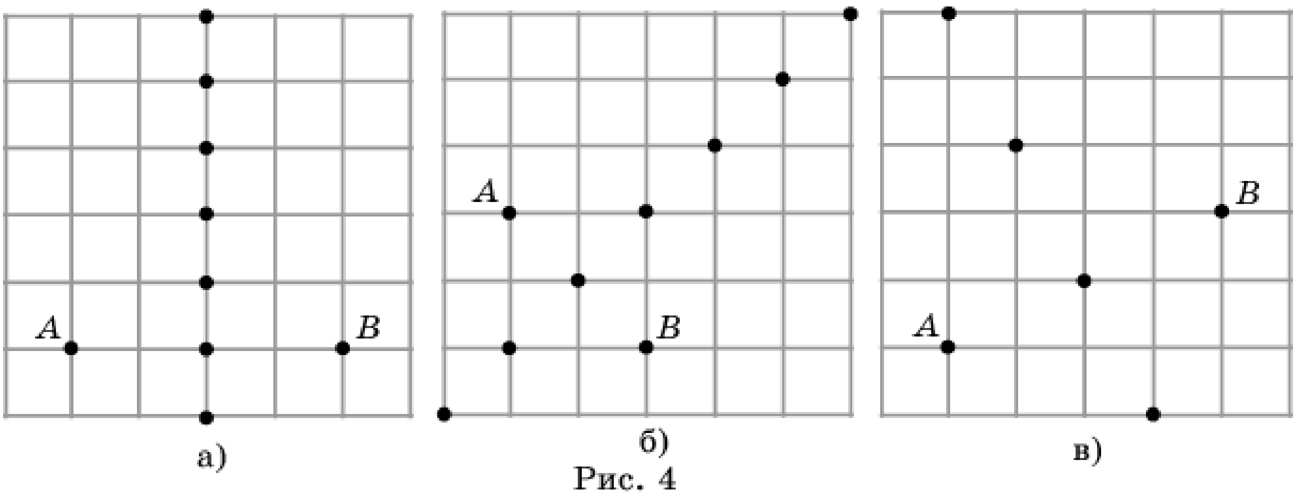


Рис. 4

3. Рисунок 5.

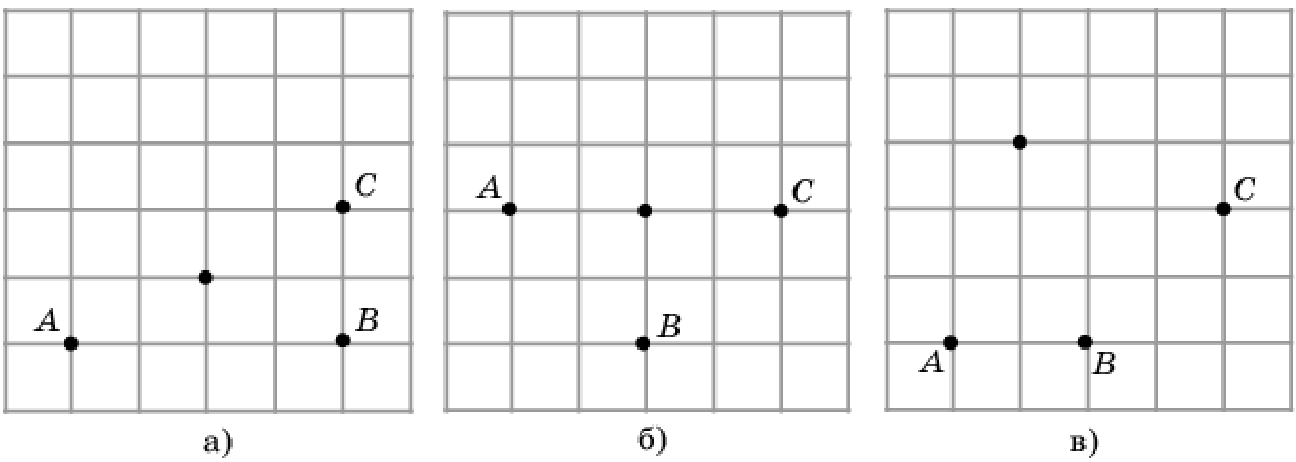


Рис. 5

4. Рисунок 6.

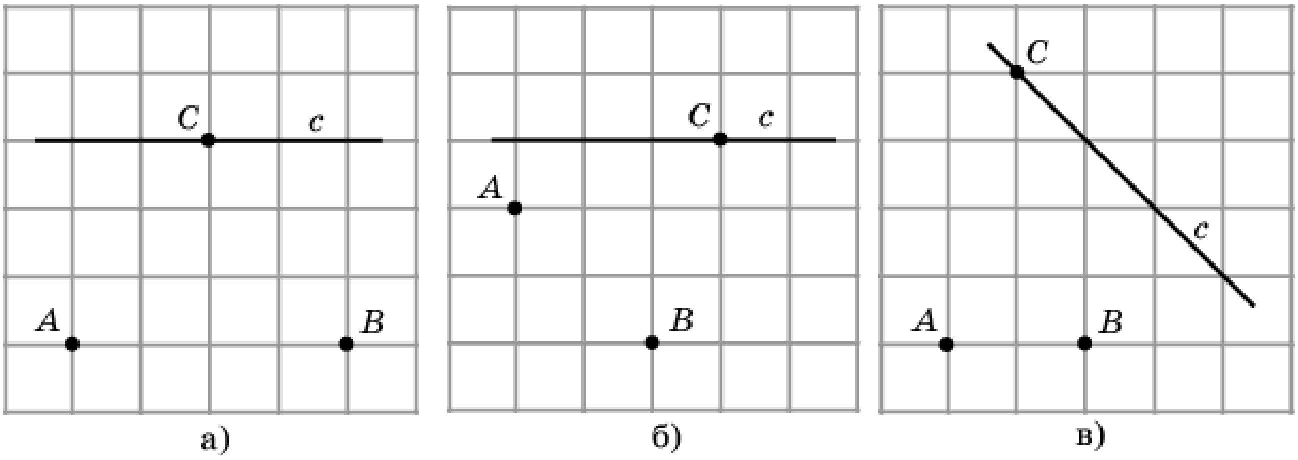


Рис. 6

5. Рисунок 7.

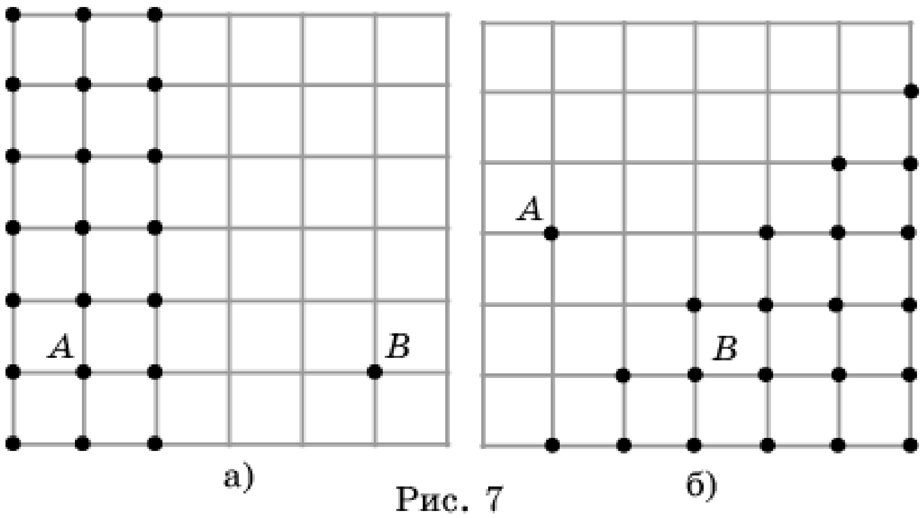


Рис. 7

6. Рисунок 8.

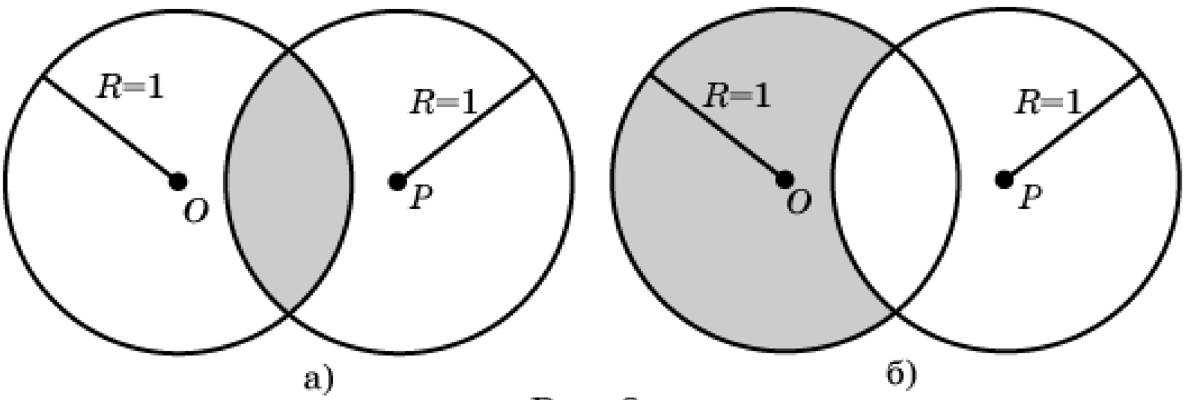
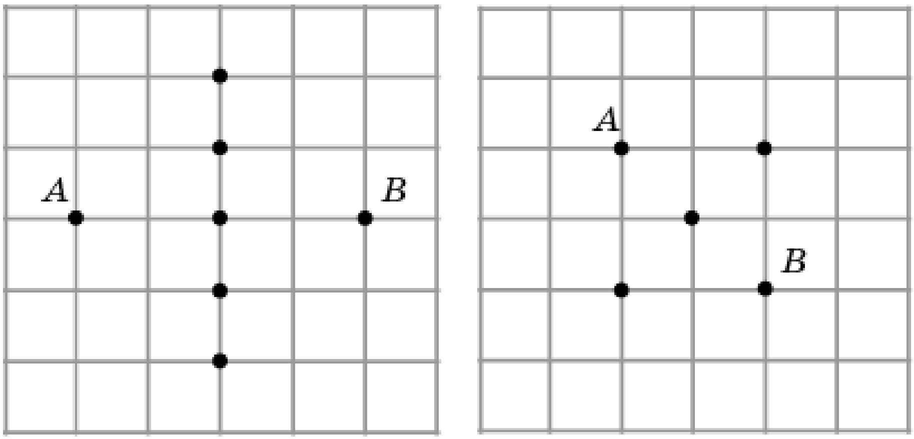


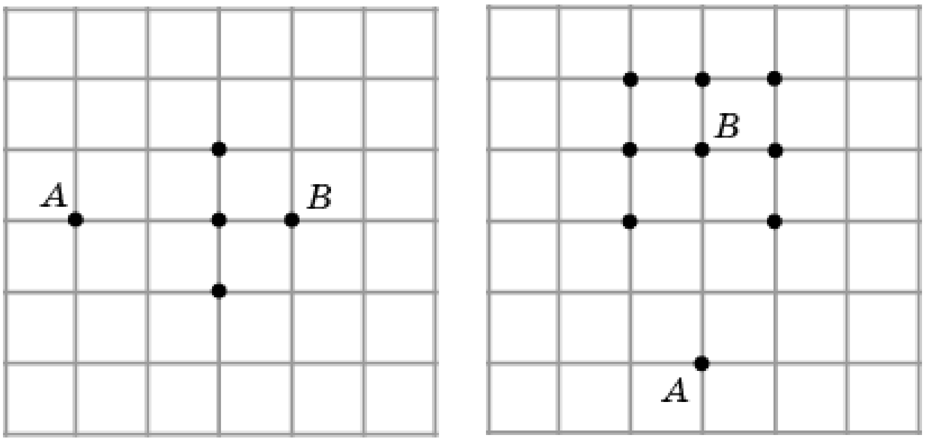
Рис. 8

7. Рисунок 9.



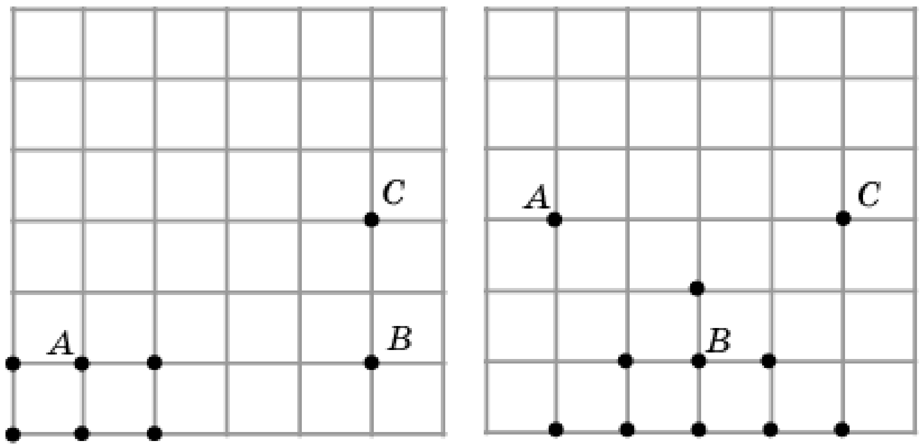
а) б)
Рис. 9

8. Рисунок 10.



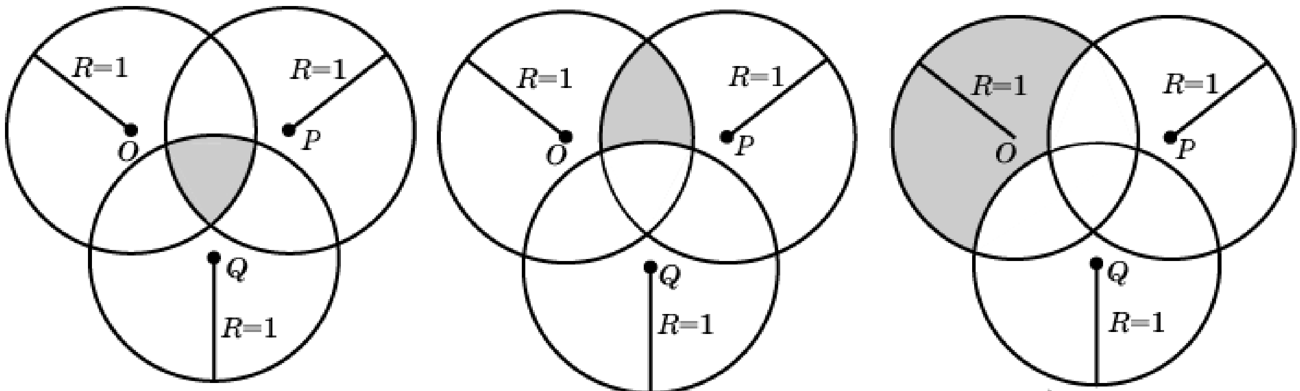
а) б)
Рис. 10

9. Рисунок 11.



а) б)
Рис. 11

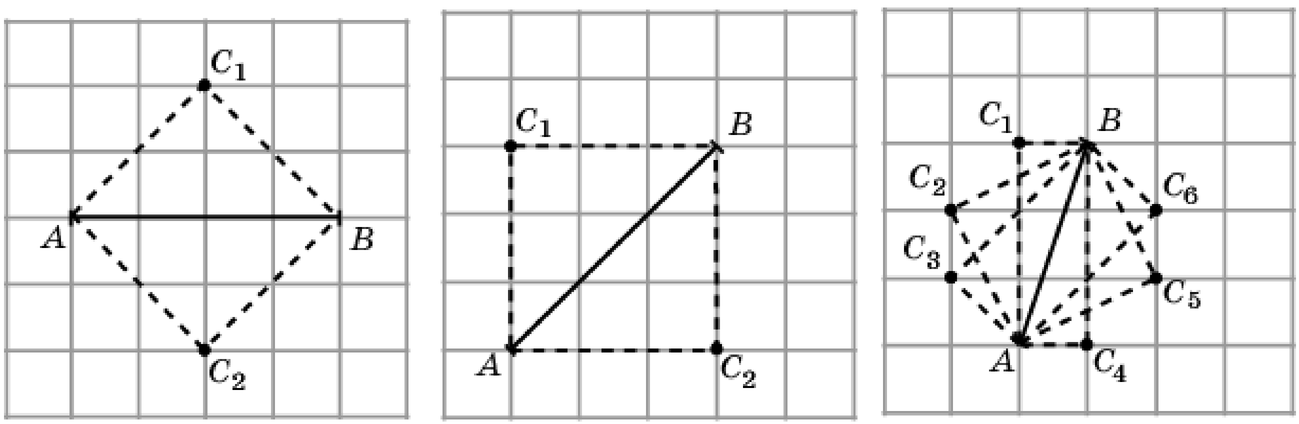
10. Рисунок 12.



а) б) в)

Рис. 12

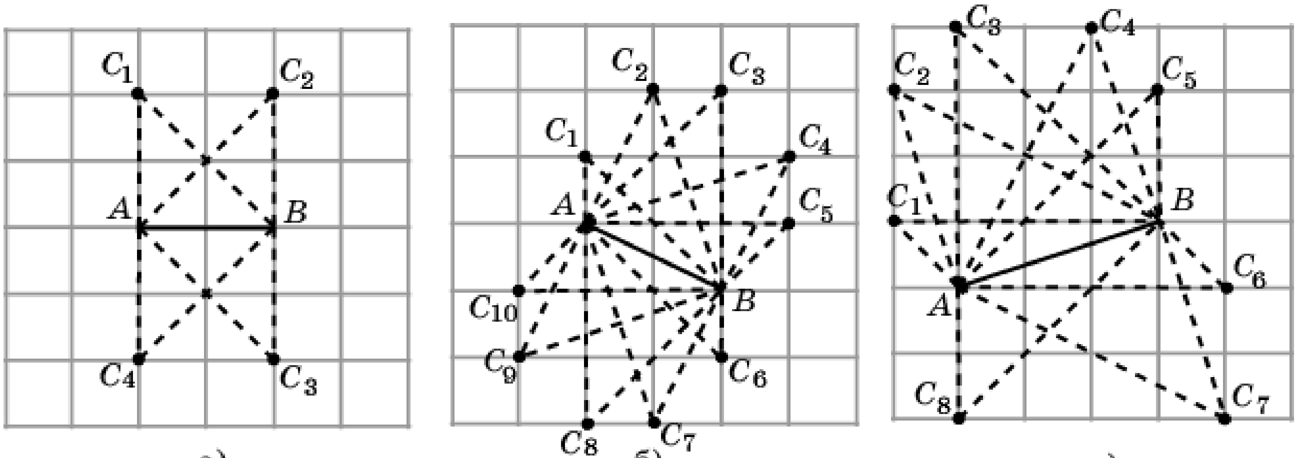
11. Рисунок 13.



а) б) в)

Рис. 13

12. Рисунок 14.



а) б) в)

Рис. 14

§ 3*. Графы

1. 6 (рис. 15). **2.** 10 (рис. 16).

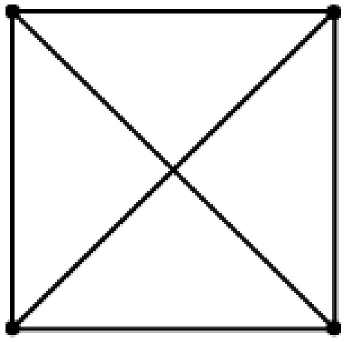


Рис. 15

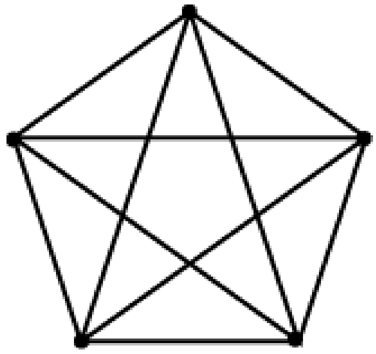


Рис. 16

3. Нет. **4.** а), в) Нет; б), г) да. **5.** а), б), г), д), ж), з). **7.** 1. **8.** Нет; 3. **9.** 4. **10.** Да. **11.** 6. **12.** 10. **13.** 18. **14.** 8. **15.** 12. **16.** 9.

§ 4*. Раскрашивание карт

1. Две. **2.** а) 3; б) 2; в) 3; г) 4. **3.** а) 4; б) 4; в) 2. **4.** а) 4; б) 3; в) 2; г) 3; д) 4. **5.** а) 4; б) 2. **6.** а) 4; б) 4; в) 3; г) 4; д) 4. **7.** а) 2; б) 2. **8.** а) 3; б) 3. **9.** а) 2; б) 2. **10.** а) 3; б) 3.

§ 5. Центральная симметрия

1. Середина отрезка. **2.** а) Нет; б), в) да. **3.** Да, например прямая имеет бесконечно много центров симметрии. **4.** Да, например, центр симметрии окружности. **5.** б), в), г), д). **6.** Рисунок 17.

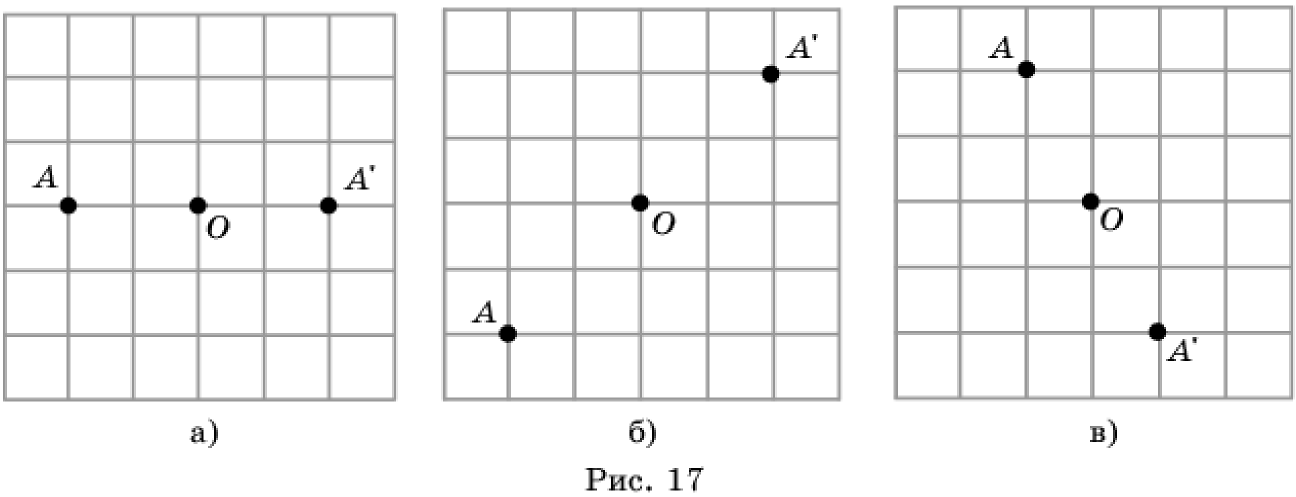
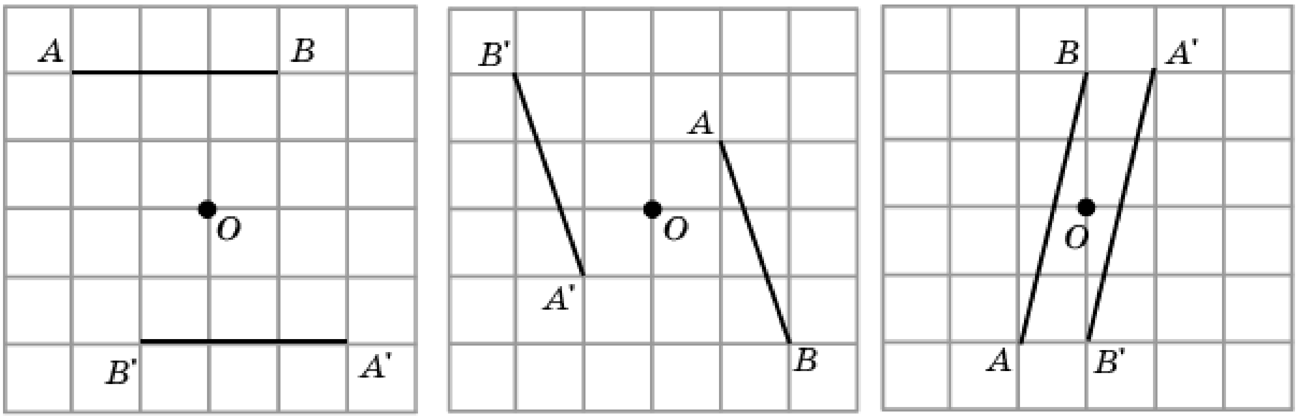


Рис. 17

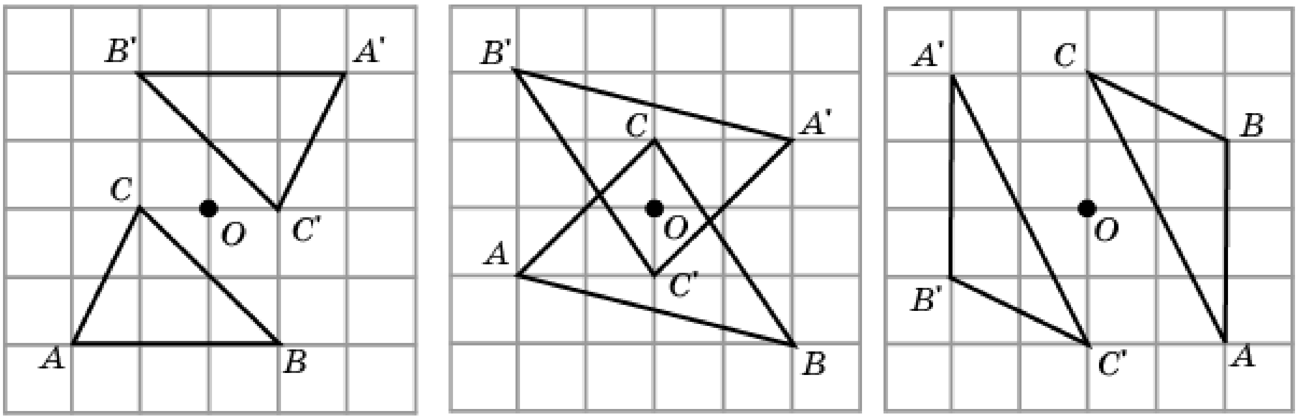
7. Рисунок 18.



а) б) в)

Рис. 18

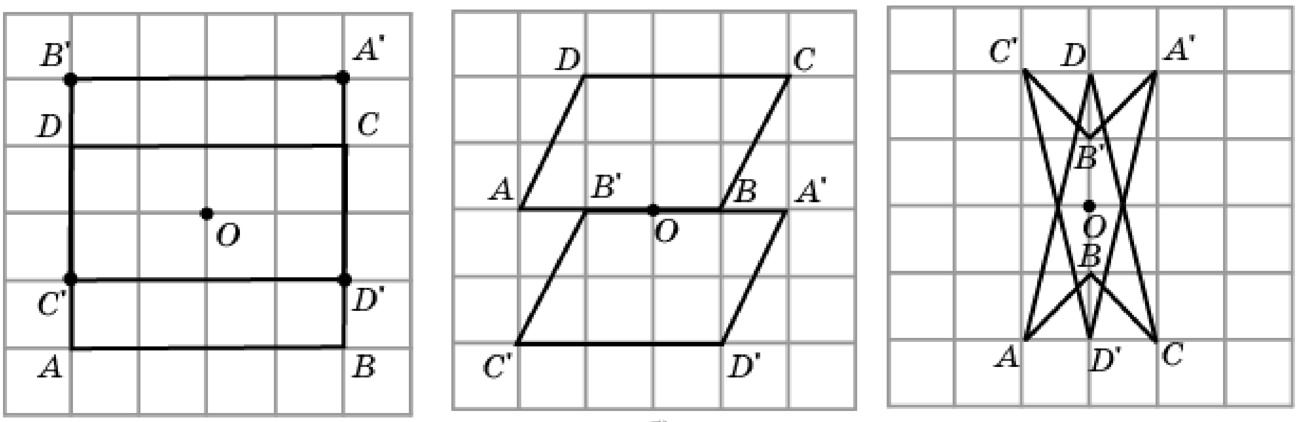
8. Рисунок 19.



а) б) в)

Рис. 19

9. Рисунок 20.



а) б) в)

Рис. 20

10. Рисунок 21.

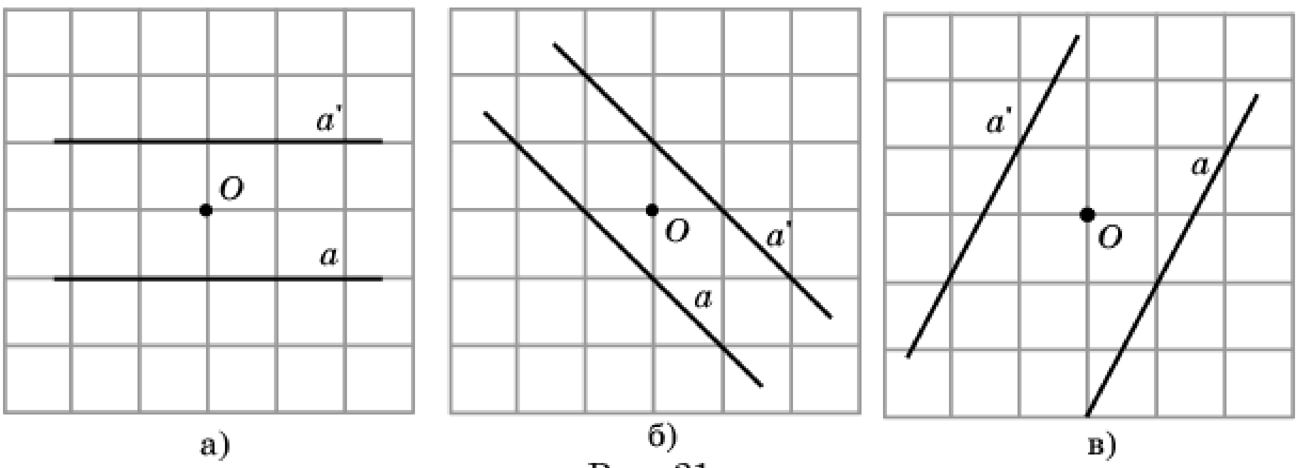


Рис. 21

11. Рисунок 22.

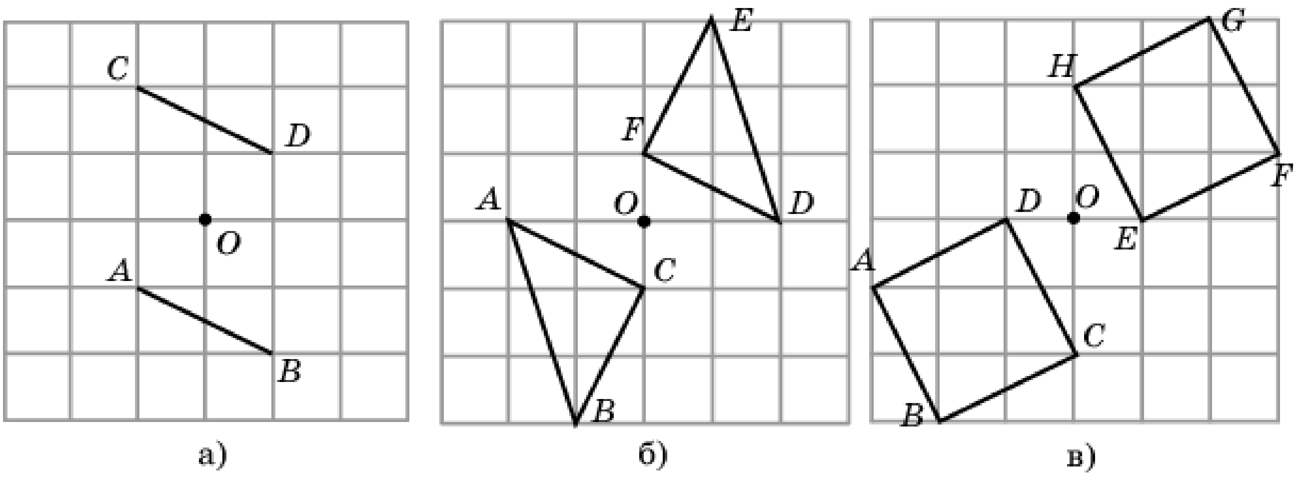


Рис. 22

12. а) Нет; б), в) да (рис. 23).

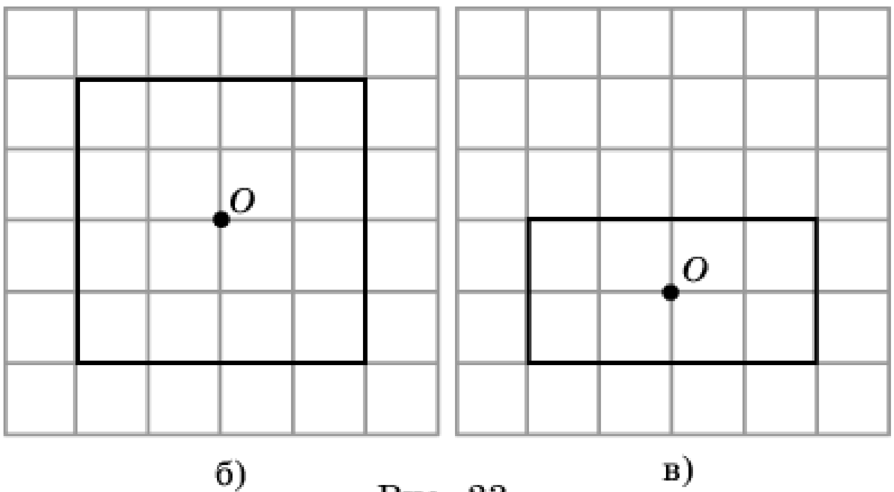
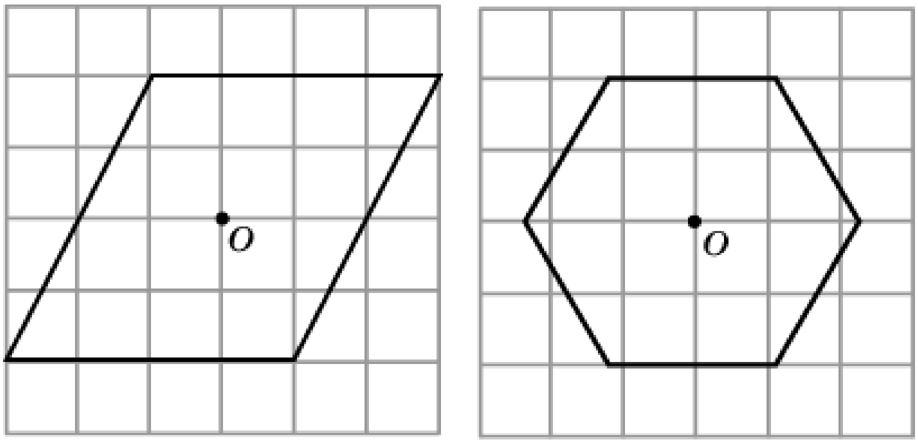


Рис. 23

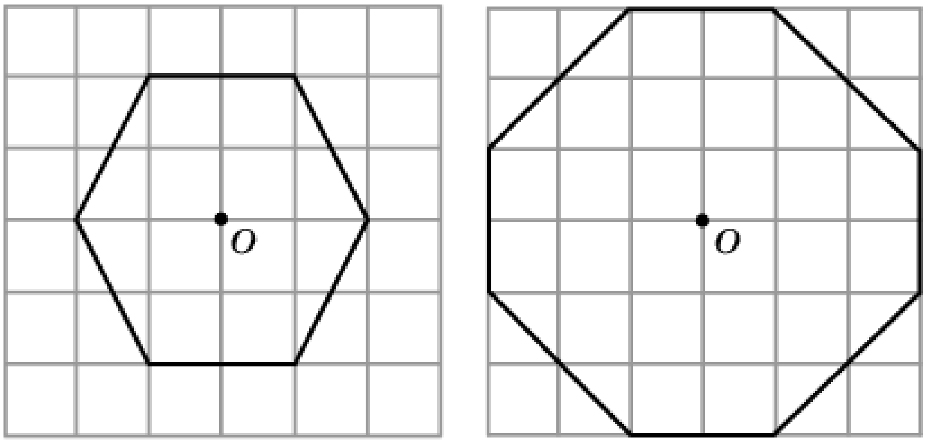
13. а), в) Да; б) нет (рис. 24).



а) в)

Рис. 24

14. а), б) Да (рис. 25).



а) б)

Рис. 25

15. Рисунок 26.

И, Н, О, Х.

Рис. 26

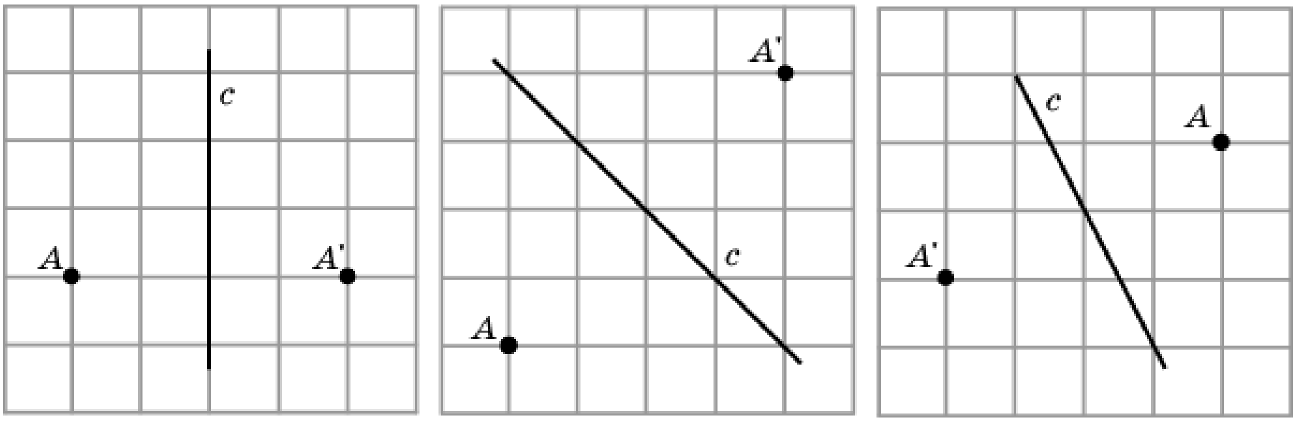
16. Рисунок 27.

H, I, N, O, S,X, Z.

Рис. 27

§ 6. Осевая симметрия

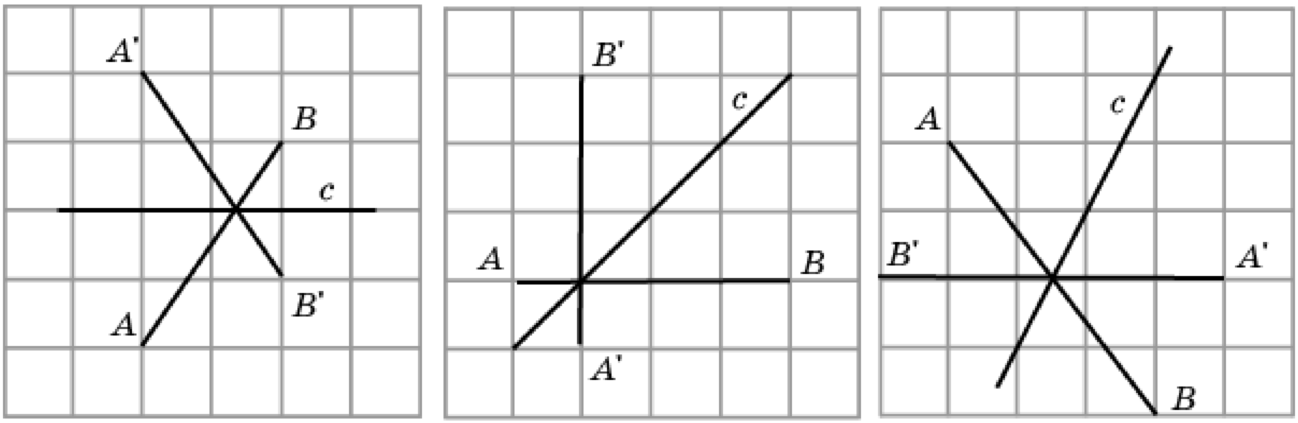
1. Прямая, содержащая отрезок, а также прямая перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. **2.** а), б), в) Да. **3.** а), в), г), д). **4.** Рисунок 28.



а) б) в)

Рис. 28

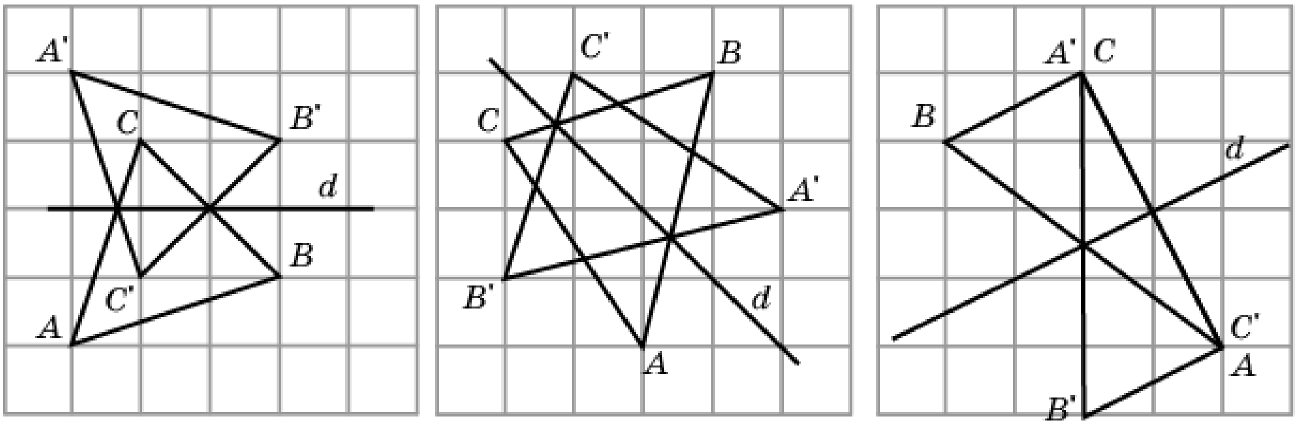
5. Рисунок 29.



а) б) в)

Рис. 29

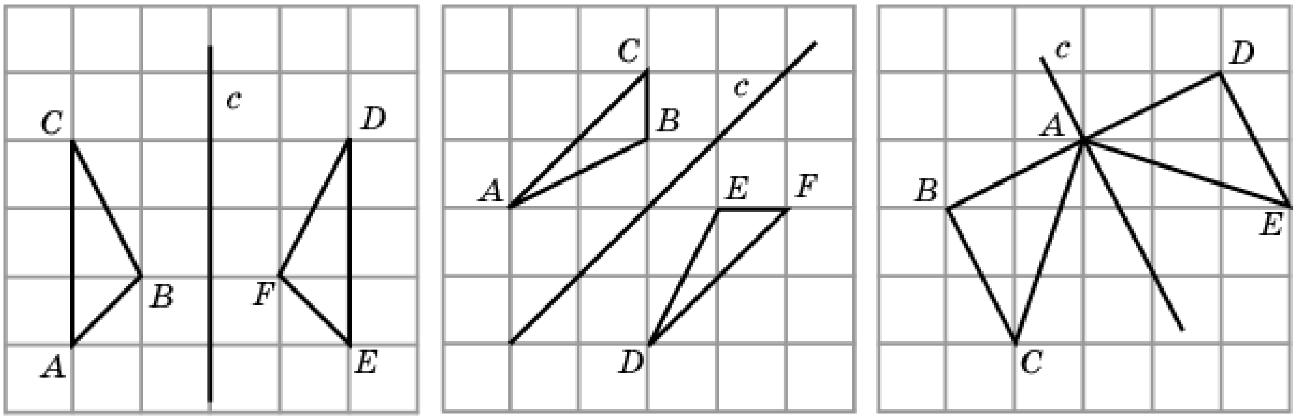
6. Рисунок 30.



а) б) в)

Рис. 30

7. Рисунок 31.



а) б) в)

Рис. 31

8. а) 2; б) 4; в) 2. **9.** а) 3; б) 5; в) 6. **10.** а) 2; б) 4. **11.** а) 5; б) 6.
12. Рисунок 32.

А, В, Е, Ж, М, Н, О, П, С, Т, Ф, Х, Ш, Ю.

Рис. 32

9. Рисунок 33.

A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y.

Рис. 33

§ 7. Поворот

1. Рисунок 34.

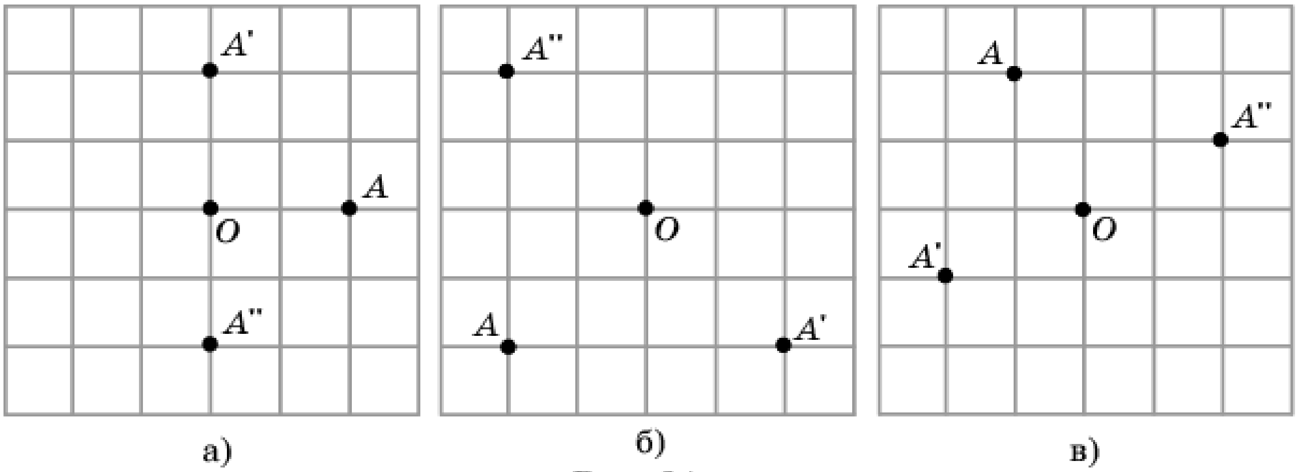


Рис. 34

2. Рисунок 35.

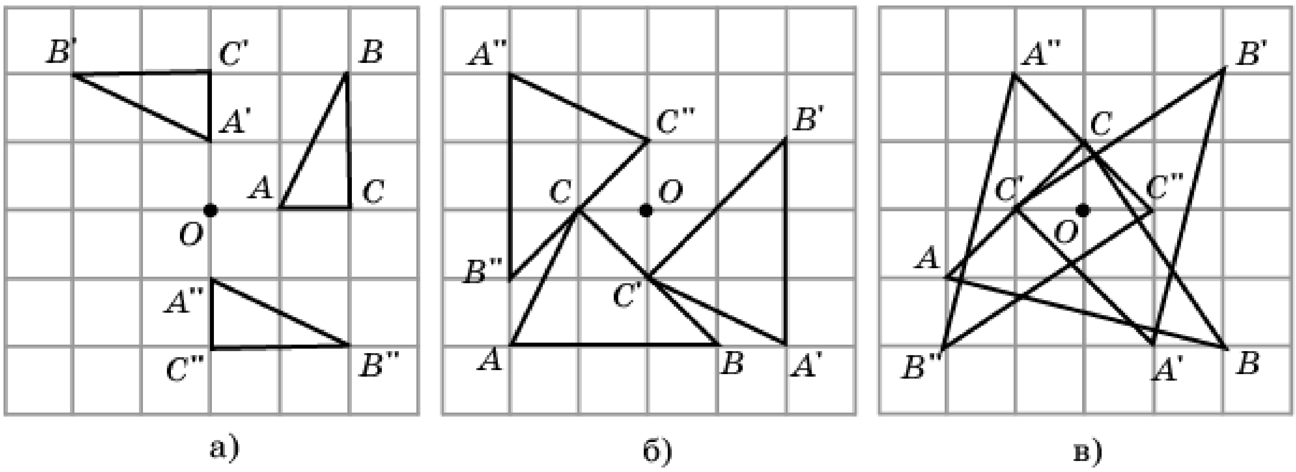


Рис. 35

3. Рисунок 36.

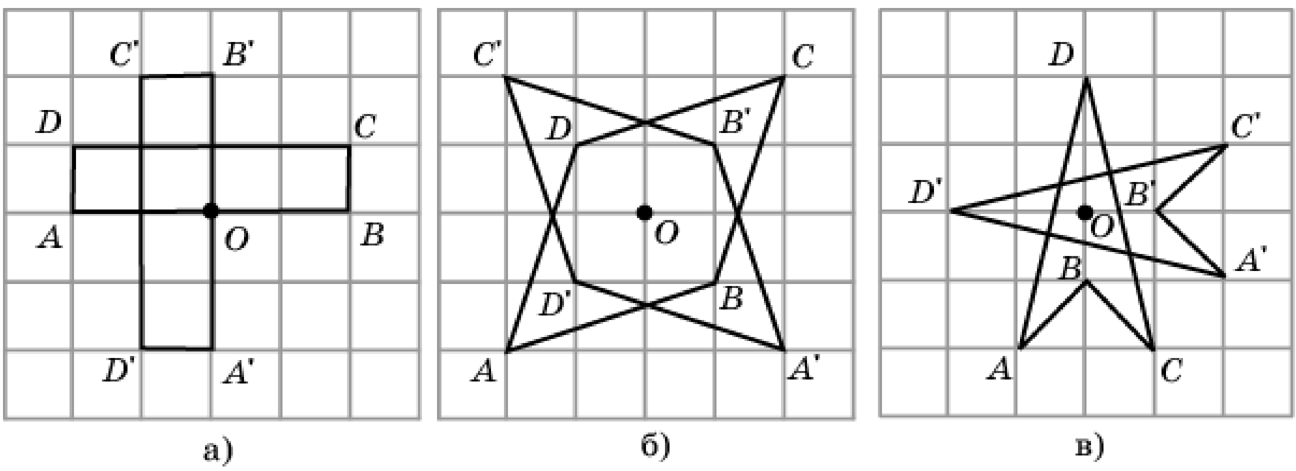


Рис. 36

4. Рисунок 37.

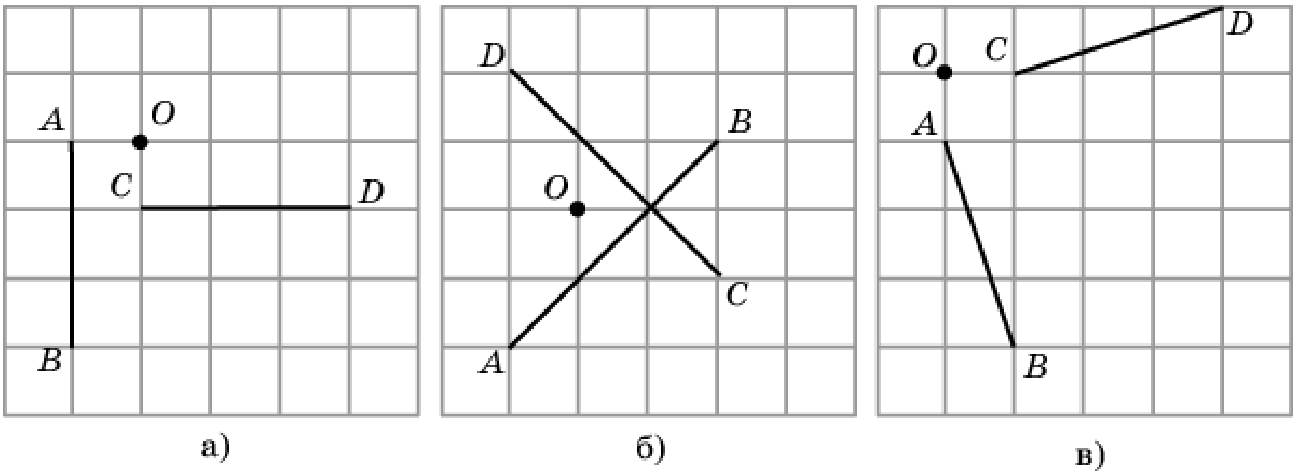


Рис. 37

5. Рисунок 38.

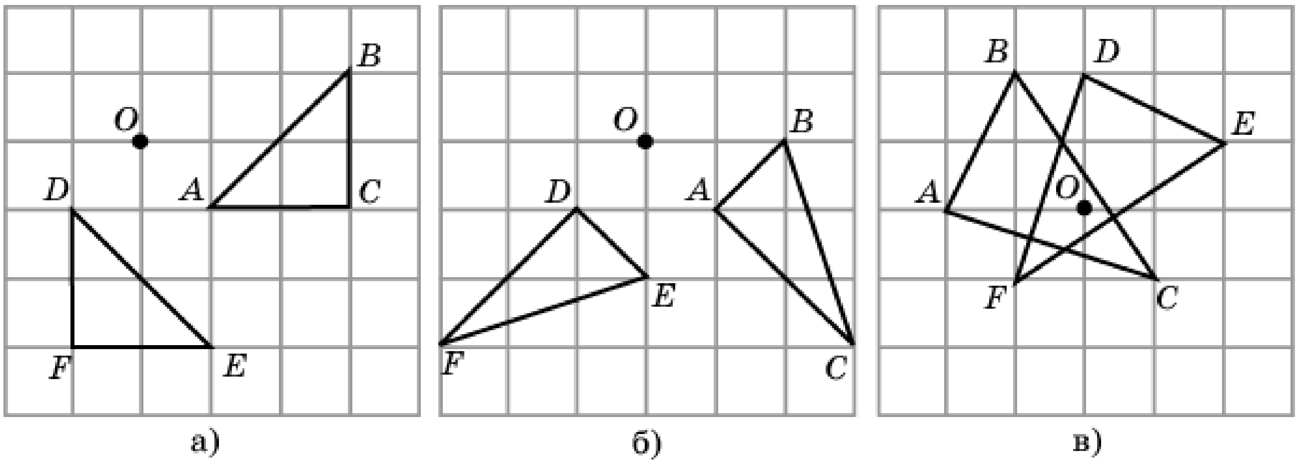


Рис. 38

6. а) 5-го; б) 6-го; в) 7-го. **7.** а) 2-го; б) 4-го. **8.** а) 9-го; б) 12-го. **9.** 6-го.

§ 8*. Паркеты

1. 2 (рис. 39).

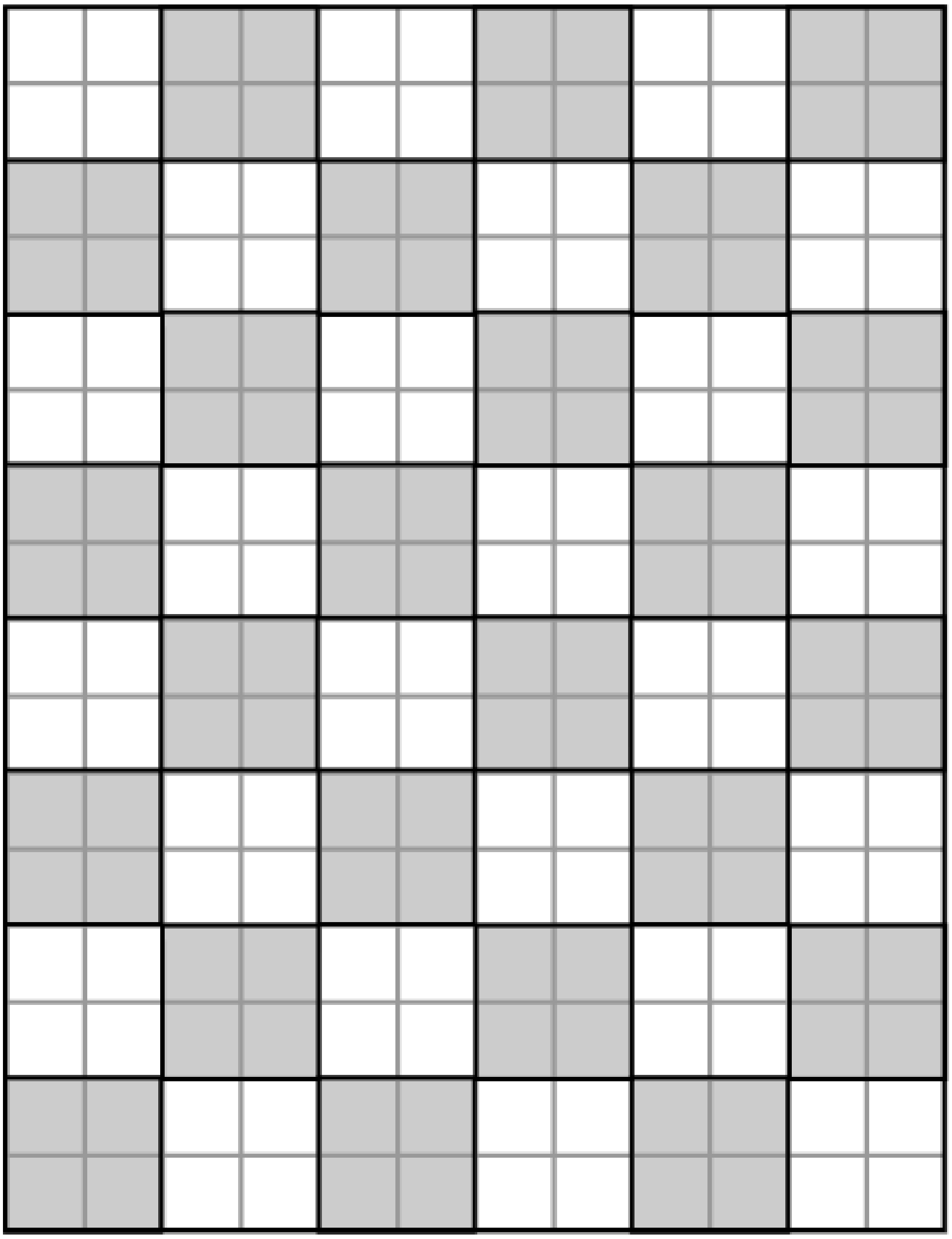


Рис. 39

2. 2 (рис. 40).

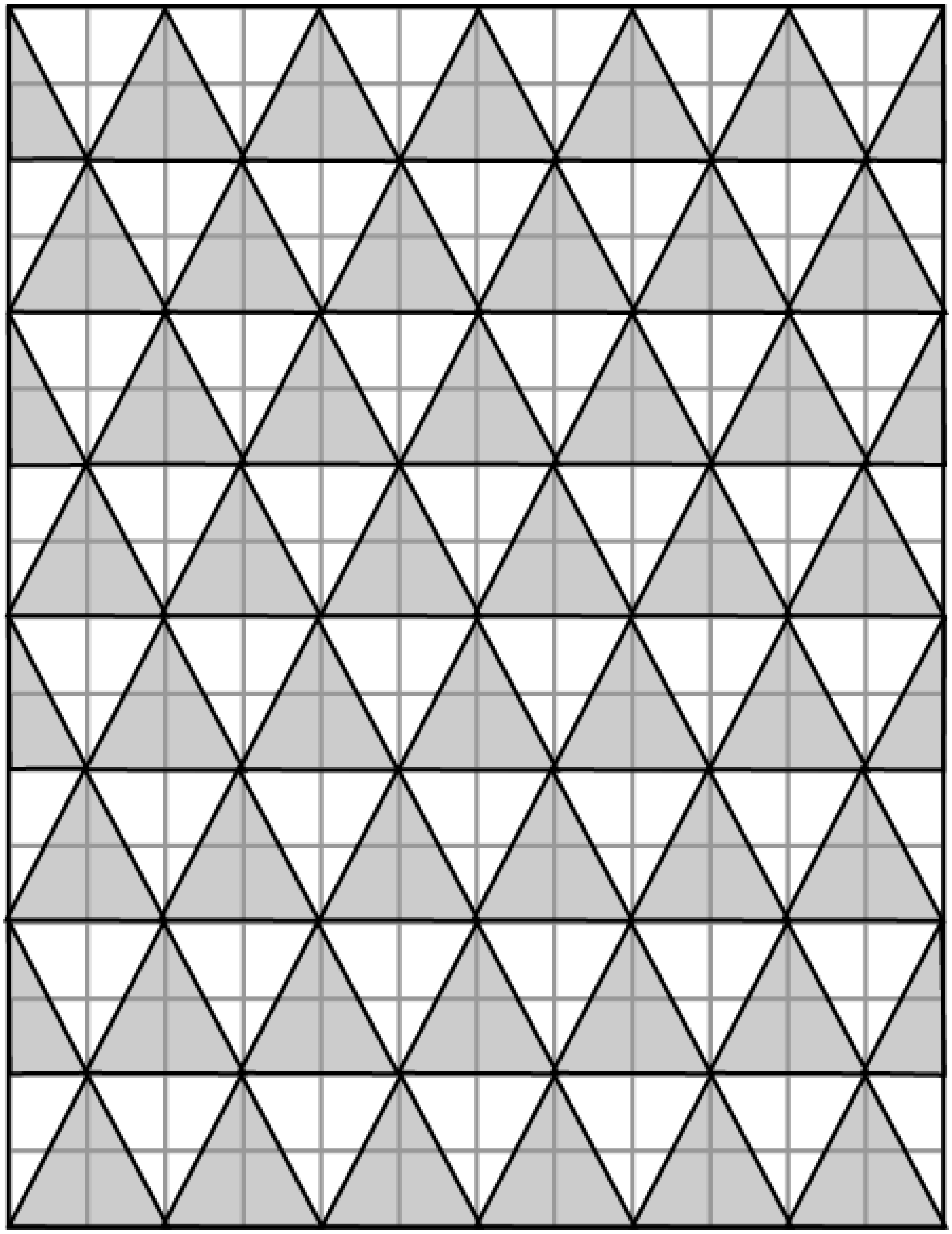


Рис. 40

3. 3 (рис. 41).

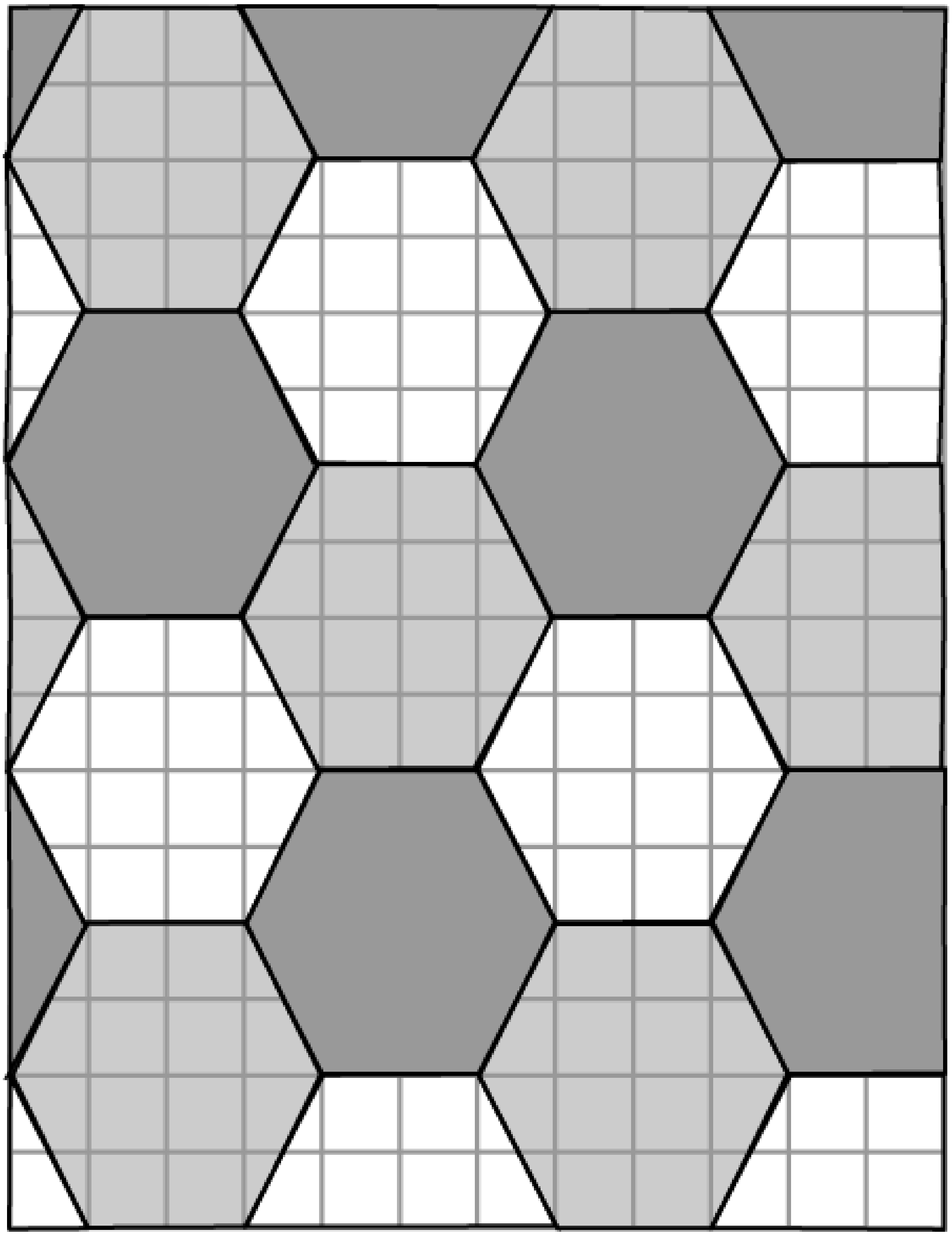


Рис. 41

4. 3 (рис. 42).

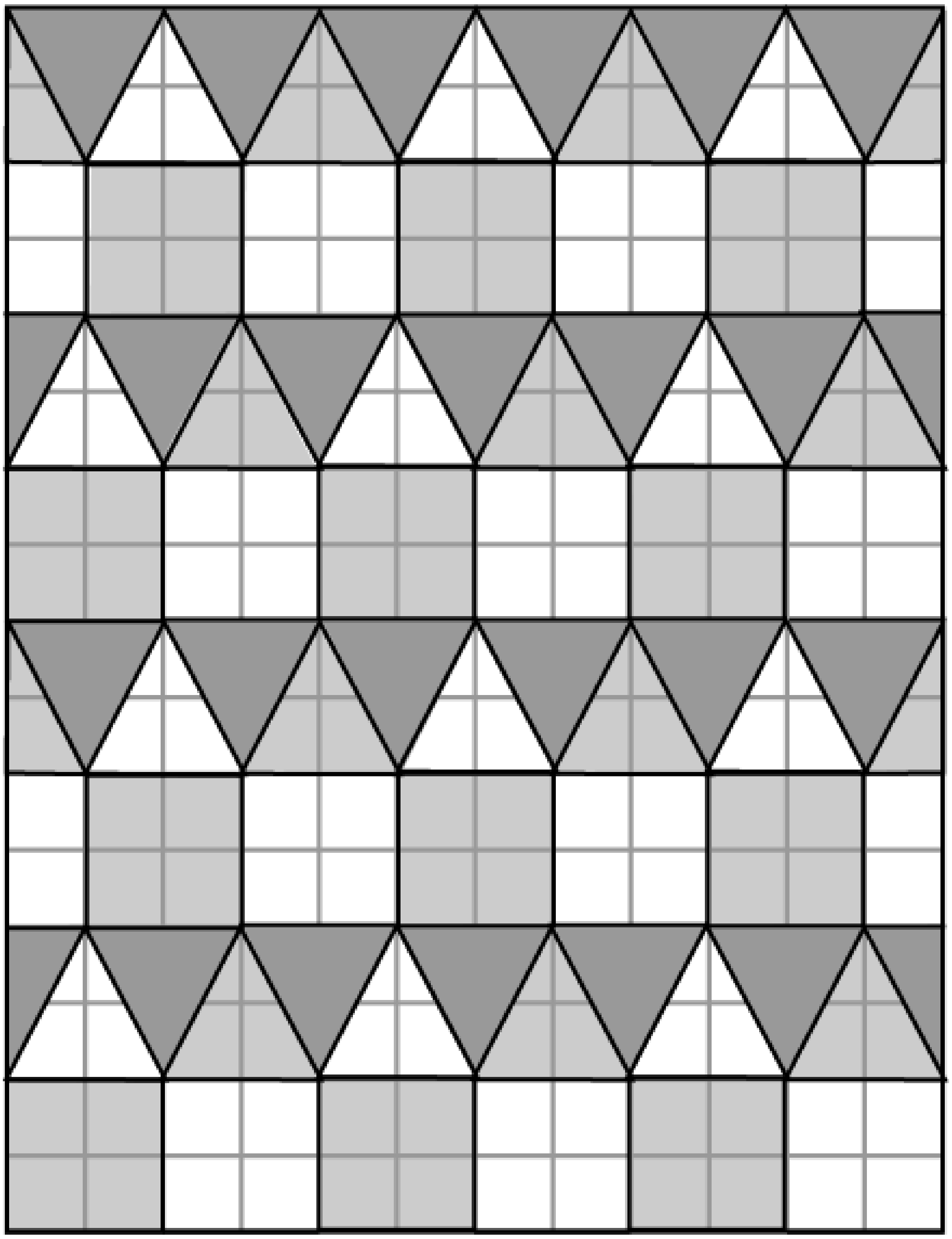


Рис. 42

5. 2 (рис. 43).

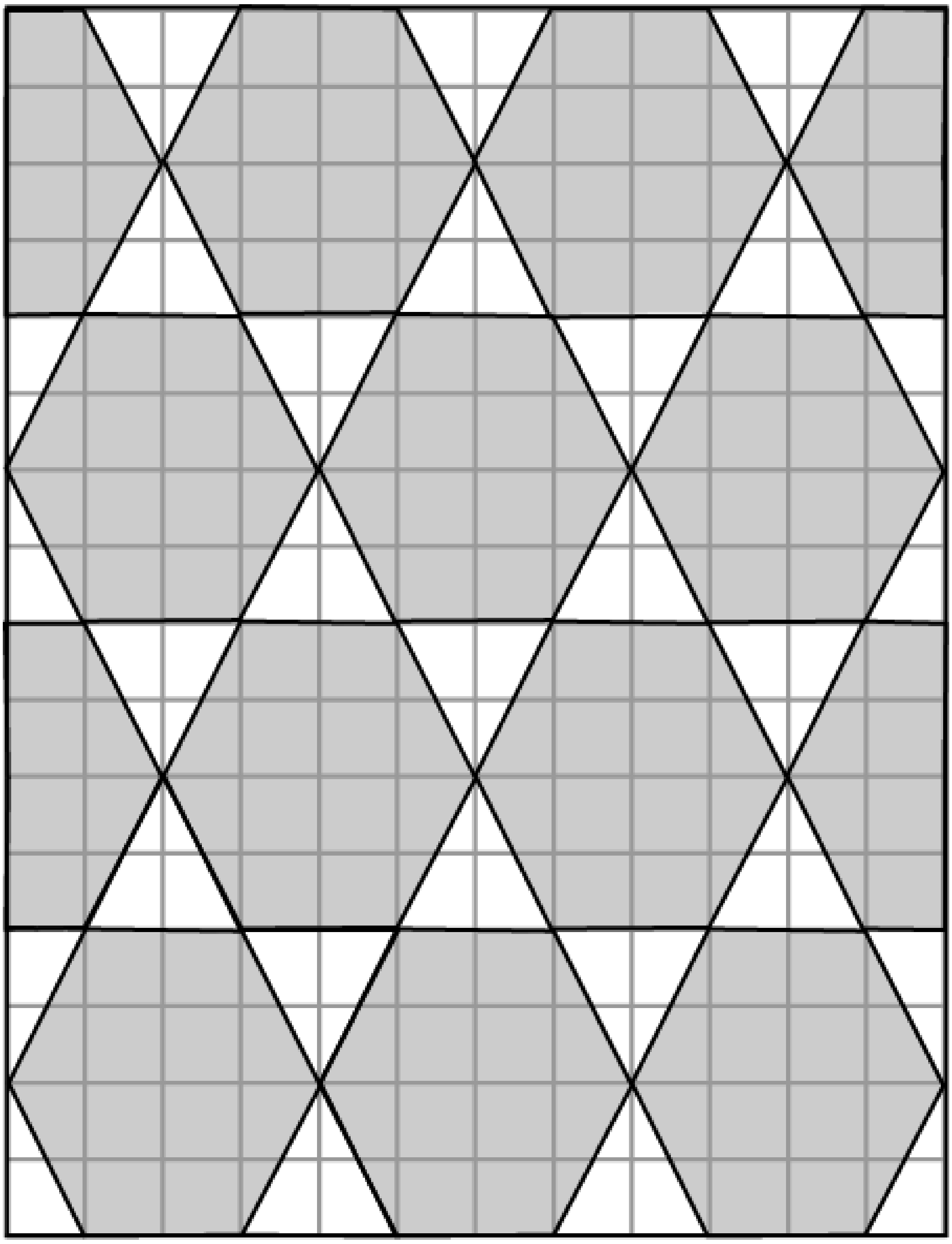


Рис. 43

6. 3 (рис. 44).

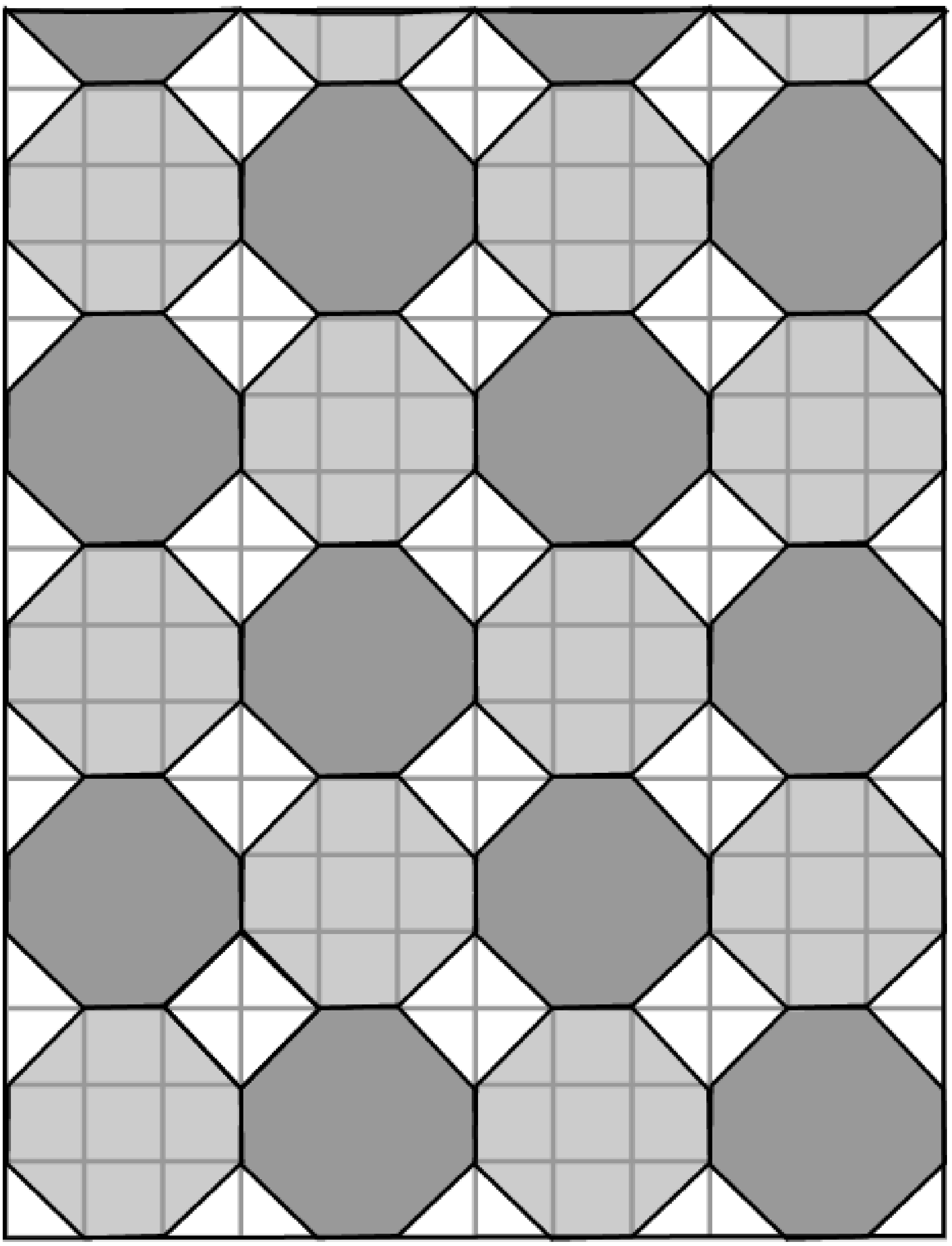


Рис. 44

7. 3 (рис. 45).

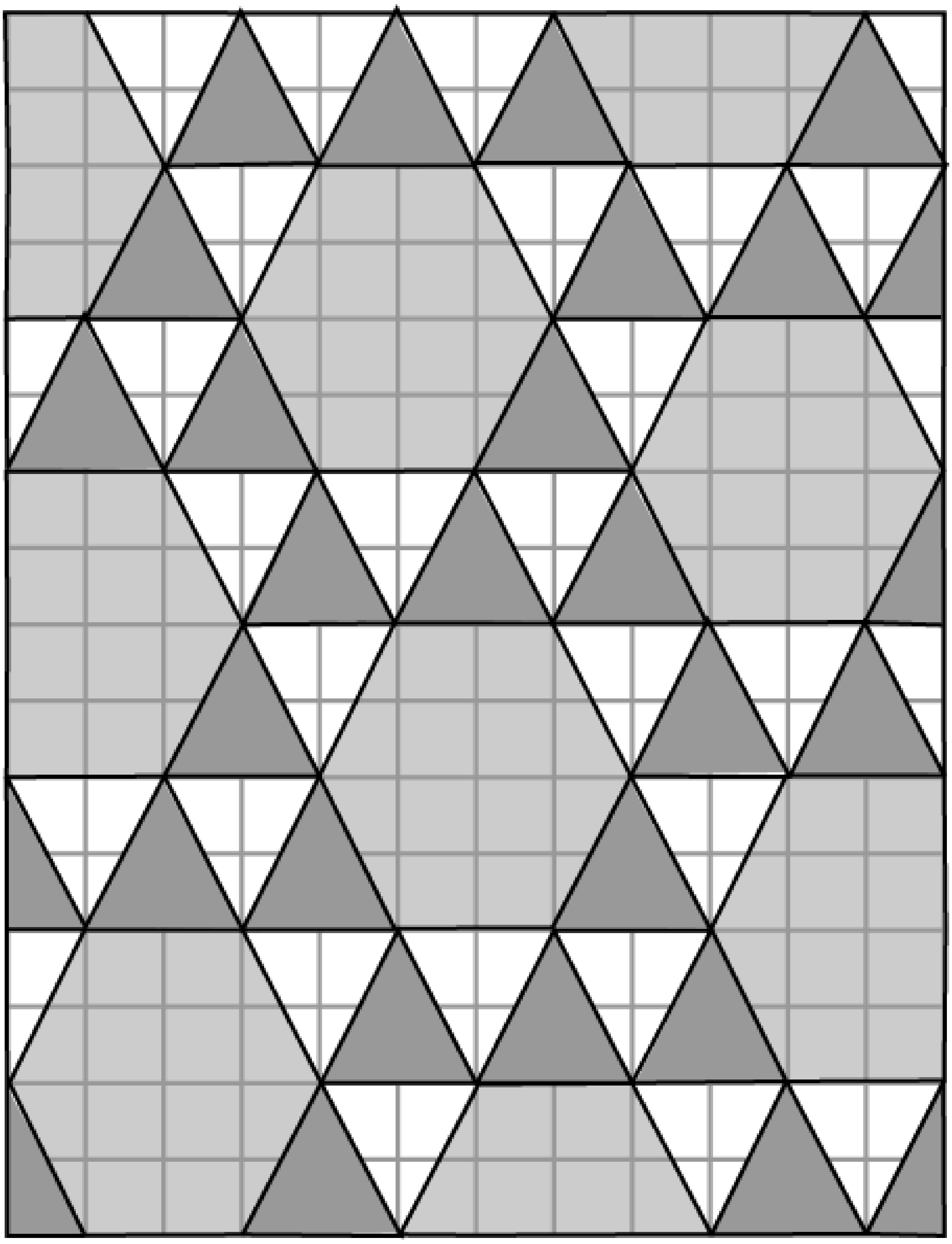


Рис. 45

8. 3 (рис. 46).

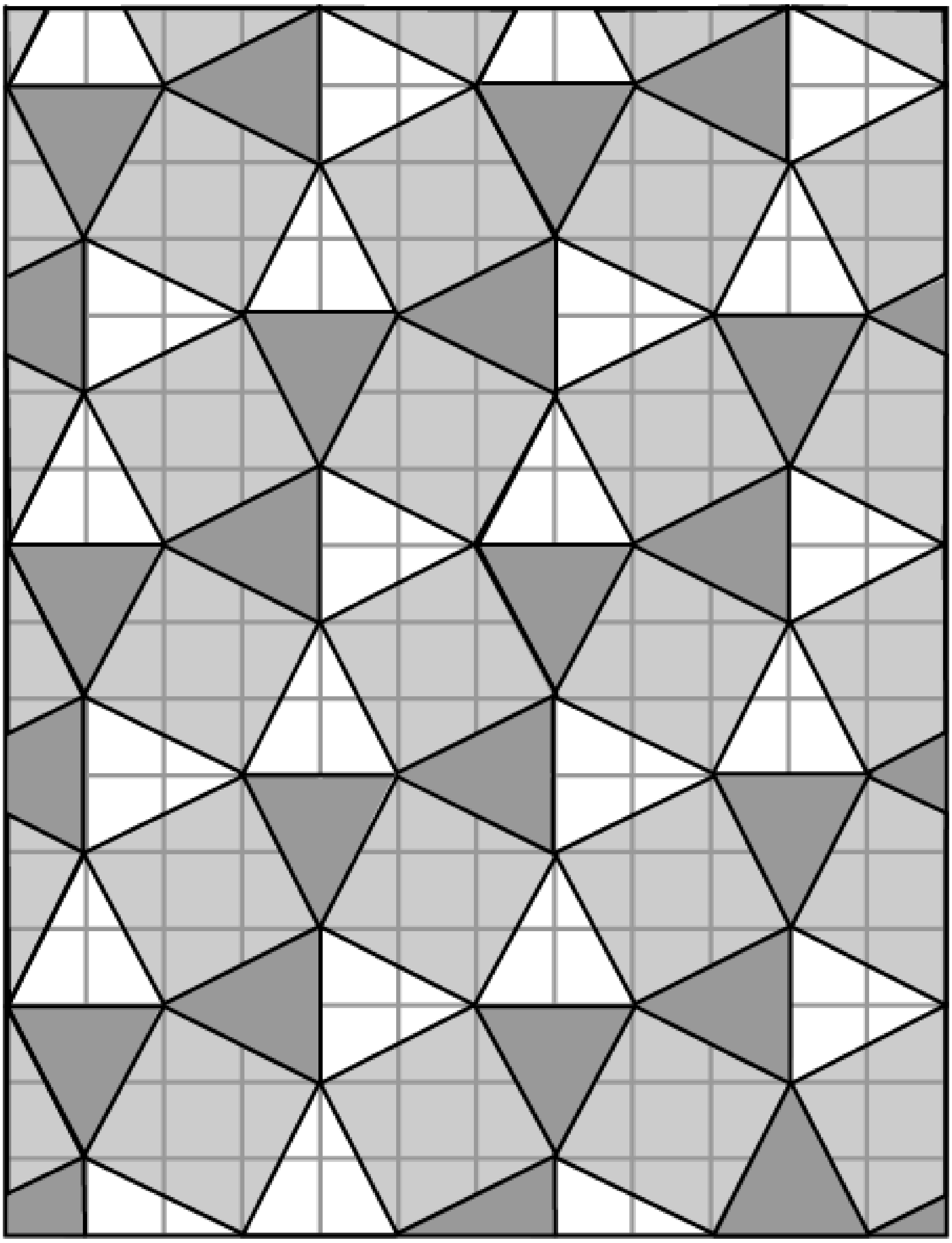


Рис. 46

9. 2 (рис. 47).

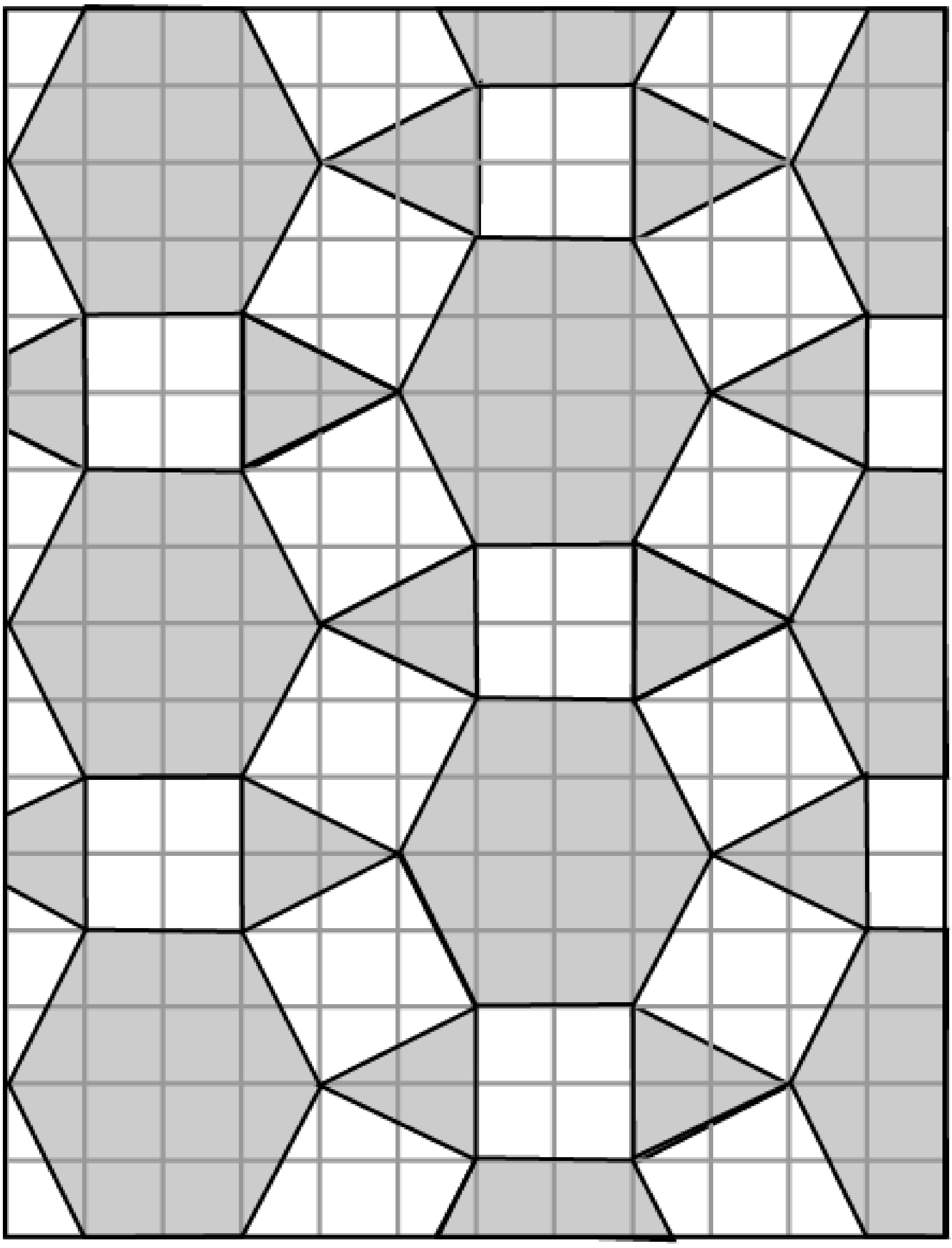


Рис. 47

10. 4 (рис. 48).

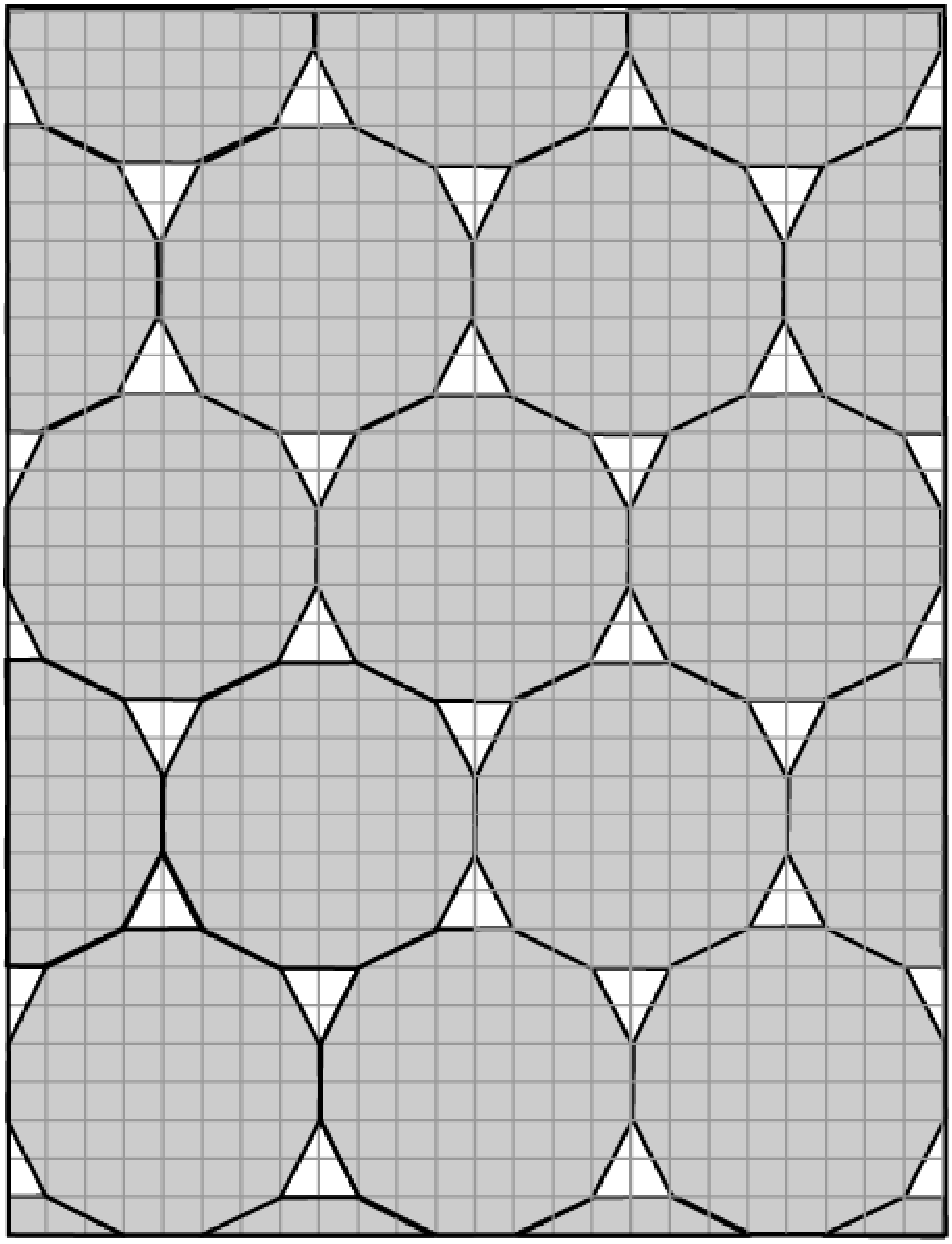


Рис. 48

11. 3 (рис. 49).

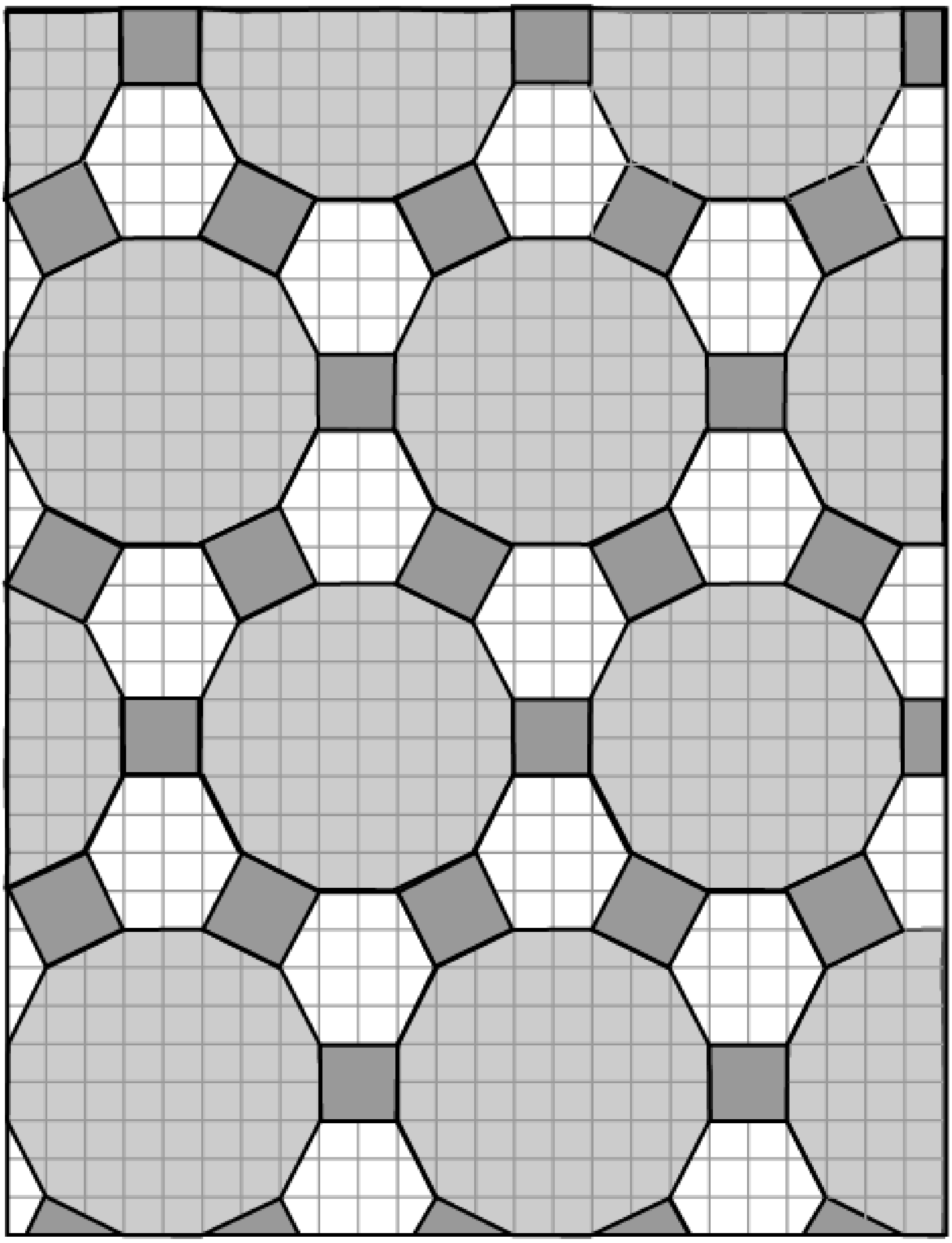


Рис. 49

12. 2 (рис. 50).

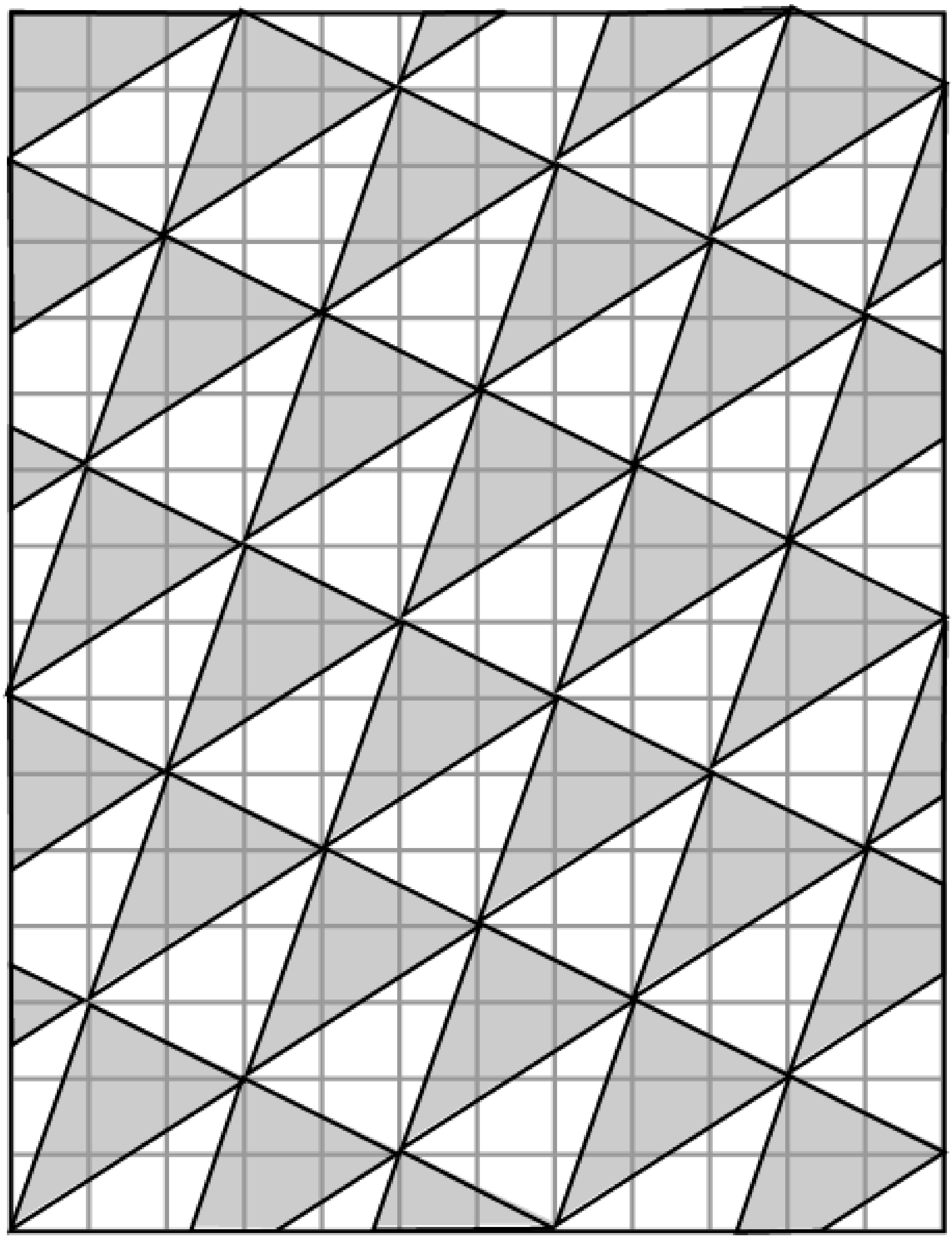


Рис. 50

13. 2 (рис. 51).

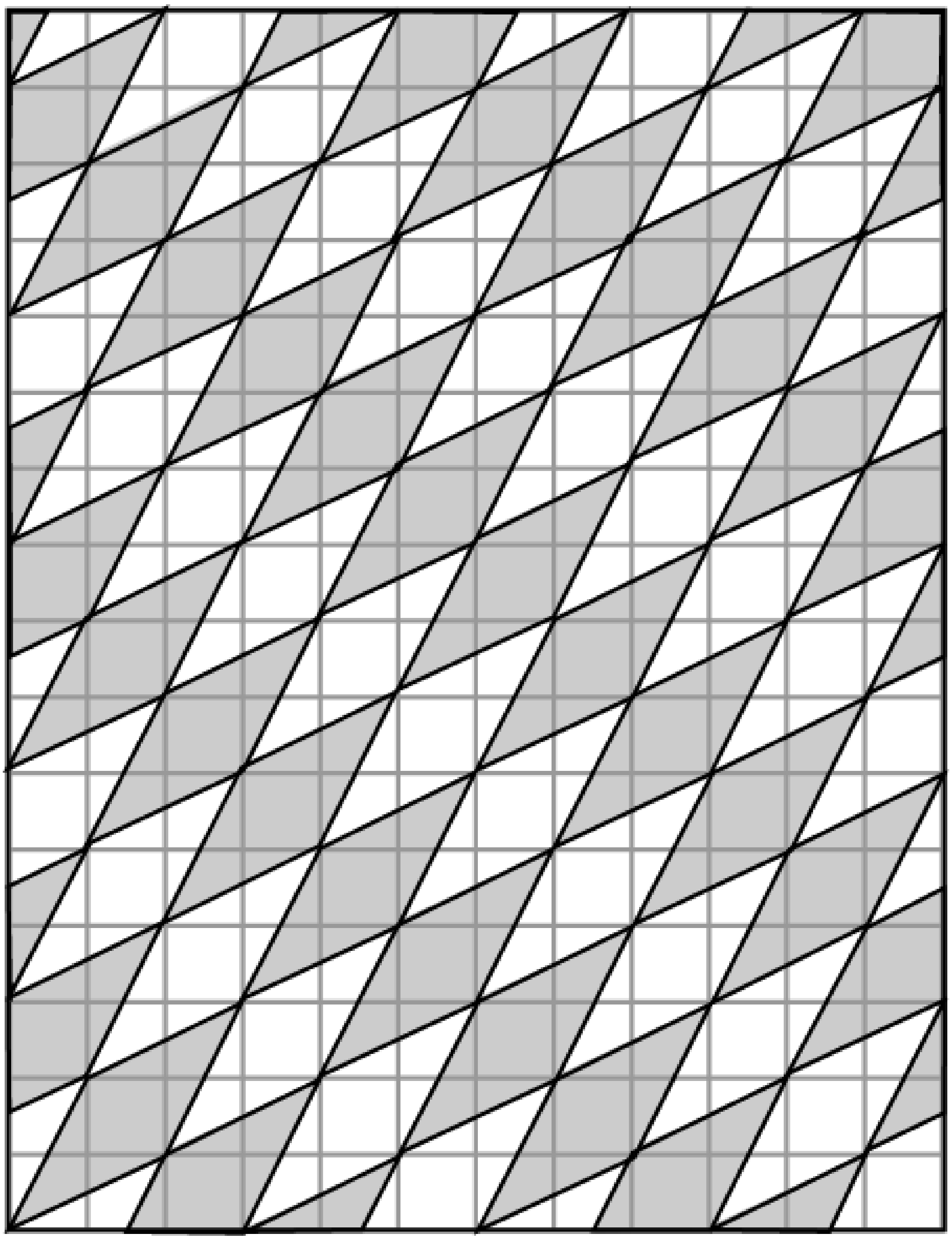


Рис. 51

14. 2 (рис. 52).

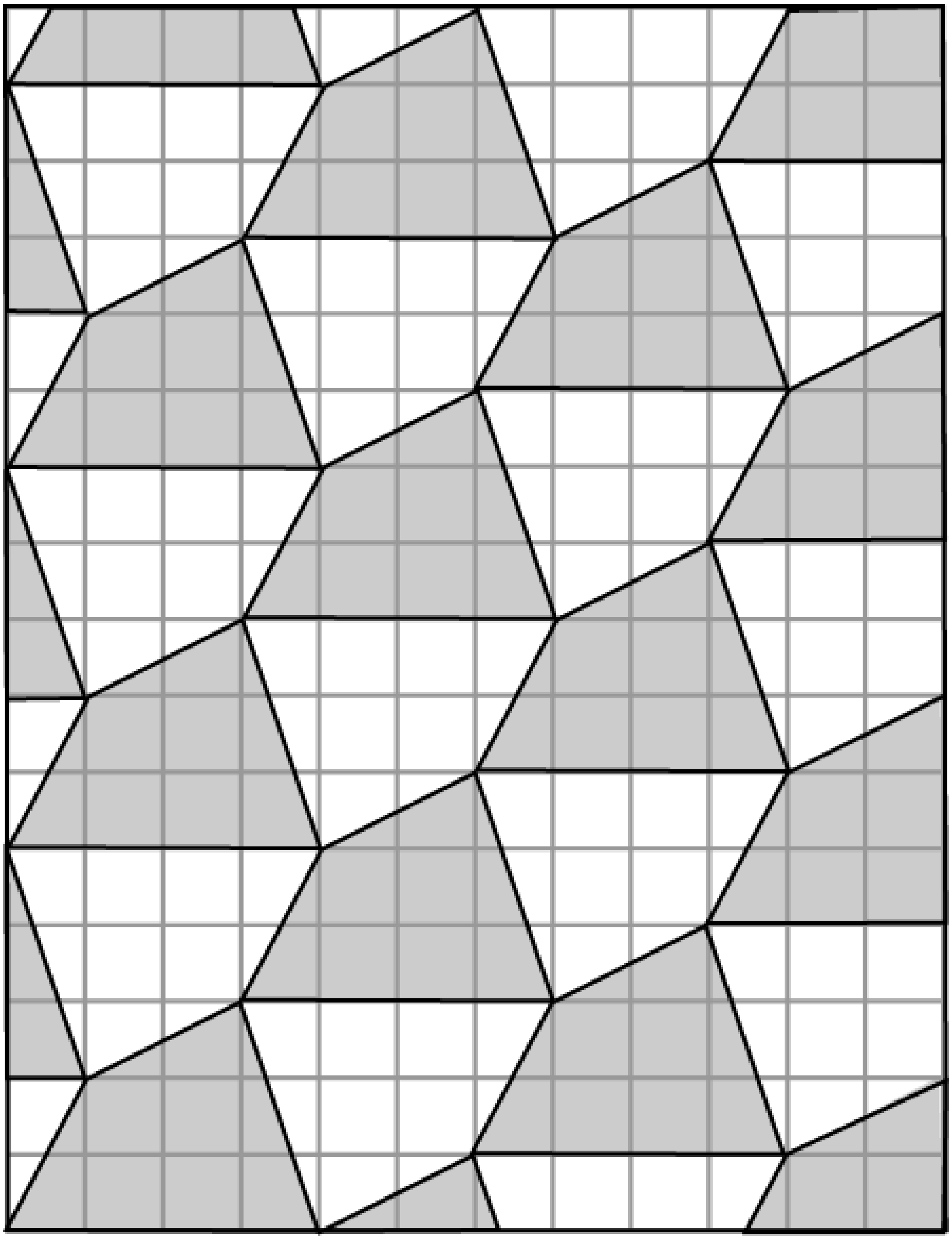


Рис. 52

15. 2 (рис. 53).

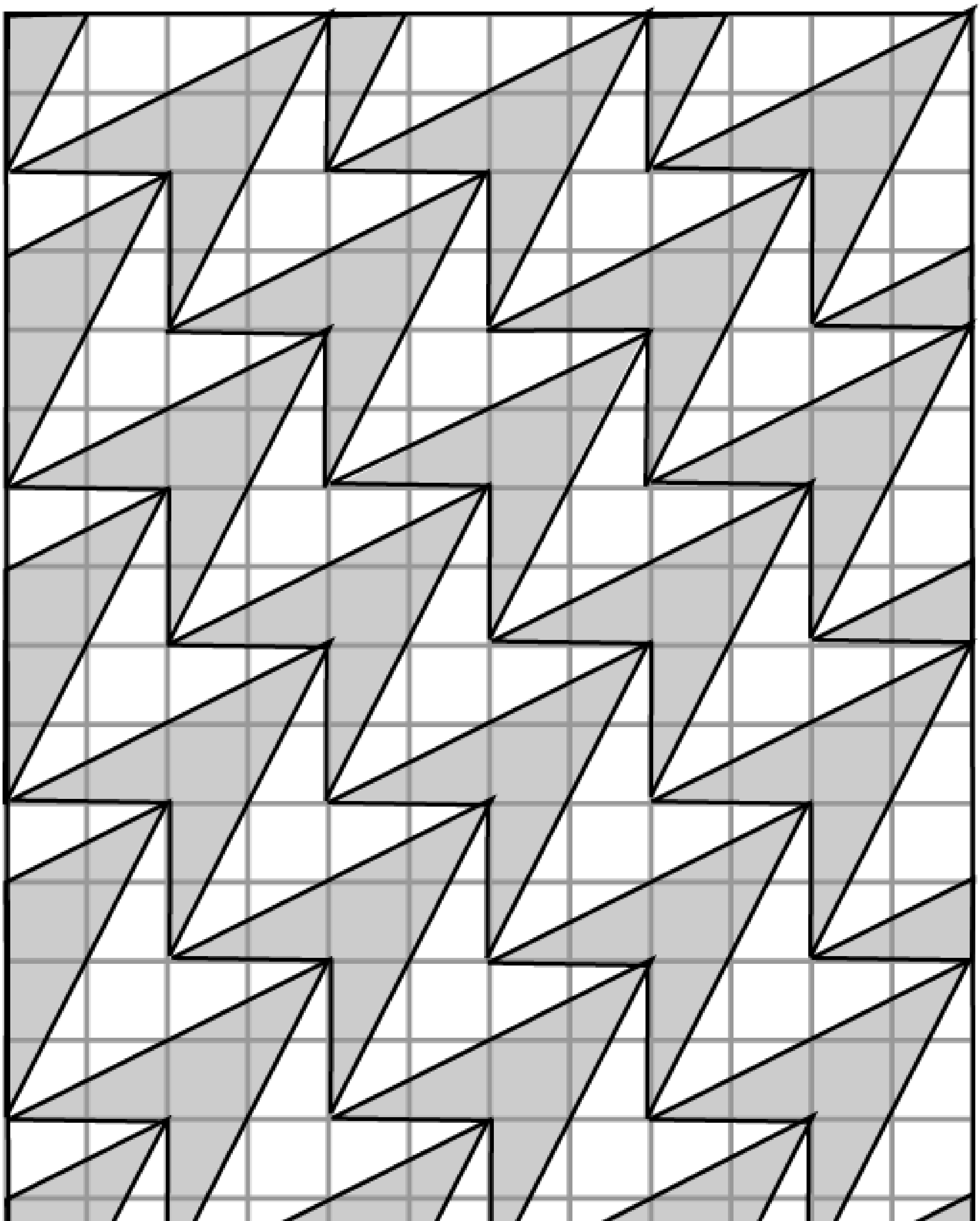


Рис. 53

16. 3 (рис. 54).

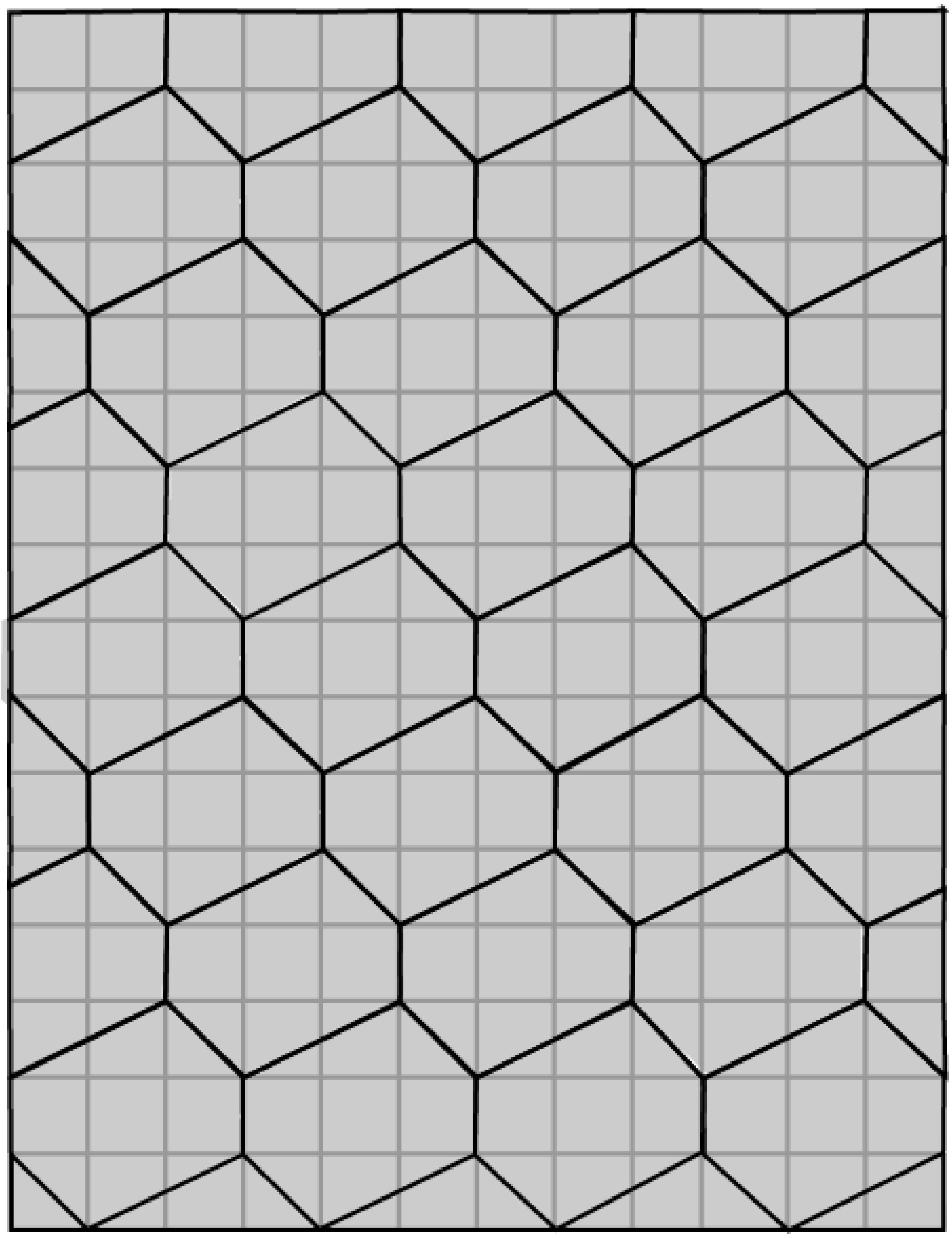


Рис. 54

17. 4 (рис. 55).

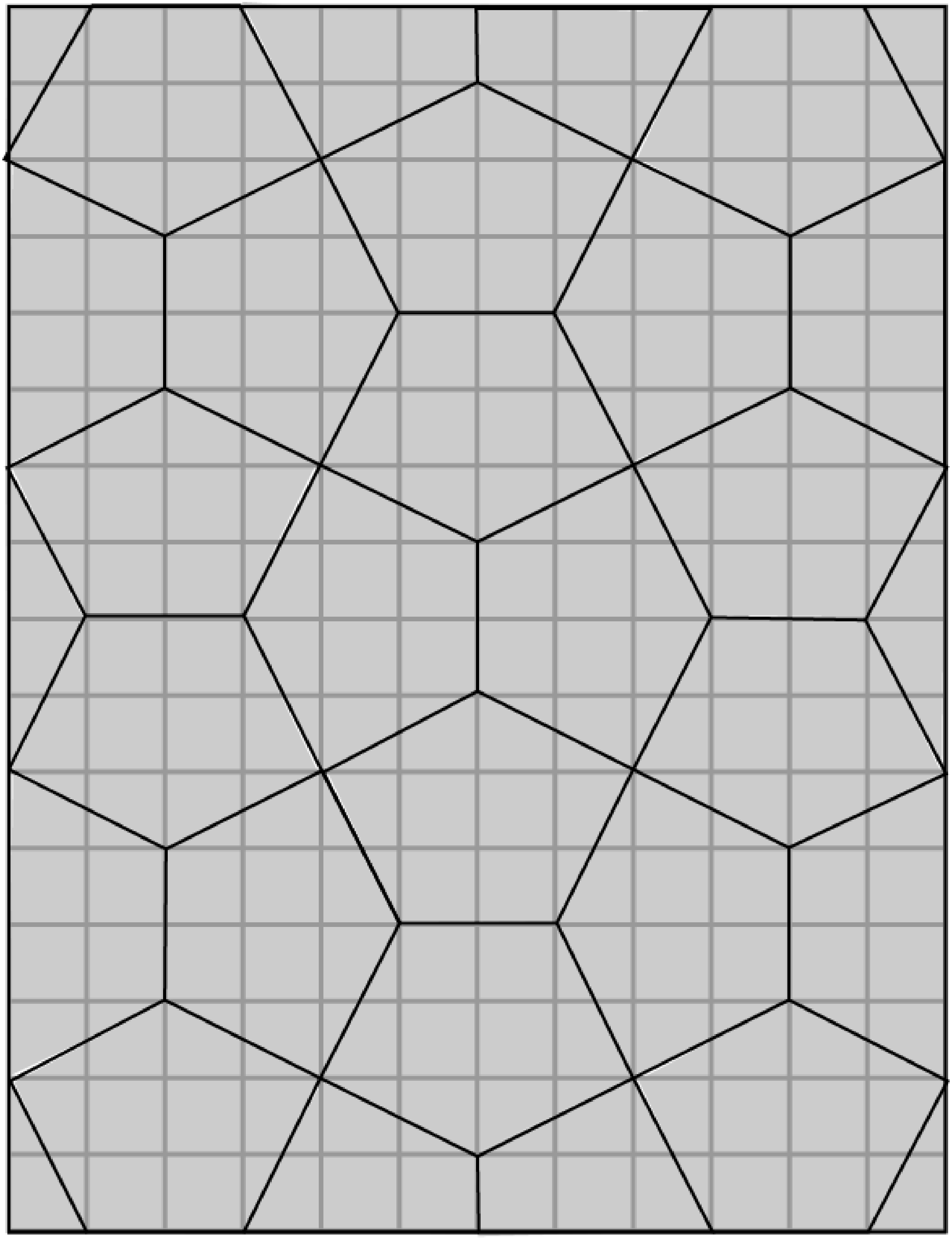


Рис. 55

18. 2 (рис. 56).

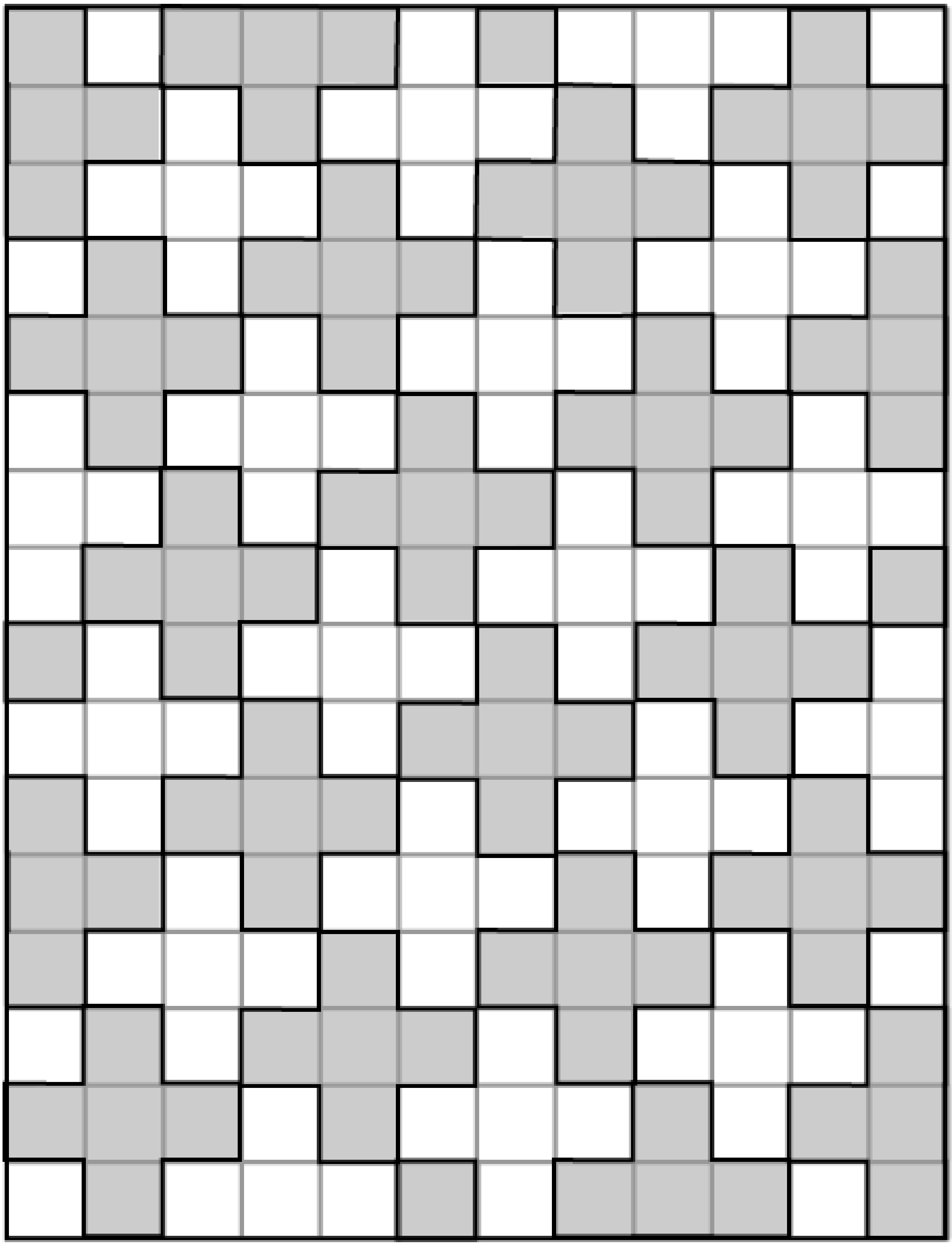


Рис. 56

19. 2 (рис. 57).

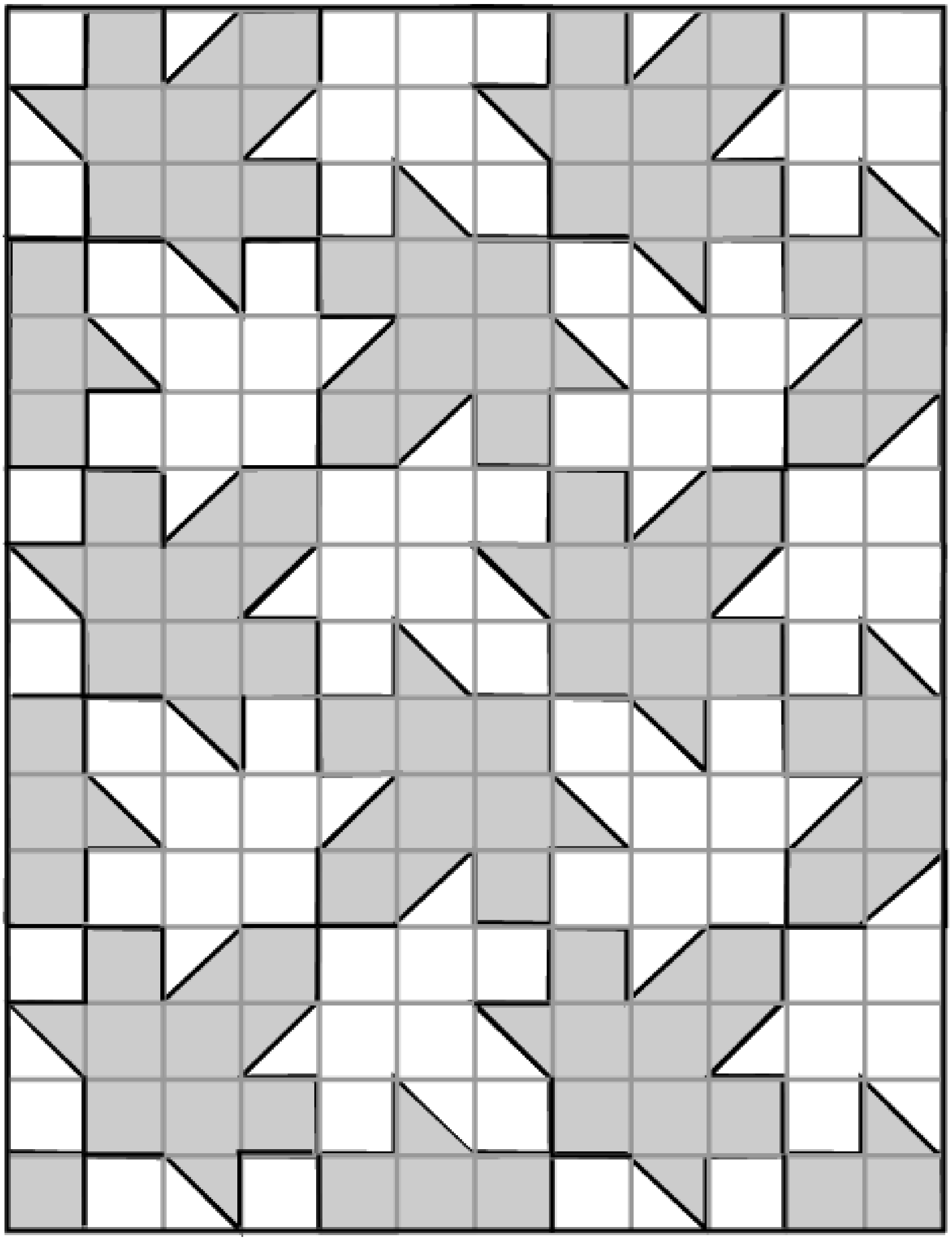


Рис. 57

§ 9*. Кривые

1. Рисунок 58.

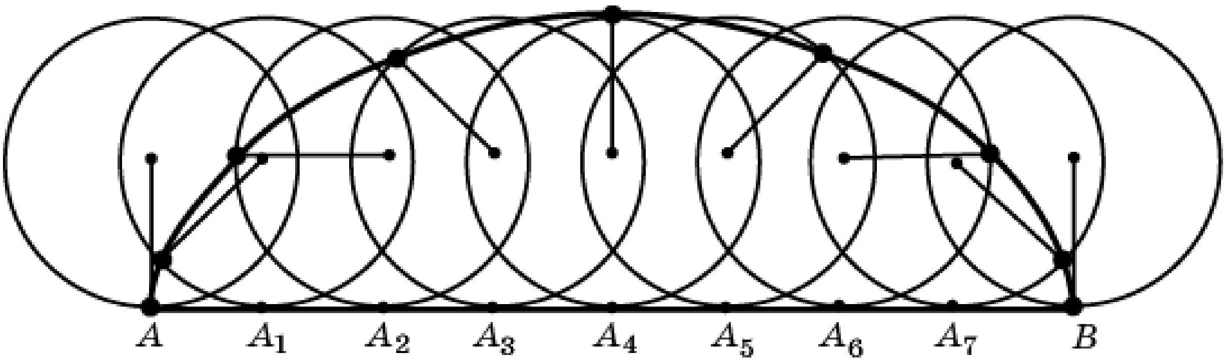


Рис. 58

2. Рисунок 59.

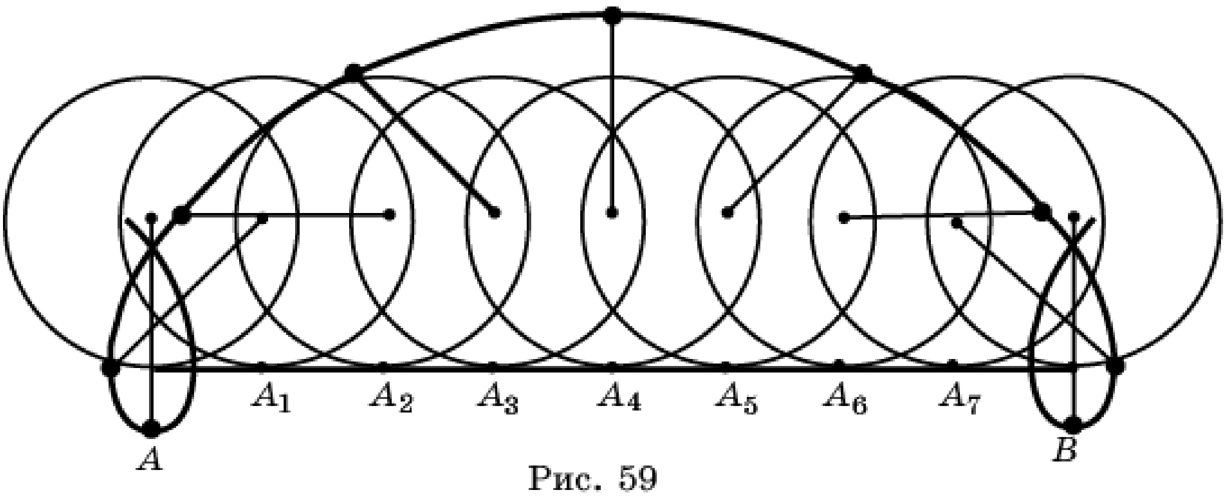


Рис. 59

3. Рисунок 60.

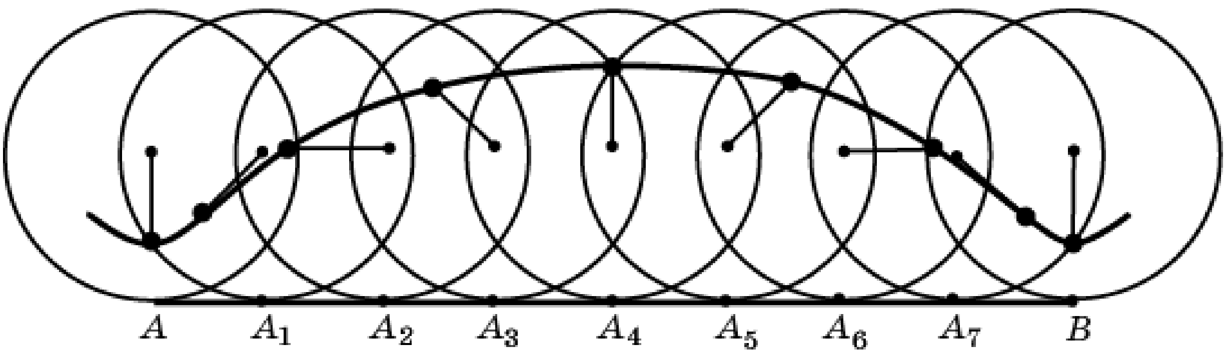


Рис. 60

4. Рисунок 61.

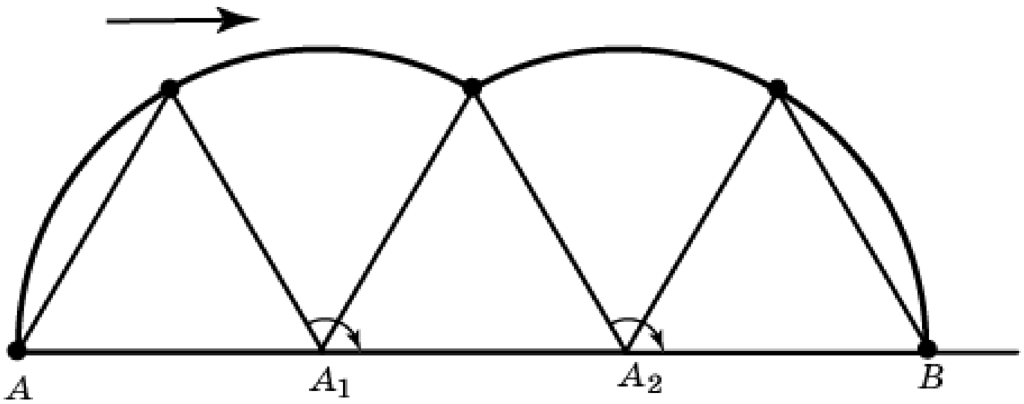


Рис. 61

5. Рисунок 62.

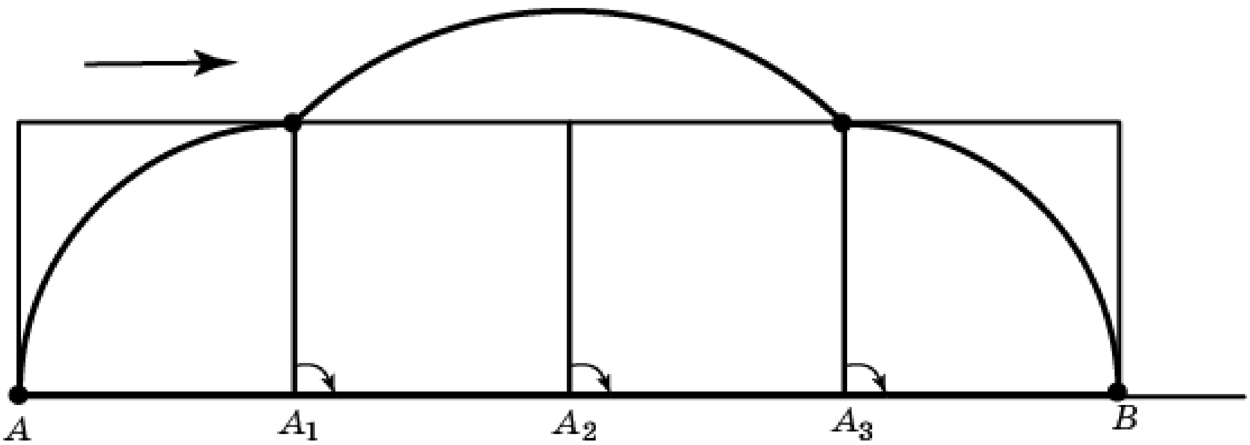


Рис. 62

6. Рисунок 63.

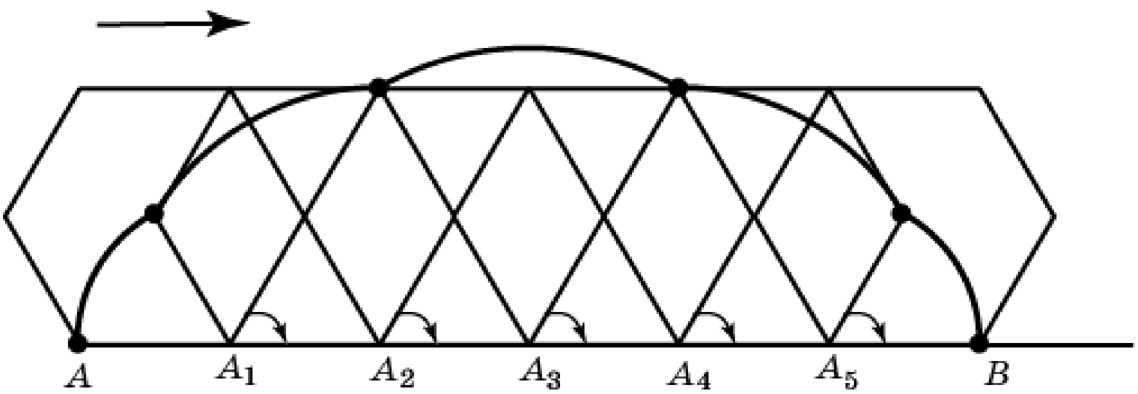


Рис. 63

7. Рисунок 64.

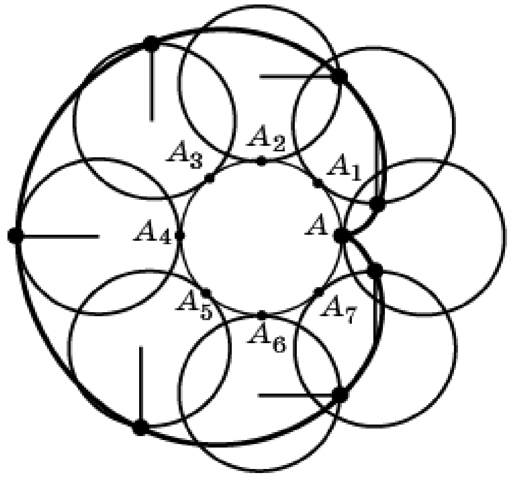


Рис. 64

8. Рисунок 65.

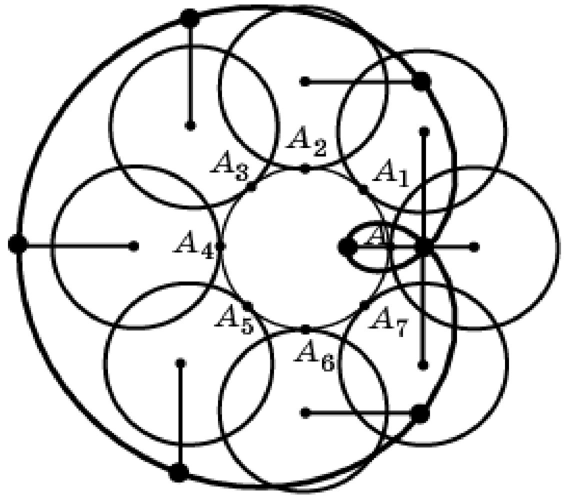


Рис. 65

9. Рисунок 66.

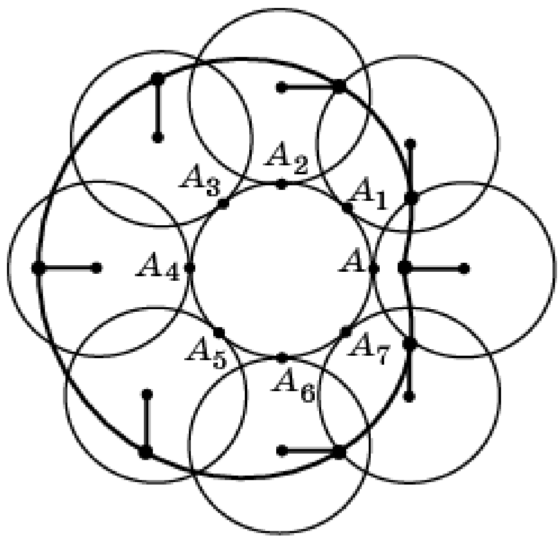


Рис. 66

10. Рисунок 67.

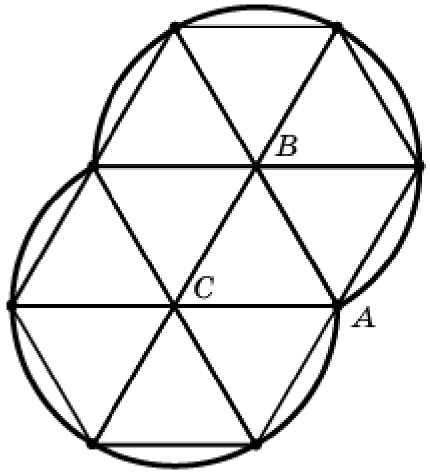


Рис. 67

11. Рисунок 68.

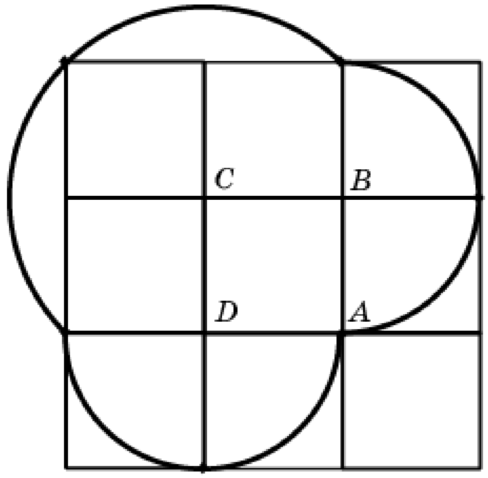


Рис. 68

12. Рисунок 69.

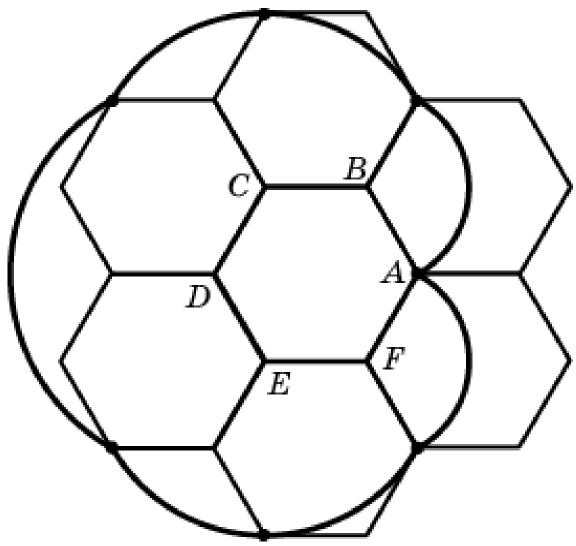


Рис. 69

13. Рисунок 70.

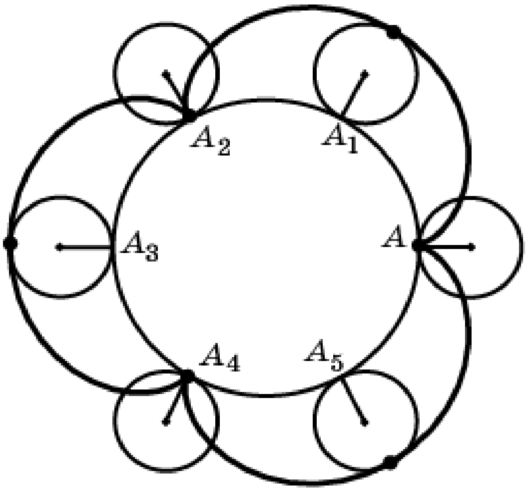


Рис. 70

14. Рисунок 71.

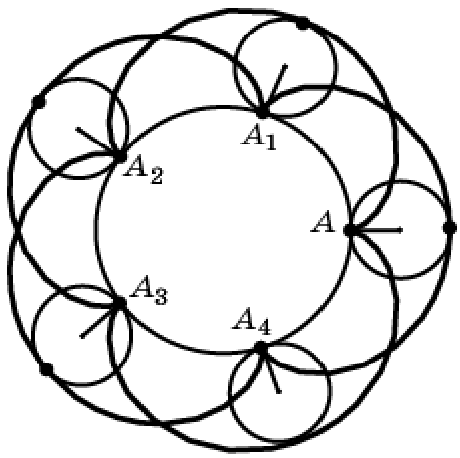


Рис. 71

15. Рисунок 72.

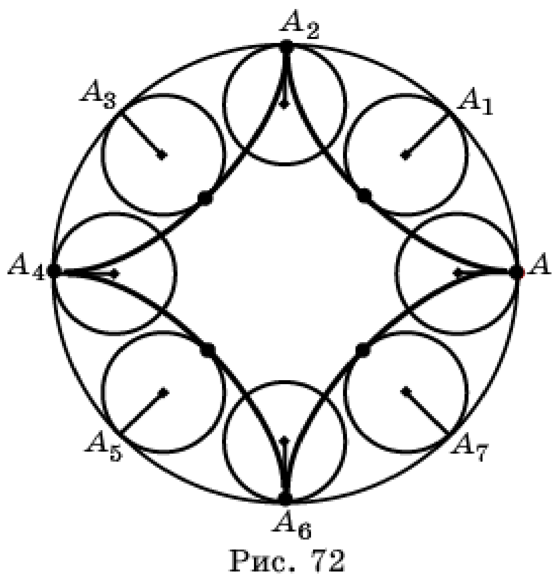


Рис. 72

16. Рисунок 73.

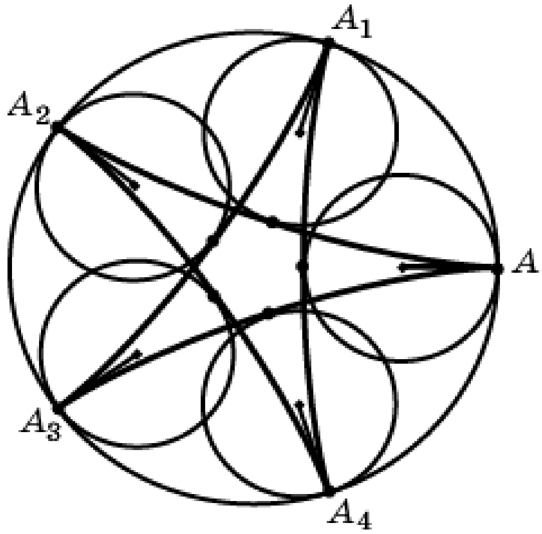


Рис. 73

17. Рисунок 74.

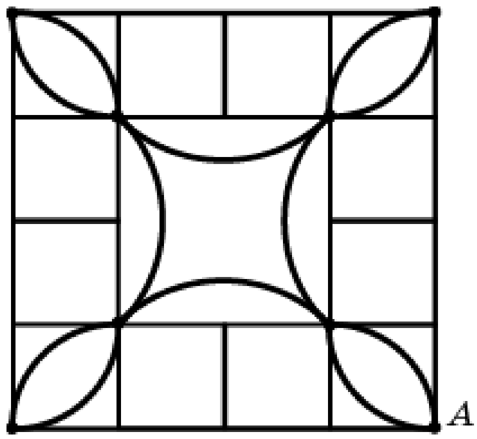
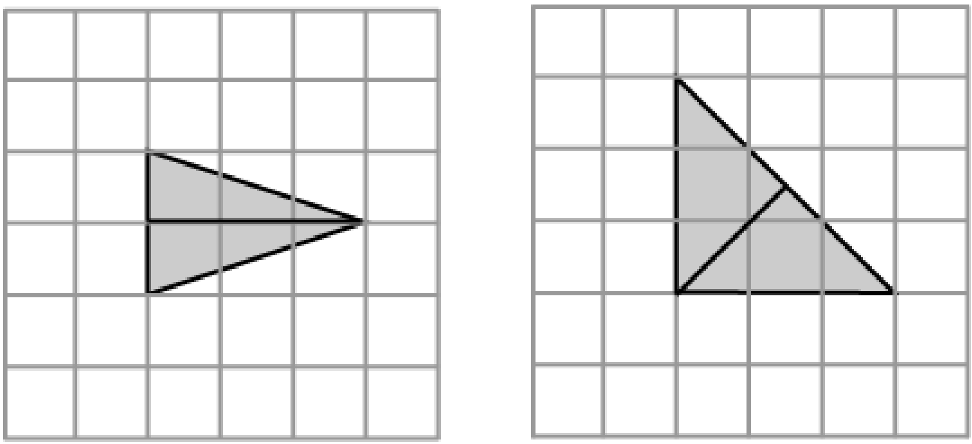


Рис. 74

§ 10. Разрезания

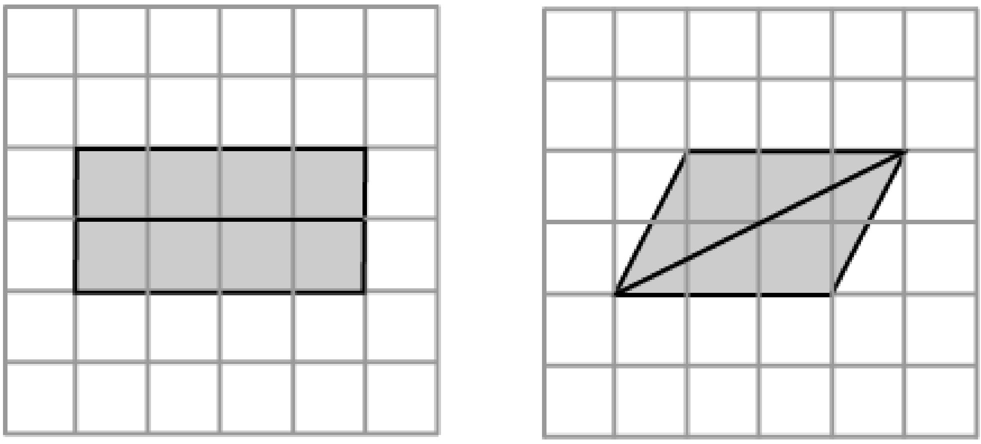
1. Рисунок 75.



а) б)

Рис. 75

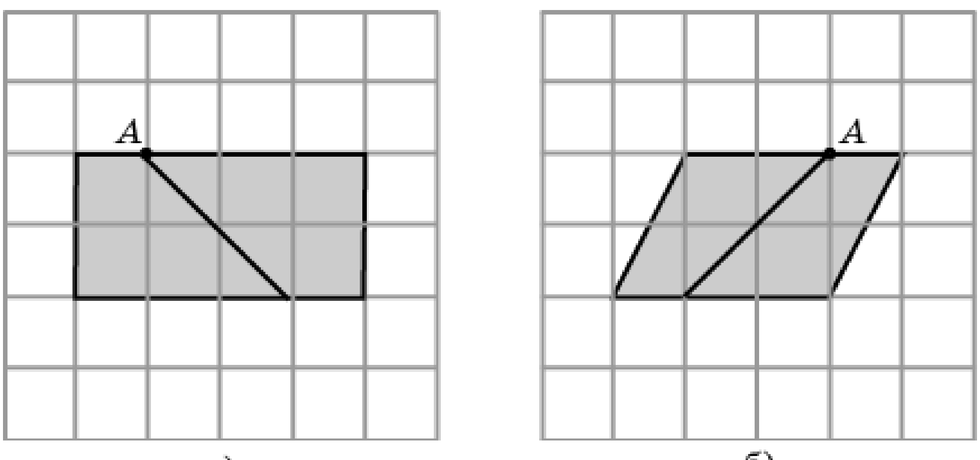
2. Рисунок 76.



а) б)

Рис. 76

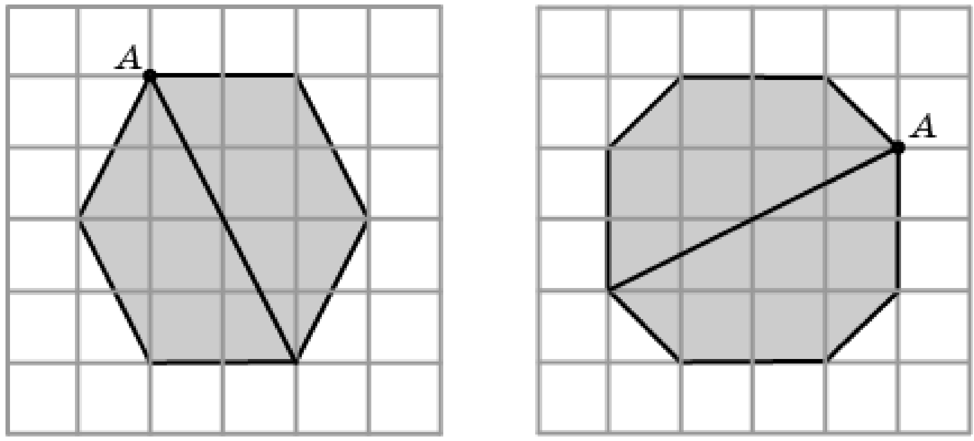
3. Рисунок 77.



а) б)

Рис. 77

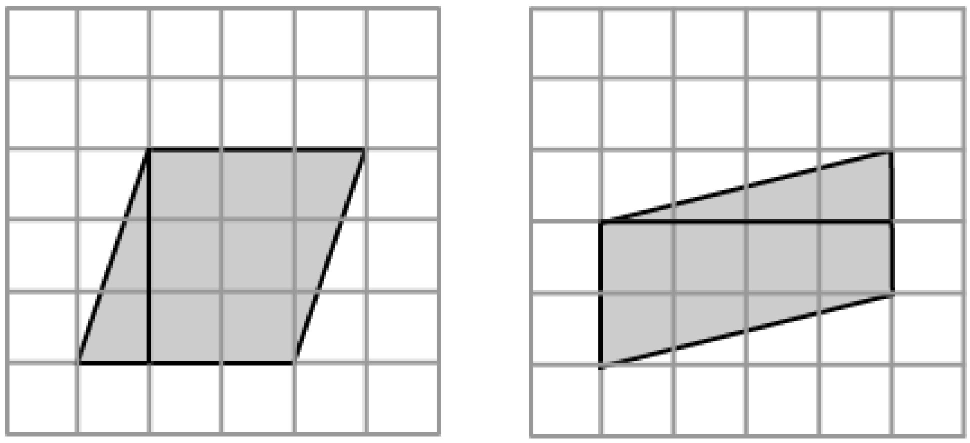
4. Рисунок 78.



а) б)

Рис. 78

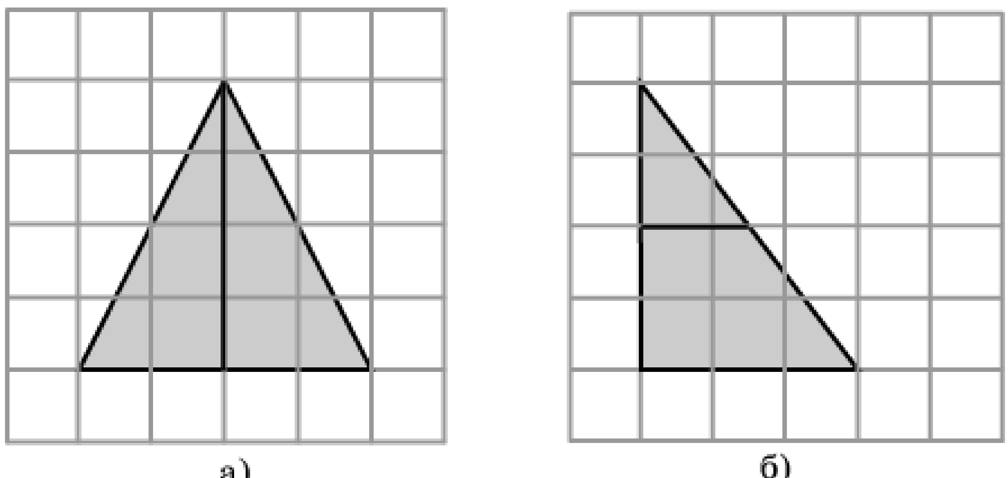
5. Рисунок 79.



а) б)

Рис. 79

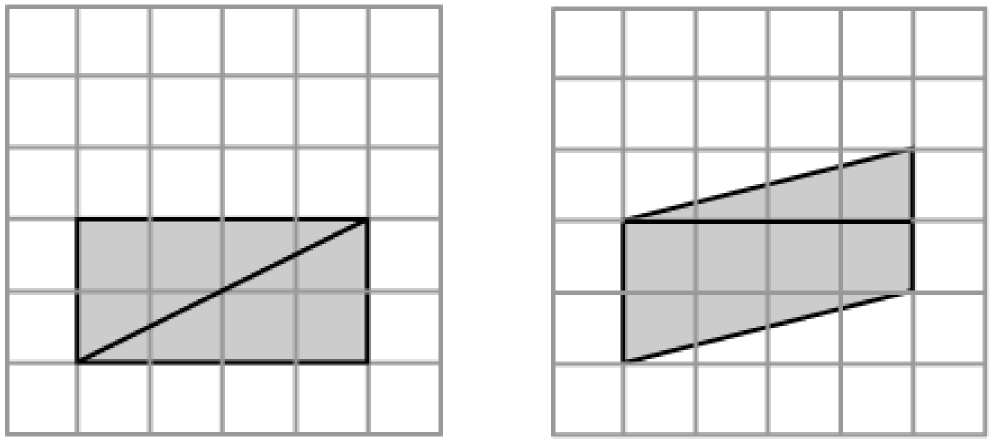
6. Рисунок 80.



а) б)

Рис. 80

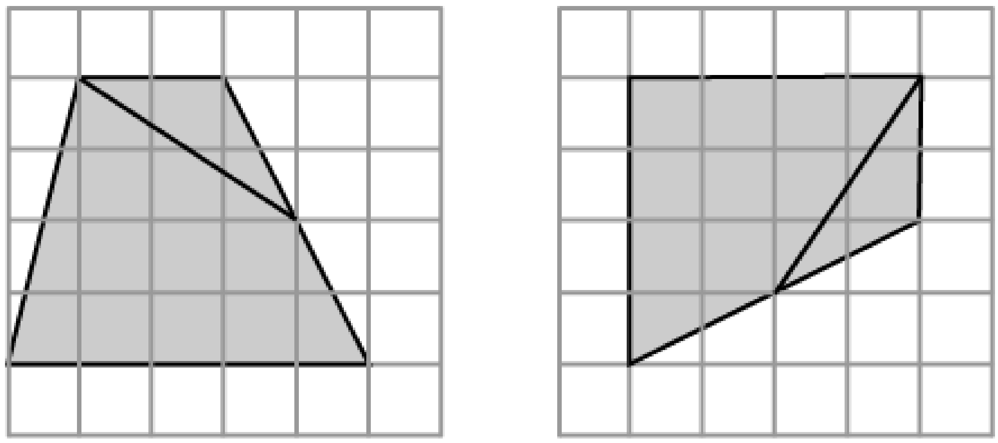
7. Рисунок 81.



а) б)

Рис. 81

8. Рисунок 82.



а) б)

Рис. 82

9. Рисунок 83.

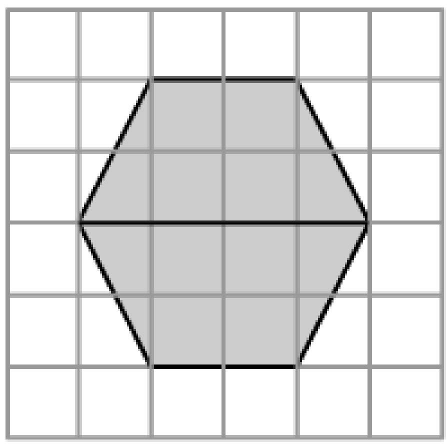
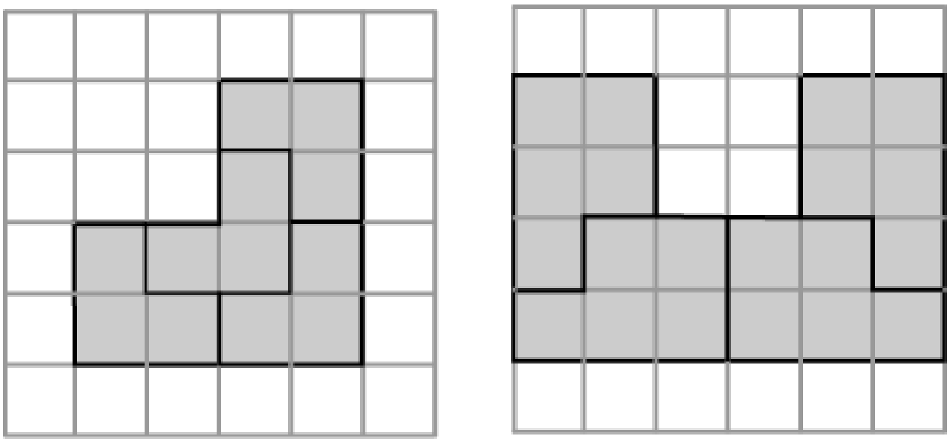


Рис. 83

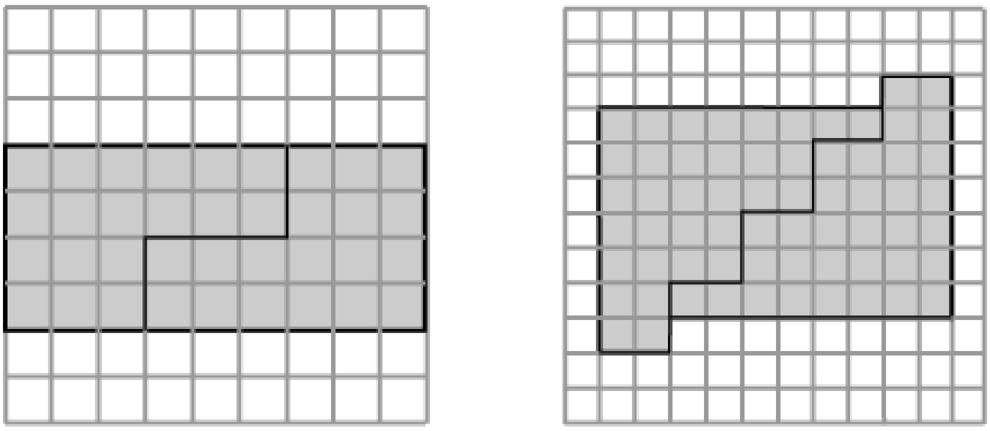
10. Рисунок 84.



а) б)

Рис. 84

11. Рисунок 85.



а) б)

Рис. 85

12. Рисунок 86.

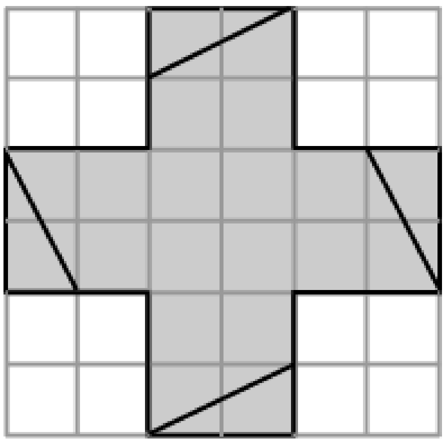
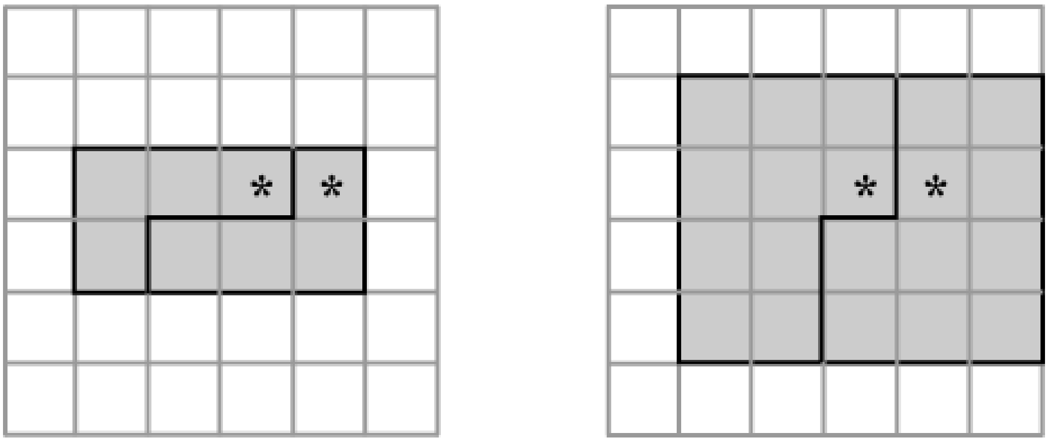


Рис. 86

13. Рисунок 87.



а)

б)

Рис. 87

§ 11. Площадь

1. а) В 4 раза; б) в 9 раз. **2.** а) В 4 раза; б) в 9 раз. **3.** а) Уменьшится в 2 раза; б) увеличится в 3 раза. **4.** а) и д), в) и г). **5.** а) 20; б) 12. **6.** а) 5; б) 5. **7.** 1,75. **8.** 4. **9.** а) 6; б) 8. **10.** а) 3; б) 6. **11.** а), г), е), ж) и з); б) и д). **12.** а) 8; б) 12. **13.** а), в), д), е); г), з), и). **14.** а) 10,5; б) 9. **15.** а) 10,5; б) 10. **16.** а) 7,5; б) 6. **17.** а) 6; б) 7,5. **18.** а) 7,5; б) 5,5. **19.** а) 10; б) 6. **20.** а) 12; б) 28. **21.** а) 52; б) 9. **22.** а) Одну четвёртую; б) одну восьмую; в) одну шестую. **23.** 8. **24.** а) 16; б) 36.

§ 12. Объём

1. В 27 раз. **2.** В 8 раза. **3.** а) 6; б) 8. **4.** а) 40; б) 12. **5.** а) 10; б) 10. **6.** а) 5); б) 6. **7.** 0,125. **8.** 1,75. **9.** 160 см^3. **10.** 62,5 г. **11.** 60 м^2. **12.** 30. **13.** 15. **14.** 1/6. **15.** 20 см.

§ 13. Площадь поверхности

1. 94. **2.** В 9 раз. **3.** В 4 раза. **4.** а) 22; б) 28. **5.** а) 92; б) 48. **6.** а) 34; б) 34. **7.** а) 22; б) 26. **8.** 1,5. **9.** 9,5. **10.** 30. **11.** 288 см^2. **12.** 54. **13.** 8. **14.** 4.

§ 14. Координаты

1. $A(3, 1)$, $B(2, 3)$, $C(1, 2)$, $D(-2, 2)$, $E(-1, -2)$, $F(4, -1)$. **2.** Рисунок 88. **3.** Рисунок 89.

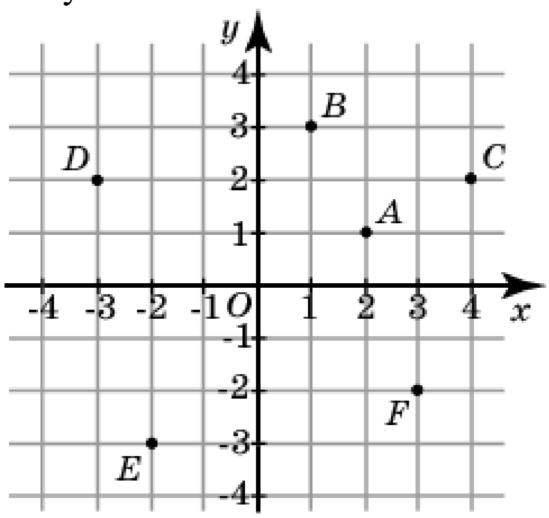


Рис. 88

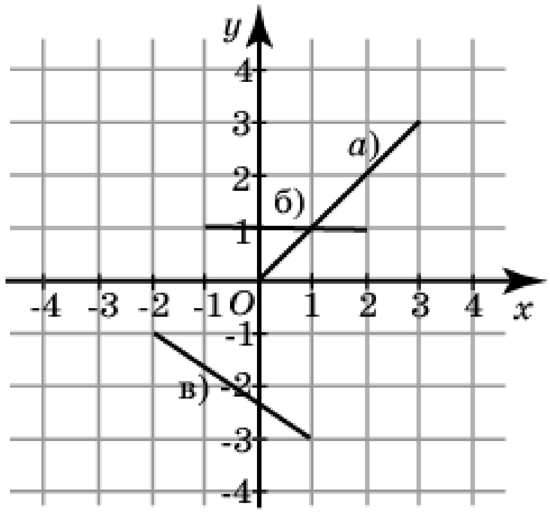
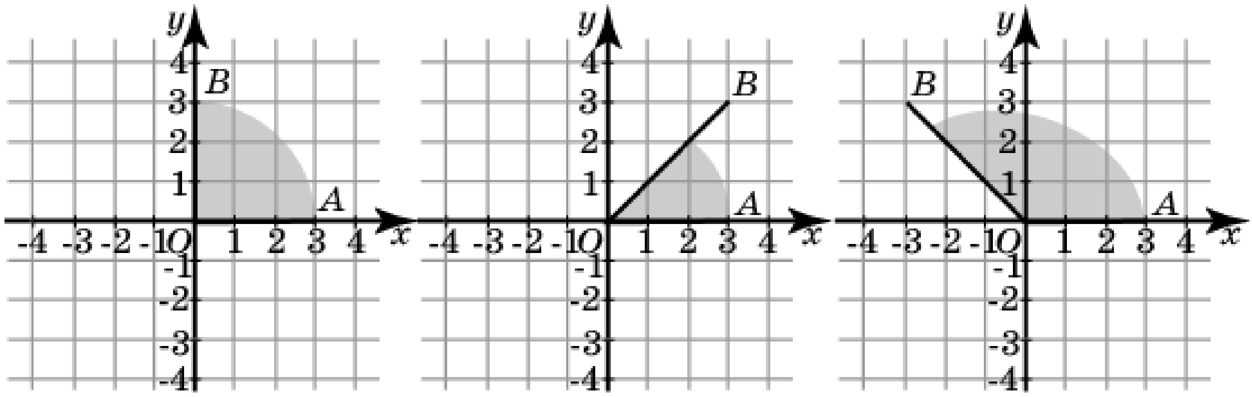


Рис. 89

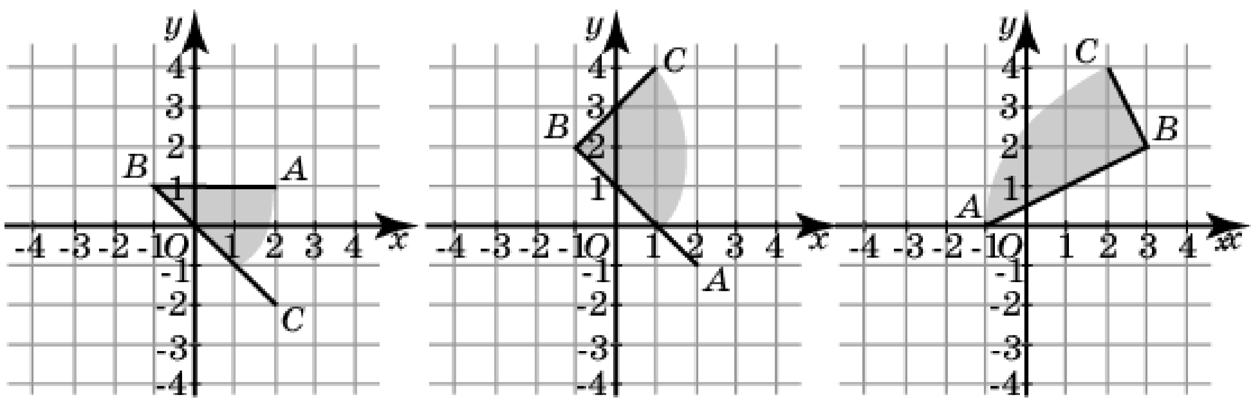
4. Рисунок 90: а) 90°; б) 45°; в) 135°.



а) б) в)

Рис. 90

5. Рисунок 91: а) 45°; б) 90°; в) 90°.



а) б) в)

Рис. 91

6. Рисунок 92; 10. **7.** Рисунок 93; равнобедренный.

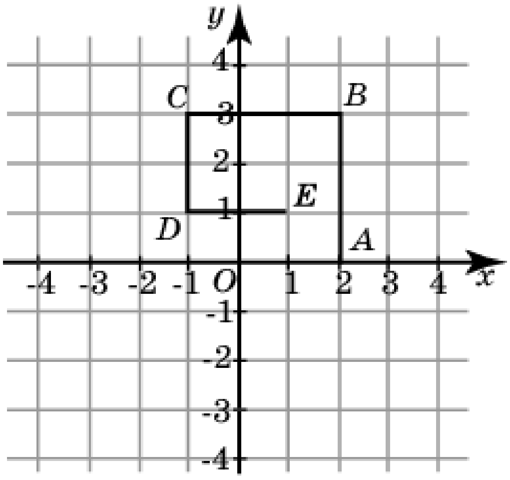


Рис. 92

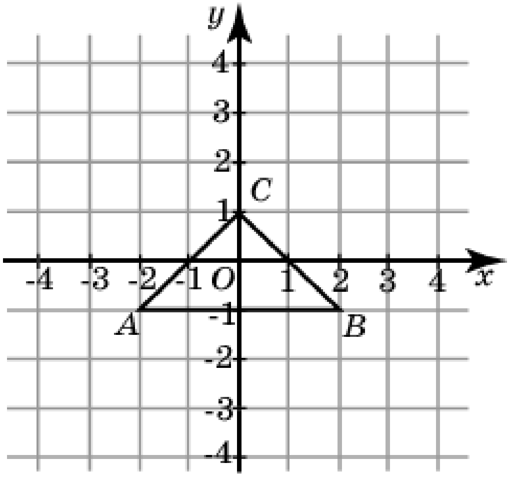


Рис. 93

8. Рисунок 94; тупоугольный. **9.** Рисунок 95; квадрат.

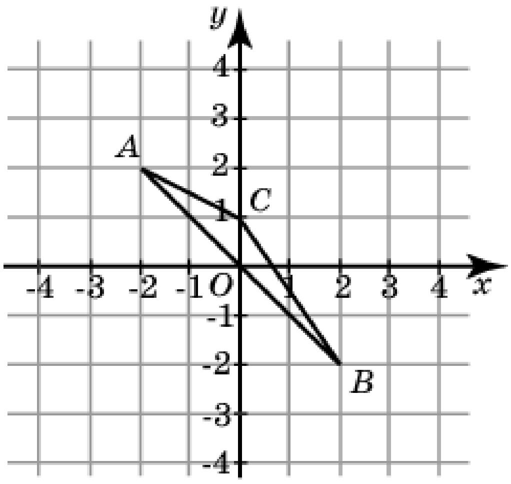


Рис. 94

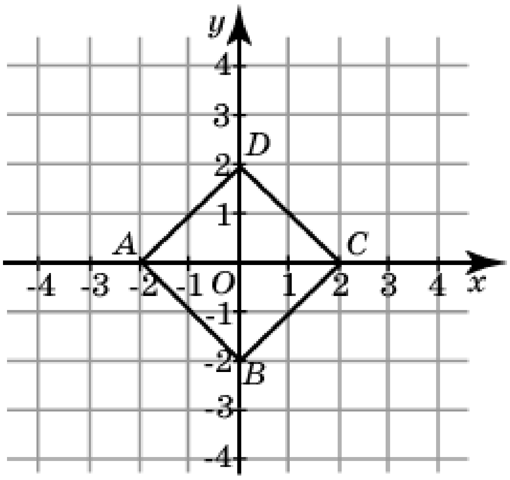


Рис. 95

10. Рисунок 96; прямоугольник. **11.** Рисунок 97; параллелограмм.

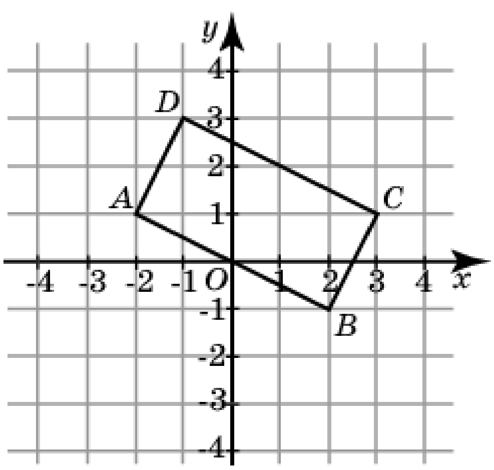


Рис. 96

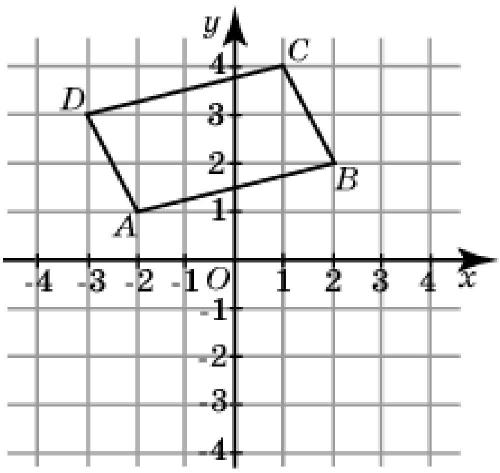


Рис. 97

12. Рисунок 98; равнобедренная трапеция. **13.** а) (1, 2); б) (2, -2); в) (-1,5, -1).

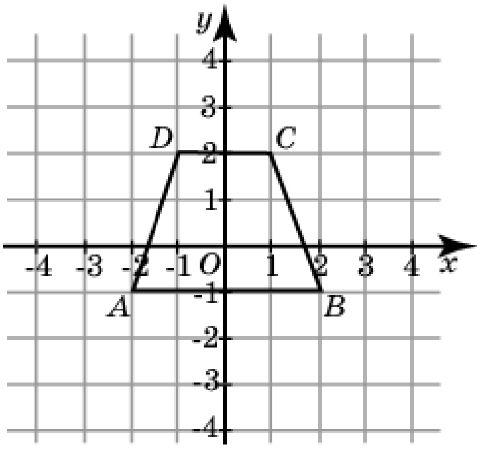


Рис. 98

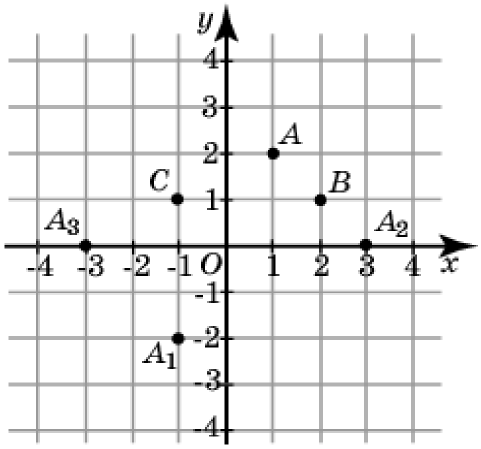


Рис. 99

14. Рисунок 99: а) A_1(-1, -2); б) A_2(3, 0); в) A_3(-3, 0). **15.** Рисунок 100: а) A_1(2, -3); б) A_2(-2, 3); в) A_3(-2, -3).

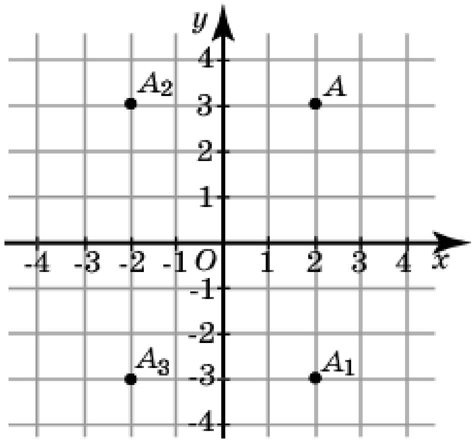


Рис. 100

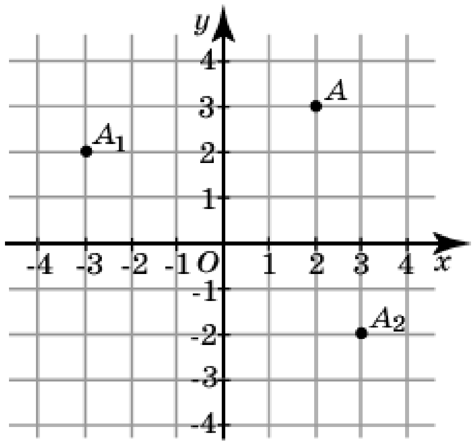


Рис. 101

16. Рисунок 101: а) A_1(-3, 2); б) A_2(3, -2). **17.** Рисунок 102: а) A_1(2, -1); б) A_2(0,

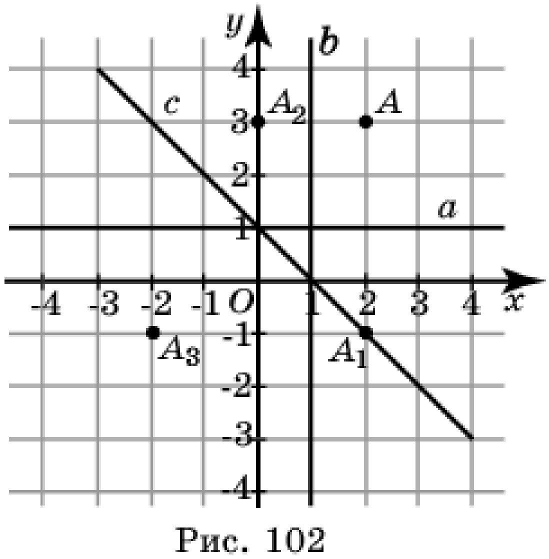


Рис. 102

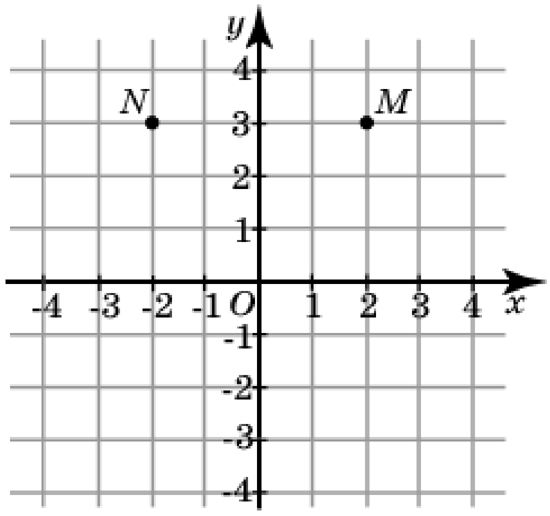


Рис. 103

3); в) A_3(-2, -1).

18. N(-2, 3) и M(2, 3) (рис. 103). **19.** Рисунок 104.

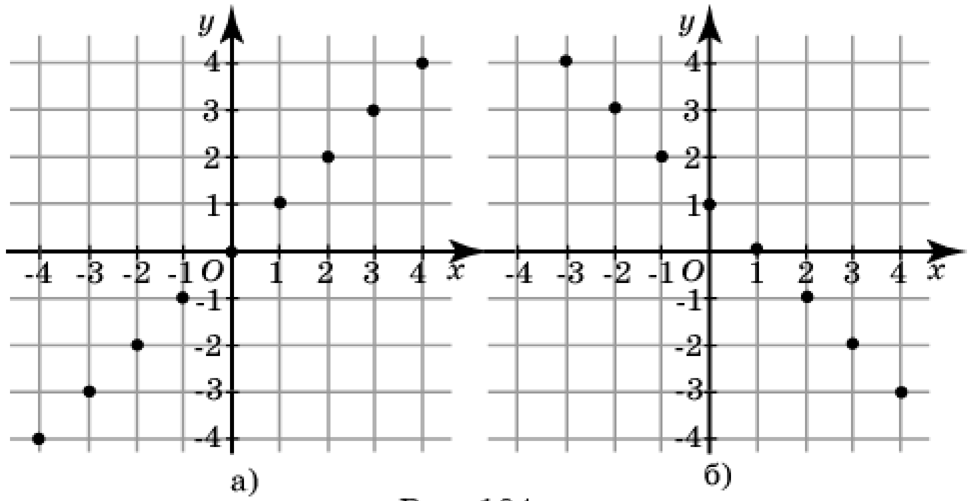


Рис. 104

20. Рисунок 105.

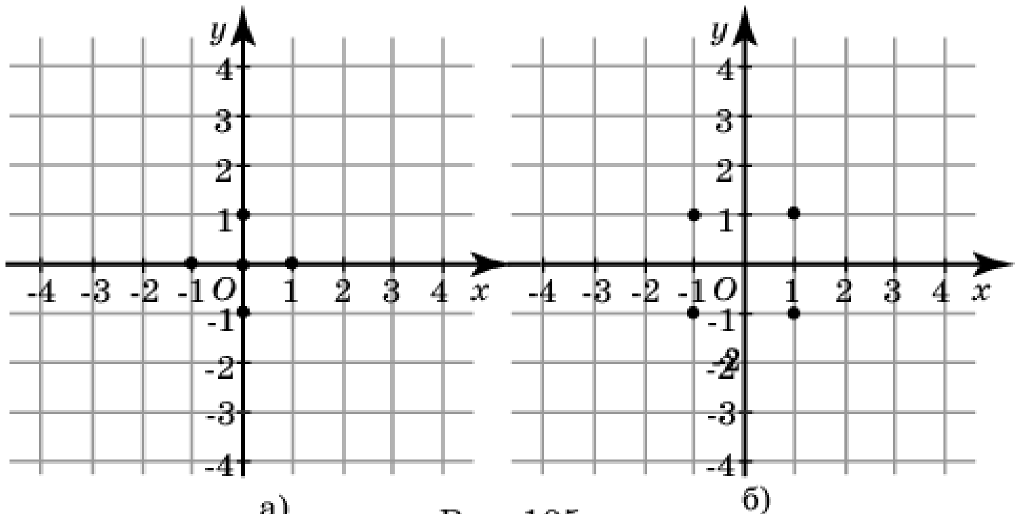


Рис. 105

21. Рисунок 106. **22.** Рисунок 107; 9.

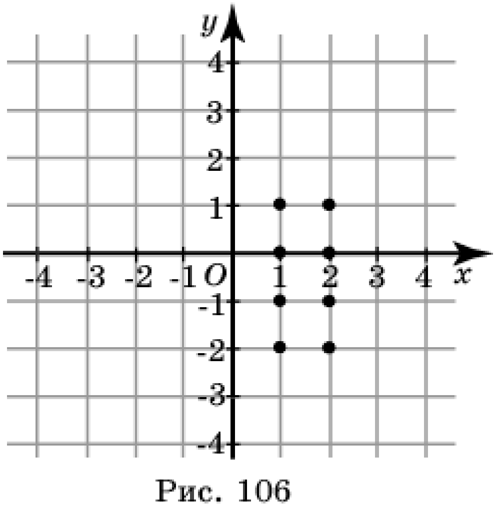


Рис. 106

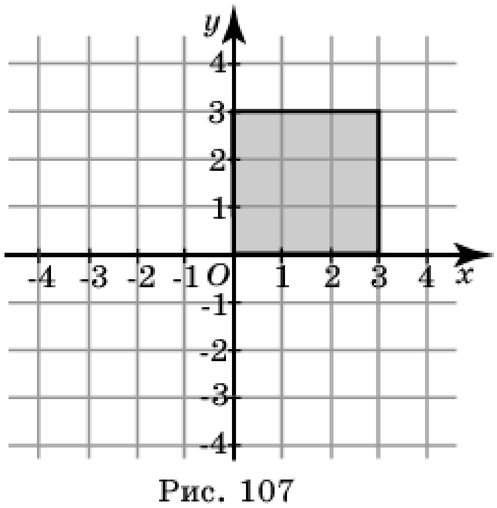


Рис. 107

23. Рисунок 108; 18. **24.** Рисунок 109; 16.

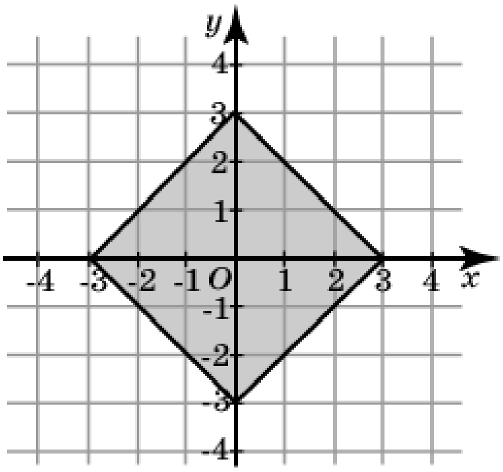


Рис. 108

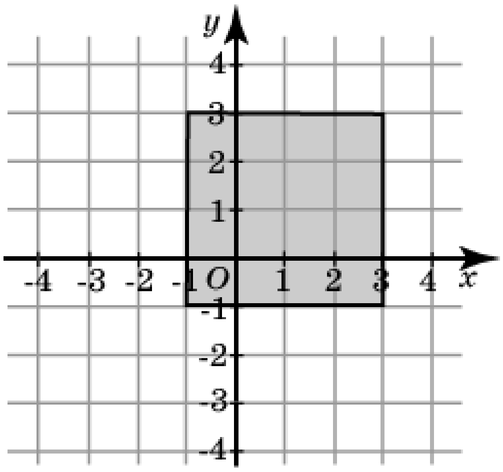


Рис. 109

25. Рисунок 110; 16. **26.** Рисунок 111; 12.

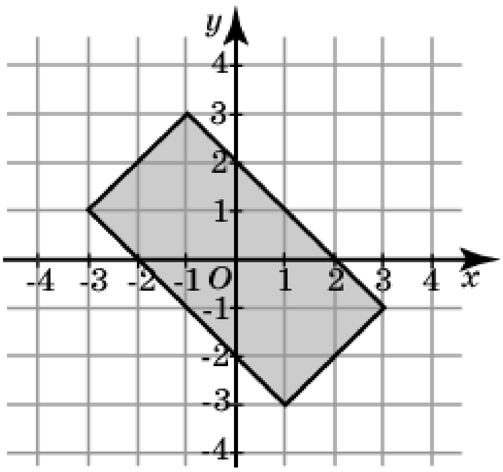


Рис. 110

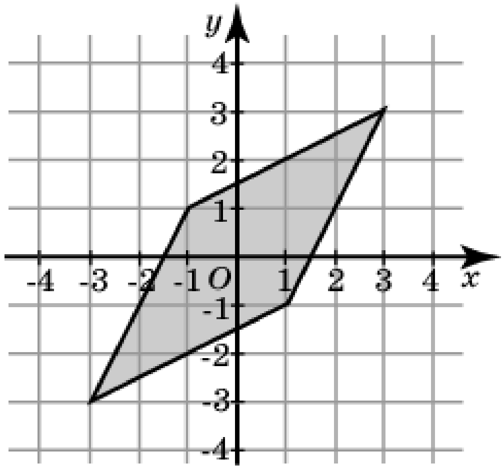


Рис. 111

27. Рисунок 112; 12. **28.** Кошка (рис. 113).

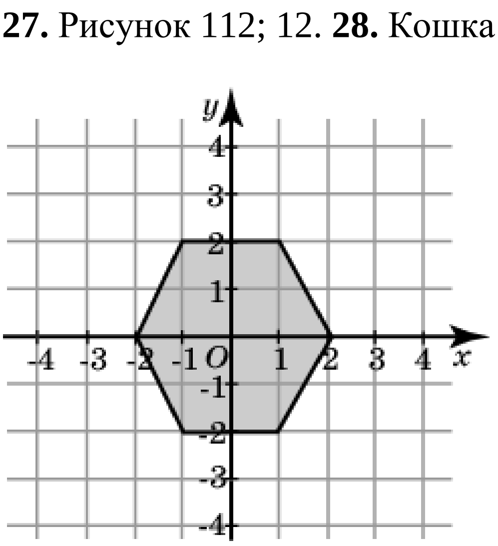


Рис. 112

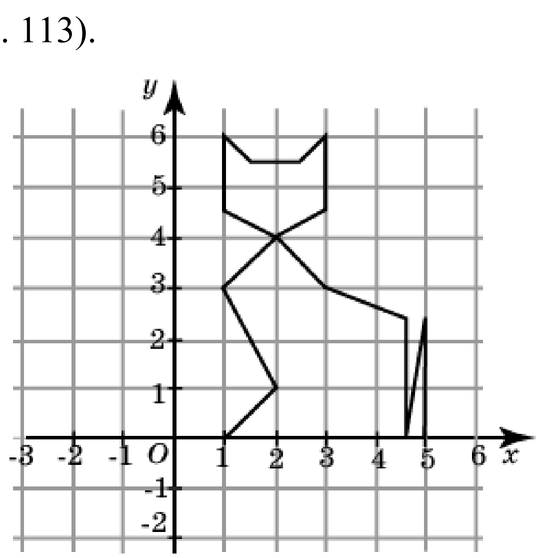


Рис. 113

29. Рыба (рис. 114).

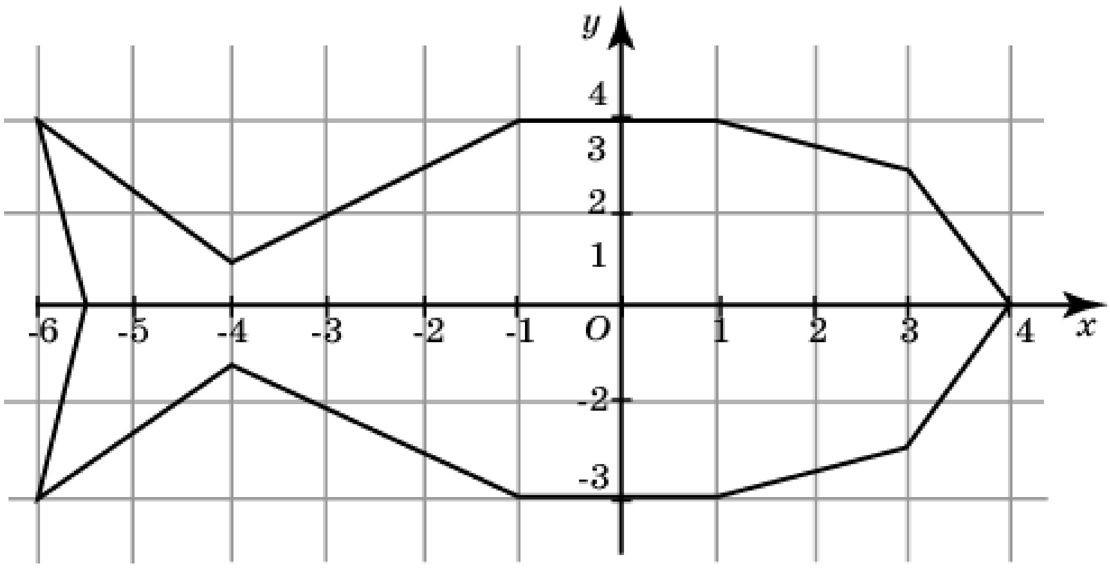


Рис. 114

30. Такса (рис. 115).

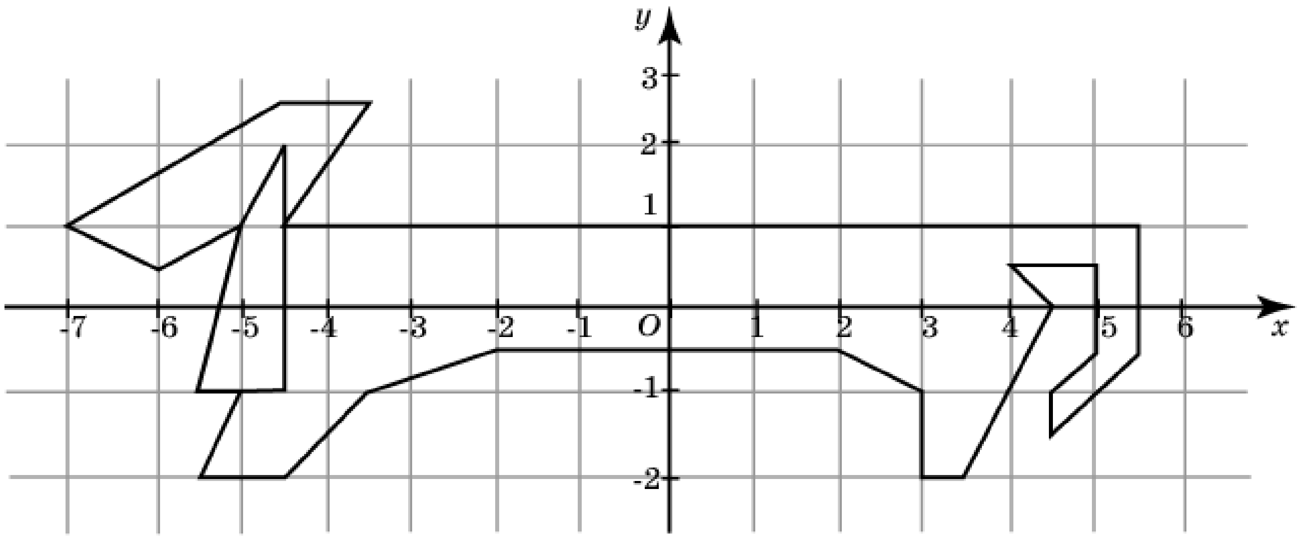


Рис. 115

31. Страус (рис. 116).

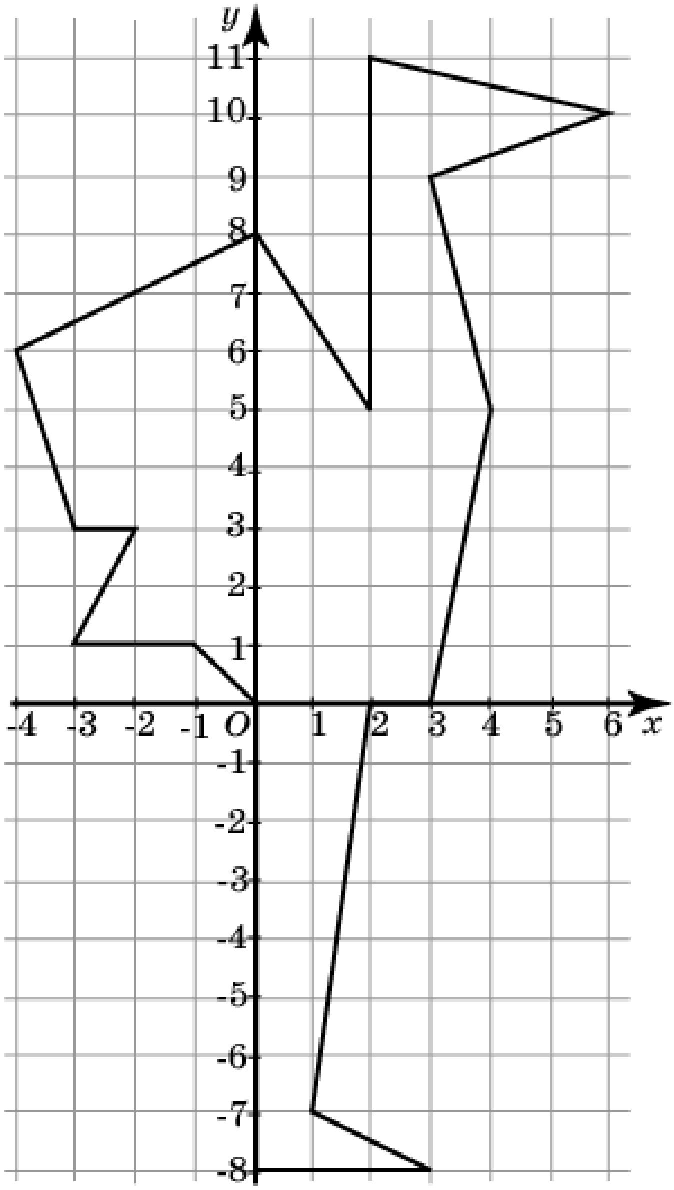


Рис. 116

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА
для 6 класса

Окружность. Геометрические места точек

Окружность и круг. Центр и радиус окружности. Хорда и диаметр окружности. Взаимное расположение двух окружностей. Длина окружности.

Геометрическое место точек. Примеры.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- изображать окружности и круги;
- отмечать центр окружности, проводить радиус, диаметр и хорды окружности;
- устанавливать взаимное расположение двух окружностей;
- находить приближённое значение длины окружности;
- решать задачи на нахождение и изображение геометрических мест точек.

***Графы. Кривые**

Графы. Вершины и рёбра графов. Примеры графов. Уникурсальные графы. Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах. Задачи о раскрашивании карт.

Кривые, как траектории движения точек: циклоида, кардиоида, астроида.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- приводить примеры графов и изображать графы;
- устанавливать уникурсальность графов;
- решать задачи на раскрашивание карт;
- изображать кривые, как траектории движения точек: циклоиду, кардиоиду, астроиду и др.

Симметрия

Центральная симметрия. Центрально-симметричные фигуры. Примеры.

Осевая симметрия. Примеры.

Поворот. Симметрия n-го порядка. Примеры.

Паркеты на плоскости. Правильные паркеты.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- изображать фигуру, центрально-симметричную данной;
- устанавливать центральную симметричность фигур и находить их центр симметрии;
- изображать фигуру, симметричную данной относительно заданной оси;
- находить и изображать оси симметрии заданных фигур;
- изображать фигуру, полученную поворотом данной фигуры на данный угол вокруг данной точки;
- выяснять порядок симметрии данной фигуры и изображать центр симметрии;

- изображать паркеты на плоскости, выяснять возможность построения паркетов из заданных многоугольников.

Площадь и объём

Площадь и её свойства. Единицы измерения площади. Равновеликие фигуры. Площадь прямоугольника, параллелограмма, треугольника, многоугольника. Задачи на разрезание.

Площадь поверхности многогранника.

Объём и его свойства. Единицы измерения объёма. Объём прямоугольного параллелепипеда и прямой призмы.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- находить площади фигур, используя формулы и свойства площади;
- устанавливать равновеликость фигур;
- решать задачи на разрезание;
- находить площади поверхностей многогранников;
- находить объёмы многогранников, используя формулы и свойства объёмов.

Координаты

Прямоугольная система координат на плоскости. Начало координат. Координатные прямые: оси абсцисс и ординат. Координаты точки. Метод координат.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

- изображать прямоугольную систему координат на плоскости;
- находить координаты точек и изображать точки с заданными координатами;
- изображать отрезки, ломаные, многоугольники на координатной плоскости, заданные координатами своих вершин;
- изображать окружности и круги на координатной плоскости, заданные координатами центра и радиусом;
- решать задачи на нахождение длин, углов, площадей фигур на координатной плоскости.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
для 6-го класса
(1 час в неделю, всего 34 часа)

Параграф учебника	Содержание	Кол-во часов
	6-й класс	
1	Окружность и круг	2
2	Геометрические места точек	2
3*	Графы	2
4*	Раскрашивание карт	2
	Контрольная работа 1	1
5	Центральная симметрия	2
6	Осевая симметрия	2
7	Поворот	2
	Контрольная работа 2	1
8*	Паркеты	2
9*	Кривые	2
10	Площадь	2
11	Разрезания	2
	Контрольная работа 3	1
12	Объём	2
13	Площадь поверхности	2
14	Координаты	2
	Контрольная работа 4	1
	Обобщающее повторение	2

СОДЕРЖАНИЕ