

КЛАССИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

Определение 1. Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$.

Определение 2. Средним геометрическим двух неотрицательных чисел a и b называется число $\sqrt{a \cdot b}$.

Определение 3. Средним квадратичным двух чисел a и b называется число $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Определение 4. Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется число $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Теорема. Для любых двух положительных чисел a и b имеют место неравенства

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

причем равенства достигаются только в случае равенства чисел a и b .

Доказательство. Докажем, что имеет место неравенство

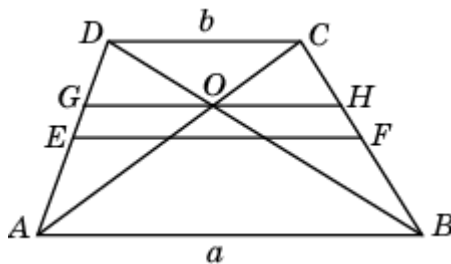
$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2},$$

означающее, что среднее геометрическое двух положительных чисел не превосходит их среднего арифметического. Действительно, данное неравенство равносильно неравенству $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, которое очевидно выполняется для всех положительных чисел a и b , причем равенство имеет место только в случае $a = b$.

Аналогичным образом доказываются и другие неравенства.

Приведем геометрическую интерпретацию среднего арифметического и среднего гармонического.

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AB = a$, $CD = b$.

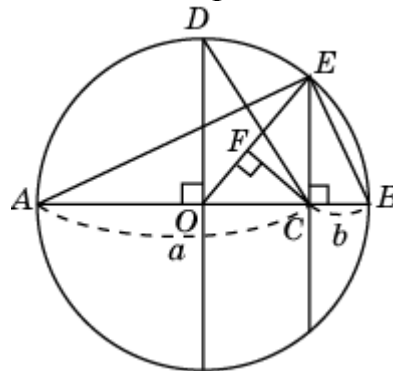


Ее средняя линия EF будет равна среднему арифметическому чисел a и b . Докажем, что отрезок GH , соединяющий точки на боковых сторонах этой трапеции, проходящий через точку O пересечения ее диагоналей и параллельный основаниям, равен среднему гармоническому.

Действительно, треугольники AOB и COD подобны, коэффициент подобия равен $\frac{a}{b}$. Треугольники AOG и ACD подобны, коэффициент подобия равен $\frac{a}{a+b}$. Следовательно, $OG = \frac{a \cdot b}{a+b}$. Аналогично доказывается, что $OH = \frac{a \cdot b}{a+b}$. Значит, $GH = \frac{2a \cdot b}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Приведем еще одну геометрическую интерпретацию классических средних и неравенств между ними.

Рассмотрим окружность с диаметром $a+b$ ($a > b$).



Для нее $OD = OE = \frac{a+b}{2}$, т.е. является средним арифметическим a и b .

Далее $OC = \frac{a-b}{2}$, $CD = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, т.е. является

средним квадратичным a и b .

Из подобия прямоугольных треугольников ACE и ECB следует, что $CE = \sqrt{a \cdot b}$, т.е. является средним геометрическим a и b .

Из подобия прямоугольных треугольников OCE и EFC следует, что

$EF = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, т.е. является средним гармоническим a и b .

Ясно, что из соотношения между перпендикуляром и наклонной следует, что для приведенных средних величин имеют место указанные выше неравенства.

Пример 1. Теплоход прошел по течению реки из пункта A в пункт B со скоростью V_1 км/ч. Обрато из пункта B в пункт A против течения реки он прошел со скоростью V_2 км/ч. Найдите среднюю скорость теплохода.

Решение. Пусть расстояние между пунктами A и B равно S . На прохождение теплохода из пункта A в пункт B будет затрачено S/V_1 часов, а на прохождение теплохода из пункта B в пункт A будет затрачено S/V_2 часов. Суммарное время составит $S/V_1 + S/V_2$ часов. Средняя скорость V будет равна

$$\frac{2S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}} = \frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}}, \text{ т.е. средняя скорость теплохода равна среднему}$$

гармоническому скоростей V_1 и V_2 .

Пример 2. Среди всех прямоугольников данного периметра P найдите прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Пусть стороны прямоугольника равны a и b . Его площадь равна ab . Воспользуемся неравенством $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, которое следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. В правой части этого неравенства стоит число, равное площади квадрата с периметром P . Следовательно, из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Средние величины могут быть обобщены на случай n чисел. А именно.

Определение 1'. Средним арифметическим n чисел a_1, \dots, a_n называется число $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

Определение 2'. Средним геометрическим n неотрицательных чисел a_1, \dots, a_n называется число $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Определение 3'. Средним квадратичным n чисел a_1, \dots, a_n называется число $\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$.

Определение 4'. Средним гармоническим n положительных чисел a_1, \dots, a_n называется число $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

Теорема'. Для любых n положительных чисел a_1, \dots, a_n имеют место неравенства

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

причем равенства достигаются только в случае равенства чисел a_1, \dots, a_n .

Неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим было доказано ранее в пункте «Натуральные числа. Метод математической индукции».

Докажем левое неравенство. Перепишем его в виде

$$\frac{na_1 \cdot \dots \cdot a_n}{a_2 \cdot \dots \cdot a_n + \dots + a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}} \leq (a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \left(\frac{1}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}},$$

которое следует из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, примененным к числам $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$.

Упражнения

1. Что больше: а) 2^{300} или 3^{200} ?
2. Какое число больше 31^{11} или 17^{14} ?
3. Докажите, что $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.
4. Докажите, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.
5. Докажите, что для положительных x выполняется неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
6. Докажите неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$.
7. Докажите неравенство $(n-1)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.
8. Докажите неравенство $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$.
9. Придумайте геометрический смысл среднего арифметического для трех положительных чисел.
10. Два путника вышли на рассвете из пунктов A и B навстречу друг другу с постоянными скоростями и встретились в полдень. Первый пришел в пункт B в 16 ч, а второй пришел в пункт A в 20 ч. В какое время был рассвет?
11. Первую половину пути всадник скакал со скоростью 18 км/ч, а вторую – 12 км/ч. Найдите среднюю скорость всадника.
12. Первая труба заполняет бассейн на 6 ч, а вторая – за 4 ч. За сколько времени заполнится бассейн, если одновременно открыть обе трубы?
13. Докажите, что из всех прямоугольных параллелепипедов данной площади поверхности наибольший объем имеет куб.

Литература

1. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и геометрии. – М.: МЦНМО, 2012.
2. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров, 1994.
3. Горбачев Н.Н. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.
4. Иванов О.А. Элементарная математика. – М.: МЦНМО, 2009.
5. Скопец З.М. Сравнение различных средних двух положительных чисел. Квант, 1971, № 2.

6. Шень А.Х. Дюжина задач о среднем арифметическом. Квант, 2008, № 6.