

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

11 класс

Учебник

для учащихся общеобразовательных
организаций

(базовый и углублённый уровни)

*Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации*

5-е издание, стереотипное



Москва 2019

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151.0я721

С50

На учебник получены положительные заключения по результатам трёх экспертиз:
научной (Российская академия наук, № 004987 от 19.12.2016),
педагогической (Российская академия наук, № 005094 от 19.12.2016)
и общественной (РШБА, № ОЗ/16-0415 от 26.12.2016)

Смирнова И. М.

С50 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс : учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — 5-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2019. — 184 с. : ил.

ISBN 978-5-346-04421-5

Предлагаемый учебник двухуровневый: с учётом параграфов со звёздочкой он соответствует углублённому уровню, без их учёта — базовому. Наряду с традиционными вопросами геометрии пространства в качестве дополнительного в учебник включён материал научно-популярного и прикладного характера, а также помещены нестандартные и исследовательские задачи, исторические сведения. Большое внимание уделено использованию средств наглядности. Содержание учебника соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта и Примерной основной образовательной программы, концептуально согласуется с учебниками по алгебре и началам математического анализа А. Г. Мордковича.

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151.0я721

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна, Смирнов Владимир Алексеевич

МАТЕМАТИКА:

алгебра и начала математического анализа, геометрия

ГЕОМЕТРИЯ

11 класс

УЧЕБНИК

**для общеобразовательных организаций
(базовый и углублённый уровни)**

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*

Главный редактор *К. И. Куровский*. Редакторы *С. В. Бахтина, В. В. Черноруцкий*

Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева, Т. С. Богданова*

Технический редактор *О. Б. Резчикова*. Корректоры *С. О. Никулаев, В. И. Антонов*

Компьютерная вёрстка и графика: *А. А. Горкин*

Формат 70×90^{1/16}. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная».

Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,46. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство «Мнемозина».

105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 296. Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.

E-mail: ioc@mnmnozina.ru www.mnmnozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин. Тел.: 8 (495) 783 8284. www.shop.mnmnozina.ru

Отпечатано в типографии филиала АО «ТАТМЕДИА» «ПИК «Идел-Пресс»».
420066, г. Казань, ул. Декабристов, 2.

© «Мнемозина», 2013

© «Мнемозина», 2017, с изменениями

© «Мнемозина», 2019

© Оформление. «Мнемозина», 2019

Все права защищены

ISBN 978-5-346-04421-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник является продолжением учебника геометрии для 10-го класса и предназначен для учащихся 11-х классов общеобразовательных учреждений. Он соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту второго поколения, примерной программе среднего общего образования.

Стереометрия — один из самых увлекательных и важных разделов математики. Во-первых, именно она знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения пространственных фигур, формирует необходимые пространственные представления. Во-вторых, стереометрия даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А. Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

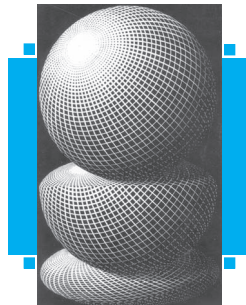
Кроме этого, изучение стереометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

Наконец, стереометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых учёных: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского и др.

Многие удивительно красивые пространственные формы придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы — природные многогранники. Свойства кристаллов, которые вы изучали на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решётке. Формы правильных, полуправильных и звёздчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Неслучайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остаётся грамматикой архитектора».

Предлагаемый учебник, помимо традиционного материала, содержит материал научно-популярного и прикладного характера, нестандартные и исследовательские задачи. В нём используются следующие обозначения:

- — устная задача;
- ★ — дополнительный материал, задачи повышенной трудности;
- — окончание доказательства.



§ 1. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости

Сфера и шар являются пространственными аналогами соответственно окружности и круга на плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки, называемой **центром**, на данное расстояние, называемое **радиусом**.

Радиусом сферы называется также отрезок, соединяющий центр сферы и какую-нибудь её точку.

Шаром называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки, называемой **центром**, на расстояние, не превосходящее данное, называемое **радиусом**.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется **поверхностью шара**.

Радиусом шара называется также отрезок, соединяющий центр шара и какую-нибудь точку его поверхности.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью**.

Рассмотрим случаи взаимного расположения сферы и плоскости.

Пусть в пространстве заданы сфера с центром в точке O и радиусом R и плоскость α .

Если эта плоскость проходит через центр сферы, то в сечении получается фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от точки O на расстояние R , т. е. окружность радиуса R (рис. 1, а).

Эта окружность называется **большой окружностью**. Соответствующий круг называется **большим кругом**.

Если плоскость α не проходит через центр O сферы, то опустим из него на плоскость α перпендикуляр OO_1 . При этом возможны следующие случаи.

1. Длина этого перпендикуляра больше R . В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки плоскости α и подавно больше R .

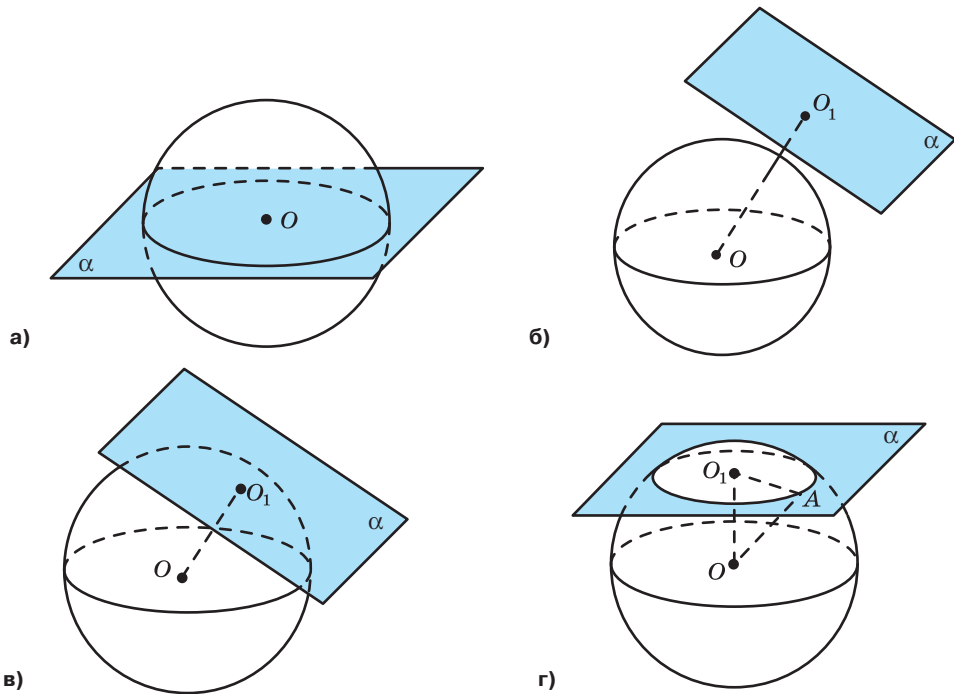


Рис. 1

Следовательно, в этом случае сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 1, б).

2. Расстояние от точки O до плоскости α равно R . В этом случае сфера и плоскость имеют единственную общую точку — O_1 , т. е. α является касательной плоскостью (рис. 1, в).

3. Расстояние d от точки O до плоскости α меньше R . Докажем, что в этом случае пересечением сферы и плоскости является окружность с центром в точке O_1 и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 1, г).

Действительно, для произвольной точки A , принадлежащей пересечению сферы и плоскости α , из прямоугольного треугольника OO_1A , в котором $OO_1 = d$, $OA = R$, следует равенство $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$. Обратно, если для точки A плоскости α выполняется это равенство, то расстояние от точки O до точки A равно R , т. е. точка A принадлежит сфере. ■

Прямая, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной прямой**.

Для касательных прямых к сфере справедливы свойства, аналогичные свойствам касательных к окружности. В частности, имеет место следующая теорема.

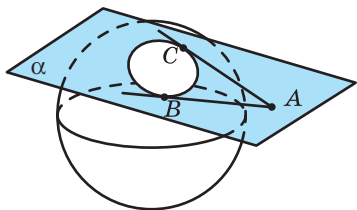


Рис. 2

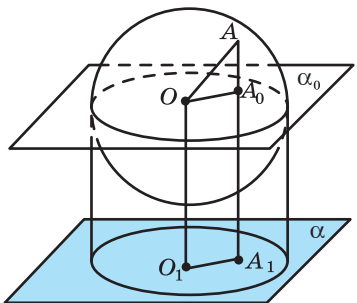


Рис. 3

Т е о р е м а. Все отрезки касательных, проведённых из одной точки к данной сфере, равны между собой.

Доказательство. Пусть AB и AC — отрезки касательных к сфере, проведённых из точки A (рис. 2). Рассмотрим плоскость α , проходящую через точки A , B и C . Она пересекает сферу по окружности, касающейся прямых AB и AC в точках B и C соответственно. По свойству отрезков касательных, проведённых к окружности, имеем $AB = AC$. ■

Для изображения шара и сферы на плоскости используют ортогональную проекцию.

Т е о р е м а. Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

Доказательство. Проведём плоскость α_0 , проходящую через центр сферы O и параллельную плоскости проектирования α . Поскольку плоскости α и α_0 параллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны (рис. 3).

Сечением сферы плоскостью α_0 является окружность радиуса R , равного радиусу сферы. Если A — точка сферы, не принадлежащая этой окружности, и A_0 — её ортогональная проекция на плоскость α_0 , то $OA_0 < OA = R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость α_0 точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются внутрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией сферы является круг того же радиуса. ■

Для большей наглядности изображения сферы в ней выделяют большую окружность (сечение сферы плоскостью, проходящей через её центр), плоскость которой образует острый угол с направлением проектирования, и полюсы (концы диаметра, перпендикулярного плоскости большой окружности). Большая окружность называется экватором. Окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями, параллельными плоскости экватора, называются параллелями, диаметр, перпендикулярный плоскости экватора, — осью, а большие окружности, проходящие через полюсы, — меридианами.

Проекцией выделенной большой окружности будет эллипс. Для нахождения изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекцию видом сферы спереди и построим вид сферы слева, т. е. ортогональную проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перпендикулярную плоскости проектирования. Большая окружность и

ось сферы изобразятся перпендикулярными диаметрами PQ и CD (рис. 4). Изображение полюсов на основной плоскости получается параллельным переносом полюсов на виде сферы слева.

На практике можно не прибегать к построению вспомогательного чертежа (вида сферы слева). Для построения изображения полюсов P и Q достаточно заметить, что прямоугольные треугольники OPR и OCE равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, имеет место равенство отрезков $RP = CE$. Но $RP = PP_1$ и $CE = OC$. Значит, $PP_1 = OC$. Аналогично $QQ_1 = OD$. После этого точки P и Q выбираются так, чтобы выполнялись эти равенства.

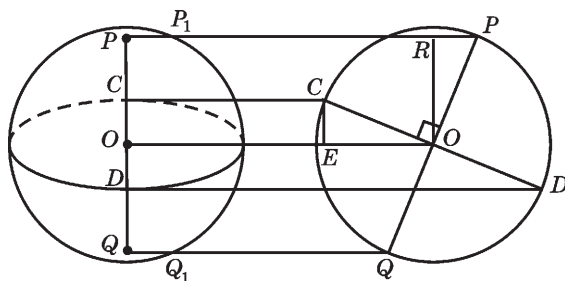


Рис. 4

Упражнения

- 1. Сколько сфер можно провести: а) через одну и ту же окружность; б) через окружность и точку, не принадлежащую её плоскости?
- 2. Сколько сфер можно провести через четыре точки, являющиеся вершинами: а) квадрата; б) равнобедренной трапеции; в) ромба?
- 3. Верно ли, что через две точки сферы проходит один большой круг?
- 4. Через какие две точки сферы можно провести несколько окружностей большого круга?
- 5. Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них могла пройти сфера того же радиуса?
- 6. Исследуйте случаи взаимного расположения двух сфер. В каком случае две сферы: а) не имеют общих точек; б) имеют одну общую точку (касаются); в) пересекаются по окружности?
- 7. Какой фигурой является пересечение двух пересекающихся сфер?
- 8. Шар радиуса 5 см пересечён плоскостью, отстоящей от центра шара на 3 см. Вычислите радиус круга, получившегося в сечении.
- 9. Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная радиусу. Какую часть радиуса шара составляет радиус круга, получившегося в сечении?
- 10. Радиус шара R . Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.
- 11. Плоскость проходит через точку A и касается сферы с центром O и радиусом 3 см. Определите расстояние от этой точки до точки касания, если $OA = 5$ см.

12. Шар пересечён плоскостью, отстоящей от центра шара на 24 см. Найдите радиус шара, если длина окружности получившегося сечения составляет $\frac{3}{5}$ длины окружности его большого круга.
13. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере:
а) через прямую, проходящую вне сферы; б) через точку, принадлежащую сфере; в) через точку, лежащую вне сферы?
14. Можно ли провести общую касательную плоскость к двум сферам при условии, что ни одна из них не лежит внутри другой?
15. Найдите геометрическое место центров сфер, которые касаются двух:
а) параллельных плоскостей; б) пересекающихся плоскостей.
16. Сфера радиуса R касается граней двугранного угла величиной φ . Найдите расстояние от центра сферы до ребра этого двугранного угла.
17. Исследуйте случаи взаимного расположения сферы и прямой. Когда они:
а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?
- 18. Сколько можно провести прямых, касающихся сферы в одной и той же точке?
- 19. Сколько касательных прямых можно провести к данной сфере через данную точку:
а) на сфере; б) вне сферы?
20. Докажите, что касательная прямая к сфере перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
21. Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса R , которые касаются данной:
а) прямой; б) плоскости; в) сферы.
22. Можно ли к двум сферам провести общую касательную прямую?
23. Что можно сказать о всех общих касательных прямых, проведённых к двум данным сферам:
а) разных радиусов; б) одного радиуса?
- ★ 24. Для данного изображения сферы в виде круга с выделенным эллипсом, изображающим экватор, постройте изображения полюсов.
- ★ 25. Для данного изображения сферы в виде круга с указанными полюсами изобразите экватор.

§ 2. Многогранники, вписанные в сферу

Эта тема аналогична соответствующей теме курса планиметрии, где, в частности, показывалось, что окружности можно описать около каждого треугольника и около каждого правильного многоугольника.

Аналогом окружности в пространстве является сфера. Аналогом многоугольника является многогранник. При этом аналогом треугольника является треугольная пирамида, аналогом правильных многоугольников — правильные многогранники.

Определение. Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины принадлежат этой сфере. Сама сфера при этом называется **описанной около многогранника**.

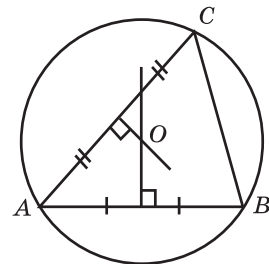
Теорема. Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу, и притом только одну.

Доказательство. Обратимся к доказательству аналогичной теоремы планиметрии. С чего мы начинали? Прежде всего находили геометрическое место точек, равноудалённых от двух вершин треугольника, например A и B (рис. 5, а). Таким геометрическим местом является серединный перпендикуляр, проведённый к отрезку AB . Затем находили геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и C . Это серединный перпендикуляр к отрезку AC . Точка пересечения этих серединных перпендикуляров и будет искомым центром O описанной около треугольника ABC окружности.

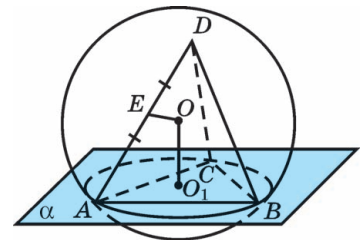
Рассмотрим теперь пространственную ситуацию и попробуем сделать аналогичные построения.

Пусть дана треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 5, б). Точки A, B, C определяют плоскость α . Геометрическим местом точек, равноудалённых от трёх точек — A, B, C , является перпендикуляр, назовём его a , проведённый к плоскости α и проходящий через центр O_1 описанной около треугольника ABC окружности. Геометрическим местом точек, равноудалённых от точек A, D , является плоскость, назовём её β , перпендикулярная отрезку AD и проходящая через его середину — точку E .

Плоскость β не перпендикулярна плоскости α и, следовательно, пересекает прямую a в некоторой точке O , которая и будет искомым центром описанной около треугольной пирамиды $ABCD$ сферы. Действительно, в силу построения, точка O одинаково удалена от всех вершин пирамиды $ABCD$. Причём такая точка будет единственной, так как пересекающиеся прямая и плоскость имеют единственную общую точку. ■



а)



б)

Рис. 5

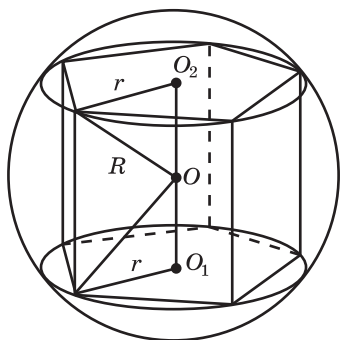


Рис. 6

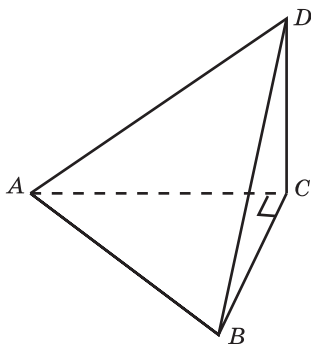


Рис. 7

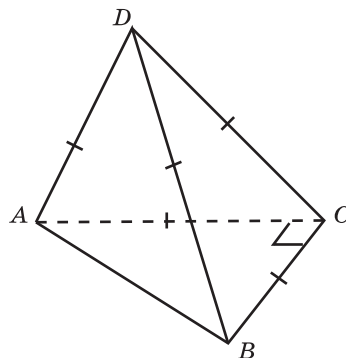


Рис. 8

Выясним, в каком случае около прямой призмы можно описать сферу.

Теорема. Около прямой призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой призмы можно описать окружность.

Доказательство. Если около прямой призмы описана сфера, то все вершины основания призмы принадлежат сфере и, следовательно, окружности, являющейся линией пересечения сферы и плоскости основания (рис. 6). Обратно, пусть около основания прямой призмы описана окружность с центром в точке O_1 и радиусом r . Тогда и около второго основания призмы можно описать окружность с центром в точке O_2 и тем же радиусом r . Пусть $O_1O_2 = d$, O — середина отрезка O_1O_2 . Тогда сфера

с центром O и радиусом $R = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}$ будет искомой описанной сферой. ■

Упражнения

- 1. Можно ли описать сферу около: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) параллелепипеда, одной из граней которого является параллелограмм; г) параллелепипеда, одной из граней которого является ромб?
- 2. Ребро куба равно a . Найдите радиус сферы, описанной около него.
- 3. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Найдите радиус сферы.
- 4. Может ли центр описанной около треугольной пирамиды сферы находиться вне этой пирамиды?
- 5. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 дм. Одно из боковых ребер равно 2 дм и перпендикулярно основанию. Найдите радиус описанной сферы.

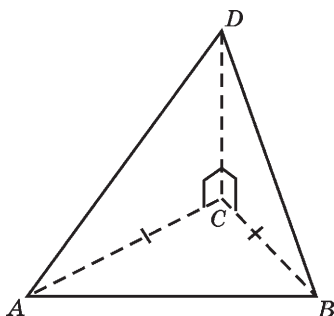


Рис. 9

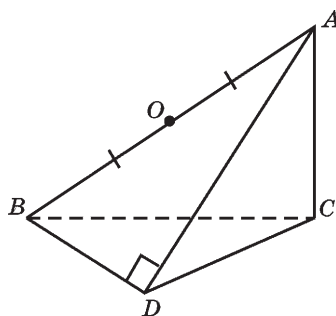


Рис. 10

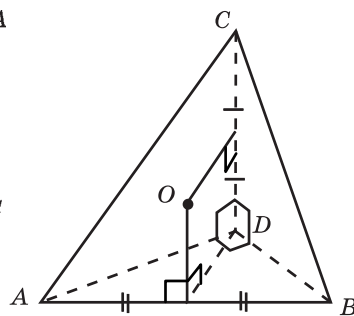


Рис. 11

6. На рисунке 7 изображена пирамида $ABCD$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания; угол ACB равен 90° . Укажите на чертеже точку O — центр сферы, описанной около пирамиды.
7. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды 4 м, высота тоже 4 м. Найдите радиус описанной сферы.
8. Приведите пример пирамиды, около которой нельзя описать сферу.
9. Каким свойством должен обладать многоугольник, лежащий в основании пирамиды, чтобы около неё можно было описать сферу?
10. На рисунке 8 изображена пирамида $ABCD$, у которой угол ACB прямой. $AC = CB = CD = DB = AD = a$. Найдите высоту DH пирамиды и центр сферы, описанной около неё.
11. На рисунке 9 показана треугольная пирамида $ABCD$, у которой $AC = BC$, ребро DC перпендикулярно плоскости ABC и угол ACB равен 120° . Нарисуйте центр сферы, описанной около пирамиды.
12. На рисунке 10 изображена пирамида $ABCD$, у которой ребро AC перпендикулярно плоскости BCD и угол BDA прямой. Докажите, что точка O — центр сферы, описанной около пирамиды.
13. На рисунке 11 изображена пирамида $ABCD$, у которой углы ADC , CDB и ADB прямые. Докажите, что точка O является центром сферы, описанной около пирамиды.
14. При каком условии около прямой призмы можно описать сферу?
15. Приведите пример прямой призмы, около которой нельзя описать сферу.
16. Около треугольной призмы описана сфера, центр которой лежит вне призмы. Какой треугольник является основанием призмы?
17. При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, будет находиться: а) внутри призмы; б) на одной из боковых граней призмы; в) вне призмы?

18. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы 24 см. Найдите радиус описанной сферы.
- 19. Можно ли описать сферу около наклонной призмы?
20. Докажите, что около любой правильной усечённой пирамиды можно описать сферу.
- ★ 21. Докажите, что около любого правильного многогранника можно описать сферу.
- ★ 22. Ребро тетраэдра равно a . Найдите радиус описанной около него сферы.
- ★ 23. Ребро октаэдра равно a . Найдите радиус описанной около него сферы.
- ★ 24. Чему равно наибольшее число точек, которые можно разместить на сфере так, чтобы расстояния между любыми двумя точками были равны?
- ★ 25. Докажите, что если около каждой грани многогранника можно описать окружность и в каждой вершине этого многогранника сходятся три ребра, то около данного многогранника можно описать сферу. Приведите пример многогранника, около каждой грани которого можно описать окружность, а около самого многогранника нельзя описать сферу.
26. Нарисуйте сферу и вписанную в неё треугольную пирамиду с вершиной в полюсе сферы.
27. Нарисуйте сферу и вписанную в неё правильную четырёхугольную пирамиду с вершиной в полюсе сферы.
28. Нарисуйте сферу и вписанную в неё призму.

§ 3. Многогранники, описанные около сферы

Здесь мы рассмотрим многогранники, описанные около сферы, но сначала напомним соответствующие понятия для многоугольников и окружностей.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны этого многоугольника касаются окружности. Сам многоугольник при этом называется описанным около окружности.

В планиметрии доказывалось, что в любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Для нахождения центра O вписанной в треугольник ABC окружности нужно провести биссектрисы углов A и B . Их точка пересечения O будет одинаково удалена от всех

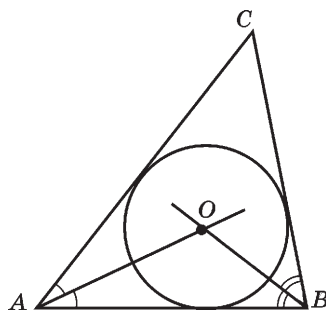


Рис. 12

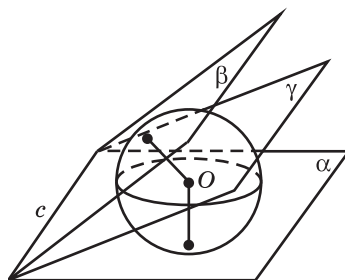


Рис. 13

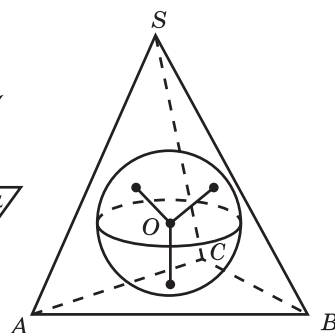


Рис. 14

сторон треугольника и, следовательно, будет искомым центром вписанной окружности (рис. 12). Перейдём теперь к пространственным фигурам.

О п р е д е л е н и е. Многогранник называется **описанным около сферы**, если плоскости всех его граней касаются сферы. Сама сфера называется **вписанной в многогранник**.

Выясним сначала, какие сферы касаются одновременно двух пересекающихся плоскостей.

Пусть дан двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с общей граничной прямой c . Через прямую c проведём полуплоскость γ , делящую этот двугранный угол пополам (рис. 13). Такая полуплоскость называется **биссектральной**. Точки полуплоскости γ , не принадлежащие прямой c , обладают тем свойством, что расстояния от них до плоскостей α и β одинаковы. Если это расстояние принять за радиус сферы R , то сфера с центром на **биссектральной** полуплоскости и радиусом R будет касаться плоскости α и плоскости β . Сама биссектральная полуплоскость без прямой c даёт геометрическое место центров сфер, лежащих внутри двугранного угла и касающихся плоскостей α и β .

Т е о р е м а. В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну.

Доказательство. Ясно, что центром вписанной сферы будет точка, одинаково удалённая от всех граней треугольной пирамиды. Для её нахождения рассмотрим три биссектральные полуплоскости двугранных углов, образованных боковыми гранями пирамиды и основанием. Они пересекаются в одной точке (докажите это самостоятельно), которая будет одинаково удалена как от боковых граней, так и от основания, т. е. будет искомым центром вписанной сферы (рис. 14). ■

Выясним, в каком случае в прямую призму можно вписать сферу.

Теорема. В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание этой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности.

Доказательство. Пусть в прямую призму вписана сфера с центром в точке O и радиусом R (рис. 15). Тогда высота призмы равна $2R$. Че-

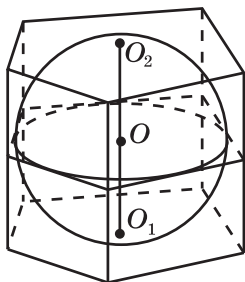


Рис. 15

рез центр O проведём сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. В сечении призмы будет многоугольник, равный многоугольнику основания, описанный около окружности, являющейся сечением сферы плоскостью. Таким образом, в основание призмы можно вписать окружность. Обратно, предположим, что в основание прямой призмы можно вписать окружность радиуса R , а высота призмы равна $2R$. Пусть O — середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания. Тогда сфера с центром O и радиусом R будет искомой сферой, вписанной в призму. ■

Упражнения

- 1. Можно ли вписать сферу в куб? Что будет центром вписанной сферы?
- 2. Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед, отличный от куба?
- 3. При каком условии в прямую призму можно вписать сферу?
- 4. Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу.
- 5. Докажите, что в пирамиду, у которой двугранные углы при основании равны, всегда можно вписать сферу.
- 6. Сфера касается боковых рёбер правильной четырёхугольной пирамиды и её основания. Определите радиус сферы, если диагональным сечением пирамиды является равносторонний треугольник, сторона которого равна a .
- 7. Найдите радиус сферы, вписанной в прямую призму, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α и гипотенузой c .
- 8. По ребру a правильного тетраэдра определите радиус вписанной сферы.
- 9. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна h , а угол между боковой гранью и основанием равен 60° .
- 10. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, основанием которой служит ромб со стороной a и острым углом α . Углы между боковыми гранями и основанием равны φ .
- ★ 11. Дана треугольная пирамида $SABC$. Грань SCB перпендикулярна плоскости основания; рёбра SC и SB равны a ; плоские углы при

- вершине равны между собой и составляют 60° . Определите радиус вписанной сферы.
12. В правильную 6-угольную призму со стороной основания 1 вписана сфера. Найдите высоту призмы.
13. Гранями параллелепипеда являются ромбы со сторонами 1 и острыми углами 60° . Найдите радиус вписанной сферы.
- *14. Докажите, что в любой правильный многогранник можно вписать сферу. Причём центры вписанной и описанной сфер совпадают.
15. Найдите радиус сферы, вписанной в октаэдр с ребром a .
- *16. Сфера касается всех рёбер пирамиды $ABCD$. Докажите, что $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.
- *17. Нарисуйте сферу, вписанную в треугольную пирамиду.
- *18. Нарисуйте сферу, вписанную в куб.

§ 4. Цилиндр. Конус

Пусть в пространстве заданы две параллельные плоскости — α и α' . F — круг в одной из этих плоскостей, например α (рис. 16). Рассмотрим ортогональное проектирование на плоскость α' . Проекцией круга F будет круг F' .

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга F с их ортогональными проекциями, называется **прямым цилиндром** или просто **цилиндром**.

Круги F и F' называются **основаниями** цилиндра.

Расстояние между плоскостями оснований называется **высотой цилиндра**.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки окружности одного основания цилиндра с их ортогональными проекциями, называется **боковой поверхностью** цилиндра. Сами отрезки называются **образующими** цилиндра.

Прямая, проходящая через центры оснований цилиндра, называется **осью** этого цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется **осевым сечением** (рис. 17).

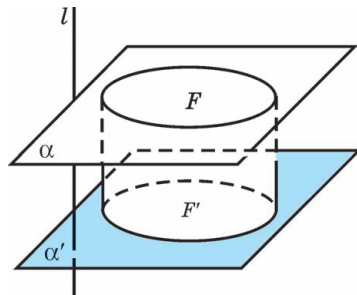


Рис. 16

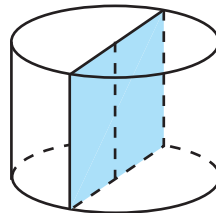


Рис. 17

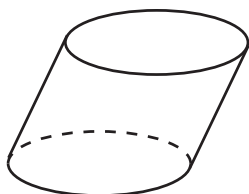


Рис. 18

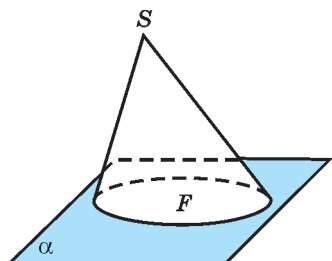


Рис. 19

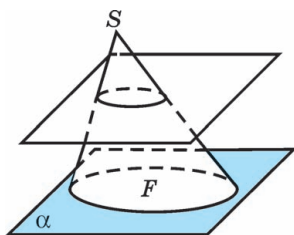
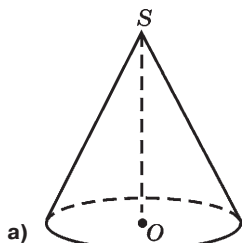
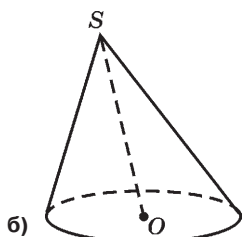


Рис. 20



а)



б)

Рис. 21

В случае если вместо ортогонального проектирования взять параллельное проектирование в направлении наклонной к плоскости α' , то фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга F с их параллельными проекциями, называется **наклонным цилиндром** (рис. 18).

Обычно цилиндр изображается в ортогональной проекции (см. рис. 17, 18).

Пусть теперь в пространстве задана плоскость α и точка S , ей не принадлежащая. F — круг в плоскости α (рис. 19).

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точку S с точками круга F , называется **конусом**.

Круг F называется **основанием** конуса, а точка S — **вершиной** конуса.

Расстояние между вершиной конуса и плоскостью основания называется **высотой** конуса.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими вершину конуса с точками окружности его основания, называется **боковой поверхностью** конуса. Сами отрезки называются **образующими** конуса.

Если конус пересечён плоскостью, параллельной основанию, то его часть, заключённая между этой плоскостью и основанием, называется **усечённым конусом** (рис. 20). Само сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, называется также **основанием** усечённого конуса.

Высотой усечённого конуса называется расстояние между плоскостями его оснований.

В случае если отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания, перпендикулярен плоскости основания, то конус называется **прямым** (рис. 21, а). В противном случае он называется **наклонным** (рис. 21, б).

В дальнейшем прямые конусы мы будем называть просто конусами.

Прямая, проходящая через вершину и центр основания конуса, называется **осью** этого конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым сечением** (рис. 22).

Обычно конус и усечённый конус изображаются в ортогональной проекции.

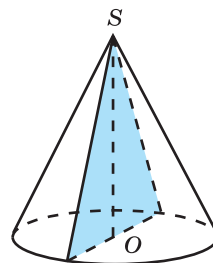


Рис. 22

Упражнения

- 1. Сколько образующих имеет цилиндр?
- 2. Что можно принять в цилиндре за его высоту?
- 3. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям?
- 4. Какой фигурой является осевое сечение цилиндра?
- 5. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра?
- 6. Можно ли в сечении цилиндра плоскостью получить: а) прямоугольник; б) равнобедренный треугольник; в) круг?
- 7. Сколько существует плоскостей, рассекающих данный цилиндр: а) на два равных цилиндра; б) на две равные фигуры?
- 8. Изобразите цилиндр в ортогональной проекции.
- 9. Докажите, что плоскость, проходящая через образующую цилиндра, перпендикулярна плоскости его основания.
- 10. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.
- 11. Радиус основания цилиндра равен r , диагональ осевого сечения — d . Найдите площадь осевого сечения.
- 12. Осевым сечением цилиндра является квадрат, площадь которого равна Q . Найдите радиус основания цилиндра.
- 13. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна 16 см^2 . Чему равна площадь основания цилиндра?
- 14. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечён плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.
- 15. Радиус основания цилиндра равен 1, высота 20, площадь сечения, параллельного оси, равна 20 кв. ед. На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?
- 16. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площадь каждого из которых равна Q . Определите площадь осевого сечения.

17. Найдите геометрическое место точек цилиндра, равноудалённых от:
а) образующих; б) оснований.
18. Найдите геометрическое место точек пространства, удалённых от данной прямой на данное расстояние.
19. Два цилиндра имеют две общие образующие. Какая фигура получится при пересечении этих цилиндров плоскостью, перпендикулярной их осям?
- 20. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной основанию?
- 21. Какой фигурой является осевое сечение конуса?
22. Радиус основания конуса равен 4 см. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.
23. Высота конуса h . На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?
24. Радиус основания конуса равен 1 см. Осевым сечением служит равносторонний треугольник. Найдите площадь осевого сечения.
25. Высота конуса равна 8 м, радиус основания 6 м. Найдите образующую конуса.
26. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите радиус основания и высоту конуса.
27. Высота конуса равна радиусу основания. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.
28. Образующая конуса равна 6 м и наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь основания конуса.
29. Образующая конуса равна 8 см, а угол при вершине осевого сечения 60° . Найдите площадь осевого сечения.
30. Какое сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет наибольший периметр?
- ★ 31. Радиус основания не превосходит высоты конуса. Какое сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет наибольшую площадь?
32. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от всех образующих конуса.

§ 5. Поворот. Фигуры вращения

Важным классом фигур в пространстве, помимо многогранников, является класс фигур, называемых фигурами вращения.

Прежде чем дать определение фигуры вращения, рассмотрим понятие поворота в пространстве вокруг прямой, которое является аналогом понятия поворота на плоскости вокруг точки.

Напомним, что точка A' на плоскости α получается из точки A этой плоскости **поворотом** вокруг центра O на угол φ , если $OA' = OA$ и угол $A'OA$ равен φ (рис. 23).

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A , не принадлежащая этой прямой (рис. 24). Через точку A проведём плоскость α , перпендикулярную прямой a , и точку пересечения a и α обозначим O . Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ , если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ .

О п р е д е л е н и е. Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол φ , называется **поворотом** или **вращением**. Прямая a при этом называется **осью вращения**.

Говорят, что фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a , если точки фигуры Φ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a . Фигура Φ при этом называется **фигурой вращения**.

Например, при вращении точки A вокруг прямой a (рис. 25) получается окружность с центром в точке O , являющейся пересечением прямой a с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a .

Сфера получается вращением окружности вокруг её диаметра. Аналогично шар получается вращением круга вокруг какого-нибудь его диаметра (рис. 26).

Цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 27).

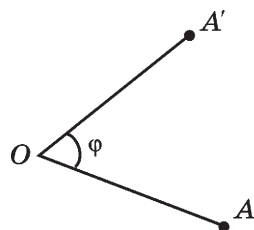


Рис. 23

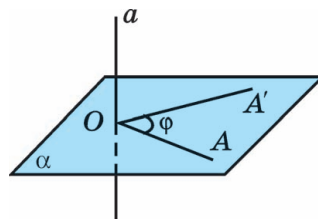


Рис. 24

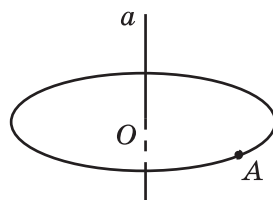


Рис. 25

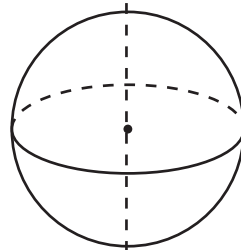


Рис. 26

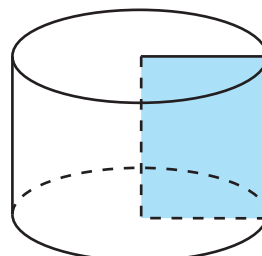
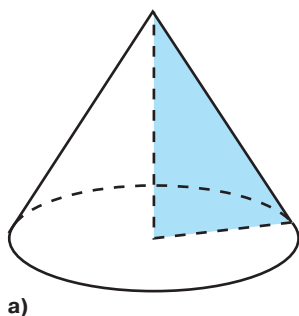


Рис. 27



Конус получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 28, а).

Усечённый конус получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, вокруг боковой стороны, прилегающей к этому углу (рис. 28, б).

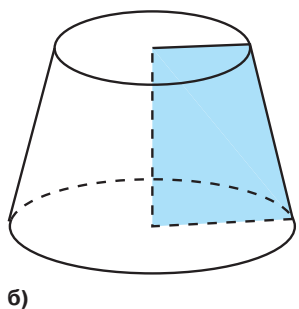


Рис. 28

Если окружность вращать вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек (рис. 29, а), то полученная поверхность вращения называется **тором** и по форме напоминает баранку или бублик (рис. 29, б).

При вращении эллипса вокруг его оси (рис. 30, а) получается поверхность, называемая **эллипсоидом вращения** (рис. 30, б).

При вращении параболы вокруг её оси (рис. 31, а) получается поверхность, называемая **параболоидом вращения** (рис. 31, б).

При вращении гиперболы вокруг её оси (рис. 32, а) получается поверхность, называемая **гиперболоидом вращения** (рис. 32, б).

Выясним, какие фигуры могут получаться при вращении прямой.

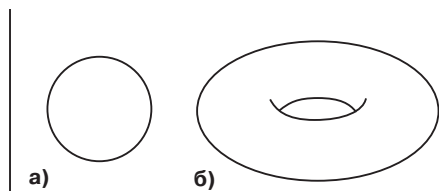


Рис. 29

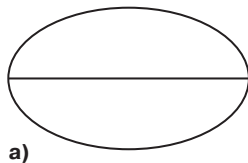
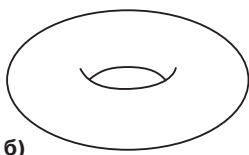


Рис. 30

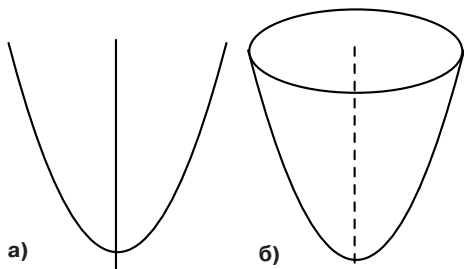
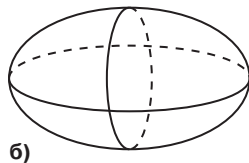


Рис. 31

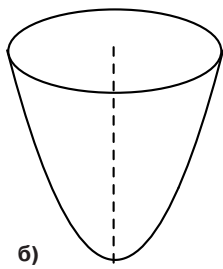
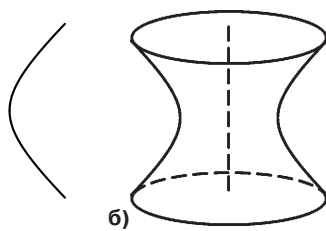


Рис. 32



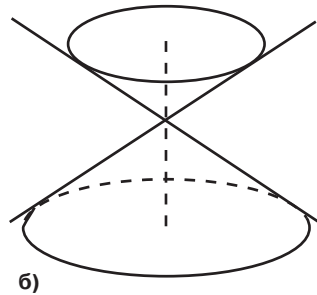
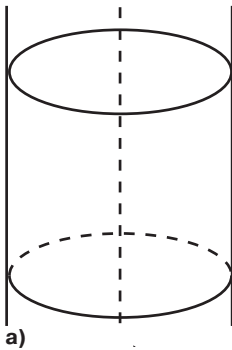


Рис. 33

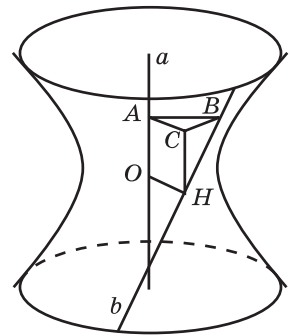


Рис. 34

Если прямая параллельна оси, то при вращении получается фигура, называемая **цилиндрической поверхностью** (рис. 33, а). Если прямая пересекает ось, то при вращении получается фигура, называемая **конической поверхностью** (рис. 33, б).

Теорема*. При вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения, получается гиперболоид вращения.

Доказательство. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, OH — их общий перпендикуляр (рис. 34). Напомним, что длина d отрезка OH называется расстоянием между прямыми a и b . Она является наименьшей из длин отрезков, соединяющих точки прямых a и b . Поэтому при вращении точек прямой b вокруг оси a окружность наименьшего радиуса будет получаться при вращении точки H . Рассмотрим произвольную точку B на прямой b , отличную от H , и опустим из неё перпендикуляр BA на прямую a . При вращении точка B описывает окружность, радиус которой равен AB . Выразим этот радиус через d . Для этого через точку H проведём прямую, параллельную a , и через точку A — прямую, параллельную OH . Точку пересечения этих прямых обозначим C . Пусть расстояние AB равно x , расстояние OA равно y и угол BHC равен α . Треугольник ABC — прямоугольный, катет AC равен d , катет BC равен $y \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому выполняется равенство

$$x^2 = d^2 + y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Перенеся слагаемое, содержащее y , в левую часть равенства и разделив обе части полученного равенства на d^2 , получим уравнение

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{d^2} = 1,$$

которое представляет собой уравнение гиперболы. При вращении этой гиперболы получается та же самая фигура, что и при вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения. Следовательно, искомой фигурой вращения является гиперболоид вращения. ■

Из доказанной теоремы, в частности, следует интересная особенность гиперboloидов вращения. Несмотря на искривлённость их поверхностей, все они состоят из прямолинейных отрезков. Поэтому форма гиперboloида вращения часто используется в архитектурных сооружениях. Так, Шаболовская радиобашня в Москве, построенная по проекту замечательного русского инженера, почётного академика В. Г. Шухова (1853—1939), составлена из частей гиперboloидов вращения. Её особенностью является то, что она в действительности состоит из прямолинейных конструкций — металлических стержней.

Заметим, что поверхность фигуры, получающейся при вращении многогранника, определяется вращением некоторых его рёбер. При этом если ребро параллельно оси, то при вращении оно даёт боковую поверхность цилиндра. Если ребро не параллельно оси, но лежит с ней в одной плоскости, то при вращении оно даёт часть конической поверхности. А именно: а) если ребро не пересекает ось, то получается боковая поверхность усечённого конуса; б) если одна вершина ребра принадлежит оси, то получается боковая поверхность конуса; в) если ребро пересекает ось, то получается поверхность, состоящая из двух боковых поверхностей конусов с общей вершиной. Если же ребро многогранника скрещивается с осью вращения, то получается поверхность, являющаяся частью гиперboloида вращения.

Таким образом, поверхность вращения многогранника может состоять из боковых поверхностей цилиндра, конуса, усечённого конуса и частей поверхностей гиперboloидов вращения. Никаких других поверхностей при вращении многогранника получиться не может.

Выясним, например, какая фигура получается при вращении куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вокруг диагонали AC_1 . Рёбра этого куба, выходящие из вершины A и вершины C_1 , при вращении дадут два конуса с этими вершинами. Поверхность вращения, заключённая между этими конусами, получается при вращении рёбер куба, скрещивающихся с диагональю AC_1 . Следовательно, она является частью гиперboloида вращения, и вся поверхность вращения выглядит так, как показано на рисунке 35.

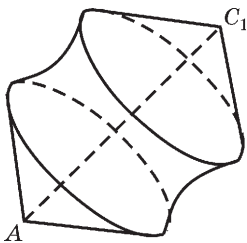


Рис. 35

Упражнения

- 1. Какая фигура получается при вращении отрезка OA вокруг прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной OA ?
- 2. Назовите прямые, при вращении вокруг которых данного прямоугольника получается цилиндр.

- 3. Назовите какие-нибудь фигуры, вращением которых можно получить цилиндр.
- 4. Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг высоты, опущенной на основание этого треугольника?
- 5. Назовите какие-нибудь фигуры, вращением которых можно получить: а) конус; б) усечённый конус.
- 6. Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг диаметра?
- 7. Нарисуйте фигуры, полученные вращением треугольника ABC вокруг стороны AB (рис. 36, а, б). Как эту фигуру можно получить из конусов?
- 8. Нарисуйте фигуру, полученную вращением треугольника вокруг прямой, проходящей через одну из его вершин и лежащей в плоскости треугольника. Как эту фигуру можно получить из конусов?
- 9. Нарисуйте фигуры, полученные вращением круга вокруг: а) касательной к окружности круга; б) хорды, не являющейся диаметром круга.
- 10. Кривая задана уравнением $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$. Нарисуйте поверхность, которая получается при вращении этой кривой вокруг оси Oy .
- 11. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$ вокруг: а) биссектрисы первого и третьего координатных углов; б) биссектрисы второго и четвёртого координатных углов.
- ★ 12. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, вокруг оси Oy .
- 13. Какая фигура получается при вращении правильной n -угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры её оснований?
- 14. Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей: а) центры противоположных граней; б) середины противоположных рёбер?
- 15. Какая фигура получается при вращении правильной пирамиды вокруг её высоты?
- 16. Какая фигура получается при вращении пирамиды вокруг её высоты?
- 17. Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся рёбер?

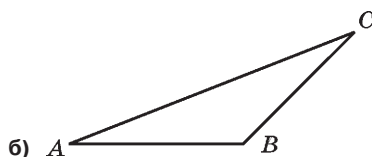
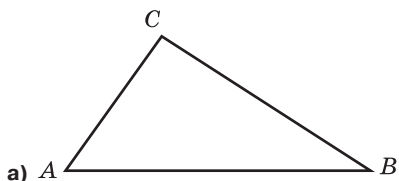


Рис. 36

18. Найдите фигуру, которая получится при вращении октаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью октаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных рёбер.
- ★ 19. Найдите фигуру, которая получится при вращении икосаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью икосаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных рёбер.
- ★ 20. Найдите фигуру, которая получится при вращении додекаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью додекаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных рёбер.
- ★ 21. Докажите, что если пространственная фигура Φ получается вращением пространственной фигуры F , то её можно получить вращением плоской фигуры, лежащей в одной плоскости с осью вращения.
- ★ 22. Точка, находящаяся на боковой поверхности цилиндра, равномерно вращается вокруг оси цилиндра и одновременно равномерно движется в направлении образующей. Нарисуйте траекторию движения точки (винтовая линия).

§ 6. Вписанные и описанные цилиндры

Сферу можно вписывать не только в многогранник, но и в цилиндр.

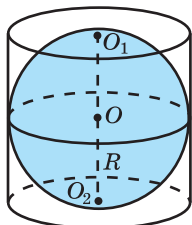


Рис. 37

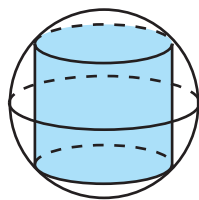


Рис. 38

Определение. Сфера называется **вписанной в цилиндр**, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей) (рис. 37). При этом цилиндр называется **описанным около сферы**.

Определение. Цилиндр называется **вписанным в сферу**, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около цилиндра** (рис. 38).

Теорема. Если образующая цилиндра равна диаметру его основания, то в него можно вписать сферу.

Доказательство. Заметим, что осевое сечение цилиндра в этом случае является квадратом (рис. 39).

Впишем в него окружность. Будем теперь вращать квадрат вместе с вписанной в него окружностью вокруг оси цилиндра. В результате получим исходный цилиндр вместе с вписанной в него сферой. ■

Определение. Прямая призма называется **вписанной в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра (рис. 40). При этом цилиндр называется **описанным около призмы**.

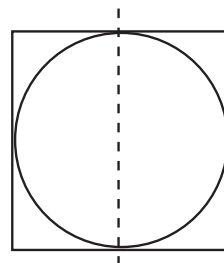


Рис. 39

Ясно, что около прямой призмы можно описать цилиндр тогда и только тогда, когда около её основания можно описать окружность.

Определение. **Касательной плоскостью** к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и не имеющая с цилиндром других общих точек (рис. 41).

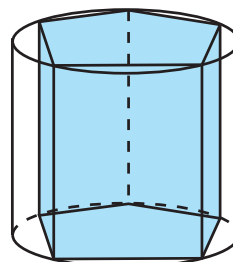


Рис. 40

Определение. Прямая призма называется **описанной около цилиндра**, если её основания описаны около оснований цилиндра (рис. 42). При этом цилиндр называется **вписанным в призму**.

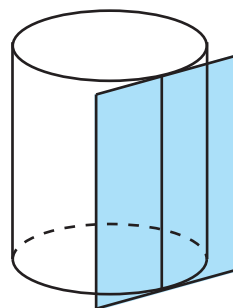


Рис. 41

Ясно, что в прямую призму можно вписать цилиндр тогда и только тогда, когда в её основание можно вписать окружность.

Упражнения

- 1. В цилиндр вписана сфера радиуса r . Чему равна высота цилиндра?
- 2. Можно ли вписать сферу в цилиндр, осевым сечением которого является: а) прямоугольник; б) квадрат?
- 3. Можно ли вписать сферу в наклонный цилиндр?
- 4. Докажите, что около цилиндра можно описать сферу. Где будет расположен центр этой сферы?

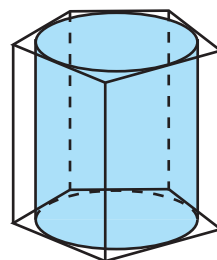


Рис. 42

5. Радиус основания цилиндра равен r . Высота равна h . Чему равен радиус описанной сферы?
6. Около цилиндра высоты h описана сфера радиуса R . Найдите радиус основания цилиндра.
- 7. Можно ли описать сферу около наклонного цилиндра?
- 8. Как расположена касательная плоскость к цилиндру по отношению к осевому сечению этого цилиндра, проходящему через образующую, лежащую в касательной плоскости?
- 9. Каково взаимное расположение оси цилиндра и плоскости, касательной к цилиндру?
- 10. Через какие точки пространства можно провести плоскости, касающиеся цилиндра?
- 11. Через какие прямые можно провести плоскости, касающиеся цилиндра?
- 12. В каком случае к двум цилиндрам можно провести общую касательную плоскость?
- 13. Можно ли вписать цилиндр в: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) прямую треугольную призму; д) правильную шестиугольную призму?
- 14. Можно ли описать около цилиндра: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) прямую треугольную призму; д) правильную шестиугольную призму?
15. Нарисуйте: а) сферу, вписанную в цилиндр; б) цилиндр, вписанный в сферу; в) призму, вписанную в цилиндр; г) цилиндр, вписанный в призму.

§ 7*. Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс

Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию. Если же плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

Одним из основных свойств эллипса является следующее **фокальное свойство**.

Т е о р е м а. (Фокальное свойство эллипса.) Внутри эллипса существуют такие точки F_1 и F_2 , называемые фокусами эллипса, что сумма расстояний от любой точки A эллипса до этих точек есть величина постоянная.

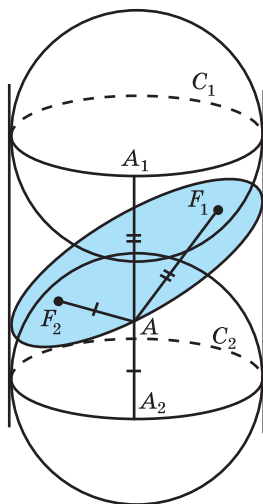


Рис. 43

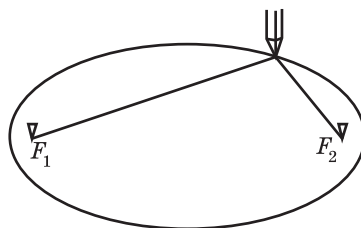


Рис. 44

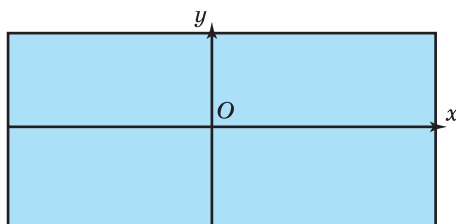


Рис. 45

Доказательство. Пусть эллипс получен в результате сечения цилиндрической поверхности плоскостью α . Впишем в эту поверхность две сферы, касающиеся плоскости α в некоторых точках F_1, F_2 и цилиндрической поверхности по окружностям C_1, C_2 (рис. 43). Пусть A — произвольная точка эллипса. Проведём через неё образующую и обозначим через A_1, A_2 точки пересечения этой образующей с окружностями C_1, C_2 соответственно. Заметим, что прямая A_1A_2 является касательной к обеим сферам. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведённых к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 есть расстояние между плоскостями окружностей C_1, C_2 . Поэтому оно не зависит от выбора точки A эллипса, т. е. является постоянной величиной. ■

Фокальное свойство эллипса позволяет рисовать эллипс на бумаге. Для этого к двум точкам F_1, F_2 листа бумаги прикрепляют кнопками или булавками концы нити. Затем, натягивая нить карандашом, проводят им линию, которая и будет представлять собой эллипс (рис. 44).

Отрезок, соединяющий точки эллипса и проходящий через фокусы эллипса, называется **большой осью** эллипса. Половина этого отрезка называется **большой полуосью**.

Отрезок, соединяющий точки эллипса, проходящий через середину отрезка F_1F_2 и перпендикулярный ему, называется **малой осью** эллипса. Половина этого отрезка называется **малой полуосью**.

Рассмотрим ещё одно свойство сечений цилиндра плоскостью, а именно связь этих сечений с тригонометрическими функциями.

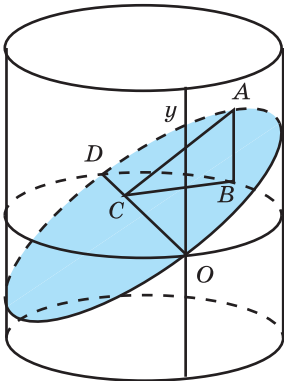


Рис. 46

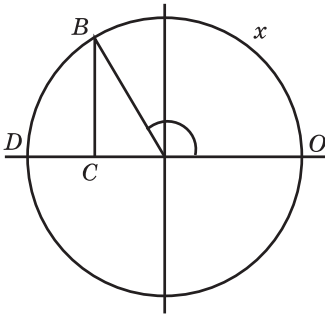


Рис. 47

соответственно точки B и C . Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$. Следовательно, $AB = BC$. Заметим, что $BC = \sin x$, где x — длина дуги OB . Для этого достаточно обратиться к рисунку 47 и вспомнить определение синуса. Таким образом, $AB = \sin x$, где $x = OB$, т. е. эта кривая является частью синусоиды с уравнением $y = \sin x$ (рис. 48).

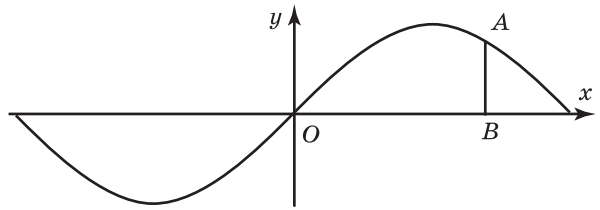


Рис. 48

Возьмём прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нём оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам (рис. 45). Затем свернём этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернётся в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 46). Через диаметр OD полученной окружности проведём сечение, составляющее с плоскостью окружности угол 45° . В этом случае сечением будет эллипс.

Развернём цилиндр обратно в прямоугольник. При этом эллипс развернётся в кривую, являющуюся частью синусоиды. Для доказательства этого из произвольной точки A на эллипсе опустим перпендикуляры на плоскость окружности и диаметр окружности OD . Получим

Упражнения

- 1. Какую форму принимает поверхность воды в круглом наклонённом стакане?
2. Нарисуйте цилиндр и плоскость, пересекающую его боковую поверхность по эллипсу.
3. Используя карандаш, бумагу, нить и кнопки, нарисуйте эллипс.
4. Плоскость сечения цилиндра составляет с плоскостью основания угол φ . Найдите отношение малой оси эллипса к большой. При каком угле это отношение равно 0,5?

5. Докажите, что сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равна длине большой оси эллипса.
6. Докажите, что расстояния от концов малой оси эллипса до его фокусов равны половине большой оси.
7. Для эллипса с заданными большой и малой осями постройте его фокусы. В частности, для эллипса, полученного из окружности сжатием в два раза относительно данного диаметра, постройте фокусы эллипса.

8. На рисунке 49 дано изображение осевого сечения цилиндра. Через точки A и B цилиндра проведена плоскость, перпендикулярная этому сечению. Постройте фокусы эллипса, получившегося в сечении.

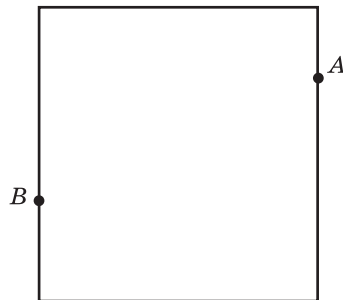


Рис. 49

9. Пусть эллипс получен из окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, сжатием в k раз в направлении оси Oy . Найдите: а) уравнение эллипса; б) большую и малую оси; в) координаты фокусов.
- *10. Докажите, что площадь эллипса, у которого большая и малая полуоси равны соответственно R , r , выражается формулой $S = \pi Rr$. (Воспользуйтесь формулой площади ортогональной проекции многоугольника.)
- *11. В основании цилиндра круг радиуса R . Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .
12. Докажите, что если сечение цилиндра, свёрнутого из бумаги, проводить не под углом 45° , а под углом φ , то уравнение соответствующей кривой будет иметь вид $y = k \sin x$, где $k = \operatorname{tg} \varphi$.
13. Нарисуйте кривые, соответствующие углам: а) $\varphi = 30^\circ$; б) $\varphi = 60^\circ$.
14. Докажите, что если исходный прямоугольник свернуть в прямой круговой цилиндр не единичного, а некоторого другого радиуса a и произвести с этим цилиндром аналогичные операции, то получится кривая, задаваемая уравнением $y = a \sin \frac{x}{a}$.
15. Нарисуйте график функции: а) $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; б) $y = \frac{1}{2} \sin 2x$.
16. Докажите, что если плоскость сечения проходит не через точку O , а через диаметр, образующий с OD (рис. 46) угол φ_0 , то получится кривая, задаваемая уравнением $y = \sin(x - \varphi_0)$.

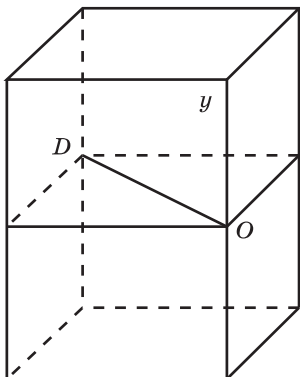


Рис. 50

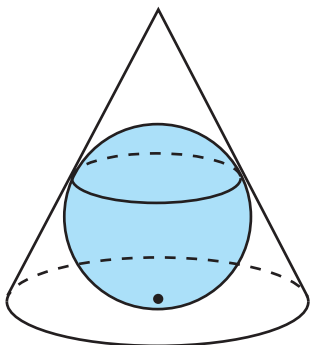


Рис. 51

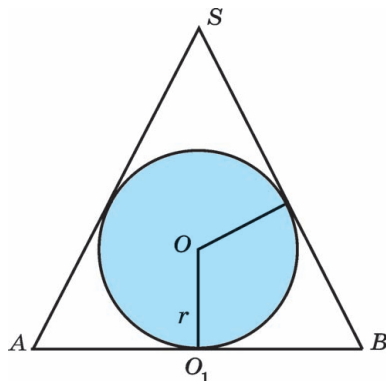


Рис. 52

17. Нарисуйте график функции: а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
18. Какой угол φ_0 нужно взять, чтобы получить график функции $y = \cos x$?
19. Возьмём прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нём осями координат (рис. 45). Свернём этот лист в боковую поверхность правильной четырёхугольной призмы (рис. 50). Сторону основания призмы примем за 1. Через точки O и D проведём сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол 45° . Развернём лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая. Что изменится, если сечение проводить под другими углами?
20. На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки в трёх сантиметрах от верхнего края виднеется капля мёда. А на наружной стенке в диаметрально противоположной точке уселась муха. Чему равен кратчайший путь, по которому муха может доползти до медовой капли? Диаметр банки 12 см.

§ 8. Вписанные и описанные конусы

Рассмотрим вопрос о возможности вписать сферу в конус.

Определение. Сфера называется **вписанной в конус**, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей; рис. 51). При этом конус называется **описанным около сферы**.

Теорема. В конус можно вписать сферу.

Доказательство. Заметим, что осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник. Впишем в него окружность (рис. 52). Будем теперь вращать треугольник вместе с вписанной в него окружностью вокруг оси конуса. В результате получим исходный конус вместе с вписанной в него сферой. ■

Определение. Конус называется **вписанным в сферу**, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около конуса**.

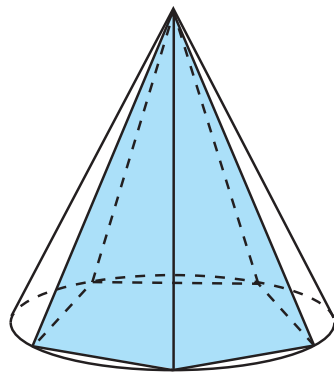


Рис. 53

Теорема. Около конуса можно описать сферу.

Доказательство аналогично предыдущему.

Определение. Пирамида называется **вписанной в конус**, если её основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 53). При этом конус называется **описанным около пирамиды**.

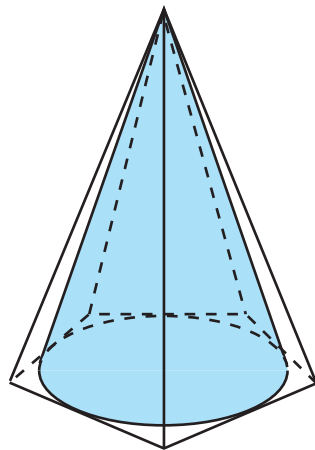


Рис. 54

Ясно, что около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда около её основания можно описать окружность.

Определение. **Касательной плоскостью** к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и не имеющая с конусом других общих точек.

Определение. Пирамида называется **описанной около конуса**, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 54). При этом конус называется **вписанным в пирамиду**.

Ясно, что в пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда в её основание можно вписать окружность.

Упражнения

1. Образующая конуса в два раза больше радиуса основания и равна d . Найдите радиус вписанной сферы.
2. Радиус основания конуса равен r . Образующая наклонена к основанию под углом 45° . Найдите радиус вписанной сферы.
3. Высота конуса 8 м, образующая 10 м. Найдите радиус вписанной сферы.
4. В конус высоты h и основанием радиуса r вписана сфера. Найдите её радиус.
5. Найдите формулу, выражающую радиус сферы, вписанной в конус, через радиус основания r и угол наклона φ образующей конуса к основанию.
6. Докажите, что около конуса можно описать сферу.
7. Образующая конуса в два раза больше радиуса основания и равна d . Найдите радиус описанной сферы.
8. Радиус основания конуса равен r . Образующая наклонена к основанию под углом 45° . Найдите радиус описанной сферы.
9. Высота конуса 8 м, образующая 10 м. Найдите радиус описанной сферы.
10. Радиус сферы 5 см. В сферу вписан конус, радиус его основания 4 см. Найдите высоту конуса.
11. Около конуса высоты h и основанием радиуса r описана сфера. Найдите её радиус.
12. Найдите формулу, выражающую радиус сферы, описанной около конуса, через радиус основания r и угол наклона φ образующей конуса к основанию.
13. Высота конуса h , образующая b . Найдите радиус описанной сферы.
- 14. Можно ли вписать конус в: а) треугольную пирамиду; б) четырёхугольную пирамиду, в основании которой прямоугольник; в) правильную шестиугольную пирамиду?
- 15. Можно ли описать конус около: а) треугольной пирамиды; б) четырёхугольной пирамиды, в основании которой ромб; в) четырёхугольной пирамиды, в основании которой квадрат; г) правильной шестиугольной пирамиды?
- ★ 16. Найдите условия, при которых сферу можно вписать в усечённый конус.
- ★ 17. В усечённый конус, радиусы оснований которого R и r , вписана сфера. Найдите её радиус.
- ★ 18. Докажите, что около наклонного конуса можно описать сферу.

§ 9*. Конические сечения

Для данного конуса рассмотрим коническую поверхность, образованную прямыми, проходящими через вершину конуса и точки окружности основания конуса (рис. 55).

Сечения конической поверхности плоскостью можно рассматривать как центральную проекцию окружности основания конуса на эту плоскость. Поэтому если плоскость параллельна плоскости основания и не проходит через вершину конуса, то в сечении конической поверхности получается окружность.

Исследуем другие возможные случаи сечения конической поверхности плоскостью, не проходящей через вершину конуса.

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол, больший, чем угол между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается эллипс.

Доказательство. Докажем, что сечение удовлетворяет фокальному свойству эллипса: сумма расстояний от произвольной точки сечения до двух данных точек есть величина постоянная.

Впишем в коническую поверхность две сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1 , F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно (рис. 56).

Пусть A — произвольная точка сечения. Проведём образующую SA и обозначим через A_1 , A_2 точки её пересечения с окружностями C_1 , C_2 соответственно. Заметим, что прямая SA является касательной к обеим сферам. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведённых к сфере из одной

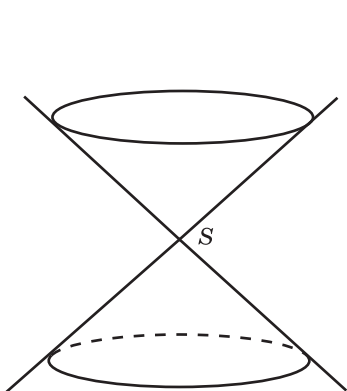


Рис. 55

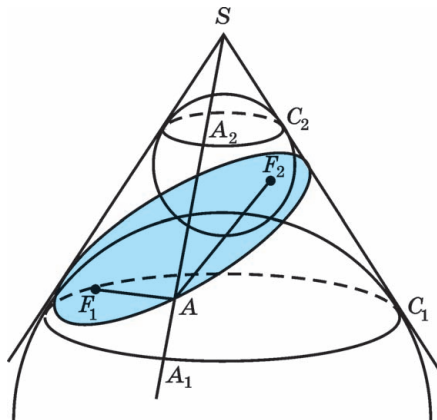


Рис. 56

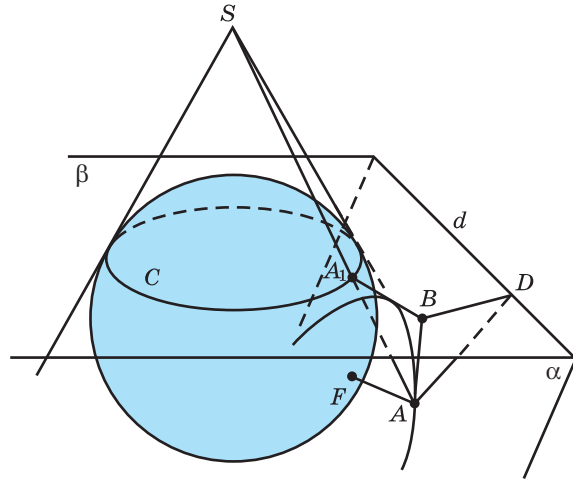


Рис. 57

точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна образующей соответствующего усечённого конуса. Поэтому сумма расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной. ■

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол φ , равный углу между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается парабола.

Доказательство. Напомним, что параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки F , называемой фокусом, и данной прямой d , называемой директрисой, лежащих в этой плоскости. Впишем в коническую поверхность сферу, касающуюся плоскости α в некоторой точке F и конической поверхности по окружности C , лежащей в плоскости β , перпендикулярной оси. Плоскости α и β образуют между собой угол $90^\circ - \varphi$ и пересекаются по некоторой прямой d (рис. 57).

Пусть A — произвольная точка сечения. Проведём образующую SA и обозначим через A_1 точку её пересечения с окружностью C . Заметим, что прямая SA является касательной к сфере. Прямая AF также является касательной. Отрезки AF и AA_1 равны как отрезки касательных, проведённых к сфере из одной точки.

Опустим из точки A перпендикуляр AB на плоскость β и перпендикуляр AD на прямую d . Угол A_1AB равен φ . Угол ADB является углом между плоскостями α и β и поэтому равен $90^\circ - \varphi$. Следовательно, угол BAD равен φ .

Прямоугольные треугольники ABA_1 и ABD равны, так как имеют общий катет и соответственно равные углы. Поэтому $AA_1 = AD$. Окончательно

получаем равенство $AF = AD$, которое означает, что расстояние от произвольной точки сечения до точки F равно расстоянию от этой точки до прямой d , т. е. сечением конической поверхности в этом случае является парабола. ■

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол, меньший угла между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается гипербола.

Доказательство. Напомним, что гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек плоскости постоянен. Впишем в коническую поверхность сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1 и F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно.

Пусть A — точка сечения, расположенная в той же части конической поверхности, что и точка F_1 (рис. 58). Проведём образующую SA и обозначим через A_1, A_2 точки её пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведённых к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_2 - AF_1 = AA_2 - AA_1 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна сумме образующих соответствующих конусов. Следовательно, разность $AF_2 - AF_1$ расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной. Аналогичным образом показывается, что если точка A расположена в той же части конической поверхности, что и точка F_2 , то разность $AF_1 - AF_2$ будет постоянной. Таким образом, сечением конической поверхности в этом случае является гипербола. ■

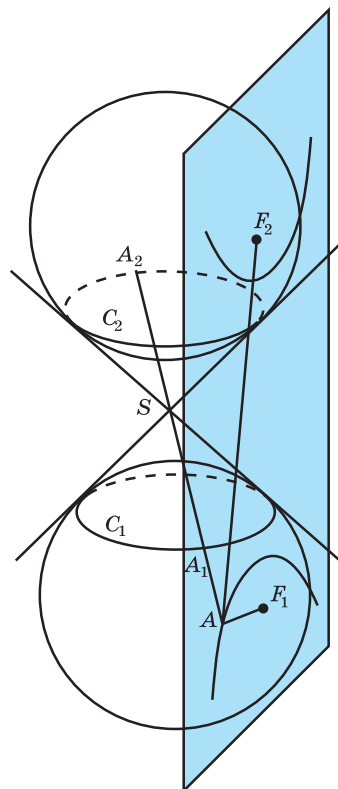


Рис. 58

Исторические сведения

Конические сечения с древних времён привлекали к себе внимание учёных. Так, древнегреческий учёный Менехм (IV в. до н. э.) пользовался параболой и гиперболой для решения знаменитой задачи удвоения куба. Исследовали свойства конических сечений Евклид (IV в. до н. э.) и Архимед (III в. до н. э.). Полное и систематическое учение об этих кривых было изложено Аполлонием Пергским (III—II вв. до н. э.) в восьмитомном труде «Конические сечения». Там он впервые показал, как можно по-

лучить эти кривые, рассекая один и тот же конус плоскостью под разными углами. Он же ввёл термины «эллипс», «парабола» и «гипербола», означающие в переводе с греческого соответственно «недостаток», «приложение» и «избыток». Происхождение этих названий связано с задачей построения прямоугольника с заданным основанием, равновеликого данному квадрату. Переводя с геометрического языка, которым пользовался Аполлоний, на современный алгебраический язык, получаем уравнение

$$y^2 = 2px + lx^2,$$

где эллипсу соответствует отрицательное, гиперболе — положительное, а параболе — равное нулю значение второго члена в правой части. Таким образом, для параболы площадь квадрата, построенного на ординате y , равна площади прямоугольника со сторонами $2p$ и x . Для эллипса площадь прямоугольника меньше, а для гиперболы — больше площади соответствующего квадрата.

Интерес к коническим сечениям особенно возрос после того, как Г. Галилей (1564—1642) установил, что тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе, а И. Кеплер сформулировал законы движения планет, согласно которым они описывают эллипсы. Позднее было установлено, что кометы и другие небесные тела движутся по эллипсам, параболам или гиперболам в зависимости от их начальной скорости.

Так, если скорость космического корабля при выходе на орбиту Земли составляет 7,9—11,1 км/с (первая космическая скорость), то он будет двигаться вокруг Земли по эллиптической орбите.

Если его скорость составляет 11,2—16,7 км/с (вторая космическая скорость), то он будет двигаться по параболической орбите и покинет зону земного притяжения. Однако он не сможет выйти за пределы Солнечной системы.

Если же его скорость больше 16,7 км/с (третья космическая скорость), то он будет двигаться по гиперболической орбите и уйдёт за пределы Солнечной системы.

Упражнения

- 1. Какую форму принимает поверхность воды в наклонённой конусообразной колбе?
- 2. Пучок света карманного фонарика имеет форму конуса. Какую форму имеет освещённый фонариком участок ровной поверхности в зависимости от угла наклона фонарика?
- 3. Что представляет собой сечение конической поверхности, параллельное: а) оси; б) образующей?
- 4. Может ли центральная проекция сферы быть фигурой, ограниченной: а) окружностью; б) эллипсом; в) параболой; г) гиперболой?

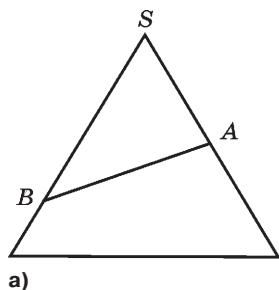


Рис. 59

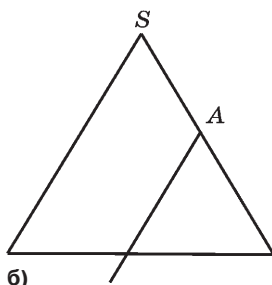
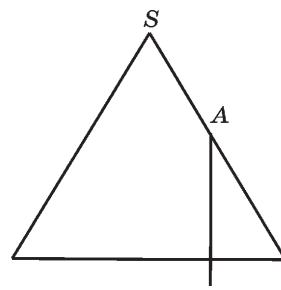


Рис. 60



- 5. Через диаметр основания конуса и середину образующей, перпендикулярной этому диаметру, проведена плоскость. Что представляет собой сечение конуса этой плоскостью?
- 6. Высота конуса равна радиусу основания. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, образующей с осью угол: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ?
- 7. Образующая конуса в два раза больше радиуса основания. Под каким углом к оси нужно провести сечение конуса плоскостью, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?
- ★ 8. Выведите уравнение параболы, взяв за ось абсцисс прямую, параллельную директрисе и равноудалённую от этой директрисы и фокуса. За ось ординат возьмите прямую, проходящую через фокус и перпендикулярную директрисе.
- ★ 9. Выведите уравнение гиперболы, взяв за ось абсцисс прямую, проходящую через фокусы. За ось ординат возьмите серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему фокусы.
- 10. На рисунке 59, а изображено осевое сечение конической поверхности. Через точки A и B проведена плоскость, перпендикулярная этому сечению. Постройте изображения фокусов эллипса, получившегося в сечении.
- 11. На рисунке 59, б изображено осевое сечение конической поверхности. Через точку A параллельно образующей проведена плоскость, перпендикулярная этому сечению. Постройте изображение фокуса параболы, получившейся в сечении.
- 12. На рисунке 60 изображено осевое сечение конической поверхности. Через точку A параллельно оси проведена плоскость, перпендикулярная этому сечению. Постройте изображения фокусов гиперболы, получившейся в сечении.
- ★ 13. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной, равной единице. Через середину образующей проведено сечение конуса плоскостью, перпендикулярной этой образующей. Найдите площадь сечения.

§ 10. Симметрия пространственных фигур

По словам известного немецкого математика Г. Вейля (1885—1955), «симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения искусства: архитектуры, живописи, скульптуры и т. д.

Понятие симметрии фигур на плоскости рассматривалось в курсе планиметрии. В частности, определялись понятия центральной и осевой симметрии. Для пространственных фигур понятие симметрии определяется аналогичным образом.

Определение. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно точки O** , называемой **центром симметрии**, если O является серединой отрезка AA' . Точка O считается симметричной сама себе (рис. 61).

Фигура Φ в пространстве называется **центрально-симметричной** относительно точки O , если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно точки O некоторой точке A' фигуры Φ .

Например, прямоугольный параллелепипед центрально-симметричен относительно точки пересечения его диагоналей (рис. 62). Шар центрально-симметричен своего центра и т. д.

Определение. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно прямой a** , называемой **осью симметрии**, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку (рис. 63). Точки прямой a считаются симметричными сами себе.

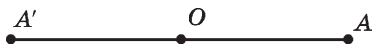


Рис. 61

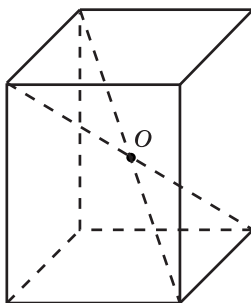


Рис. 62

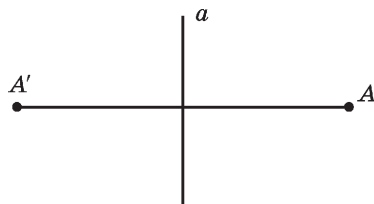


Рис. 63

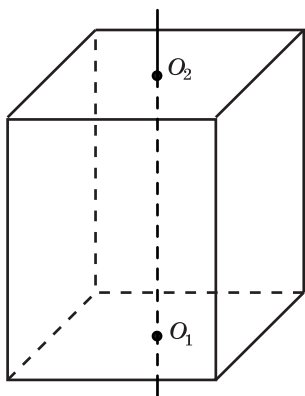


Рис. 64

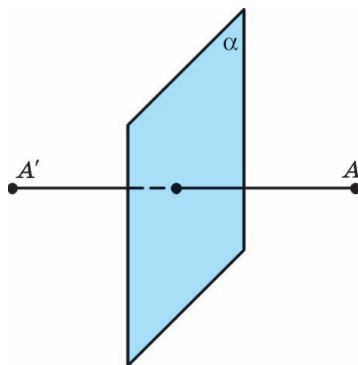


Рис. 65

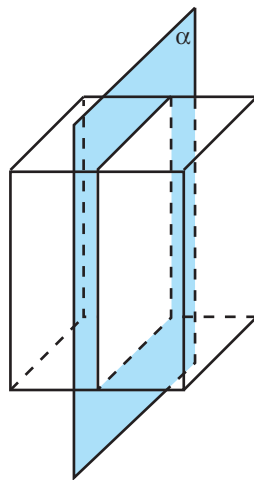


Рис. 66

Фигура Φ в пространстве называется **симметричной относительно оси a** , если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой оси некоторой точке A' фигуры Φ .

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней (рис. 64), прямой круговой цилиндр симметричен относительно своей оси и т. д.

Определение. Точки A и A' в пространстве называются **симметричными относительно плоскости α** , называемой **плоскостью симметрии**, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Точки плоскости α считаются симметричными сами себе (рис. 65).

Симметрия относительно плоскости называется также **зеркальной симметрией**.

Фигура Φ в пространстве называется **зеркально-симметричной относительно плоскости α** , если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой плоскости некоторой точке A' фигуры Φ .

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из пар противоположных граней (рис. 66). Цилиндр зеркально-симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось и т. д.

Помимо осей симметрии, определённых выше, рассматриваются также оси симметрии n -го порядка, $n \geq 2$.

Определение. Прямая a называется **осью симметрии n -го порядка** фигуры Φ , если при повороте фигуры Φ на угол $\frac{360^\circ}{n}$ вокруг прямой a фигура Φ совмещается сама с собой.

Ясно, что ось симметрии 2-го порядка является просто осью симметрии.

Например, в правильной n -угольной пирамиде прямая, проходящая через вершину и центр основания, является осью симметрии n -го порядка (рис. 67).

Отметим, что из многогранников наиболее симметричными являются правильные многогранники.

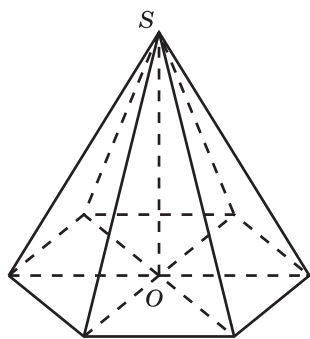


Рис. 67

Например, икосаэдр имеет:

1. Центр симметрии — центр икосаэдра.
2. Шесть осей симметрии 5-го порядка, проходящих через противоположные вершины; десять осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры противоположных граней; пятнадцать осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противоположных ребер икосаэдра.
3. Пятнадцать плоскостей симметрии, проходящих через пары противоположных ребер икосаэдра.

Исторические сведения

Одним из самых ярких проявлений симметрии в природе являются кристаллы. Свойства кристаллов определяются особенностями их геометрического строения, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решётке. Внешние формы кристаллов являются следствием их внутренней симметрии.

Первые, ещё смутные предположения о том, что атомы в кристаллах расположены правильным, закономерным, симметричным строем, высказывались в трудах различных естествоиспытателей уже в те времена, когда само понятие атома было неясным и не было никаких экспериментальных доказательств атомного строения вещества. Симметричная внешняя форма кристаллов невольно наводила на мысль о том, что внутреннее строение кристаллов должно быть симметричным и закономерным. Законы симметрии внешней формы кристаллов были полностью установлены в середине XIX века, а к концу этого века были чётко и точно выведены законы симметрии, которым подчинено расположение атомов в кристаллах.

Основоположником математической теории строения кристаллов является выдающийся российский математик и кристаллограф Евграф Степанович Фёдоров (1853—1919). Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело — в каждую из этих областей внёс Е. С. Фёдоров немалый вклад. В 1890 году он строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Фёдоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии в честь учёного были названы фёдоровскими. Это был исполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, за 27 лет до того, как с их помощью доказали существование самой кристаллической решётки. Существование 230 фёдоровских групп является одним из важнейших геометрических законов современной структурной кристаллографии. «Гигантский научный подвиг Е. С. Фёдорова, сумевшего подвести под единую геометрическую схему весь природный “хаос” бесчисленных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. Это открытие сродни открытию периодической таблицы Д. И. Менделеева. “Царство кристаллов” является незыблемым памятником и конечной вершиной классической фёдоровской кристаллографии», — сказал академик А. В. Шубников.

Упражнения

- 1. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур.
- 2. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?
- 3. Найдите центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.
- 4. Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?
- 5. Сколько осей симметрии имеет шар?
- 6. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?
- 7. Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии и, наоборот, есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.
- 8. Приведите примеры пространственных фигур с осями симметрии 3-го, 4-го и т. д. порядков.
- 9. Осью симметрии какого порядка является диагональ куба?
- 10. Какими видами симметрии обладает куб?
- 11. Сколько у правильной шестиугольной призмы: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

12. Сколько у правильной $(2n - 1)$ -угольной призмы: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?
13. Каким видом симметрии обладает наклонная призма, в основании которой лежит правильный многоугольник с чётным числом сторон?
14. В основании прямой призмы лежит ромб. Сколько она имеет: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?
15. Какими видами симметрии обладает наклонный параллелепипед?
16. Имеет ли центр симметрии наклонная призма, основанием которой является правильный девятиугольник?
17. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильная пирамида, в основании которой лежит многоугольник с: а) чётным числом сторон; б) нечётным числом сторон?
18. Сколько у правильной n -угольной усечённой пирамиды: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?
19. Может ли неправильная пирамида иметь: а) ось симметрии; б) плоскости симметрии? Приведите примеры таких пирамид.
20. Существуют ли центрально-симметричные усечённые пирамиды?
21. Верно ли, что центрально-симметричный многогранник имеет чётное число вершин, рёбер и граней?
- *22. Укажите элементы симметрии правильных многогранников.
- *23. Может ли фигура иметь ровно два центра симметрии?
- *24. Докажите, что если две пересекающиеся перпендикулярные прямые в пространстве являются осями симметрии данной фигуры Φ , то и прямая, проходящая через точку пересечения и перпендикулярная этим прямым, также будет осью симметрии фигуры Φ .
- *25. Докажите, что фигура в пространстве не может иметь чётное (ненулевое) число осей симметрии.
- *26. Докажите, что если грани выпуклого многогранника имеют центры симметрии, то и сам многогранник имеет центр симметрии. Приведите пример многогранника, у которого есть центр симметрии, а его грани не имеют центров симметрии.

§ 11. Движение

Напомним, что **движением** называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками, т. е. если точки A и B переходят соответственно в точки A' и B' , то $AB = A'B'$.

В учебнике для 10-го класса было доказано, что параллельный перенос является движением. Докажем, что центральная и зеркальная симметрии также являются движениями.

Теорема. Центральная симметрия является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены центральной симметрией относительно точки O точек A, B (рис. 68, а). Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними), и, значит, $AB = A'B'$. Таким образом, центральная симметрия сохраняет расстояния и, следовательно, является движением. ■

Теорема. Зеркальная симметрия является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены симметрией относительно плоскости α точек A, B (рис. 68, б), A'', B'' — ортогональные проекции точек A, B на плоскость α . Тогда точки A, B, A', B' принадлежат одной плоскости и точки A', B' симметричны в этой плоскости точкам A, B относительно прямой $A''B''$. Из свойств симметрии на плоскости следует, что $AB = A'B'$. Таким образом, зеркальная симметрия сохраняет расстояния и, следовательно, является движением. ■

Аналогичным образом можно доказать, что движениями являются поворот и осевая симметрия.

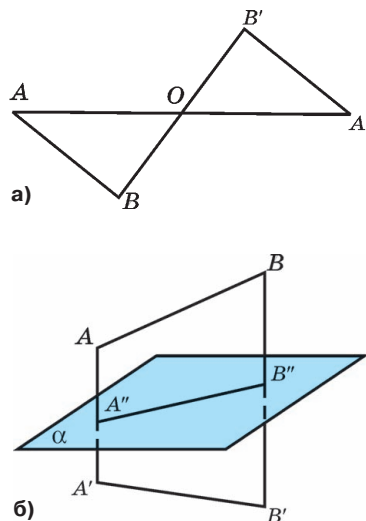


Рис. 68

Упражнения

- 1. Назовите движение, которое оставляет на месте только: а) одну точку; б) точки одной прямой; в) точки одной плоскости.
- 2. Существуют ли движения (если существуют, то какие), переводящие данную прямую в другую данную прямую: а) параллельную первой; б) пересекающую первую; в) скрещивающуюся с первой?
- 3. Докажите, что движение переводит сферу в сферу того же радиуса.
- ★ 4. Докажите, что если движение оставляет на месте две: а) пересекающиеся прямые; б) параллельные прямые, то оно оставляет на месте и всю плоскость, в которой лежат эти прямые.
- ★ 5. Докажите, что если движение оставляет на месте три точки, не принадлежащие одной прямой, то оно оставляет на месте и всю плоскость, которой принадлежат эти точки.
- 6. С помощью каких движений можно перевести грань ABC правильного тетраэдра $ABCD$ в грань ABD так, чтобы ребро AB оставалось на месте?

7. Существует ли движение (если существует, то какое), переводящее вершины A, B, C, D правильного тетраэдра $ABCD$ соответственно в вершины: а) B, C, A, D ; б) B, A, C, D ; в) C, B, A, D ?
- ★ 8. Докажите, что для любой перестановки вершин A, B, C, D правильного тетраэдра существует движение, переводящее вершины A, B, C, D в вершины с заданным порядком следования.
- ★ 9. В правильном тетраэдре закрасили одну грань. В результате каких движений, оставляющих на месте закрашенную грань, он самосовместится?
- ★ 10. Сколько существует различных движений, переводящих правильный тетраэдр в себя?
11. Существует ли движение (если существует, то какое), переводящее вершины A, B, C, D куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно в вершины: а) A_1, B_1, C_1, D_1 ; б) A_1, D_1, C_1, B_1 ; в) A_1, B_1, D_1, C_1 ?
- ★ 12. В кубе закрасили одну грань. В результате каких движений, оставляющих на месте закрашенную грань, он самосовместится?
- ★ 13. Сколько существует различных движений, переводящих куб в себя?
- ★ 14. Сколько имеется различных движений, переводящих в себя: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр?
15. Докажите, что движением является: а) поворот; б) осевая симметрия.
- ★ 16. Докажите, что параллельный перенос может быть получен в результате последовательного выполнения (композиции) двух зеркальных симметрий.
- ★ 17. Представьте поворот вокруг оси в виде композиции двух зеркальных симметрий.
- ★ 18. Представьте центральную симметрию в виде композиции трёх зеркальных симметрий.

§ 12*. Ориентация поверхности. Лист Мёбиуса

Пусть в пространстве заданы плоскость и поворот этой плоскости вокруг точки O на угол φ . На рисунке 69, а мы смотрим на плоскость сверху, и этот поворот выглядит как поворот против часовой стрелки. Однако если мы будем смотреть на плоскость снизу, то этот же поворот будет выглядеть как поворот по часовой стрелке (рис. 69, б).

Таким образом, направление поворота не является свойством, изначально присущим плоскости, и зависит от выбора стороны, с которой мы смотрим на плоскость. Такой выбор стороны называется **ориентацией плоскости**.

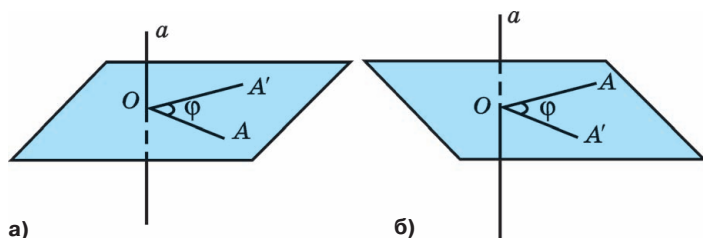


Рис. 69



Рис. 70

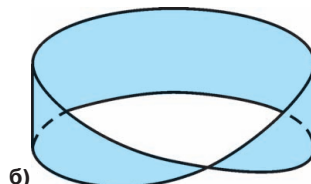
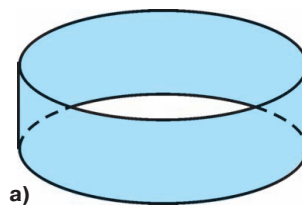


Рис. 71

Аналогичным образом можно определить понятие ориентации и для других двусторонних поверхностей, среди которых: сфера, поверхность многогранника, поверхности цилиндра, конуса и др. Выбирая сторону поверхности, мы как бы производим мысленное закрашивание этой стороны.

Оказывается, однако, что это можно сделать не для любой поверхности. Первым примером такой неориентируемой поверхности была поверхность, называемая **листом или лентой Мёбиуса**, открытая в 1858 году немецким астрономом и математиком А. Ф. Мёбиусом (1790—1868).

Изготовить модель листа Мёбиуса очень просто. Возьмём бумажную полоску в форме прямоугольника $ABCD$ (рис. 70). Если склеить противоположные стороны AB и CD , совместив точку A с точкой D , а точку B с точкой C , то получим боковую поверхность цилиндра (рис. 71, а). Если же перед склеиванием противоположных сторон одну из них повернуть на 180° и соединить точку A с точкой C , точку B с точкой D (рис. 71, б), то получим лист Мёбиуса.

Несмотря на свою простоту, лист Мёбиуса обладает рядом неожиданных свойств. Например, попытаемся ответить на вопрос: «Сколько краёв имеет лист Мёбиуса?» В отличие от боковой поверхности цилиндра, краями которой являются две окружности, лист Мёбиуса имеет один край. Чтобы убедиться в этом, нужно выбрать в любом месте края точку и перемещать её вдоль края. В результате мы придём в то же самое выбранное место.

Кроме этого, лист Мёбиуса имеет только одну сторону. До сих пор мы имели дело с поверхностями, у которых две стороны: плоскость, сфера,

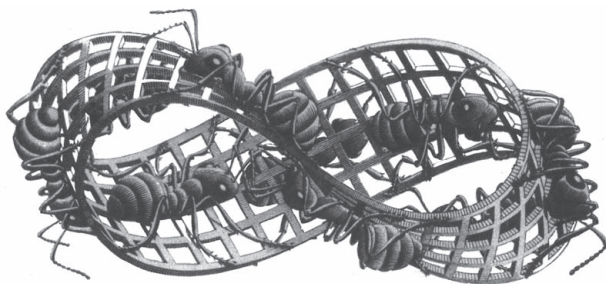


Рис. 72

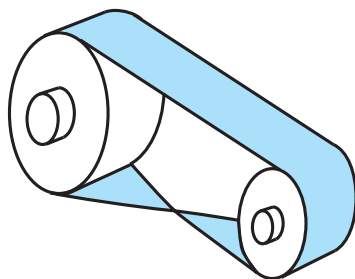


Рис. 73

тор, цилиндрическая и коническая поверхности. Убедиться в односторонности листа Мёбиуса можно следующим образом. Начнём закрашивать лист с любого места, постепенно перемещаясь по поверхности. В результате вся поверхность окажется закрашенной. Отметим, что если то же самое мы сделаем с боковой поверхностью цилиндра, то, начав закрашивание с внешней стороны, мы закрасим эту внешнюю сторону, а внутренняя сторона останется незакрашенной. Наоборот, начав закрашивание с внутренней стороны, мы закрасим эту внутреннюю сторону, а внешняя сторона окажется незакрашенной.

Муравью, ползущему по листу Мёбиуса, не надо переползать через его край, чтобы попасть на противоположную сторону, как это видно на гравюре М. Эшера (рис. 72).

Свойство односторонности листа Мёбиуса используется при изготовлении ременных передач. Если ремень сделать в виде ленты Мёбиуса (рис. 73), то он будет изнашиваться вдвое медленнее, чем обычный. Это объясняется тем, что в работе ремня, изготовленного в виде ленты Мёбиуса, принимает участие вся поверхность, а не только внутренняя её часть, как у обычной ременной передачи.

Продолжаем ещё один опыт. Проведём на листе Мёбиуса среднюю линию (это легко сделать на клетчатой бумаге) и ответим на вопрос: «Что получится, если лист Мёбиуса разрезать по средней линии?» Кажется, что лист должен распасться на два отдельных куска. Однако это не так, при разрезании листа Мёбиуса по средней линии получается дважды перекрученная лента, в чём легко убедиться, сделав данный опыт.

Упражнения

- 1. Какая поверхность получится, если у прямоугольника склеить противоположные стороны (без перекручивания)?
- 2. Является ли ориентируемой: а) сфера; б) боковая поверхность цилиндра; в) поверхность конуса?

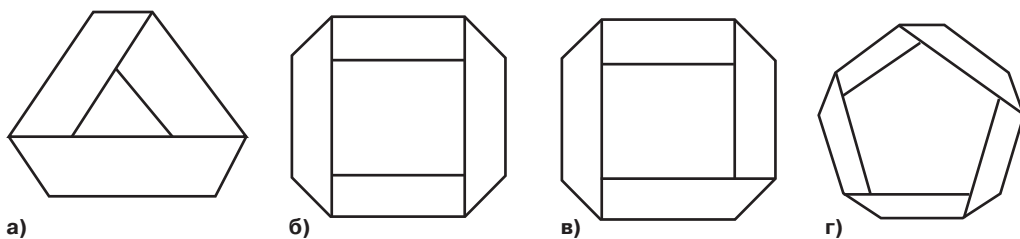
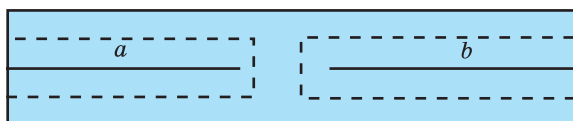
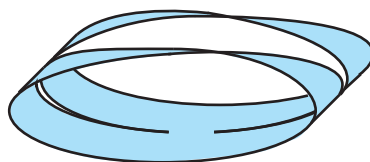


Рис. 74



а)



б)

Рис. 75

- 3. Сколько сторон имеет тор (напомним, это поверхность, полученная вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей эту окружность)?
- 4. Является ли ориентируемой поверхностью: а) дважды перекрученная лента; б) трижды перекрученная лента?
- 5. На рисунке 74 укажите изображения листа Мёбиуса.
- 6. В правильном восьмиугольнике $ABCDEFGH$ склеиваются противоположные стороны AB и EF , CD и GH . Сколько сторон имеет получившаяся поверхность, если: а) оба склеивания производятся без перекручивания; б) одно склеивание производится с перекручиванием, а другое — без него; в) оба склеивания производятся с перекручиванием?
- 7. Сколько сторон имеет поверхность, полученная при разрезании листа Мёбиуса по средней линии?
- 8. Что получится, если дважды перекрученную ленту разрезать по средней линии?
- 9. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать не по средней линии, а отступив от края на треть ширины ленты?
- ★ 10. Возьмите полоску бумаги и сделайте два разреза — a и b (рис. 75, а). Соедините между собой пары концов, как у листа Мёбиуса, перекручивая их в разных направлениях. В результате получится фигура, изображённая на рисунке 75, б, называемая **сиамским листом Мёбиуса**. Что получится, если разрезать её вдоль пунктирной линии (см. рис. 75, а)? Сколько будет частей, краёв и перекручиваний?

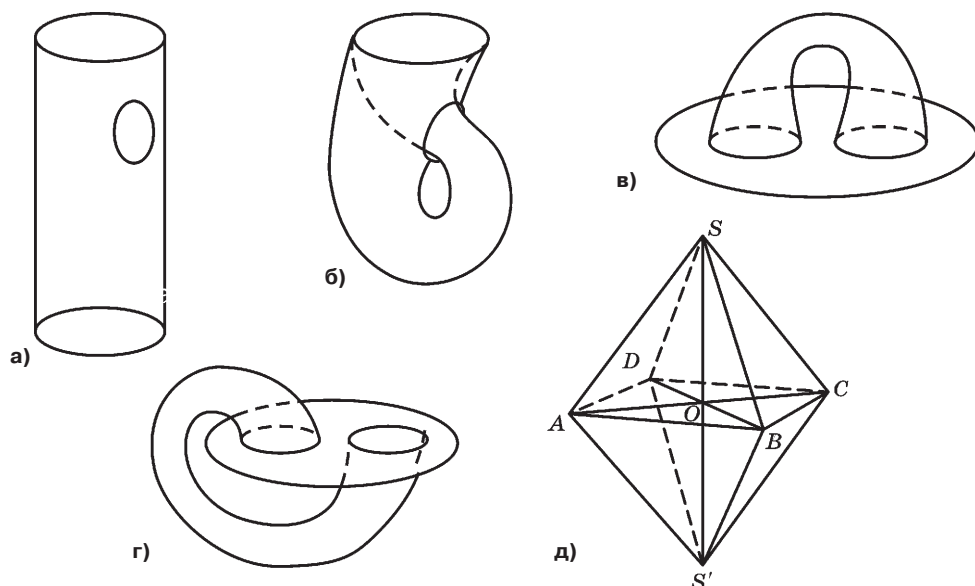


Рис. 76

- ★ 11. Отрезок AB , параллельный прямой a , вращается вокруг этой прямой и одновременно вращается вокруг своего центра в плоскости отрезка AB и прямой a . За время полного оборота вокруг прямой a отрезок совершает поворот на 180° вокруг своего центра. Какую фигуру в пространстве описывает этот отрезок? Какую фигуру в пространстве будет описывать этот отрезок, если за время полного оборота вокруг прямой a он совершит поворот на 360° вокруг своего центра?
- ★ 12. Покажите, что задача о трёх домиках и трёх колодцах, расположенных на листе Мёбиуса, имеет решение: их можно соединить непересекающимися дорожками.
- ★ 13. Представим себе боковую поверхность цилиндра, сделанную из эластичного материала. Вырежем в ней круглое отверстие (рис. 76, а), проденем в него один конец цилиндра и склеим окружности оснований. Получившаяся поверхность изображена на рисунке 76, б (бутылка Клейна). Сколько у неё сторон?
- ★ 14. В круге вырезали два круглых отверстия и к их краям приклеили основания боковой поверхности цилиндра (рис. 76, в, г). Сколько сторон имеет образовавшаяся поверхность?
- ★ 15. В поверхности октаэдра $SAB CDS'$ вырезали два треугольника SAB , $S'BC$ и добавили треугольники SAO , $S'CO$, $SS'B$, где O — центр симметрии октаэдра (рис. 76, д). Сколько сторон имеет получившаяся поверхность? Какая у неё граница?

ОБЪЁМ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ



§ 13. Объём фигур в пространстве. Объём цилиндра

Проблема нахождения объёмов пространственных фигур с древних времён привлекала к себе внимание учёных. Вычислением объёмов простейших пространственных фигур занимались Демокрит, Евдокс (406—355 гг. до н.э.), Архимед. В Средние века нахождением объёмов пространственных фигур занимались И. Кеплер, Б. Кавальери (1598—1647), П. Ферма (1601—1665) и др. Появление интегрального исчисления в конце XVII века в работах И. Ньютона (1643—1727) и Г. Лейбница (1646—1716) дало мощный метод вычисления объёмов произвольных пространственных фигур. Знакомство с этим методом происходит в курсе алгебры и начал анализа. Здесь же мы рассмотрим само понятие объёма, его свойства и вычисление объёмов основных пространственных фигур.

Объём — величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объёма принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объёма принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Объём — число V , показывающее, сколько раз единица измерения объёма и её части укладываются в данной фигуре. Это число может быть натуральным, рациональным или даже иррациональным.

Ясно, что объём фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому на практике после этого числа указывают единицу измерения объёма. Например, $V \text{ мм}^3$, $V \text{ см}^3$, $V \text{ м}^3$.

Для объёмов пространственных фигур справедливы *свойства*, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Объём фигуры в пространстве является неотрицательным числом.
2. Равные фигуры имеют равные объёмы.

3. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2 , то объём фигуры Φ равен сумме объёмов фигур Φ_1 и Φ_2 , т. е.

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

Две фигуры, имеющие равные объёмы, называются **равновеликими**.

Для нахождения объёмов фигур удобно объединить некоторые фигуры в один класс. С этой целью дадим общее определение цилиндра.

Пусть α и π — две параллельные плоскости, l — пересекающая эти плоскости прямая; F — фигура на одной из этих плоскостей, F' — её параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой l (рис. 77, а). Отрезки, соединяющие точки фигуры F с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **цилиндром**. Фигуры F и F' называются **основаниями** цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называют **высотой** цилиндра.

В случае если в определении цилиндра вместо параллельной проекции берётся ортогональная, т. е. прямая l перпендикулярна плоскостям, то цилиндр называется **прямым** (рис. 77, б). В противном случае цилиндр называется **наклонным**.

Заметим, что частным случаем цилиндра является призма.

В случае если основание F цилиндра является кругом, то цилиндр называется **круговым**.

Ранее мы рассматривали только круговые цилиндры и называли их просто цилиндрами.

Здесь мы найдём формулу для вычисления объёма прямого цилиндра, основанием которого является произвольная плоская фигура.

Теорема. Объём прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда в основании цилиндра Φ_1 квадрат со стороной, равной единице, и высота которого равна h (рис. 78, а). Так как единица измерения длины укладывается в высоте h раз, то и единичный куб будет укладываться в этом цилиндре h раз, и, следовательно, объём цилиндра равен h .

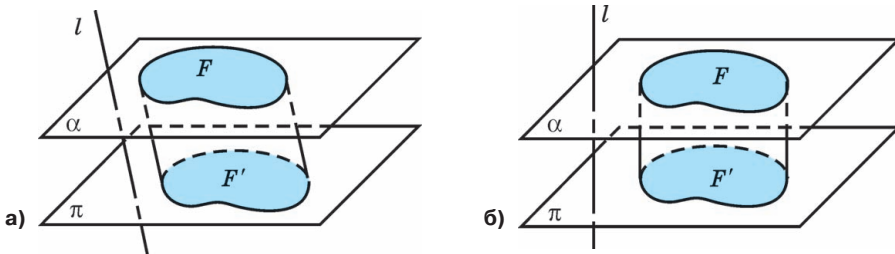


Рис. 77

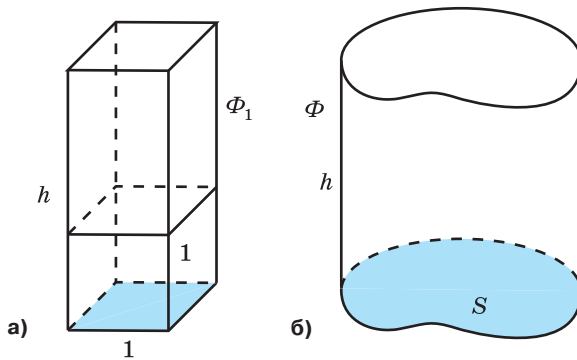


Рис. 78

Пусть теперь Φ — прямой цилиндр, основанием которого служит фигура F площади S и высота которого равна h (рис. 78, б). Так как единичный квадрат укладывается в основании S раз, то и цилиндр Φ_1 будет S раз укладываться в цилиндре Φ .

Таким образом, единица измерения объёма h раз укладывается в цилиндре Φ_1 , и цилиндр Φ_1 укладывается в цилиндре Φ S раз. Следовательно, единица измерения объёма будет $S \cdot h$ раз укладываться в цилиндре Φ , т. е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра. ■

Поскольку частным случаем цилиндра является параллелепипед, призма и круговой цилиндр, то имеем:

Следствие 1. **Объём прямоугольного параллелепипеда** равен произведению трёх его измерений, т. е. имеет место формула

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

где a, b, c — рёбра параллелепипеда.

Следствие 2. **Объём прямой призмы** равен произведению площади её основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S — площадь основания, h — высота призмы.

Следствие 3. **Объём прямого кругового цилиндра**, высота которого равна h и радиус основания R , вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

Упражнения

- 1. Может ли объём фигуры в пространстве быть: а) отрицательным числом; б) нулём?
- 2. Приведите примеры равновеликих, но не равных пространственных фигур.
- 3. Чему равен объём пространственного креста (рис. 79), если рёбра образующих его кубов равны единице?
- 4. Чему равен объём фигуры, изображённой на рисунке 80?
- 5. Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см (рис. 81). Найдите объём оставшейся части.
- 6. Через два противоположных ребра куба провели плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объём куба?
- 7. Диагональ куба равна 2 см. Найдите его объём.
- 8. Является ли частным случаем цилиндра: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) пирамида?
- 9. Осевое сечение прямого кругового цилиндра — квадрат со стороной a см. Найдите объём цилиндра.
- 10. Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?
- 11. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объём данной призмы.
- 12. Найдите объём правильной четырёхугольной призмы, сторона основания которой 5 см и высота 8 см.
- 13. Как изменится объём прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причём каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

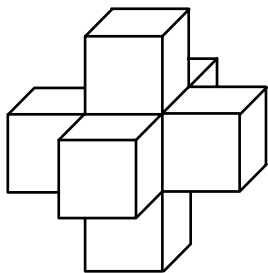


Рис. 79

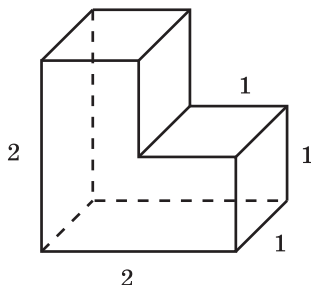


Рис. 80

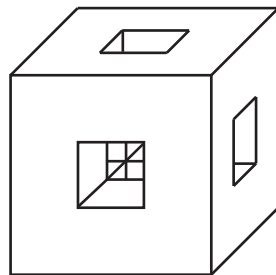


Рис. 81

14. Найдите высоту правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания 20 см и объём 4800 см^3 .
15. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объём призмы?
16. Найдите формулу объёма правильной n -угольной призмы, высота которой равна h , а сторона основания равна a .
17. Объём правильной шестиугольной призмы равен V . Определите объём призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.
18. Как относятся объёмы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) $1 : 2$; б) $1 : 3$; в) $1 : n$?
19. Найдите объём фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a .
20. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объём увеличится на 98 см^3 . Определите ребро куба.
21. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 5 см и образуют угол в 60° . Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30° . Определите объём этого параллелепипеда.
22. Основание прямой призмы — ромб, площадь которого равна 1 м^2 . Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2 . Найдите объём призмы.
23. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ . Найдите объём цилиндра.
24. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон a и b . Как относятся объёмы цилиндров?
25. Во сколько раз объём цилиндра, описанного около правильной четырёхугольной призмы, больше объёма цилиндра, вписанного в эту же призму?
26. В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объём детали?
27. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого?
- *28. Через касательную к окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R . Найдите объём части цилиндра, отсекаемой плоскостью.

- ★29. Через вершину A и ребро B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ провели плоскость. Какая из частей призмы, на которые она разбивается плоскостью, имеет больший объём?
- ★30. Докажите, что любая плоскость, проходящая через центр куба, делит его на две равновеликие части.
- ★31. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середину оси прямого кругового цилиндра, делит его на две равновеликие части.
- ★32. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через середину оси правильной n -угольной призмы, делит призму на две равновеликие части? Рассмотрите случаи, когда n чётно и n нечётно.
- ★33. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной 1, а высота равна 0,5.
- ★34. Найдите объём ромбодекаэдра с ребром a .
- ★35. Используя свойства объёма, докажите, что если фигура F_1 содержится в фигуре F , то имеет место неравенство $V(F_1) \leq V(F)$.
- ★36. Докажите, что объём наклонного цилиндра равен произведению его образующей на площадь сечения плоскостью, перпендикулярной этой образующей.

§ 14. Принцип Кавальери

Рассмотрим метод вычисления объёмов пространственных фигур, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 82), то объёмы исходных пространственных фигур равны.

Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2 составленными из тонких слоёв одинаковой толщины, которые получаются при пересечении фигур Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными

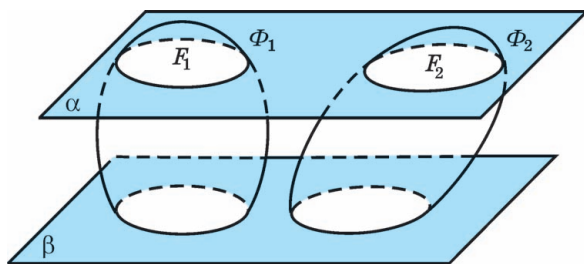


Рис. 82

некоторой заданной плоскости (рис. 82). Считая слои прямыми цилиндрами, из равенства площадей их оснований и равенства высот получаем, что равны и объёмы соответствующих слоёв. Следовательно, равны и объёмы фигур Φ_1 и Φ_2 , составленных из этих слоёв.

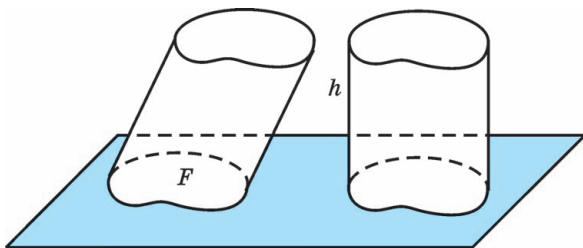


Рис. 83

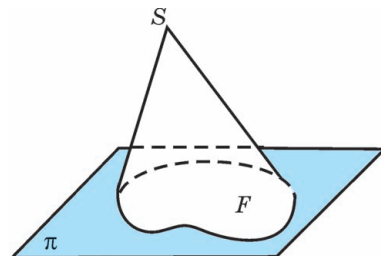


Рис. 84

Теорема. Объём наклонного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного наклонного цилиндра с основанием F площади S и высотой h рассмотрим прямой цилиндр с таким же основанием и высотой. Расположим эти два цилиндра так, чтобы их основания находились на одной плоскости (рис. 83). Тогда сечения этих цилиндров плоскостями, параллельными этой плоскости, дадут фигуры, равные фигуре F , и, следовательно, они будут иметь равные площади. По принципу Кавальери, отсюда следует равенство объёмов цилиндров, и, значит, для объёма наклонного цилиндра имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра. ■

Следствие 1. Объём наклонной призмы с площадью основания S и высотой h вычисляется по формуле

$$V = S \cdot h.$$

Следствие 2. Объём наклонного кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R , вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

Дадим общее определение конуса, позволяющее объединить в один класс рассмотренные ранее конусы и пирамиды.

Пусть F — фигура на плоскости π и S — точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S , образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **конусом** (рис. 84). Фигура F называется **основанием** конуса, точка S — **вершиной** конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется **высотой** конуса.

В случае, если F является кругом, конус называется **круговым**. Если высота кругового конуса проходит через центр основания, то такой конус называется **прямым круговым**. Ранее мы рассматривали прямые круговые

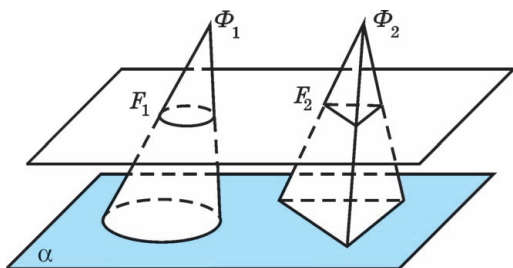


Рис. 85

Доказательство. Пусть конусы Φ_1 и Φ_2 имеют высоты, равные h , а основания площади S расположены в одной плоскости α (рис. 85). Проведём плоскость, параллельную плоскости α , на расстоянии x от неё, $0 \leq x \leq h$. Фигуры F_1 и F_2 , получающиеся в сечениях конусов этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям, и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x) : h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ и, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объёмы конусов равны. ■

Упражнения

- 1. Верно ли, что две призмы, имеющие общее основание, равновелики?
- 2. Верно ли, что если две пирамиды имеют общее основание, а их вершины расположены в плоскости, параллельной плоскости основания, то эти пирамиды равновелики?
- 3. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры оснований наклонного кругового цилиндра, делит его на равновеликие части?
- 4. В основаниях наклонной призмы — квадраты. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры квадратов, делит призму на две равновеликие части?
- 5. Два цилиндра имеют равные высоты, а площадь основания одного в два раза больше площади основания другого. Как относятся их объёмы?
- 6. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину и центр основания наклонного кругового конуса, делит его на равновеликие части?
- 7. В основании пирамиды — квадрат. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину пирамиды и центр основания, делит пирамиду на две равновеликие части?
- 8. Два конуса имеют равные высоты, а площадь основания одного в три раза больше площади основания другого. Как относятся их объёмы?

конусы и называли их просто конусами. Заметим, что частным случаем конуса в новом понимании является также пирамида.

Используя принцип Кавальери, докажем следующую теорему.

Теорема. Если два конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то их объёмы равны.

9. Найдите объём наклонной призмы, площадь основания которой равна S , а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом φ .
10. Стороны основания параллелепипеда равны 6 дм и 8 дм, угол между ними 45° . Боковое ребро равно 7 дм и наклонено к плоскости основания под углом 45° . Найдите объём параллелепипеда.
11. Найдите объём наклонного параллелепипеда, у которого площадь основания равна Q , а боковое ребро, равное b , наклонено к плоскости основания под углом φ .
12. Найдите объём наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая b наклонена к плоскости основания под углом φ .
13. Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых рёбер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно 2 м. Найдите объём параллелепипеда.
14. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a . Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна d . Найдите объём призмы.
- *15. Боковые рёбра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между ними равны 26 см, 25 см и 17 см. Определите объём призмы.
- *16. Докажите, что из всех призм, имеющих одно и то же основание и боковое ребро данной длины, наибольший объём имеет прямая призма.
- *17. Докажите, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей наклонного параллелепипеда, делит его на две равновеликие части.
- *18. Даны три параллелепипеда. Проведите плоскость так, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две части равного объёма.
- *19. Пусть в сечениях пространственных фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями получаются фигуры F_1 и F_2 соответственно, причём площади фигур F_2 в k раз больше площадей фигур F_1 . Как связаны между собой объёмы фигур Φ_1 и Φ_2 ?
- *20. Докажите, что фигура Φ , полученная вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $y = 1$, вокруг оси Oy , равновелика прямой призме, в основании которой прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными единице, и высота призмы равна π . Нарисуйте фигуру Φ и найдите её объём.

§ 15. Объём пирамиды

Первые упоминания о вычислении **объёма пирамиды** найдены в папирусах древних вавилонян и египтян (свыше 3000 лет до н. э.). Любопытно, что они не вывели общей формулы для нахождения объёма пирамиды, а вычисляли объёмы конкретных пирамид. Им удалось найти объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания, равной единице измерения, и высотой, равной $\frac{1}{2}$. Для этого они брали куб с ребром, равным единице измерения, и разбивали его на 6 равных правильных четырёхугольных пирамид. Основаниями этих пирамид будут грани куба, а вершина каждой из них будет находиться в центре куба (рис. 86). Все 6 полученных пирамид равны, отсюда следует, что объём каждой из них равен $\frac{1}{6}$ объёма куба.

Теорема. Объём пирамиды равен одной третьей произведения площади её основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай треугольной пирамиды. Пусть A_1ABC — треугольная пирамида. Построим её до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 87). Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1 , разбивают эту призму на три пирамиды — A_1ABC , A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ — с вершинами в точке A_1 . Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1 , так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объёмы. Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объёмы. Таким образом, объёмы всех трёх

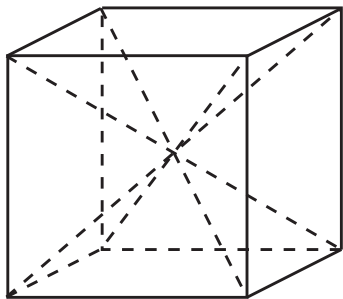


Рис. 86

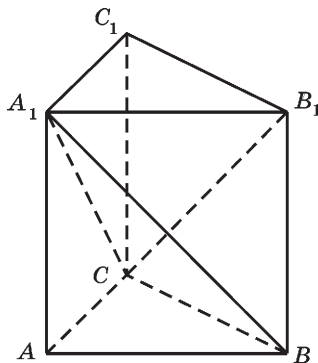


Рис. 87

пирамид равны. Учитывая, что объём призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объёма треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — её высота.

Пусть теперь дана пирамида, в основании которой — многоугольник. Рассмотрим треугольную пирамиду с такой же высотой и такой же площадью основания. По теореме предыдущего параграфа, объёмы этих пирамид равны, и, следовательно, имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — её высота. ■

Исторические сведения

Впервые формулу объёма пирамиды в общем виде нашёл Архимед. Для этого он разработал следующий метод: высота пирамиды разбивается на n равных частей и через точки деления проводят плоскости, параллельные основанию пирамиды. При этом пирамида разбивается на слои. Для каждого такого слоя строятся две призмы, одна из которых содержится в слое, а другая содержит слой (чертёж к этой задаче получил название «чёртовой лестницы», рис. 88).

Зная, что объём призмы есть произведение площади основания на высоту, получают, что сумма объёмов призм, содержащихся в слоях, равна

$\frac{1}{3} SH \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}$, где S — площадь основания пирамиды и H — высота;

сумма объёмов призм, содержащих слои, равна

$\frac{1}{3} SH \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}$. Тогда если V — объём пира-

миды, то

$$\frac{1}{3} SH \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} < V < \frac{1}{3} SH \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}.$$

При увеличении n левая и правая части сколь угодно мало отличаются от $\frac{1}{3} SH$, и, следовательно, получаем формулу объёма пирамиды

$$V = \frac{1}{3} SH.$$

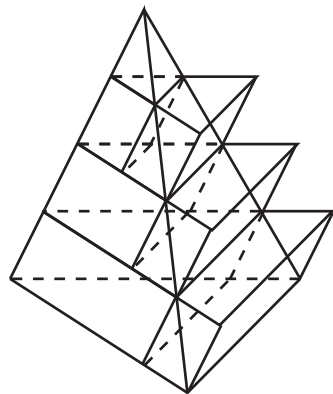


Рис. 88

Упражнения

- 1. Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объёма призмы составляет объём пирамиды?
- 2. Найдите объём пирамиды, высота которой h , а в основании — прямоугольник со сторонами a и b .
- 3. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a , высота — h .
- 4. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой равна h , а диагональ основания — d .
- 5. Определите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если её диагональным сечением является правильный треугольник со стороной 1, равной 1.
- 6. Напишите формулу объёма правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h .
- 7. Найдите объём тетраэдра с ребром, равным 1.
- 8. Напишите формулу объёма правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b .
- 9. В правильной четырёхугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите её объём.
- 10. Объём правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3 . Сторона основания 1 см. Найдите боковое ребро.
- 11. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b . Найдите объём пирамиды.
- 12. Напишите формулу объёма правильной n -угольной пирамиды со стороной основания a и высотой h .
- 13. Как изменится объём правильной пирамиды, если высота её будет увеличена в n раз, а сторона основания уменьшена во столько же раз?
- 14. Найдите объём треугольной пирамиды, если длина каждого её бокового ребра равна b , а плоские углы при вершине равны 60° , 90° и 90° .
- 15. Пирамида, объём которой равен V , а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Определите объём оставшейся части пирамиды.
- 16. В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Определите объём тетраэдра.
- 17. Найдите объём октаэдра с ребром, равным 1.
- 18. Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объём.

19. Страна основания правильной шестиугольной пирамиды a , а угол между боковой гранью и основанием 45° . Найдите объём пирамиды.
20. Параллельно основанию пирамиды проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объёмы полученных частей пирамиды?
21. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны a , проведите сечение через вершину D параллельно ребру AC и точку M — середину ребра BC . Определите:
- а) вид сечения;
 - б) площадь сечения;
 - в) угол φ между плоскостью сечения и плоскостью ABC тетраэдра;
 - г) объёмы многогранников, на которые разбивается данный многогранник плоскостью сечения.
- *22. Два куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на угол 60° по отношению к другому. Найдите объём их общей части.
- *23. Два правильных тетраэдра с рёбрами a имеют общую высоту. Один из них повернут на 60° по отношению к другому. Найдите объём их общей части.
- *24. Два правильных тетраэдра с рёбрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объём общей части этих тетраэдров.
- *25. Два правильных тетраэдра с рёбрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Основание одного из тетраэдров повернуто на 60° по отношению к основанию другого. Найдите объём общей части этих тетраэдров.
- *26. Два правильных тетраэдра с рёбрами a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных рёбер. Один тетраэдр повернут на 90° по отношению к другому. Найдите объём их общей части.
- *27. Развёртка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной a . Найдите объём этой пирамиды.
- *28. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка постоянной длины AB и CD . Докажите, что объём пирамиды $ABCD$ при этом не меняется.
- *29. Плоскость проходит через сторону основания треугольной пирамиды и делит противоположное боковое ребро в отношении $m : n$. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?
- *30. Плоскость пересекает рёбра SA , SB , SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках A' , B' , C' соответственно. Найдите объём пирамиды

$SA'B'C'$, если объём исходной пирамиды равен V и $SA' : SA = 1 : 2$, $SB' : SB = 2 : 3$, $SC' : SC = 3 : 4$.

- ★31. Докажите, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных рёбер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.
- ★32. Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного многогранника, до плоскостей всех его граней не зависит от выбора этой точки.
- ★33. В пирамиду $SABC$ с высотами граней h_1, h_2, h_3, h_4 вписан шар радиуса R . Докажите, что имеет место равенство

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}.$$

§ 16. Объём конуса

Напомним, что конусом в пространстве мы называем фигуру, образованную отрезками, соединяющими точки некоторой плоской фигуры, называемой основанием конуса, с точкой, лежащей вне плоскости основания и называемой вершиной конуса.

Теорема. Объём конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного конуса с основанием площади S и высотой h рассмотрим какую-нибудь пирамиду с теми же площадью основания и высотой (см. рис. 85). Тогда эти пирамида и конус имеют равные объёмы. Но для объёма пирамиды имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

Следовательно, она имеет место и для объёма произвольного конуса. ■

В частности, для кругового конуса, в основании которого — круг радиуса R и высота которого равна h , имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h.$$

Для данного конуса рассмотрим плоскость, параллельную основанию и пересекающую конус. Часть конуса, заключённая между этой плоскостью и основанием, называется **усечённым конусом** (рис. 89).

Полученное при этом сечение конуса также называется **основанием усечённого конуса**. Расстояние между плоскостями оснований называется **высотой усечённого конуса**.

Теорема*. Объём усечённого конуса выражается формулой

$$V = \frac{1}{3}g(S + \sqrt{Ss} + s),$$

где S, s — площади оснований, g — высота усечённого конуса.

Доказательство. Представим усечённый конус как разность большего и меньшего конусов. Тогда объём усечённого конуса находится как разность объёмов большего и меньшего конусов.

Если площади оснований большего и меньшего конусов равны соответственно S, s , а высоты — H, h , то объём усечённого конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выразить высоты H и h через высоту g усечённого конуса и площади оснований. Ясно, что $H = g + h$. Выразим h через g, S и s . Заметим, что в сечении конуса плоскостью, параллельной основанию, получается фигура, подобная основанию, и коэффициент подобия равен отношению расстояний от вершины конуса до плоскости сечения и плоскости основания. Кроме того, отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Следовательно, имеем равенство

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{g+h}\right)^2 \text{ или } \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{h}{g+h},$$

из которого можно найти неизвестную высоту h :

$$h = \frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Подставляя теперь h в выражение для объёма усечённого конуса, получим

$$V = \frac{1}{3} \left(S \left(\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} + g \right) - s \frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} \right) = \frac{1}{3} \left(g \frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} \right) = \frac{1}{3} g (S + \sqrt{Ss} + s). \quad \blacksquare$$

Формула объёма усечённого конуса, в частности, применима к нахождению объёмов усечённой пирамиды и усечённого прямого кругового

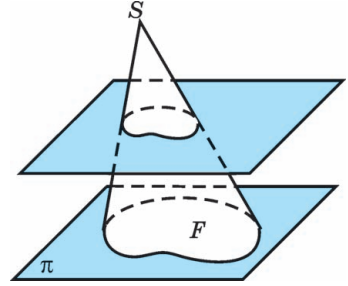


Рис. 89

конуса. Так, например, **объём усечённого прямого кругового конуса**, в основаниях которого — круги радиусов R и r , а высота равна h , выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R \cdot r + r^2).$$

Упражнения

- 1. Во сколько раз увеличится объём кругового конуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?
- 2. Изменится ли объём кругового конуса, если радиус основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза?
- 3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 40π см³.
- 4. Объём конуса равен V . Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объёмы полученных частей конуса?
- 5. Напишите формулу объёма прямого кругового конуса с радиусом основания R и образующей b .
- 6. Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объём.
- 7. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения — 90° . Вычислите объём конуса.
- 8. Найдите объём тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 3 см.
- 9. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a . Найдите объём тела вращения.
- 10. Два конуса получены от вращения неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг каждого из катетов. Равны ли объёмы этих конусов?
- 11. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота — 3 см, вращается относительно оси симметрии. Найдите объём тела вращения.
- 12. Равносторонний треугольник со стороной, равной единице, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Найдите объём тела вращения.
- 13. Конус вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h . Найдите его объём.
- 14. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h . Найдите его объём.

- *15. Боковое ребро правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равно 3 м, стороны оснований 5 м и 1 м. Найдите её объём.
- *16. Площади оснований усечённой пирамиды равны 245 м^2 и 80 м^2 , а высота исходной пирамиды равна 35 м. Найдите объём усечённой пирамиды.
- *17. Найдите объём правильной шестиугольной усечённой пирамиды, если стороны её оснований a и b , боковое ребро составляет с основанием угол 30° ($a > b$).
- *18. Радиусы оснований усечённого конуса R и r . Образующая наклонена к основанию под углом 45° . Найдите его объём.
- 19. Объём усечённого конуса равен $584\pi \text{ см}^3$, а радиусы оснований 10 см и 7 см. Найдите высоту усечённого конуса.
- *20. Усечённый конус, у которого радиусы оснований 3 см и 5 см, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?
- *21. На меньшем основании усечённого конуса построен цилиндр, второе основание которого лежит в плоскости большего основания конуса. Объём цилиндра составляет седьмую часть объёма усечённого конуса. Найдите зависимость между радиусами оснований усечённого конуса.
- *22. Объём конуса равен V . Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите объём средней части конуса.
- *23. Высота усечённого конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого, а образующая наклонена к основанию под углом 45° . Найдите объём.

§ 17. Объём шара и его частей

Рассмотрим вопрос о нахождении формулы объёма шара.

Теорема. Объём шара радиуса R выражается формулой

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Доказательство. Пусть дан полушар радиуса R , основание которого расположено на плоскости α . Рассмотрим цилиндр, основание которого — круг радиуса R , расположенный в той же плоскости α , и высота которого равна R (рис. 90). В цилиндр впишем конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания цилиндра. Докажем, что фигура, состоящая из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и данный полушар имеют равные объёмы.



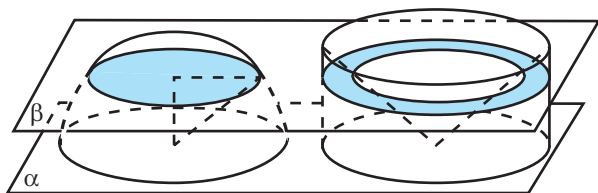


Рис. 90

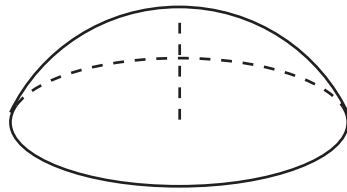


Рис. 91

Проведём плоскость β , параллельную плоскости α , на расстоянии x от неё, $0 \leq x \leq R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площади $\pi(R^2 - x^2)$. В сечении другой фигуры получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x , а внешнего — R . Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и построенная фигура имеют равные объёмы. Вычислим этот объём. Он равен разности объёмов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = V_{\text{ц}} - V_{\text{к}} = \pi R^2 R - \frac{1}{3} \pi R^2 R = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Объём шара вдвое больше объёма полушара и, следовательно, выражается формулой

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \blacksquare$$

Шаровым кольцом называется фигура, заключённая между поверхностями двух шаров с общим центром.

Шаровым сегментом называется меньшая часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью, не проходящей через центр шара (рис. 91). Круг, образованный сечением шара этой плоскостью, называется **основанием шарового сегмента**. Часть радиуса шара, лежащая внутри шарового сегмента и перпендикулярная его основанию, называется **высотой шарового сегмента**.

Теорема. **Объём шарового сегмента** высоты h , отсекаемого от шара радиуса R , выражается формулой

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

Доказательство. Рассмотрим ситуацию, изображённую на рисунке 90, и предположим, что плоскость β отсекает от полушара сегмент высоты h . Тогда она отсекает от цилиндра и вписанного в него конуса

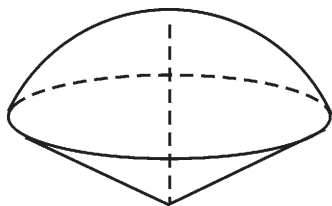


Рис. 92

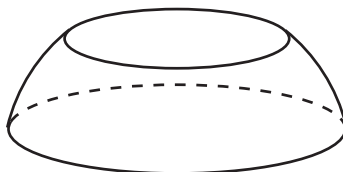


Рис. 93

цилиндр и усечённый конус высоты h . По принципу Кавальери, объём V шарового сегмента будет равен разности объёмов этих цилиндра и усечённого конуса. Объём $V_{\text{ц}}$ цилиндра равен $\pi R^2 h$. Объём $V_{\text{ус. к}}$ усечённого конуса равен разности объёмов большого и малого конусов, т. е.

$$V_{\text{ус. к}} = \frac{1}{3} \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi (R - h)^3 = \pi R^2 h - \pi R h^2 + \frac{1}{3} \pi h^3.$$

Следовательно,

$$V = V_{\text{ц}} - V_{\text{ус. к}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right). \blacksquare$$

Шаровым сектором называется часть шара, составленная из шарового сегмента и конуса, основанием которого является основание шарового сегмента, а вершиной — центр шара (рис. 92).

Шаровым поясом будем называть часть шара, заключённую между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 93). Сечения шара этими плоскостями называются **основаниями шарового пояса**, а расстояние между ними называется **высотой шарового пояса**.

Упражнения

- 1. Найдите объём шара, диаметр которого равен 4 см.
- 2. Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличить в: а) 3 раза; б) 4 раза?
- 3. Радиусы трёх шаров 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объём которого равен сумме их объёмов.
- 4. Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объёмов равнялась объёму шара радиуса 6 см?
- 5. Во сколько раз объём Земли больше объёма Луны? (Диаметр Земли 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км.)
- 6. Найдите объём шара, описанного около куба с ребром, равным единице.

7. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстояние 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объём шара.
8. Медный куб, ребро которого равно 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. (Потерями металла при переплавке можно пренебречь.)
9. Найдите формулу объёма шарового кольца, заключённого между поверхностями шаров радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$).
10. Шар радиуса 10 см пересечён плоскостью, проходящей на расстоянии 4 см от центра шара. Найдите объём отсечённого шарового сегмента.
11. Какую часть объёма шара составляет объём шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?
12. Найдите формулу объёма шарового сектора радиуса R и углом при вершине φ .
13. Чему равен объём шарового сектора, если радиус окружности его сегмента равен 60 см, а радиус шара — 75 см?
14. Найдите объём шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара — 5 см. (Рассмотрите два случая.)
15. Найдите объём шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a .
- *16. Найдите объём шара, вписанного в октаэдр с ребром a .
- *17. Шар касается всех двенадцати рёбер куба с ребром a . Найдите объём части шара, заключённой внутри этого куба.
- *18. Найдите объём тора, полученного вращением круга радиуса r вокруг оси, отстоящей от центра круга на расстояние h ($h > r$).

§ 18. Площадь поверхности

Площадью поверхности многогранника, по определению, считается сумма площадей входящих в эту поверхность многоугольников.

Площадь поверхности призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований.

Площадь поверхности пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания.

Рассмотрим вопрос о нахождении площадей поверхностей прямых круговых цилиндра и конуса. Будем, как и раньше, называть их просто цилиндром и конусом.

Теорема. **Площадь поверхности цилиндра**, радиус основания которого равен R и образующая равна b , выражается формулой

$$S = 2\pi R(R + b).$$

Доказательство. Поверхность цилиндра состоит из поверхностей оснований и боковой поверхности (рис. 94). Развёрткой боковой поверхности является прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и b . Поэтому площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rb$, а площадь полной поверхности S вычисляется по формуле

$$S = 2\pi Rb + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + b). \blacksquare$$

Теорема. Площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен R и образующая равна b , выражается формулой

$$S = \pi R(R + b).$$

Доказательство. Поверхность конуса состоит из поверхности основания и боковой поверхности конуса. Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор (рис. 95), радиус которого равен образующей, а длина дуги — длине окружности основания конуса. Поэтому площадь боковой поверхности конуса равна πRb , а полная поверхность S вычисляется по формуле

$$S = \pi R(R + b). \blacksquare$$

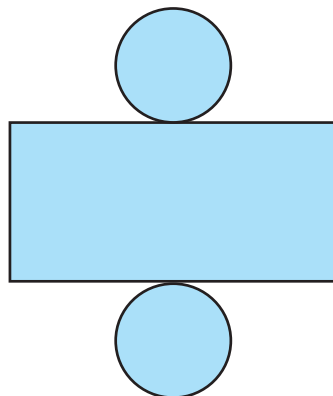


Рис. 94

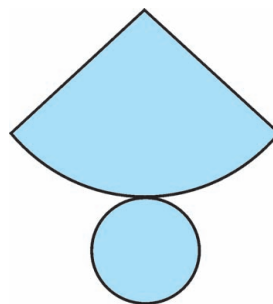


Рис. 95

Упражнения

- 1. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?
- 2. Чему равна площадь поверхности: а) тетраэдра с ребром 1; б) икосаэдра с ребром 1?
- 3. Объём куба равен 8 м^3 . Найдите площадь его поверхности.
- 4. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота — 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
- 5. Из прямоугольного листа бумаги образуйте боковую поверхность цилиндра. Сколькими способами это можно сделать? Сравните их площади.
- 6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м^2 . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
- 7. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Площадь основания равна S . Найдите площадь поверхности цилиндра.

8. Радиус основания конуса равен 3 м, высота — 4 м. Найдите площадь поверхности конуса.
9. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b .
10. Найдите площадь поверхности правильной n -угольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b .
11. В каком отношении делится боковая поверхность правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через средние линии её оснований?
12. Площадь диагонального сечения правильной четырёхугольной призмы равна Q . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
13. Определите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a , а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.
14. Площадь боковой грани правильной четырёхугольной призмы равна Q . Определите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.
15. Развёртка поверхности правильной треугольной пирамиды представляет собой равносторонний треугольник, площадь которого равна 80 см^2 . Найдите площадь грани пирамиды.
16. В основании пирамиды, боковые грани которой образуют с основанием равные углы, лежит ромб. Площадь одной из боковых граней равна Q . Определите площадь боковой поверхности пирамиды.
17. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды в два раза больше площади основания. Определите угол наклона боковой грани к плоскости основания.
18. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан конус. Как относятся площади боковых поверхностей этих фигур?
19. Найдите площадь поверхности усечённого прямого кругового конуса с основаниями радиусов r , R и образующей b . Нарисуйте развёртку боковой поверхности усечённого конуса.
20. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, описанного около шара, если его образующая равна 13 см.
21. Площадь боковой поверхности и объём цилиндра выражаются одним и тем же числом. Найдите диаметр основания цилиндра.
22. Площади боковых поверхностей двух конусов, полученных от вращения прямоугольного треугольника вокруг каждого из его катетов, равны. Определите вид треугольника.
- *23. Докажите, что площадь любой грани произвольного тетраэдра меньше суммы площадей остальных трёх граней.



§ 19. Площадь поверхности шара и его частей

Для нахождения **площади поверхности шара** уже нельзя, как мы это делали для цилиндра и конуса, воспользоваться развёрткой, так как поверхность шара нельзя развернуть на плоскость. Поэтому воспользуемся другим методом нахождения площади поверхности шара.

Опишем около шара радиуса R какой-нибудь многогранник, проводя касательные плоскости к этому шару. Представим полученный многогранник составленным из пирамид, вершины которых совпадают с центром шара, а основаниями являются грани многогранника (рис. 96). Ясно, что высоты этих пирамид равны радиусу шара. Отсюда объём многогранника вычисляется по формуле

$$V_{\text{м}} = \frac{1}{3} S_{\text{м}} R,$$

где $S_{\text{м}}$ — площадь поверхности многогранника.

Будем и дальше проводить касательные плоскости к шару, отсекая вершины многогранников. Получающиеся при этом многогранники будут всё больше и больше приближаться к шару, а их поверхности будут приближаться к поверхности шара. Учитывая, что при этом всё время сохраняется приведённая выше формула объёма, получаем, что для объёма шара V и его площади поверхности S также будет выполняться формула $V = \frac{1}{3} SR$. С другой стороны, объём шара выражается формулой $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. Следовательно, имеет место равенство $\frac{1}{3} SR = \frac{4}{3} \pi R^3$, из которого получаем формулу площади поверхности шара:

$$S = 4\pi R^2.$$

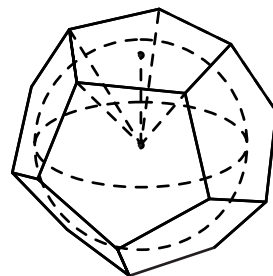


Рис. 96

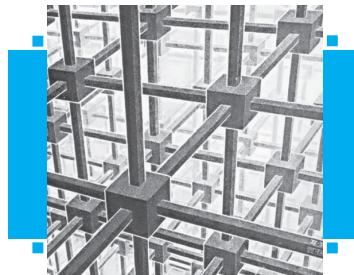
Упражнения

- 1. Площадь большого круга шара равна 3 см^2 . Найдите площадь поверхности шара.
- 2. Как изменится площадь поверхности шара, если увеличить радиус шара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?
- 3. Во сколько раз площадь поверхности Земли больше площади поверхности Луны? (Диаметр Земли 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км.)

4. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстояние 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности шара.
5. Шар с центром в точке O касается плоскости α в точке A . Точка B принадлежит плоскости α , и $OB = 26$ см; $AB = 24$ см. Найдите площадь поверхности шара.
6. Площадь поверхности шара равна 225π м². Найдите его объём.
- 7. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их диаметров.
- 8. Площади поверхностей двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объёмы?
- 9. Объёмы двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их площади поверхностей?
10. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?
11. Около октаэдра, ребро которого равно 2 дм, описан шар. Найдите площадь поверхности шара.
12. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их площадей поверхностей и объёмов.
13. Докажите, что если около шара описан конус, у которого высота вдвое больше диаметра шара, то объём и площадь поверхности конуса вдвое больше объёма и площади поверхности шара соответственно.
14. Длина образующей конуса равна диаметру основания. Докажите, что площадь поверхности конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса.
15. В шаре проведены по одну сторону от центра два параллельных сечения; площади их равны 49π дм² и 4π м², а расстояние между ними 9 дм. Найдите площадь поверхности шара.
- ★ 16. Найдите площадь поверхности шарового сегмента, отсекаемого от шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра шара.
- ★ 17. Найдите площадь поверхности шарового пояса, если радиусы его оснований R_1 и R_2 , а радиус шара R . Рассмотрите два случая.
- ★ 18. Шар радиуса R пересечён двумя параллельными плоскостями, которые делят перпендикулярный им диаметр шара в отношении 1 : 2 : 3. Определите площадь поверхности шара, заключённой между секущими плоскостями.
- ★ 19. В сферу радиуса R вписан правильный тетраэдр, и три его грани, исходящие из одной вершины, продолжены до пересечения со сферой. Вычислите площадь части поверхности сферы, заключённой внутри образовавшегося трёхгранного угла.
- ★ 20. Сфера радиуса R проходит через центр другой сферы радиуса r . Докажите, что площадь шапочки, вырезаемой из сферы радиуса r сферой радиуса R , не зависит от R .



КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ



§ 20. Прямоугольная система координат в пространстве

В курсе планиметрии мы познакомились с прямоугольной системой координат на плоскости. Напомним, что **координатной прямой** называется такая прямая, на которой выбрана точка O , называемая началом координат, и единичный вектор $\overrightarrow{OE}$, указывающий положительное направление координатной прямой. **Прямоугольной системой координат на плоскости** называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Оно обозначается буквой O , а координатные прямые обозначаются Ox , Oy и называются соответственно осью абсцисс и осью ординат (рис. 97).

Каждой точке на координатной прямой соответствует число, называемое координатой этой точки, а каждой точке на плоскости с заданной системой координат соответствует пара чисел (x, y) , называемых координатами точки на плоскости относительно данной системы координат.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596—1650). Поэтому прямоугольную систему координат называют также **декартовой системой координат**, а сами координаты — **декартовыми координатами**. Введение прямоугольных координат на плоскости и в пространстве позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи к геометрическим. Метод, основанный на этом сведении, называется **методом координат**.

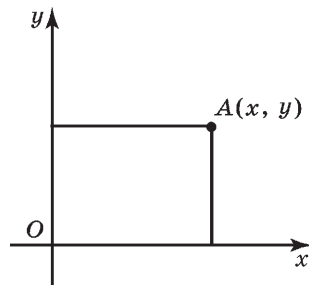


Рис. 97

Определение. **Прямоугольной системой координат в пространстве** называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат.

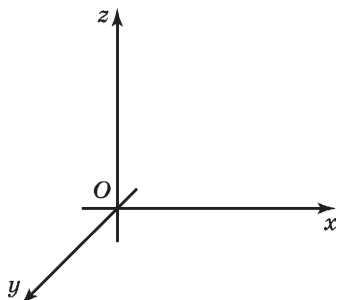


Рис. 98

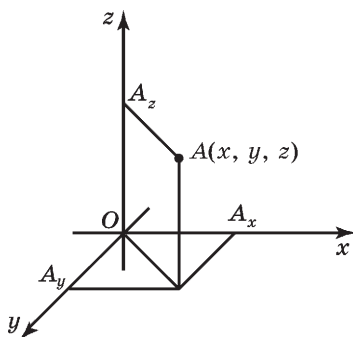


Рис. 99

Определение. Общее начало координат обозначается буквой O , а координатные прямые обозначаются Ox , Oy , Oz и называются соответственно **осью абсцисс**, **осью ординат** и **осью аппликат** (рис. 98). Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy , Oxz и Oyz соответственно.

Пусть A — произвольная точка пространства, в котором выбрана прямоугольная система координат. Через точку A проведём плоскость, перпендикулярную оси Ox , и точку её пересечения с осью Ox обозначим A_x (рис. 99). Координата этой точки на оси Ox называется **абсциссой** точки A и обозначается x . Аналогично на осях Oy и Oz определяются точки A_y и A_z , координаты которых называются соответственно **ординатой** и **аппликатой** точки A и обозначаются y и z соответственно. Тройка чисел (x, y, z) называется координатами точки A в пространстве.

Исторические сведения

Р. Декарт — один из выдающихся учёных XVII века. Поражает широта его интересов. Учёным получены серьёзные научные результаты в области философии, математики, физики, биологии, медицины и др. Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, вскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения — картезианства (Картезий — латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определённым естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 году (когда Декарту был уже 41 год). По обычаям того времени, она имела довольно длинное название: «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». В этом сочинении Декарт сформулировал «главные правила метода».

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т.е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчётливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, насколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчёркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчёты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

«Геометрия» Декарта, являющаяся приложением к «Рассуждению о методе...», произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII века. В XVIII—XIX вв. на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрия. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

Упражнения

1. Для данного изображения прямоугольной системы координат в пространстве изобразите точки с координатами: $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$, $(-1, 3, 2)$.
- 2. Найдите координаты ортогональных проекций точек $A(1, 3, 4)$ и $B(5, -6, 2)$ на: а) плоскость Oxy ; б) плоскость Oyz ; в) ось Ox ; г) ось Oz .

- 
- 3. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны нулю; ж) все координаты равны нулю?
 - 4. На каком расстоянии находится точка $A(1, -2, 3)$ от координатной плоскости: а) Oxy ; б) Oxz ; в) Oyz ?
 - 5. На каком расстоянии находится точка $A(1, -2, 3)$ от координатной прямой: а) Ox ; б) Oy ; в) Oz ?
 - 6. Каким является геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна единице; б) первая и вторая координаты равны единице?
 - 7. Какому условию удовлетворяют координаты точек пространства, одинаково удалённые от: а) двух координатных плоскостей Oxy , Oyz ; б) всех трёх координатных плоскостей?
 - 8. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Начало координат находится в точке B . Положительные лучи осей координат — соответственно BA , BC и BB_1 . Назовите координаты всех вершин куба.
 - 9. Куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ помещён в прямоугольную систему координат так, что началом координат является центр нижнего основания куба, рёбра куба параллельны соответствующим осям координат, вершина A имеет координаты $(-2, 2, 0)$. Найдите координаты всех остальных вершин куба.
 - 10. Центром октаэдра является начало координат. Две его вершины имеют координаты $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$. Найдите координаты остальных вершин октаэдра.
 - 11. Как расположена сфера радиуса 2 с центром в точке с координатами $(1, 2, 3)$ относительно координатных плоскостей?
 - 12. Для данной системы координат в пространстве изобразите точки $A(1, 1, -1)$ и $B(1, -1, 1)$. Нарисуйте отрезок AB . Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Плоскость координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть). Проходит ли отрезок AB через начало координат?
 - ★ 13. Плоскость проходит через точки с координатами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Принадлежит ли этой плоскости точка с координатами:
а) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; б) $(1, 1, 0)$; в) $(0, 0, 0)$?
 - 14. Пусть в пространстве заданы точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Найдите координаты середины отрезка A_1A_2 .
 - 15. Найдите координаты середины отрезка: а) AB , если $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, 1, 1)$; б) CD , если $C(3, 4, 0)$ и $D(3, -1, 2)$.

16. Точка A имеет координаты (x, y, z) . Найдите координаты симметричной точки относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.
- *17. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Вершины A и B имеют соответственно координаты $(1, 0, 0)$ и $(-1, 0, 0)$. Грань тетраэдра ABC лежит в плоскости Oxy . Найдите координаты других вершин тетраэдра. Сколько случаев возможно?

§ 21. Расстояние между точками в пространстве

В планиметрии доказывалось, что **расстояние между точками** $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ на плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В пространстве имеет место аналогичная формула.

Теорема. Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доказательство. Для точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ пространства рассмотрим прямую A_1A_2 . Она не может быть параллельна одновременно всем осям координат. Предположим, например, что она не параллельна оси Oz , и пусть A'_1, A'_2 — ортогональные проекции соответственно точек A_1, A_2 на плоскость Oxy (рис. 100). Ясно, что эти проекции имеют координаты (x_1, y_1) , (x_2, y_2) соответственно. Расстояние между точками A'_1, A'_2 выражается формулой

$$A'_1A'_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Через точку A_1 проведём прямую, параллельную $A'_1A'_2$, и точку её пересечения с прямой $A_2A'_2$ обозначим B . Тогда треугольник A_1A_2B — прямоугольный, $A_1B = A'_1A'_2$, $A_2B = |z_2 - z_1|$. Следовательно, по теореме Пифагора, имеем

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \blacksquare$$

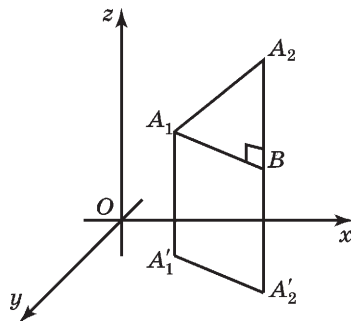


Рис. 100

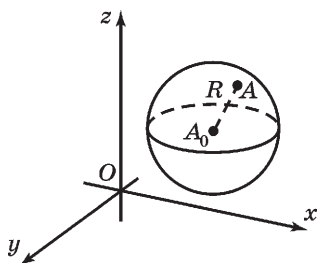


Рис. 101

Непосредственно из определения шара и сферы следует, что координаты точек шара с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R удовлетворяют неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2,$$

а координаты точек соответствующей сферы — равенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Последнее равенство называется **уравнением сферы** с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R (рис. 101).

Упражнения

- 1. Найдите расстояние между точками $A_1(1, 2, 3)$ и $A_2(-1, 1, 1)$, $B_1(3, 4, 0)$ и $B_2(3, -1, 2)$.
- 2. Какая из точек — $A(2, 1, 5)$ или $B(-2, 1, 6)$ — лежит ближе к началу координат?
- 3. Даны точки $M(1, -2, -3)$, $N(-2, 3, 1)$ и $K(3, 1, -2)$. Найдите периметр треугольника MNK .
- 4. Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 0, 0)$.
- 5. Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением:
 - а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 9$;
 - б) $x^2 + (y - 6)^2 + (z + 1)^2 = 11$.
- 6. Напишите уравнение сферы:
 - а) с центром в точке $O(0, 0, 0)$ и радиусом 1;
 - б) с центром в точке $C(1, -2, 3)$ и радиусом 4.
- 7. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(1, 2, -1)$, касающейся координатной плоскости: а) Oxy ; б) Oxz ; в) Oyz .
- 8. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(3, -2, 1)$, касающейся координатной прямой: а) Ox ; б) Oy ; в) Oz .
- 9. Найдите уравнения сфер радиуса R , касающихся трёх координатных плоскостей.
- 10. Докажите, что уравнение $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$ задаёт сферу в пространстве. Найдите её радиус и координаты центра.
- 11. Точка $A(0, \sqrt{2}, \sqrt{5})$ принадлежит сфере с центром $O(3, 0, 0)$. Напишите уравнение этой сферы. Принадлежат ли этой сфере точки $M(5, 0, 2\sqrt{3})$ и $K(4, -1, 0)$?

12. Как расположена точка $A(5, 1, 2)$ относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$?
13. Как расположены относительно друг друга сферы $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$?
14. Напишите уравнение окружности, лежащей в плоскости Oxy и являющейся пересечением сферы $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$ с этой плоскостью.
15. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$?
- ★ 16. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, при условии $A^2 + B^2 + C^2 > 4D$, задаёт сферу. Найдите координаты центра и радиус сферы. Какая фигура получится, если $A^2 + B^2 + C^2 = 4D$?

§ 22. Координаты вектора

Определим понятие координат вектора в пространстве с заданной прямоугольной системой координат. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются **координатами вектора**.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы отложенными от начала координат и называть их **координатными векторами** (рис. 102).

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A . Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$ (рис. 103). Точка A имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z} = z\vec{k}$ и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ■

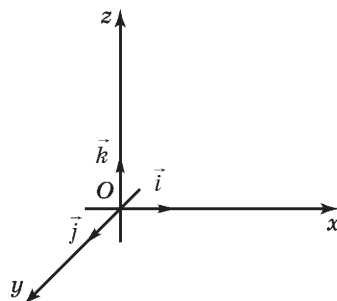


Рис. 102

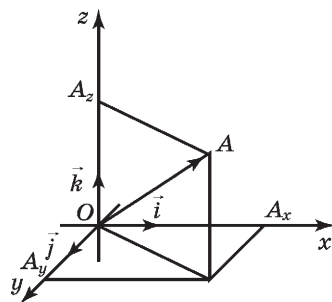


Рис. 103

Теорема. Сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ имеет координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Доказательство. Разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ имеет место равенство

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

и, следовательно, тройка чисел $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. ■

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются. Аналогичным образом показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ имеет координаты

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом — точку $A_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 104). Тогда его можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$, и, следовательно, он имеет координаты

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$ выражается через координаты по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Упражнения

- 1. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$; г) $\vec{d} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$.
- 2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2, -6, 9)$, $B(-5, 3, -7)$; б) $A(1, 3, -8)$, $B(6, -5, -10)$; в) $A(-3, 1, -20)$, $B(5, 1, -1)$.

- 3. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b, c) . Найдите координаты $\overrightarrow{BA}$.
- 4. Векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ коллинеарны. Как связаны между собой их координаты?
- 5. В прямоугольном параллелепипеде $OABCO_1A_1B_1C_1$ вершина O — начало координат, рёбра OA , OC , OO_1 лежат на осях координат Ox , Oy и Oz соответственно, и $OA = 2$, $OC = 3$, $OO_1 = 4$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{O_1C}$.
- 6. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1, 0, 2)$, $\vec{b}(0, 3, -4)$.
- 7. Даны векторы $\vec{a}(-1, 2, 8)$ и $\vec{b}(2, -4, 3)$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a} + 5\vec{b}$.
- 8. Найдите координаты точки N , если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(4, -3, 0)$ и точка $M(1, -3, -7)$.
- 9. Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости Oxy ; б) параллелен координатной прямой Ox ?
- 10. Найдите координаты конца единичного вектора с началом в точке $A(1, 2, 3)$ и: а) перпендикулярного плоскости Oxy ; б) параллельного прямой Ox .
- 11. Найдите длину вектора: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; б) $8\vec{i} + \vec{k}$; в) $-\vec{j} + 2\vec{k}$.
- 12. Длина вектора равна 3. Найдите координаты вектора, если известно, что все они равны.
- 13. Найдите длины векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1, 0, 2)$, $\vec{b}(0, 3, -4)$.

§ 23. Скалярное произведение векторов

Угол между векторами и **скалярное произведение векторов** в пространстве определяются аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости. А именно, угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю. В остальных случаях векторы откладываются от общего начала, и угол между ними определяется как угол между векторами, лежащими в одной плоскости.

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90° , поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A , производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ , а именно, имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$. Отложим их от начала координат и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно (рис. 105). По теореме косинусов имеем равенство:

$$(A_1 A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cos \varphi$$

и, следовательно, равенство

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2.$$

Выразим отсюда скалярное произведение и воспользуемся равенствами

$$\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;$$

$$\vec{a}_2^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Получим

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 &= \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

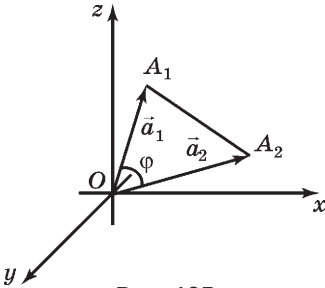


Рис. 105

Таким образом, имеет место формула

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства, аналогичные свойствам произведения чисел:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Доказательство непосредственно следует из формулы, выражающей скалярное произведение через координаты векторов.

Упражнения

- 1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{D_1 A_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1 B}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1 B}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{D_1 C}$; д) $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{B_1 B}$.
- 2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1, 2, 3)$ и $\vec{a}_2(2, -1, 0)$.
- 3. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?
- 4. Используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами: а) $\vec{a}_1(2, 3, -1)$ и $\vec{a}_2(1, -2, 4)$; б) $\vec{a}_1(1, 2, -2)$ и $\vec{a}_2(1, 0, -1)$.

5. При каком значении z векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ перпендикулярны?
6. Используя формулу скалярного произведения, докажите, что для вектора $\vec{a}(x, y, z)$ имеют место равенства $x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j}$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k}$.
7. Докажите, что, каковы бы ни были векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, справедливы следующие равенства: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
8. Докажите, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.
9. Какой угол φ образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?
10. При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}(2, -1, 0)$, $\vec{b}(4, 3, 1)$?

11. Докажите, что в треугольнике ABC , где $A(2, 1, 3)$, $B(1, 1, 4)$ и $C(0, 1, 3)$, угол B прямой.
- ★ 12. Докажите, что точки $A(2, 4, -4)$, $B(1, 1, -3)$, $C(-2, 0, 5)$, $D(-1, 3, 4)$ являются вершинами параллелограмма, и вычислите величину угла между его диагоналями.
- ★ 13. Точка K — середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. L — середина ребра AD , M — центр грани $CC_1 D_1 D$. Докажите, что $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{B_1 L} = 0$.
У к а з а н и е. Введите прямоугольную систему координат таким образом, чтобы начало координат совпало с вершиной A и ребра, выходящие из неё, лежали на координатных осях.
- ★ 14. Точки M , N , P — середины рёбер AB , AD , DC правильного тетраэдра с ребром a . Найдите скалярные произведения: а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{BA}$; е) $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PC}$.
- ★ 15. Из точки O на прямую a опущен перпендикуляр OA . Докажите, что для произвольной точки B прямой a скалярное произведение $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ не зависит от положения точки B .
- ★ 16. Докажите, что единичный вектор, образующий с координатными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ углы α , β , γ соответственно, имеет координаты $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.
- ★ 17. Найдите углы, которые образует с координатными векторами вектор: а) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; б) $-3\vec{j} - \vec{k}$; в) $-5\vec{i}$; г) $(0, 3, 4)$.
- ★ 18. Найдите координаты единичного вектора, если известно, что он перпендикулярен векторам с координатами $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$.
- ★ 19. Вычислите, какую работу A производит сила $\vec{F}(-3, 4, 7)$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(5, -1, 2)$ в положение $N(2, 1, 3)$.

§ 24. Уравнение плоскости в пространстве

В курсе планиметрии доказывалось, что прямая на плоскости задаётся уравнением $ax + by + c = 0$, в котором a , b , c — действительные числа, причём a , b одновременно не равны нулю. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Т е о р е м а. Плоскость в пространстве задаётся уравнением

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c, d — действительные числа, причём a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого **вектором нормали**.

Доказательство. Пусть точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости и $\vec{n}(a, b, c)$ — перпендикулярный этой плоскости вектор (рис. 106). Тогда произвольная точка $A(x, y, z)$ будет принадлежать этой плоскости в том и только том случае, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. скалярное произведение $\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{n}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

которое задаёт искомую плоскость. Обозначая $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ и преобразовав это уравнение, получим требуемое **уравнение плоскости**, а именно:

$$ax + by + cz + d = 0. \blacksquare$$

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении плоскостей в пространстве с точки зрения их уравнений.

Заметим, что две плоскости в пространстве параллельны или совпадают, если их нормали $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ коллинеарны, и, следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2 = t\vec{n}_1$.

Для плоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \quad (*)$$

векторы нормалей имеют координаты $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$. Поэтому такие плоскости параллельны или совпадают, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2 = ta_1, b_2 = tb_1, c_2 = tc_1$. При этом если $d_2 = td_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же плоскость. Если же $d_2 \neq td_1$, то эти уравнения определяют параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны и не совпадают, то они пересекаются по прямой, и угол φ между ними равен углу между их нормальными $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1), \vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

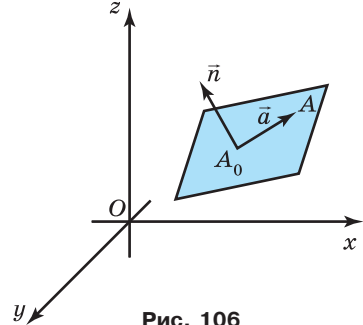


Рис. 106

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняется равенство

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Упражнения

- 1. Найдите уравнения координатных плоскостей Oxy , Oxz , Oyz .
- 2. Даны точки $A(3, 2, 5)$, $B(-1, -2, 2)$, $C(7, 0, -9)$, $D\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, 6\right)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$.
- 3. Дана плоскость $x + 2y - 3z - 1 = 0$. Найдите её точки пересечения с осями координат.
- 4. Найдите координаты точек пересечения плоскости $ax + by + cz + d = 0$ с осями координат.
5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1, 2, 0)$, с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1, 1)$.
6. Точка $H(-2, 4, -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.
7. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а) $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$; б) $M(3, -1, 2)$, $N(4, 1, -1)$ и $K(2, 0, 1)$.
8. Напишите уравнение плоскости, которая: а) проходит через точку $M(1, -2, 4)$ и параллельна координатной плоскости Oxz ; б) проходит через точку $M(0, 2, 0)$ и перпендикулярна оси ординат; в) проходит через точки $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ и параллельна оси аппликат.
9. Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:
 - а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;
 - б) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
 - в) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;
 - г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.
10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 3, -1)$ параллельно плоскости: а) $3x + y - z + 5 = 0$; б) $x - y + 5z - 4 = 0$.
11. Приведите примеры уравнений взаимно перпендикулярных плоскостей.
12. Перпендикулярны ли плоскости:
 - а) $2x - 5y + z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 1 = 0$;
 - б) $7x - y + 9 = 0$ и $y + 2z - 3 = 0$?

13. Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями:
 а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
 б) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.
14. Докажите, что плоскости $x + y + z = 1$, $2x + y + 3z + 1 = 0$, $x + 2z + 1 = 0$ не имеют ни одной общей точки.
- ★ 15. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.
- ★ 16. Вычислите расстояние от начала координат до плоскости:
 а) $2x - 2y + z - 6 = 0$;
 б) $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.
- ★ 17. Принадлежат ли одной плоскости точки $A(1, 0, -2)$, $B(-3, 4, 2)$, $C(0, 1, 3)$, $D(2, -1, 1)$?
- ★ 18. Сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, пересечена плоскостью. Найдите координаты центра и радиус окружности сечения, если плоскость задана уравнением: а) $z = 0$; б) $y = 1$; в) $x + y + z = 2$.
- ★ 19. Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке с координатами: а) $(0, 3, 0)$; б) $(2, -2, 1)$.
- ★ 20. Докажите, что уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в точке $A(m, p, q)$, имеет вид $mx + py + qz = R^2$.

§ 25*. Уравнения прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся плоскостей.

Рассмотрим другой способ аналитического задания прямой. Для этого заметим, что для задания прямой в пространстве достаточно задать или пару точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые проходит эта прямая, или точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{e}(a, b, c)$, параллельный этой прямой или лежащий на ней.

Если прямая задана двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ с координатами $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а в качестве точки A_0 какую-нибудь из точек A_1, A_2 .

Найдём условия, которым должны удовлетворять координаты точки $A(x, y, z)$, чтобы она принадлежала прямой a , проходящей через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}(a, b, c)$ (рис. 107).

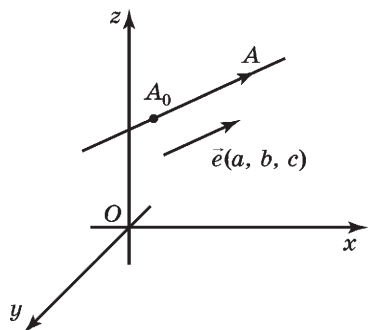


Рис. 107

В этом случае вектор $\overrightarrow{A_0A}$ с координатами $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ должен быть коллинеарен вектору $\vec{e}(a, b, c)$, и, следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны, т. е. должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct, \end{cases}$$

где t — действительное число.

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Они называются **параметрическими уравнениями прямой в пространстве**.

В случае если прямая в пространстве задаётся двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1 , получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$

Заметим, что если вместо направляющего вектора $\vec{e}(a, b, c)$ в параметрических уравнениях прямой взять вектор $k\vec{e}(ka, kb, kc)$, то параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = kat + x_0, \\ y = kbt + y_0, \\ z = kct + z_0 \end{cases}$$

будут задавать ту же самую прямую.

Обычно в физических задачах параметр t играет роль времени, а параметрические уравнения прямой рассматриваются как уравнения движе-

ния точки. Так, моменту времени $t = 0$ соответствует точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой. При изменении параметра t точка A с координатами (x, y, z) , удовлетворяющими параметрическим уравнениям, будет перемещаться по прямой. Докажем, что перемещение точки по прямой является равномерным движением, и найдём его скорость.

Рассмотрим промежуток времени от t_1 до t_2 , $T = t_2 - t_1$. Вектор перемещения $\overline{A_1A_2}$ точки на прямой за этот промежуток времени будет иметь координаты (aT, bT, cT) . Разделив вектор перемещения на время T , получим, что вектор скорости имеет координаты (a, b, c) . Он совпадает с направляющим вектором $\vec{e}$ и не зависит от выбора промежутка времени. Следовательно, движение точки по прямой является равномерным. Длина вектора скорости

$$|\vec{e}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

представляет собой скорость движения точки по прямой.

Упражнения

- 1. Какими уравнениями задаются координатные прямые?
2. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, -2, 3)$ с направляющим вектором $\vec{e}(2, 3, -1)$.
3. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2, 1, -3)$, $A_2(5, 4, 6)$.
4. Какой вид имеют параметрические уравнения прямых, параллельных: а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) оси Oz ?
5. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, 2, -3)$ и перпендикулярной плоскости $x + y + z + 1 = 0$.
6. В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_1t + x_1, \\ y = b_1t + y_1, \\ z = c_1t + z_1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a_2t + x_2, \\ y = b_2t + y_2, \\ z = c_2t + z_2 \end{cases}$$

определяют перпендикулярные прямые?

7. Определите взаимное расположение прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 5t, \\ y - 1 = 4t, \\ z - 1 = 7t, \end{cases}$$

и плоскости, задаваемой уравнением $x - 3y + z + 1 = 0$.

8. Найдите координаты точки пересечения прямой, проходящей через точки $A(-1, 0, 2)$ и $B(3, 1, 2)$, и плоскости $2x - y + z - 3 = 0$.
9. Определите взаимное расположение прямых, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 2t, \\ y - 1 = -t, \\ z - 1 = 3t; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 = t, \\ y = 8t, \\ z - 4 = 2t. \end{cases}$$

10. Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{e}(1, 2, 3)$. В начальный момент времени $t = 0$ она имела координаты $(-1, 1, -2)$. Какие координаты она будет иметь в момент времени $t = 4$?
11. Параметрические уравнения движения материальной точки в пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t + 2, \\ z = 3t - 3. \end{cases}$$

Найдите скорость.

12. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t = 2$ она имела координаты $(3, 4, 0)$, а в момент времени $t = 6$ — координаты $(2, 1, 3)$. Какова скорость движения точки?
- ★ 13. Прямая в пространстве задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Напишите параметрические уравнения прямых, симметричных данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

- ★ 14. Две пересекающиеся плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Докажите, что вектор с координатами $(b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1)$ перпендикулярен обеим этим плоскостям.
- ★ 15. Напишите параметрические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей $x - y + 2z + 4 = 0$, $2x - y - z - 3 = 0$.
- ★ 16. Докажите, что расстояние от точки $A(x, y, z)$ до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, равно

$$\frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

17. Найдите расстояние от точки $A(1, 2, -7)$ до плоскости, заданной уравнением $12x + 4y + 3z - 4 = 0$.
- ★18. Плоскость пересекает оси координат в точках $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$. Найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.
- ★19. Нарисуйте кривую в пространстве, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \\ z = cz + d \end{cases}$$

(винтовая линия).

§ 26. Аналитическое задание пространственных фигур

Ранее было показано, что сфера с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Шар, поверхностью которого служит эта сфера, задаётся неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2.$$

Плоскость в пространстве задаётся уравнением

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (*)$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других пространственных фигур и начнём с многогранников.

Заметим, что если плоскость задана уравнением (*), то неравенства $ax + by + cz + d \geq 0$ и $ax + by + cz + d \leq 0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает пространство. Для того чтобы определить, какому из двух полупространств принадлежит точка $A(x, y, z)$, достаточно подставить её координаты в левую часть уравнения плоскости и найти знак получившегося значения.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d , второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, как с помощью таких неравенств в пространстве можно задавать выпуклые многогранники.

Действительно, пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0.$$

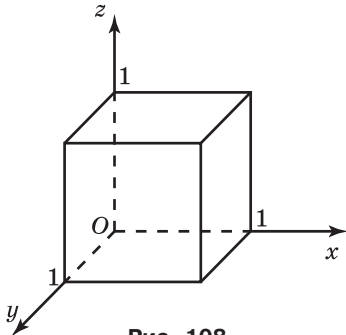


Рис. 108

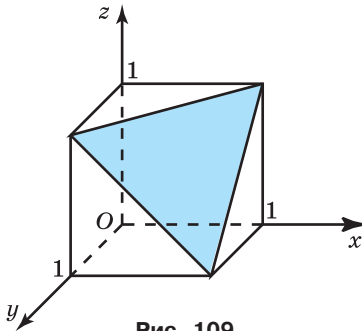


Рис. 109

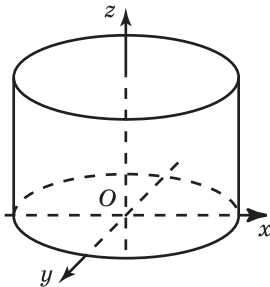


Рис. 110

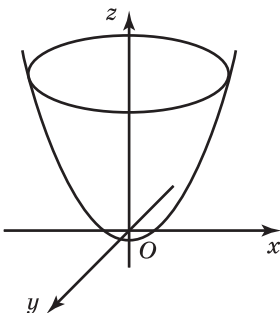


Рис. 111

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств, и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0, \\ \dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geq 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многогранник.

Например, неравенства

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

определяют единичный куб в пространстве (рис. 108).

Если к этим неравенствам добавить ещё одно неравенство

$$x + y + z \leq 2,$$

то соответствующий многогранник получается из куба отсечением пирамиды (рис. 109).

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие пространственные фигуры. Например, цилиндр с радиусом основания R и высотой h (рис. 110) можно задать неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 \leq z \leq h. \end{cases}$$

Параболоид вращения (рис. 111) можно задать уравнением

$$z = a(x^2 + y^2).$$

В сечении этого параболоида плоскостью $y = c$ получается парабола $z = a(x^2 + c^2)$, а в сечениях плоскостями $z = c$ получаются окружности $x^2 + y^2 = \frac{c}{a}$.

Упражнения

- 1. Два полупространства задаются неравенствами $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geq 0$.
Как будет задаваться пересечение этих полупространств?
- 2. Определите, какому полупространству — $5x + 3y - z - 2 \geq 0$ или $5x + 3y - z - 2 \leq 0$ — принадлежит точка: а) $A(1, 0, 0)$; б) $B(0, 1, 0)$; в) $C(0, 0, 1)$.
- 3. Какую фигуру в пространстве задаёт следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 5, \\ 0 \leq z \leq 4? \end{cases}$$

4. Какая фигура в пространстве задаётся неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leq R^2, \\ 0 \leq y \leq h? \end{cases}$$

Изобразите её.

5. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами:

$$\text{а) } \begin{cases} 0 \leq x \leq 8, \\ 0 \leq y \leq 8, \\ 0 \leq z \leq 8, \\ x + y + z \leq 12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 5, \\ 0 \leq z \leq 4, \\ x + y + z - 6 \geq 0. \end{cases}$$

6. Найдите неравенства, задающие правильный тетраэдр, вершины которого имеют координаты $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, -1, -1)$.
7. Изобразите поверхность, задаваемую уравнением: а) $z = x^2 - y^2$ (гиперболический параболоид); б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (коническая поверхность).
8. Напишите неравенства, определяющие конус с вершиной в точке $S(0, 0, h)$, основанием которого является круг радиуса R , лежащий в плоскости Oxy .
- ★ 9. Найдите уравнение эллипсоида вращения — поверхности, полученной вращением эллипса, задаваемого уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вокруг оси: а) Ox ; б) Oy .

- ★10. Найдите уравнение гиперболоида вращения — поверхности, полученной вращением гиперболы, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, вокруг оси: а) Ox ; б) Oy .
- ★11. Докажите, что сечениями параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ плоскостями $z = ax + by + c$ являются эллипсы.
- ★12. Какая фигура в пространстве задаётся неравенством $|x| + |y| + |z| \leq a$?
- ★13. Изобразите многогранники, задаваемые неравенствами:
- а) $|x| + |y| + |z| \leq 4,5$, $|x| \leq 3$, $|y| \leq 3$, $|z| \leq 3$;
 б) $|x| + |y| + |z| \leq 7$, $|x| \leq 3$, $|y| \leq 3$, $|z| \leq 3$;
 в) $|x| + |y| + |z| \leq 6$, $|x| \leq 3$, $|y| \leq 3$, $|z| \leq 3$.
- ★14. Изобразите многогранник, состоящий из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x + y| + |z| \leq 1$, $|x - y| - |z| \leq 1$ или неравенствам $|x - y| + |z| \leq 1$, $|x + y| - |z| \leq 1$.
- ★15. Докажите, что точки с координатами $(0, \pm 1, \pm \varphi)$, $(\pm \varphi, 0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm \varphi, 0)$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, являются вершинами икосаэдра.
- ★16. Докажите, что точки с координатами $(0, \pm \Phi, \pm \varphi)$, $(\pm \varphi, 0, \pm \Phi)$, $(\pm \Phi, \pm \varphi, 0)$, $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, являются вершинами додекаэдра.
- ★17. При каком значении a неравенства $a|x| + |y| \leq 1$, $a|y| + |z| \leq 1$, $a|z| + |x| \leq 1$ задают додекаэдр?
- ★18. При каком значении a неравенства $(1 - a)|x| + |y| \leq 1$, $(1 - a)|y| + |z| \leq 1$, $(1 - a)|z| + |x| \leq 1$, $|x| + |y| + |z| \leq (1 + a)$ задают икосаэдр?

§ 27*. Многогранники в задачах оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые **задачи оптимизации**. Среди них:

— транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

— задача о диете, т.е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определённым медицинским требованиям;

- задача составления оптимального плана производства;
- задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощённый вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на четыре завода $З_1, З_2, З_3, З_4$ требуется завезти сырьё одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1, С_2$. Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья на складе (в т)		Потребность в сырье на заводе (в т)			
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние от склада до завода (в км)			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	5	6	4	10
$С_2$	3	7	3	7

Для решения этой задачи в первую очередь проанализируем её условие и переведем его на язык математики, т. е. составим **математическую модель**. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1, З_2, З_3$, обозначим через x, y и z соответственно. Тогда на четвёртый завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y - z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8 - x, 10 - y, 12 - z, x + y + z - 5$ сырья в тоннах. Запишем эти данные в таблицу 3.

Таблица 3

Склад	Количество сырья, перевезённое на завод (в т)			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	x	y	z	$20 - x - y - z$
$С_2$	$8 - x$	$10 - y$	$12 - z$	$x + y + z - 5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \\ 8 - x \geq 0, 10 - y \geq 0, 12 - z \geq 0, \\ 20 - x - y - z \geq 0, \\ x + y + z - 5 \geq 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его построить, изобразим сначала параллелепипед, определяемый

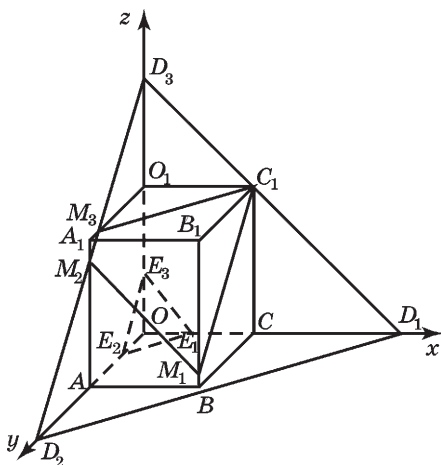


Рис. 112

первой и второй строками данной системы. На рисунке 112 это параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$. Уравнение $20 - x - y - z = 0$ определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая, пересекая параллелепипед, образует многоугольник $M_1M_2M_3C_1$. Уравнение $x + y + z - 5 = 0$ определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед и образует в нём треугольник $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где $M_1(8, 10, 2)$, $M_2(0, 10, 10)$, $M_3(0, 8, 12)$, $C_1(8, 0, 12)$, $C(8, 0, 0)$, $B(8, 10, 0)$, $A(0, 10, 0)$, $E_1(5, 0, 0)$, $E_2(0, 5, 0)$, $E_3(0, 0, 5)$, $O_1(0, 0, 12)$, выполняются все условия данной системы. Назовём его многогранником ограничений.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножим расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты сложим. Общее число тонно-километров выражается формулой

$$5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) + 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{\min} = 295 - f_{\max}$.

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax + by + cz$ ($c > 0$) принимает своё наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax + by + cz$. Тогда уравнение $ax + by + cz = d$ задаёт плоскость в пространстве, которая характеризуется тем, что во всех её точках данная линейная функция при-

нимает значение d . В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d , а в точках, расположенных ниже этой плоскости, — значения, меньшие d . Если число d выбрать достаточно большим, то плоскость $ax + by + cz = d$ расположится выше многогранника. Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d , до тех пор, пока она не соприкоснётся с многогранником. Такое касание произойдёт при некотором d_0 — в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 113), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

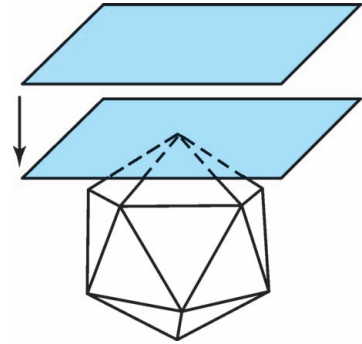


Рис. 113

В точках касания линейная функция принимает значение d_0 , и поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше d_0 . Таким образом, d_0 — искомое наибольшее значение. Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений: $f(M_1) = 52$, $f(M_2) = 60$, $f(M_3) = 56$, $f(C_1) = 32$, $f(C) = 8$, $f(B) = 48$, $f(A) = 40$, $f(E_1) = 5$, $f(E_2) = 20$, $f(E_3) = 10$, $f(O_1) = 24$.

Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{\min} = 295 - 60 = 235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0, 10, 10)$.

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задаётся таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Количество сырья, перевезённое на завод (в т)			
	z_1	z_2	z_3	z_4
C_1	0	10	10	0
C_2	8	0	2	15

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трём, и поэтому в процессе её решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трёх, и для получения геометрической интерпретации

этих задач требуется рассмотрение n -мерного пространства и n -мерных многогранников с очень большим n . При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трёхмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств большей размерности, которые изучаются в специальном разделе математики — **многомерной геометрии**.

Упражнения

1. Найдите фигуру, определяемую следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \\ x \leq 8, y \leq 8, z \leq 8, \\ x + y + z \leq 12. \end{cases}$$

- 2. Какая фигура является графиком линейной функции $z = ax + by + c$?
- 3. Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси Oy ?
- 4. Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?
- 5. Что произойдёт с графиком линейной функции $z = ax + by + c$, если значение c : а) увеличить на единицу; б) уменьшить на единицу?
- 6. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 2 + 2x + y \geq 0, \\ 2 - x + y \geq 0, \\ 5 - x - y \geq 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

- ★ 7. Докажите, что коэффициенты a и b в уравнении линейной функции $z = ax + by + c$ являются тангенсами углов между графиком этой функции и осями Ox и Oy соответственно.
- ★ 8. Найдите угол между графиком линейной функции $z = ax + by + c$ и плоскостью Oxy .
- 9. На трёх складах хранится сырьё одинакового вида в количестве соответственно 10 т, 20 т, 30 т. На завод нужно завезти 35 т сырья.

Найдите наиболее выгодный вариант перевозок, если расстояния от складов до завода равны 7 км, 5 км, 8 км.

10. Решите предыдущую задачу при дополнительном требовании: со второго склада вывозится сырья не больше, чем с третьего.
11. Установка собирается из трёх различных деталей А, Б, В. На одном станке можно за смену изготовить либо 12 деталей типа А, 18 типа Б и 30 типа В (первый режим), либо 20 деталей типа А, 15 типа Б и 9 типа В (второй режим). Хватит ли ста станков, чтобы изготовить за смену детали для 720 установок? Какое наименьшее число станков (и с какими режимами работы) нужно для выполнения заказа?

§ 28*. Полярные координаты на плоскости

Наряду с декартовыми координатами на плоскости и в пространстве, во многих случаях более удобными оказываются так называемые полярные координаты на плоскости и сферические координаты в пространстве.

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например: «Вы пройдёте по этой улице около 100 м, свернёте направо, пройдёте ещё 50 м и будете у цели». При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных или сферических координат. Последние будут рассмотрены в следующем пункте.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с началом координат O и направляющим вектором $\overrightarrow{OE}$ (рис. 114). Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью**. **Полярными координатами** точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ) , где r — расстояние от точки A до точки O , φ — угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки. При этом первая координата r называется **полярным радиусом**, а вторая φ — **полярным углом**. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

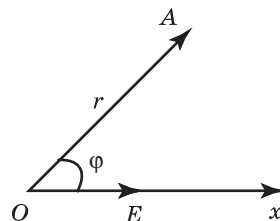


Рис. 114

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось Ox . В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ) (рис. 115). При этом декартовы координаты выражаются

через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

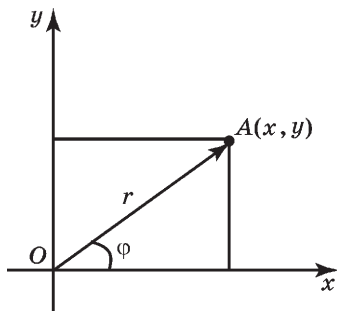


Рис. 115

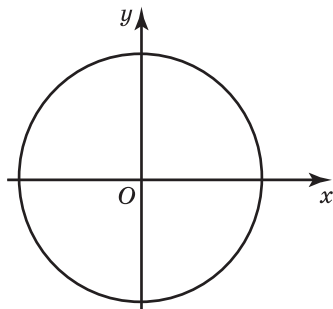


Рис. 116

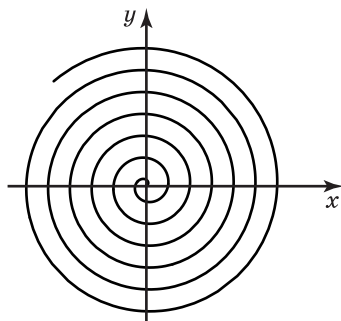


Рис. 117

И наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости, особенно для задания различных спиралей. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

1. Окружность радиуса R с центром в точке O задаётся уравнением $r = R$ (рис. 116).

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удалённых от точки O на расстояние R . Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом если угол φ изменяется от 0 до $+\infty$, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ изменяется от 0 до $-\infty$, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

2. Спираль Архимеда — кривая, задаваемая уравнением $r = a\varphi$, где a — некоторое фиксированное число (рис. 117).

Предположим, что $a > 0$, и построим эту кривую. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам φ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при изменении φ от 0 до $+\infty$. В этом случае радиус r будет возрастать и изменяться от 0 до $+\infty$. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = \frac{a\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т. е. в два раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса r будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь учёного, её открывшего и изучившего.

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π , т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идёт звуковая дорожка на грампластинке. Туго свёрнутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной ёмкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку — имеет форму спирали Архимеда.

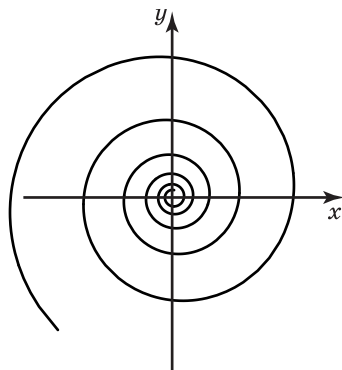


Рис. 118

3. Логарифмическая спираль задаётся уравнением в полярных координатах $r = a^\varphi$, где a — некоторое фиксированное положительное число, φ — угол, измеряемый в радианах (рис. 118).

В отличие от спирали Архимеда, логарифмическая спираль бесконечна в обе стороны, так как угол φ может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. При этом если $a > 1$, то при увеличении угла радиус увеличивается, а если $0 < a < 1$, то при увеличении угла радиус уменьшается.

Геометрическим свойством этой спирали является то, что каждый следующий её виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на 2π , т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в $a^{2\pi}$ раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему и коэффициент подобия равен $a^{2\pi}$. Используя это свойство, построив один виток логарифмической спирали, все остальные витки можно получить подобием.

Это свойство логарифмической спирали используется в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полёта и лучом света. Однако если вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полёта и источником света, они двигаются по скручивающейся логарифмической спирали и попадают в пламя свечи.

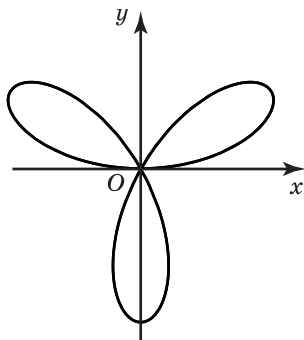


Рис. 119

Раковины многих моллюсков, улиток, а также рога архаров (горных козлов) закручиваются по логарифмической спирали. Один из наиболее распространённых пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает её нити также по логарифмической спирали. По этой спирали закручены и многие галактики, в частности наша Галактика, в которой находится Солнечная система.

4. **Трилистник** — кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$ (рис. 119).

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geq 0$, решая которое находим допустимые значения углов φ :

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; \quad \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

В силу периодичности функции $\sin 3\varphi$ (её период равен $\frac{2\pi}{3}$), достаточно построить искомый график для углов φ в промежутке $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, а в остальных двух промежутках использовать периодичность.

Итак, пусть $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. Если угол φ изменяется от нуля до $\frac{\pi}{6}$, $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до единицы, и, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от нуля до $\frac{\pi}{3}$ точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется от $\frac{2\pi}{3}$ до π и от $\frac{4\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

Упражнения

1. На плоскости с заданной на ней полярной осью изобразите точки с полярными координатами: $(1, 0)$, $(2, -\frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(1, \frac{\pi}{4})$.
2. Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: $A(1, \frac{\pi}{3})$, $B(2, -\frac{\pi}{4})$.
3. Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты:

$$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}), B(-10, 0), C(1, -\sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, 1).$$

4. Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?
5. Найдите геометрическое место точек на плоскости, для которых:
 - а) полярный радиус r постоянен и равен r_0 ;
 - б) полярный угол φ постоянен и равен φ_0 .
6. Центром правильного шестиугольника является начало координат. Одна из его вершин имеет полярные координаты $(1, 0)$. Найдите полярные координаты остальных вершин.
7. Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.
8. Нарисуйте золотую спираль, заданную уравнением $r = a^\varphi$, выбрав a так, что $a^\pi = 1,1$. Предварительно вычислите значения радиуса-вектора для углов $\varphi = \frac{k\pi}{6}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.
9. Нарисуйте пятилепестковую розу — кривую, задаваемую уравнением

$$r = \sin 5\varphi.$$
10. Нарисуйте кардиоиду — кривую, задаваемую уравнением

$$r = a(1 + \cos \varphi).$$
- *11. Для параболы $x^2 = 4ay$ выберем в качестве полярной оси луч, идущий по оси Oy , с началом в фокусе $F(0, a)$ параболы. Переходя от декартовых к полярным координатам, покажите, что парабола с выколотой вершиной задаётся уравнением

$$r = \frac{a}{1 - \cos \varphi}.$$

Почему вершину параболы нужно выкалывать?

- *12. Докажите, что уравнение

$$r = \frac{a}{1 - e \cos \varphi}$$

задаёт эллипс, если $0 < e < 1$, и гиперболу, если $e > 1$.

- *13. Человек идёт с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно земли?

§ 29*. Сферические координаты в пространстве

Сферические координаты широко используются для определения положения тел в пространстве. Например, в навигации при определении места нахождения самолёта, корабля и т. д., в астрономии при определении положения звёзд и других небесных тел, в географии при определении положения объектов на поверхности Земли и т. д.

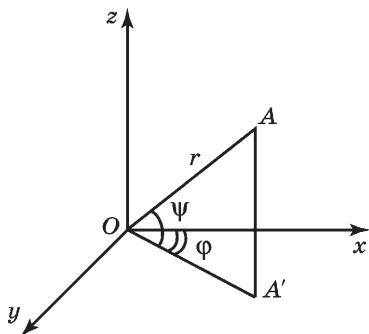


Рис. 120

Для определения сферических координат рассмотрим декартову систему координат в пространстве и точку A (рис. 120). Ортогональную проекцию точки A на плоскость Oxy обозначим A' , а длину вектора $\overline{OA}$ — через r . Угол наклона вектора $\overline{OA}$ к плоскости Oxy обозначим ψ , причём будем считать его изменяющимся от -90° до $+90^\circ$. Если точка A расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между вектором $\overline{OA'}$ и осью Ox обозначим φ .

Тройка (r, ψ, φ) называется **сферическими координатами точки A** в пространстве.

Декартовы координаты (x, y, z) точки в пространстве выражаются через её сферические координаты по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \cos \varphi, \\ y = r \cos \psi \sin \varphi, \\ z = r \sin \psi, \end{cases}$$

и наоборот, если заданы декартовы координаты, то по ним можно найти сферические координаты по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sin \psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Рассмотрим поверхность Земли, которую будем считать сферой. Выберем начало координат в центре этой сферы. Ось Oz выбирается проходящей через Северный полюс, а ось Ox так, чтобы соответствующая плоскость Oxz проходила через обсерваторию английского города Гринвича.

Поскольку все точки на сфере одинаково удалены от начала координат O , то положение точки A на сфере определяется двумя сферическими координатами (ψ, φ) . При указании этих координат на поверхности Земли для положительных ψ от нуля до 90° добавляют слова «северной широты», а для отрицательных ψ от нуля до -90° берут абсолютную величину ψ и добавляют слова «южной широты». Аналогично для положительных φ от нуля до 180° добавляют слова «восточной долготы», а для отрицательных φ от нуля до -180° берут абсолютную величину φ и добавляют слова «западной долготы». Например, город Москва имеет следующие координаты: $55^\circ 45'$ северной широты и $37^\circ 35'$ восточной долготы.

Точки на поверхности Земли, имеющие одинаковый угол ψ , образуют окружность, которая называется **параллелью**. Точки, имеющие одинаковый угол φ , образуют полуокружность, называемую **меридианом**.

Выясним, какой путь, соединяющий две точки на сфере, является кратчайшим. Если бы такой путь мы искали в пространстве, то им, очевидно, был бы отрезок, соединяющий эти точки. Однако отрезок не лежит на сфере. Поэтому его требуется заменить таким путём на сфере, который по возможности меньше отличается от прямолинейного отрезка. Пусть C —

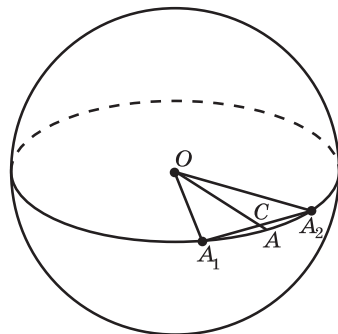


Рис. 121

какая-нибудь точка на отрезке A_1A_2 (рис. 121). Наименее удалённой от неё точкой на сфере является точка A пересечения прямой OC со сферой. Все такие прямые лежат в плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и O . Пересечением этой плоскости со сферой является окружность с центром в точке O . Такие окружности на сфере называются большими окружностями. Оказывается, что искомым кратчайшим путём, соединяющим точки A_1 и A_2 на сфере, является дуга большой окружности. Такой путь называют **ортодромией**, что в переводе с греческого означает «прямой бег».

В частности, если точки A_1, A_2 расположены на противоположных меридианах, то кратчайшим путём на сфере, их соединяющим, будет дуга большой окружности, проходящая через Северный или Южный полюс, в зависимости от того, в каком полушарии, Северном или Южном, лежат эти точки. Например, для точек $A_1(R, 45^\circ, 0^\circ), A_2(R, 45^\circ, 180^\circ)$ угол ψ равен 45° . Кратчайший путь, соединяющий эти точки, проходит через Северный полюс, и его длина равняется $\frac{\pi R}{2}$. Если бы мы двигались по параллели, соединяющей эти точки, то длина пути составила бы половину длины окружности радиуса $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ и была бы равна $\frac{\pi R\sqrt{2}}{2}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше длины кратчайшего пути.

Хотя ортодромия и является кратчайшим путём на поверхности Земли, тем не менее самолёты, корабли и т. д. в основном двигаются по другим маршрутам. Это связано с тем, что ортодромия, отличная от дуги меридиана или экватора, образует с меридианами разные углы, а наиболее простым маршрутом движения является кривая, образующая равные углы с разными меридианами. Эта кривая называется **локсодромией**, что в переводе с греческого означает «косой бег». Движение по локсодромии называется также движением с постоянным курсом. Для того чтобы держать постоян-

ный курс, используется компас, указывающий направления меридианов и направление движения. Двигаясь же по ортодромии, приходится постоянно менять курс, что возможно только с использованием ЭВМ.

Конечно, при движении с постоянным курсом путь удлиняется. Однако если начало и конец пути расположены сравнительно близко друг к другу, то такое удлинение незначительно. Оно начинает сказываться при значительном удалении друг от друга начала и конца пути. В этом случае весь путь разбивается на меньшие участки, движение по которым осуществляется с постоянным курсом, а при переходе с одного участка на другой курс меняется.

Исторические сведения

Представления людей о форме и размерах Земли складывались постепенно, на протяжении многих веков. Первые мысли о шарообразности Земли возникли в VI—V вв. до н. э. Они появились в результате астрономических наблюдений. Было замечено, в частности, что при лунных затмениях тень Земли на Луне имеет форму круга. Это объяснили тем, что, встав между Солнцем и Луной, Земля отбрасывает свою тень на Луну, следовательно, Земля круглая, или шарообразная. Мысль о шарообразности Земли подтверждали наблюдения мореплавателей за появлением из-за горизонта кораблей: сначала показывалась верхняя часть мачты, а затем постепенно, по мере приближения корабля, появлялись и остальные его части. Такой эффект объясняли тем, что корабль движется по дуге шаровой поверхности Земли и его более высокие части раньше выступают из-за наивысшей точки дуги, расположенной между кораблём и наблюдателем.

Заметим, что, когда говорят о шарообразности Земли, не имеют в виду реальную земную поверхность. Поверхность Земли неровная, на ней имеются высокие горы и глубокие ущелья, океанские впадины. Речь идёт о некоторой идеальной поверхности, часть которой составляет поверхность Мирового океана. Там же, где нет океанов или морей, такую поверхность представляют мысленно и относительно неё вычисляют высоту рельефа местности. Именно эта высота и указывается на географических картах.

После того как была высказана гипотеза о шарообразности Земли, возник вопрос о нахождении её размеров. Первый дошедший до нас способ нахождения размеров Земли был предложен и осуществлён учёным из Александрии Эратосфеном в III в. до н. э. Из рассказов путешественников Эратосфену было известно, что в городе Сиене (ныне Асуан), находящемся к югу от Александрии, имеется колодец, дно которого освещается Солнцем ровно в полдень самого длинного дня в году. Измерения Эратосфена показали, что в тот же день и час отклонение Солнца от зенита в Александрии составляет $\frac{1}{50}$ часть большой окружности, и, следовательно,

длина окружности Земли в 50 раз больше расстояния от Александрии до Сиены. Измерив это расстояние с помощью посланного им гонца, Эратосфен определил длину окружности Земли. Она оказалась равна 250 тысячам стадий. Стадия не была точно определённой мерой длины. За стадию принималось расстояние, которое проходит человек за время, нужное для подъёма Солнца над горизонтом. Учитывая среднюю скорость человека и то, что подъём Солнца над горизонтом происходит за 2 минуты, можно заключить, что стадия составляет примерно 160—185 м. Если за стадию принять 160 м, то получится точный результат 40 000 км. Однако ясно, что измерения Эратосфена не могли быть такими точными хотя бы потому, что Сиена расположена не строго на юг от Александрии и точность измерения расстояния шагами не очень велика.

Более точные измерения Земли, использующие астрономические наблюдения, были проведены только в XVII веке. Для этого на поверхности Земли выбирались два пункта, расположенные на одном меридиане. Наблюдая из них за Солнцем или звёздами, например за Полярной звездой, определяли величину φ дуги этого меридиана. Измерив затем расстояние d между этими пунктами, находили длину всей окружности Земли по формуле $l = \frac{360^\circ}{\varphi} \cdot d$.

Измерение больших расстояний на поверхности Земли оказывается не таким простым делом, как может показаться на первый взгляд. Как уже отмечалось, земная поверхность неровная. Одни её точки расположены выше, другие ниже. На пути могут встретиться препятствия: горы, болота, реки и т. д. Преодолеть эти трудности измерения расстояний позволяет способ Фалеса Милетского (VI в. до н. э.). В начале XVII века его усовершенствовал голландский математик В. Снеллиус (1580—1626). Для нахождения расстояния между значительно удалёнными друг от друга пунктами Снеллиус строил сеть треугольников с началом в одном пункте и концом в другом, которую он назвал **триангуляцией**. Сеть строилась таким образом, чтобы из каждой вершины были видны соседние с ней вершины. Измерив расстояние между какими-нибудь соседними вершинами и углы, образованные сторонами треугольников, с помощью тригонометрических формул можно найти расстояние между исходными пунктами.

Похожая задача возникает при нахождении расстояния между вершинами многогранника. А именно: по известным плоским углам многогранника и одному из рёбер найти расстояние между заданными вершинами.

Для вычисления земного меридиана Снеллиус с помощью метода триангуляции измерил расстояние между городками Аלקмааром и Берген-оп-Зоомом в Голландии и по нему вычислил длину земного меридиана. В пересчёте на километры она оказалась равна 38 605 км. Довольно большая ошибка объясняется тем, что для измерения углов Снеллиус

использовал недостаточно точные приборы. Через несколько лет французский учёный Пикар, используя метод Снеллиуса и гораздо более точные приборы, снова измерил длину меридиана. В пересчёте на километры она оказалась равна 40 036 км.

После этого многие учёные в разных странах мира стали заниматься вычислением длин дуг меридианов. Оказалось, что длина дуг меридианов в 1° различна в зависимости от места расположения этих дуг. Разница могла быть за счёт погрешности вычислений, а также в случае, если поверхность Земли не является в точности шаровой поверхностью.

Используя физические соображения, основанные на учёте вращения Земли, И. Ньютон высказал предположение, что Земля сжата у полюсов, как мандарин, и имеет форму эллипсоида вращения. С другой стороны, немецкий учёный И. Эйзеншмидт, основываясь на таблицах измерений дуг меридианов, утверждал, что Земля не только не сплюснута у полюсов, но, наоборот, вытянута, как лимон. Между учёными разгорелись споры по поводу этих двух точек зрения. Каждая из сторон приводила аргументы в пользу своей правоты.

Для того чтобы разобраться с этим вопросом, в 1735 году Парижская академия решила послать две экспедиции: одну на экватор — в Перу, другую на север — в Лапландию. Преодолев значительные трудности, жару и холод, экспедиции произвели измерения, убедительно доказавшие правоту Ньютона. Длина дуги меридиана в 1° в Лапландии составила 111,95 км, во Франции — 111,21 км, в Перу — 110,61 км. Сжатие поверхности Земли у полюсов составило около 20 км с каждой стороны.

Мы привели данные в километрах, однако в то время ни метра, ни километра ещё не существовало. Все измерения проводились в других единицах, большое число которых и неточная определённости вносили существенную путаницу в вычисления. Для того чтобы унифицировать измерения, Национальное собрание Франции в 1791 году решило ввести единую меру длины, в качестве которой была принята одна десятиллионная часть дуги парижского меридиана от Северного полюса до экватора. Она была названа **метром**, от греческого слова «метрос», что значит «мера». Тогда же были учреждены две экспедиции для точного измерения этого меридиана. Экспедициями была построена сеть треугольников от Барселоны до Дюнкерка на северном берегу Франции. Шесть лет заняли измерения и вычисления, пришедшиеся как раз на годы французской революции. В результате работ был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве и называется архивным метром.

Анализ проведённых измерений длины дуги парижского меридиана позволил П. Лапласу (1749—1827) в начале XIX века сделать ещё один важный вывод о форме Земли. Оказалось, что форма Земли не совпадает точно с эллипсоидом. Поверхность Земли имеет неровности. Конечно, речь идёт не о неровностях рельефа, а о неровностях мыслимой поверхности Мирового океана. В одних местах эта поверхность имеет большую выпуклость — бугры, в других она более плоская. Высота этих бугров,

по сравнению с размерами Земли, очень небольшая и не превосходит 150 м. Их расположение на поверхности Земли хаотично и зависит от плотности Земли на соответствующих участках.

После открытия Лапласа стало ясно, что измерение только очень длинных дуг даёт правильное значение длин меридианов. Россия обладала достаточными просторами для проведения таких измерений, и в начале XIX века они начались под руководством В. Я. Струве (1793—1864). Работа продолжалась в течение сорока лет. В результате была измерена дуга меридиана длиной в $25^{\circ}20'$ (около 2820 км). Погрешность на всём протяжении дуги не превысила 13 м, т. е. одной двухсоттысячной всей дуги.

В XX веке использование ЭВМ, искусственных спутников Земли дало возможность ещё более точных измерений. Определяя с помощью радаров расстояния от станции наблюдения до спутников и обрабатывая их на компьютерах, находят траекторию движения спутника, а по ней уточняют и форму Земли.

Упражнения

1. Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, заданных своими сферическими координатами: $(1, 45^{\circ}, 120^{\circ})$, $(2, -30^{\circ}, -90^{\circ})$, $(1, 90^{\circ}, 60^{\circ})$.
2. Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных своими декартовыми координатами: $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, 0, 2)$.
3. Найдите сферические координаты вершин куба, задаваемого в декартовых координатах системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

4. Точка A имеет сферические координаты (r, ψ, φ) . Найдите сферические координаты точки, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.
5. Укажите на глобусе точки, имеющие координаты: а) 30° южной широты и 45° восточной долготы; б) 90° северной широты и 25° западной долготы.
6. Укажите приближённые координаты городов: а) Санкт-Петербург; б) Вашингтон; в) Токио.
7. Найдите по глобусу длину кратчайшего пути между Москвой и Вашингтоном.
8. Город N находится на 60° северной широты. Какой путь описывает этот пункт в течение одного часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли примите равным 6000 км.

9. Где закончится локсодромия, образующая острый угол с меридианами, при её продолжении в обе стороны?
10. Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) r постоянно; б) ψ постоянно; в) φ постоянно.
11. Какая фигура в пространстве задаётся неравенствами: а) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \psi$; б) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$; в) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \psi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$?
12. Найдите расстояние между точками, заданными своими сферическими координатами: $A(\sqrt{2}, 0^\circ, 45^\circ)$, $B(2, 60^\circ, 0^\circ)$.
13. Докажите, что для дуг AB , BC , AC больших окружностей на сфере справедливо неравенство, аналогичное неравенству треугольника: $AC \leq AB + BC$. (Воспользуйтесь соотношением между плоскими углами трёхгранного угла.)

§ 30*. Использование компьютерной программы «Математика» для изображения пространственных фигур

Компьютерная программа «Математика» разработана в начале 90-х годов прошлого века и позволяет производить различные символьные операции, включающие операции дифференцирования, интегрирования и т. д. Её важной составной частью является развитая компьютерная графика, позволяющая получать изображения многогранников, поверхностей и других пространственных фигур.

Рассмотрим вопрос об изображении правильных многогранников. В качестве первого примера возьмём додекаэдр. Для получения изображения додекаэдра, после того как вы вошли в программу, нужно набрать

```
<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p]
```

После этого следует нажать клавиши SHIFT и ENTER. В результате на экране появится цветное изображение додекаэдра, заключённого в каркасный куб (рис. 122).

Если вы хотите убрать куб, то к команде, которую вы набрали, следует добавить

```
Boxed->False
```

В результате получится команда

```
<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed->False]
```

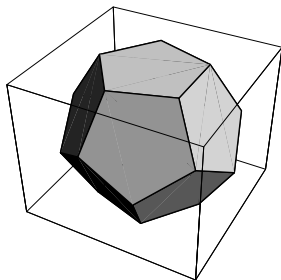


Рис. 122

Нажатие клавиш SHIFT и ENTER приводит к исполнению этой команды. На экране получим изображение додекаэдра (рис. 123).

Изображение додекаэдра можно увеличивать и уменьшать так же, как это делалось для графиков функций.

Изображение додекаэдра можно поворачивать, задавая координаты точки, из которой мы смотрим на додекаэдр. По умолчанию предполагается точка с координатами (1.3, -2.4, 2). Если вы хотите указать другую точку, то к набранной команде следует добавить, например,

ViewPoint->{0.8,-2.4,2}

В результате получим команду

<<Graphics“Polyhedra“

p=Polyhedron[Dodecahedron]

Show[p,Boxed->False,ViewPoint->{0.8,-2.4,2}],

исполнение которой приводит к рисунку 124.

Команда

<<Graphics“Polyhedra“

p=Polyhedron[Dodecahedron]

Show[p,Boxed->False,ViewPoint->{0.8,-2.4,1}]

приведёт к рисунку 125.

Для устранения окраски граней додекаэдра следует добавить

Shading->False

В результате получим команду

<<Graphics“Polyhedra“

p=Polyhedron[Dodecahedron]

Show[p,Boxed->False,Shading->False],

исполнение которой приведёт к рисунку 126.

Если вместо Dodecahedron набрать Tetrahedron, Hexahedron, Octahedron, Icosahedron, то получим изображения тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра соответственно.

В программе «Математика» имеется операция «Truncate», при которой от правильных многогранников отсекаются углы и в результате получаются полуправильные многогранники.

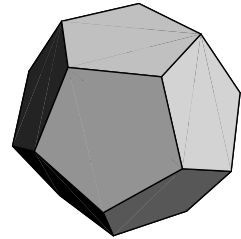


Рис. 123

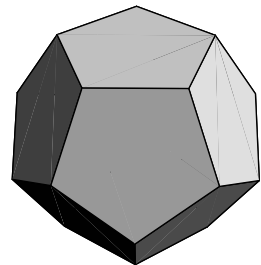


Рис. 124

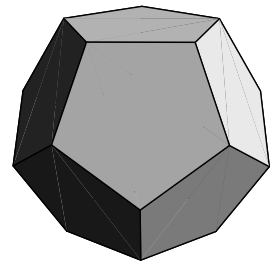


Рис. 125

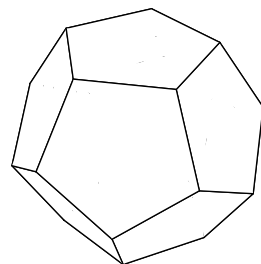


Рис. 126

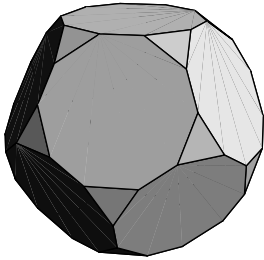


Рис. 127

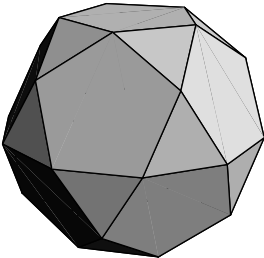


Рис. 128

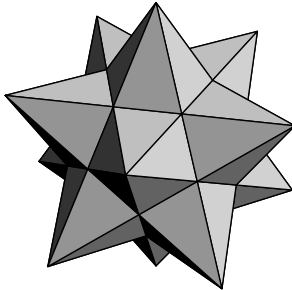


Рис. 129

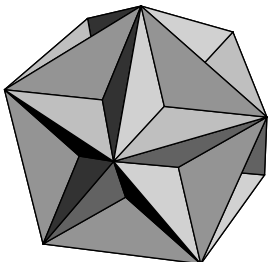


Рис. 130

Так, например, исполнение команды

```
<<Graphics“Polyhedra“
```

```
p=Polyhedron[Dodecahedron]
```

```
Show[Truncate[p],Boxed->False]
```

приводит к усечённому додекаэдру (рис. 127).

Операцию усечения можно производить с заданным коэффициентом, показывающим, какая часть ребра отсекается. Так, например, если выбрать коэффициент, равный 0.5, то исполнение соответствующей команды

```
<<Graphics“Polyhedra“
```

```
p=Polyhedron[Dodecahedron]
```

```
Show[Truncate[p,0.5],Boxed->False]
```

приводит к полуправильному многограннику, называемому икосододекаэдром (рис. 128). Его гранями являются все грани икосаэдра и все грани додекаэдра.

Помимо операции усечения в программе «Математика» имеется операция «Stellate», которая приводит к звёздчатым многогранникам. Так, например, исполнение команды

```
<<Graphics“Polyhedra“
```

```
p=Polyhedron[Dodecahedron]
```

```
Show[Stellate[p,2.2],Boxed->False]
```

приводит к многограннику (рис. 129), который называется малым звёздчатым додекаэдром.

Операцию «Stellate» тоже можно производить с разными коэффициентами. Если коэффициент меньше единицы, то она производится вовнутрь многогранника. Например, исполнение команды

```
<<Graphics“Polyhedra“
```

```
p=Polyhedron[Icosahedron]
```

```
Show[Stellate[p,0.7],Boxed->False]
```

приводит к многограннику (рис. 130), который называется большим додекаэдром.

Операции «Truncate» и «Stellate» можно комбинировать. Например, команда

```
<<Graphics“Polyhedra“
```

```
p=Polyhedron[Icosahedron]
```

```
Show[Truncate[Stellate[p,0.7],0.5],  
Boxed->False]
```


приводит к многограннику (рис. 131), который называется малым битригональным икосододекаэдром.

Команда

```
<<Graphics“Polyhedra“
```

```
p=Polyhedron[Dodecahedron]
```

```
Show[Stellate[Stellate[p,2.2],0.5],Boxed->False]
```

приводит к многограннику (рис. 132), который называется большим икосаэдром.

Последовательное применение операций «Truncate» и «Stellate» к правильным многогранникам даёт возможность получать изображения самых различных многогранников.

Рассмотрим теперь вопрос об изображении поверхностей.

Одним из наиболее простых способов задания поверхности в пространстве является задание её графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Для получения изображения графика функции $z = f(x, y)$, после того как вы вошли в программу, нужно набрать

```
Plot3D[f[x,y],{x,min,max},{y,min,max},  
BoxRatios->Automatic],
```

где min, max обозначают пределы изменения аргументов x и y .

Затем надо нажать клавиши SHIFT и ENTER. В результате на экране появится график функции $z = f(x, y)$.

Например,

```
Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},  
{y,-1,1},BoxRatios->Automatic]
```

даст график функции $z = x^2 + y^2$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ (рис. 133).

Если вместо $x^2 + y^2$ подставить $x^2 - y^2$, то получим график функции $z = x^2 - y^2$ (рис. 134).

Если перечисленные выше графики можно нарисовать и без использования компьютерной программы, то изображение следующих поверхностей требует использования компьютерных средств.

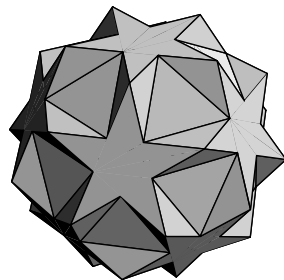


Рис. 131

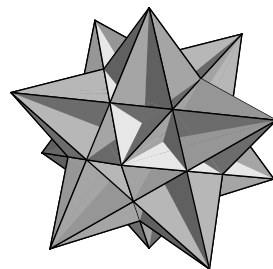


Рис. 132

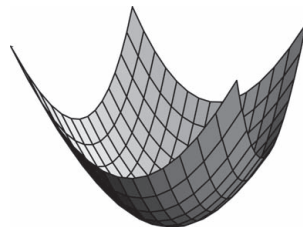


Рис. 133

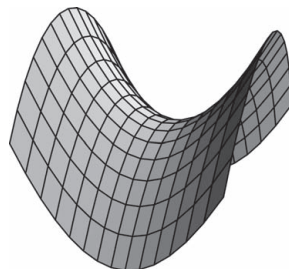


Рис. 134

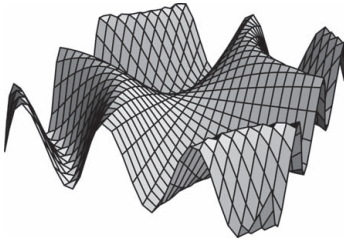


Рис. 135

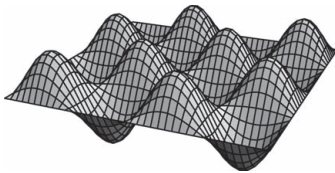


Рис. 136

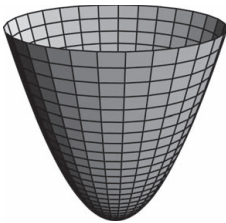


Рис. 137



Рис. 138

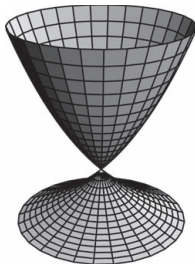


Рис. 139

Например,

```
Plot3D[Sin[x*y],{x,-Pi,Pi},  
{y,-Pi,Pi},BoxRatios->Automatic]
```

даст график функции $z = \sin(xy)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$ (рис. 135).

Если вместо $\text{Sin}[x*y]$ подставить $\text{Sin}[x]*\text{Sin}[y]$, то получим график функции $z = \sin x \cdot \sin y$ (рис. 136).

Программа «Математика» позволяет получать изображения не только поверхностей, заданных уравнением $z = f(x, y)$, но и поверхностей вращения.

Наиболее простой такой поверхностью является параболоид вращения, получающийся вращением графика функции $z = x^2$ вокруг оси Oz . Для получения поверхности вращения следует набрать

```
<<Graphics"SurfaceOfRevolution"
```

и нажать клавиши SHIFT и ENTER. Далее набрать

```
SurfaceOfRevolution[x^2,{x,0,2},  
BoxRatios->Automatic,
```

```
ViewPoint->{1,-2,1},PlotPoints->30]
```

и снова нажать SHIFT и ENTER.

Изображение соответствующей поверхности вращения показано на рисунке 137. Отметим, что это та же самая поверхность, что и на рисунке 133.

Для получения поверхности вращения графика функции $z = \sin x$ вокруг оси Oz следует набрать

```
<<Graphics"SurfaceOfRevolution"
```

и нажать клавиши SHIFT и ENTER. Далее набрать

```
SurfaceOfRevolution[Sin[x],{x,0,Pi},  
BoxRatios->Automatic,
```

```
ViewPoint->{1,-2,1},PlotPoints->30]
```

и снова нажать SHIFT и ENTER.

Изображение соответствующей поверхности вращения показано на рисунке 138.

Если вместо $\text{Sin}[x]$ набрать $\text{Exp}[x]$ и в качестве пределов изменения x поставить $\{x,-1,1\}$, то получится поверхность вращения графика функции $z = e^x$ (рис. 139).

Если вместо $\text{Sin}[x]$ подставить $1/x$ и пределы изменения x взять от 0,25 до 2, то получим поверхность вращения, изображённую на рисунке 140.

Вращать можно не только одну, но и несколько кривых. При этом можно отдельно указать ось вращения. Например, выполнение команды

```
<<Graphics"SurfaceOfRevolution"
SurfaceOfRevolution[{{1,0,x},{x,0,0},{1,1,x}},
{x,0,1},RevolutionAxis->{1,1,1},
BoxRatios->Automatic,
ViewPoint->{2,-3,1},PlotPoints->25]
```

приведёт к поверхности вращения куба вокруг его диагонали (рис. 141).

Некоторые поверхности программа «Математика» имеет в своей памяти. Так, если набрать

```
<<Graphics"Shapes"
```

и нажать клавиши SHIFT и ENTER, то подгрузится пакет, содержащий некоторые стандартные поверхности.

Если далее набрать

```
Show[Graphics3D[Cylinder[]],Boxed->False]
```

и снова нажать SHIFT и ENTER, то в результате получим изображение боковой поверхности цилиндра (рис. 142, а).

В квадратных скобках можно указать величину радиуса основания, высоты и число вершин многоугольника в основании цилиндра. Например, исполнение команды

```
Show[Graphics3D[Cylinder[2,1,6]],
Boxed->False]
```

приводит к боковой поверхности правильной шестиугольной призмы (рис. 142, б).

Если вместо слова Cylinder написать слово Cone, т. е. набрать

```
Show[Graphics3D[Cone[]],Boxed->False]
```

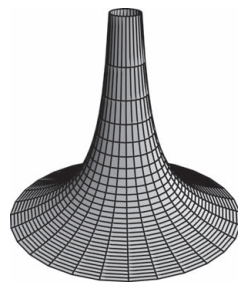


Рис. 140

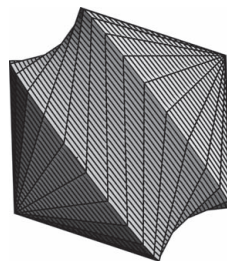
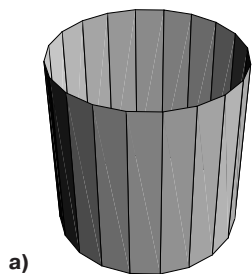
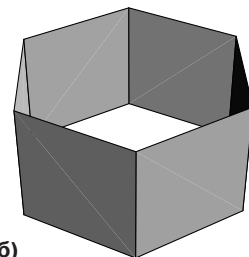


Рис. 141



а)



б)

Рис. 142

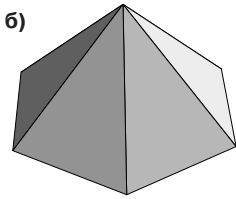
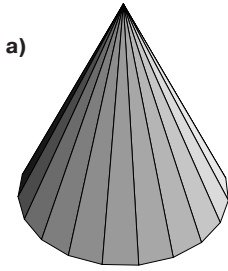


Рис. 143

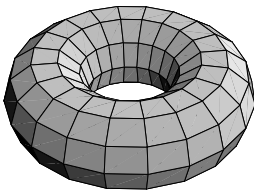


Рис. 144

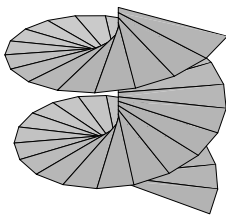


Рис. 145

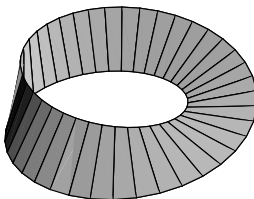


Рис. 146

и снова нажать SHIFT и ENTER, то в результате получим изображение поверхности конуса (рис. 143, а).

В квадратных скобках можно указать величину радиуса основания, высоты и число вершин многоугольника в основании конуса. Например, исполнение команды

**Show[Graphics3D[Cone[2,1,6]],
Boxed->False]**

приводит к поверхности правильной шестиугольной пирамиды (рис. 143, б).

Если вместо слова Cone написать слово Torus, т. е. набрать

Show[Graphics3D[Torus[]],Boxed->False]

и снова нажать SHIFT и ENTER, то в результате получим изображение поверхности тора — поверхности, напоминающей баранку или бублик (рис. 144).

Если вместо слова Torus написать слово Helix, т. е. набрать

Show[Graphics3D[Helix[]],Boxed->False]

и снова нажать SHIFT и ENTER, то в результате получим изображение поверхности, которая называется геликоидом и напоминает винтовую лестницу (рис. 145).

Если вместо Helix написать MoebiusStrip, то получим изображение листа Мёбиуса (рис. 146).

Упражнения

1. Получите изображения правильных многогранников.
2. Произведите операцию усечения правильных многогранников с различными коэффициентами.
3. Почему при образовании малого звёздчатого додекаэдра использовался коэффициент 2.2?
4. Почему при образовании большого додекаэдра использовался коэффициент 0.7?

5. Получите изображение многогранника (рис. 147), который называется звездой Кеплера (Stella Octangula).
6. Как получить изображение многогранника (рис. 148), который называется ромбододекаэдром? Его гранями являются 12 ромбов. (Форму ромбододекаэдра имеет кристалл граната.)
7. Кубооктаэдр имеет своими гранями восемь правильных треугольников и шесть квадратов. Получите изображение этого многогранника (рис. 149).
8. Поверхность футбольного мяча представляет собой поверхность полуправильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники и пятиугольники (рис. 150). Усечением какого правильного многогранника он получается?
9. Получите график функции $z = xy$. Имеет ли эта поверхность: а) центр симметрии; б) ось симметрии; в) плоскость симметрии?
10. Получите график функции $z = \sin(x + y)$. Имеет ли эта поверхность: а) центр симметрии; б) ось симметрии; в) плоскость симметрии?
11. Получите изображение конуса как поверхности вращения графика функции $z = x$.
12. Получите изображение сферы как поверхности вращения.
13. В команде для получения изображения тора в квадратных скобках подставьте значения 2, 1, 4, 4. Посмотрите, что при этом получится.
14. В команде для получения изображения геликоида в квадратных скобках подставьте значения 2, 2, 3, 20. Посмотрите, что при этом получится.

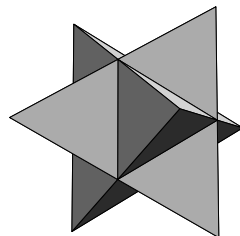


Рис. 147

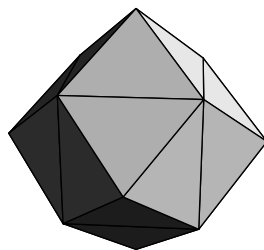


Рис. 148

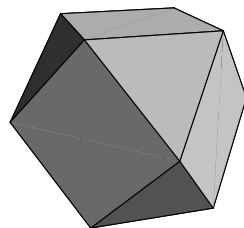


Рис. 149

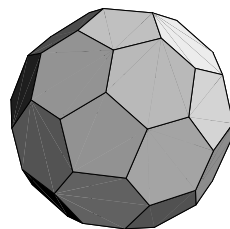
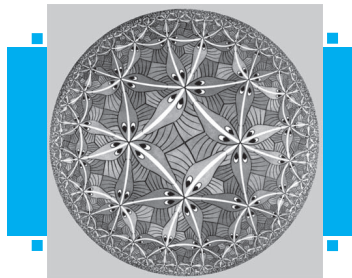


Рис. 150

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ*



§ 31. Многоугольники

Напомним, что **ломаной** называется фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. (рис. 151). Отрезки называются **сторонами ломаной**, а их концы — **вершинами ломаной**.

Ломаная обозначается последовательным указанием её вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2\dots A_n$.

Ломаная называется **простой**, если она не имеет точек самопересечения (рис. 152).

Ломаная называется **замкнутой**, если начало первого отрезка ломаной совпадает с концом последнего. Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют **простой** (рис. 153).

Одной из важнейших теорем о простых замкнутых ломаных является следующая теорема Жордана.

Теорема. Всякая простая замкнутая ломаная на плоскости разбивает точки плоскости на две области — внутреннюю и внешнюю. При этом всякие две точки из одной области могут быть соединены ломаной, целиком содержащейся в этой области. Если же две точки принадлежат разным областям, то любая ломаная, их соединяющая, пересекается с исходной ломаной.

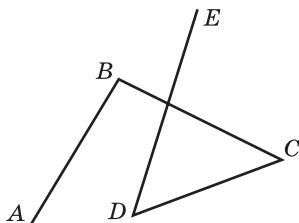


Рис. 151

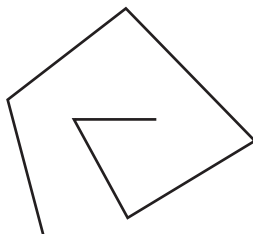


Рис. 152

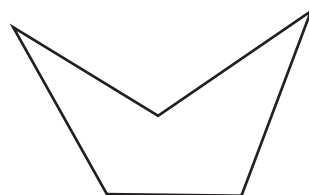


Рис. 153

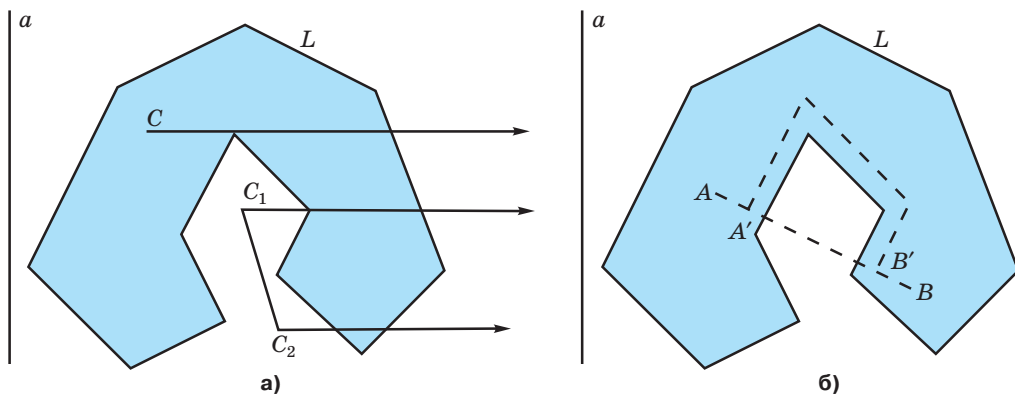


Рис. 154

Доказательство. Пусть L — заданная простая замкнутая ломаная (рис. 154, а). Выберем на плоскости какую-нибудь прямую a , не перпендикулярную ни одной из сторон ломаной L . Так как число сторон ломаной конечно, то такая прямая существует.

Для точки C плоскости, не принадлежащей ломаной L , рассмотрим луч с вершиной C , перпендикулярный прямой a . Заметим, что ни одна из сторон ломаной не будет целиком лежать на этом луче. Подсчитаем число точек пересечения этого луча с ломаной L . При этом если рассматриваемый луч проходит через вершину ломаной, то эта вершина идёт в счёт или не идёт в зависимости от того, расположены ли прилежащие к этой вершине стороны ломаной по разные или по одну сторону от данного луча. Если число пересечений нечётно, то точку C отнесём к внутренней области. Если число точек пересечения чётно, то точку C отнесём к внешней области.

Заметим, что если отрезок не пересекается с ломаной, то все его точки имеют одинаковую чётность. Действительно, чётность точки, движущейся по такому отрезку, может измениться только при прохождении соответствующего луча через вершину ломаной. Но, принимая во внимание принятый подсчёт точек пересечения, в каждом из двух возможных случаев чётность изменится.

Из сказанного следует, что если какая-нибудь ломаная соединяет две точки разной чётности, то она пересекается с L . Иначе чётность всех точек ломаной, а значит, конечной и начальной точек, была бы одинаковой.

Пусть теперь A и B — две точки одинаковой чётности (рис. 154, б). Покажем, что их можно соединить ломаной, не пересекающейся с L . Действительно, если отрезок AB не пересекается с ломаной, то он является искомой ломаной. Пусть отрезок AB пересекается с ломаной. Обозначим A' и B'

соответственно первую и последнюю точки пересечения. Построим ломаную, начинающуюся в точке A и заканчивающуюся в точке B . Сначала она идёт по отрезку AA' . Перед точкой A' она поворачивает и идёт вдоль ломаной L (безразлично, в каком из двух возможных направлений) до тех пор, пока снова не пересечёт отрезок AB около точки B' . Выбирая ломаную достаточно близко к ломаной L , можно добиться, чтобы она не пересекалась с L .

Весь вопрос в том, кончается ли построенная ломаная на отрезке $A'B'$ или на отрезке $B'B$. Покажем, что первое невозможно. Действительно, если две точки расположены близко друг к другу, но по разные стороны от одной из сторон ломаной L , то они будут иметь разную чётность, так как выходящие из них лучи будут таковы, что один из них будет иметь на одну точку пересечения с L больше, чем другой.

Таким образом, точки отрезков $A'B'$ и $B'B$, расположенные близко к точке B' , имеют различную чётность. Следовательно, точки отрезка $A'B'$, расположенные близко к точке B' , не могут быть соединены ломаной с точкой A , и значит, построенная ломаная заканчивается на отрезке BB' .

Завершив построение ломаной, соединив отрезком её последнюю точку с точкой B . В результате получим искомую ломаную, соединяющую точки A и B . ■

Доказанная теорема позволяет дать определение многоугольника.

Многоугольником называется фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью. Вершины ломаной называются **вершинами многоугольника**, стороны — **сторонами многоугольника**, а углы, образованные соседними сторонами и внутренней областью, — **углами многоугольника**. Точки многоугольника, не лежащие на его сторонах, называются **внутренними**.

Многоугольник называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 155).

Любой треугольник выпуклый. Среди многоугольников с числом углов, большим трёх, могут быть выпуклые и невыпуклые (рис. 156).

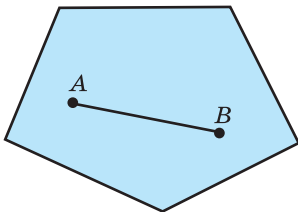


Рис. 155

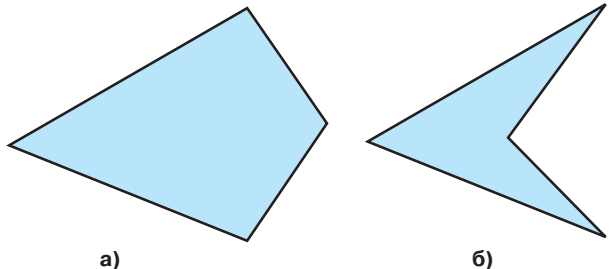


Рис. 156

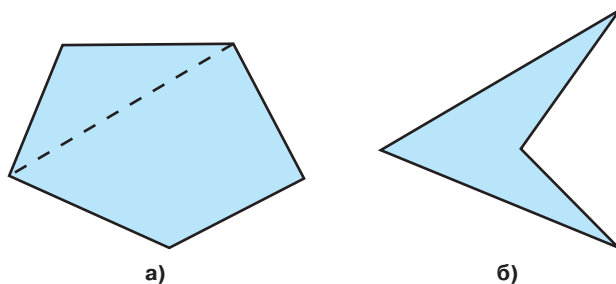


Рис. 157

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины.

Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 157), однако имеет место следующая теорема.

Теорема. В каждом многоугольнике с числом сторон, большим трёх, можно провести диагональ, целиком в нём содержащуюся.

Доказательство. Для данного многоугольника M зафиксируем какую-нибудь прямую a и найдём вершину A многоугольника, расстояние от которой до этой прямой наибольшее. Пусть A' , A'' — соседние с ней вершины (рис. 158). Если отрезок $A'A''$ целиком содержится в многоугольнике M , то он является искомой диагональю. Если $A'A''$ не содержится целиком в M , то существуют вершины многоугольника M , содержащиеся в треугольнике $A'AA''$. Выберем из них вершину B , наиболее удалённую от прямой a . Тогда отрезок AB будет целиком содержаться в многоугольнике, и, следовательно, он является искомой диагональю. ■

Следствие. Любой n -угольник проведением диагоналей можно разбить на треугольники, причём число таких треугольников будет равно $n - 2$.

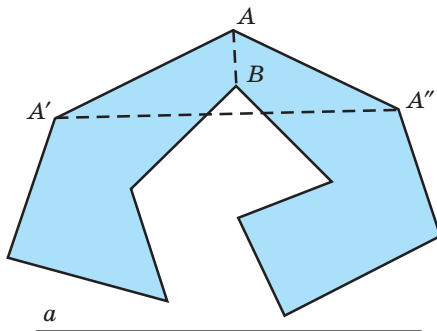


Рис. 158

Действительно, по доказанной теореме многоугольник можно разбить на два многоугольника проведением диагонали. Продолжая процесс проведения диагоналей, мы в конце концов дойдём до треугольников, на которые будет разбит многоугольник.

Докажем индукцией по n , что число таких треугольников равно $n - 2$. Для $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что мы доказали, что любой m -угольник при $m < n$ проведением диагоналей разбивается на $m - 2$ треугольника. Рассмотрим n -угольник. Проведением диагонали он разбивается на i -угольник и $(n - i + 2)$ -угольник. Каждый из них, по предположению индукции, разбивается на $i - 2$ и $n - i - 2$ треугольника, которые вместе составляют разбиение n -угольника на $n - 2$ треугольника.

Упражнения

1. Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у неё сторон?
2. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у неё вершин?
3. Укажите, какие фигуры, изображённые на рисунке 159, являются простыми ломаными.



Рис. 159

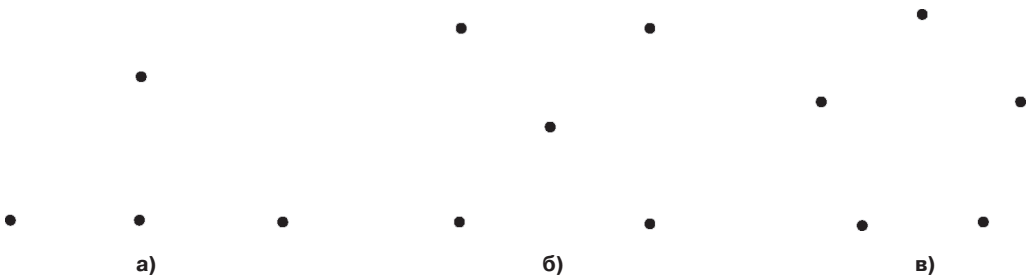


Рис. 160

4. Данные точки, изображённые на рисунке 160, соедините простой ломаной.
5. Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области?

6. Проверьте, что линия, изображённая на рисунке 161, является простой замкнутой ломаной. Выясните, какие из данных точек лежат внутри, а какие вне этой ломаной.
7. Нарисуйте выпуклые и невыпуклые: а) четырёхугольники; б) пятиугольники; в) шестиугольники. Используя линейку, найдите периметры этих многоугольников.
8. Нарисуйте правильные треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.
9. Укажите, какие из представленных на рисунке 162 фигур являются многоугольниками, а какие нет.
10. Какая имеется зависимость между числом вершин и числом сторон многоугольника?
11. На сколько треугольников делится выпуклый: а) четырёхугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г) n -угольник своими диагоналями, проведёнными из одной вершины?
12. Сколько диагоналей имеет: а) шестиугольник; б*) n -угольник?
13. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей?
14. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?
- ★15. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из: а) четырёх сторон; б) пяти сторон; в*) n сторон (n — нечётно)?

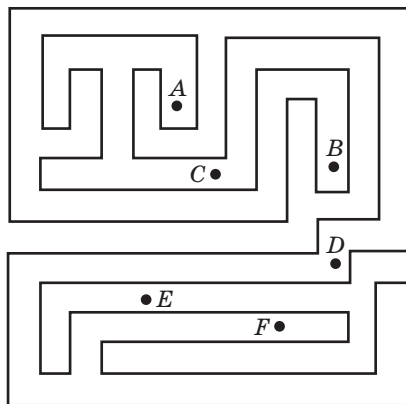


Рис. 161

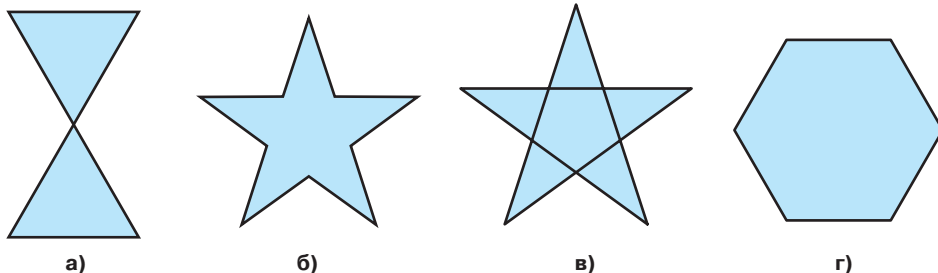


Рис. 162

- ★16. Нарисуйте замкнутую шестистороннюю ломаную, пересекающую каждую свою сторону ровно один раз.
- ★17. Может ли прямая пересекать простую замкнутую ломаную в нечётном числе точек?
- ★18. Может ли прямая, не проходящая через вершины простой замкнутой ломаной, пересекать её стороны в нечётном числе точек?
- ★19. Прямая l пересекает простую замкнутую ломаную в 2013 точках. Докажите, что существует прямая l' , пересекающая эту ломаную более чем в 2013 точках.
- ★20. Докажите, что у выпуклого многоугольника нет углов, больших развёрнутого.
- ★21. Докажите, что выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону.

§ 32. Сумма углов многоугольника

В курсе геометрии 7—9-го классов доказывалось, что сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$. Оказывается, что это утверждение справедливо и для невыпуклых многоугольников.

Теорема. Сумма углов произвольного n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

Доказательство. Разобьём многоугольник на треугольники проведением диагоналей (рис. 163). Число таких треугольников равно $n - 2$, и в каждом треугольнике сумма углов равна 180° . Поскольку углы треугольников составляют углы многоугольника, то сумма углов многоугольника равна $180^\circ(n - 2)$. ■

Рассмотрим теперь произвольные замкнутые ломаные, возможно с самопересечениями, $A_1A_2\dots A_nA_1$ (рис. 164, а). Такие самопересекающиеся ломаные будем называть звёздчатыми многоугольниками (рис. 164, б — г).

Зафиксируем направление подсчёта углов против часовой стрелки. Заметим, что углы, образованные замкнутой ломаной, зависят от направления её обхода. Если направление обхода ломаной меняется на противоположное, то углами многоугольника будут углы, дополняющие углы исходного многоугольника до 360° .

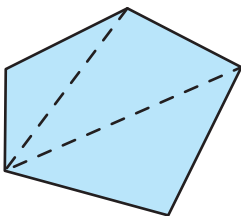


Рис. 163

Если многоугольник M образован простой замкнутой ломаной, проходимой в направлении по часовой стрелке (рис. 165, а), то сумма углов этого многоугольника будет равна $180^\circ(n - 2)$. Если же ломаная проходится в направлении против часовой стрелки (рис. 165, б), то сумма углов будет равна $180^\circ(n + 2)$.

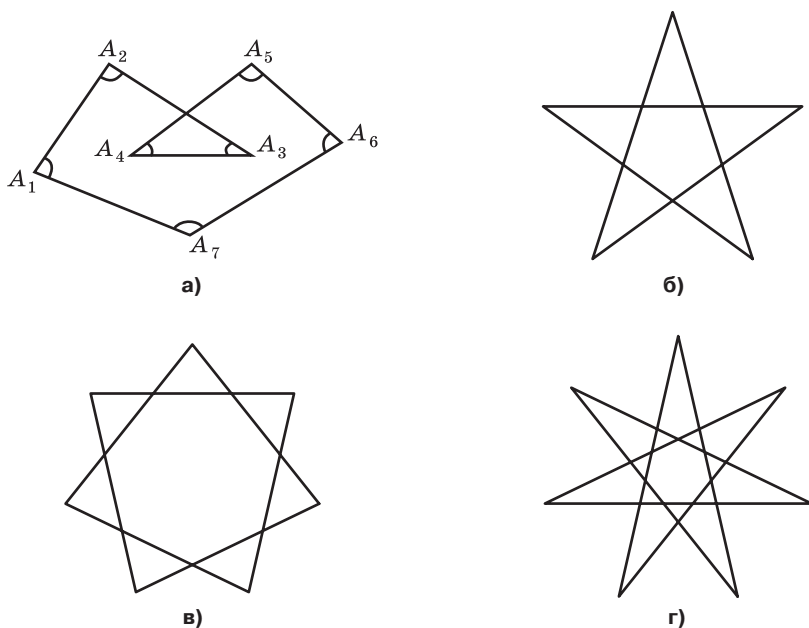


Рис. 164

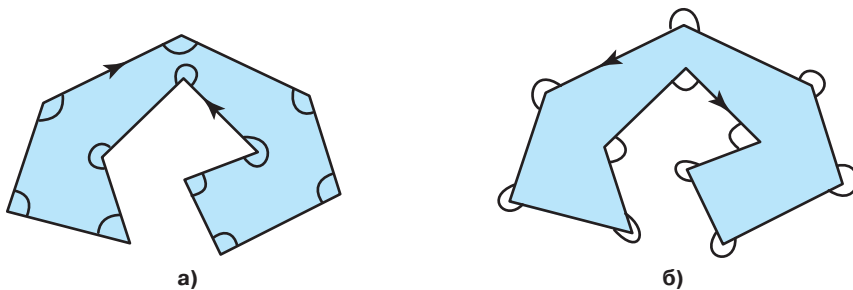


Рис. 165

Таким образом, общая формула суммы углов многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, имеет вид

$$\Sigma = 180^\circ(n \pm 2),$$

где Σ — сумма углов, n — число углов многоугольника, «+» или «-» берутся в зависимости от направления обхода ломаной.

Наша задача состоит в том, чтобы вывести формулу суммы углов произвольного многоугольника, образованного замкнутой (возможно, самопересекающейся) ломаной. Для этого введём понятие степени многоугольника.

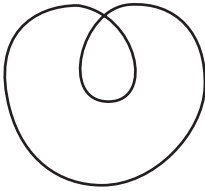


Рис. 166

Степенью многоугольника называется число оборотов, совершаемых точкой при полном последовательном обходе его сторон. Причём обороты, совершаемые в направлении против часовой стрелки, считаются со знаком «+», а обороты по часовой стрелке — со знаком «-».

Ясно, что у многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, степень равна +1 или -1 в зависимости от направления обхода. Степень ломаной на рисунке 164, а равна 2. Степень звёздчатых семиугольников (см. рис. 164, в, г) равна соответственно 2 и 3.

Аналогичным образом понятие степени определяется и для замкнутых кривых на плоскости. Например, степень кривой, изображённой на рисунке 166, равна двум.

Для нахождения степени многоугольника или кривой можно поступать следующим образом. Предположим, что, двигаясь по кривой (рис. 167, а), мы, начиная с какого-то места A_1 , совершили полный оборот и попали в ту же точку A_1 . Удалим из кривой соответствующий участок и продолжим движение по оставшейся кривой (рис. 167, б). Если, начиная с какого-то места A_2 , мы снова совершили полный оборот и попали в ту же точку, то удаляем соответствующий участок кривой и продолжаем движение (рис. 167, в). Считая количество удалённых участков со знаками «+» или «-», в зависимости от направления их обхода, получим искомую степень кривой.

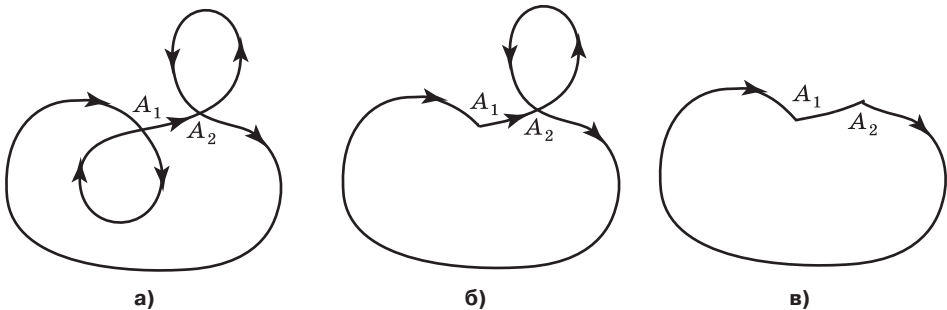


Рис. 167

Теорема. Для произвольного многоугольника имеет место формула

$$\Sigma = 180^\circ(n + 2m),$$

где Σ — сумма углов, n — число углов, m — степень многоугольника.

Доказательство. Пусть многоугольник M имеет степень m и условно изображён на рисунке 168. $M_1, \dots, M_k$ — простые замкнутые ломаные, проходя по которым точка совершает полные обороты. $A_1, \dots, A_k$ — соот-

ветствующие точки самопересечения ломаной, не являющиеся её вершинами.

Обозначим число вершин многоугольника M , входящих в многоугольники $M_1, \dots, M_k$, через $n_1, \dots, n_k$ соответственно. Поскольку, помимо вершин многоугольника M , к этим многоугольникам добавляются ещё вершины $A_1, \dots, A_k$, то число вершин многоугольников $M_1, \dots, M_k$ будет равно соответственно $n_1 + 1, \dots, n_k + 1$. Тогда суммы их углов будут равны $180^\circ(n_1 + 1 \pm 2), \dots, 180^\circ(n_k + 1 \pm 2)$. Плюс или минус берётся в зависимости от направления обхода ломаных.

Сумма углов многоугольника M_0 , оставшегося от многоугольника M после удаления многоугольников $M_1, \dots, M_k$, равна $180^\circ(n - n_1 - \dots - n_k + k \pm 2)$.

Суммы углов многоугольников $M_0, M_1, \dots, M_k$ дают сумму углов многоугольника M , и в каждой вершине $A_1, \dots, A_k$ дополнительно получим 360° . Следовательно, имеем равенство

$$180^\circ(n_1 + 1 \pm 2) + \dots + 180^\circ(n_k + 1 \pm 2) + 180^\circ(n - n_1 - \dots - n_k + k \pm 2) = \Sigma + 360^\circ k.$$

Приводя подобные члены, получим

$$\Sigma = 180^\circ(n \pm 2 \pm \dots \pm 2) = 180^\circ(n + 2m),$$

где m — степень многоугольника M . ■

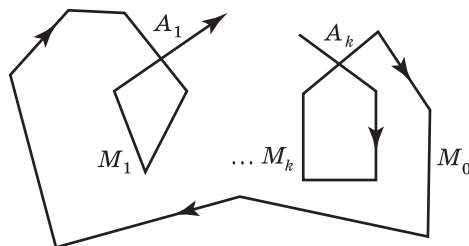


Рис. 168

Упражнения

1. По углам φ и ψ при стороне треугольника ($\varphi < \psi$) определите угол между высотой и биссектрисой угла при вершине, противолежащей данной стороне.
2. По углам φ и ψ прямоугольного треугольника ($\varphi < \psi$) определите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.
3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.
4. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AB и BC угол ABC равен 80° . Внутри треугольника взята точка O так, что угол OAC равен 10° , а угол OCA равен 30° . Найдите угол AOB .
5. Углы выпуклого четырёхугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

6. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900° . Сколько у него сторон?
7. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен: а) 36° ; б) 24° ?
8. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360° .
9. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?
10. Изобразите многоугольник, имеющий четыре острых угла.
11. Найдите сумму углов: а) пятиконечной звёздочки; б) семиконечной звёздочки (рис. 169, а, б).

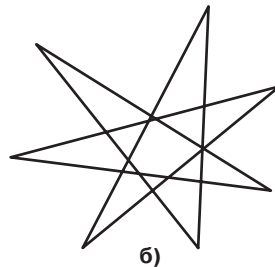
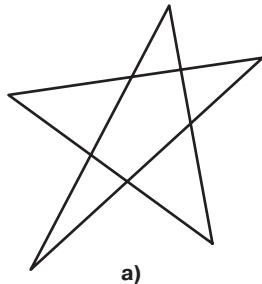


Рис. 169

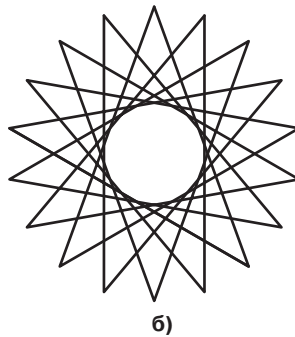
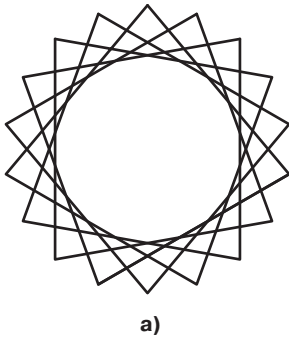


Рис. 170

12. Чему равны степени звёздчатых многоугольников на рисунке 170?
13. Докажите, что в любом выпуклом 11-угольнике найдутся две диагонали, угол между которыми не превосходит 5° .
14. В выпуклом шестиугольнике все углы равны. Докажите, что разности противоположных сторон такого шестиугольника равны между собой.
- ★ 15. Докажите, что утверждение о сумме углов треугольника эквивалентно аксиоме параллельных.

§ 33. Замечательные точки и линии треугольника

Здесь мы рассмотрим свойства биссектрис, медиан и высот треугольника, расширим число замечательных точек и линий треугольника.

Начнём с задач, относящихся к расположению биссектрис, медиан и высот треугольника.

Задача 1. По углам A и B треугольника ABC ($\angle A < \angle B$) определите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины C .

Решение. Пусть CD — высота, CE — биссектриса, тогда $\angle BCD = 90^\circ - \angle B$, $\angle BCE = (180^\circ - \angle A - \angle B) : 2$. Следовательно, $\angle DCE = \frac{\angle B - \angle A}{2}$.

Задача 2. К какой из вершин треугольника ближе расположена точка пересечения биссектрис?

Решение. Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 171). Воспользуемся тем, что против большей стороны треугольника лежит больший угол. Если $AB > BC$, то $\angle A < \angle C$ и, следовательно, $\angle OAD < \angle OCD$. Поэтому $OC < OA$, т.е. центр O вписанной окружности лежит ближе к вершине, расположенной против большей стороны.

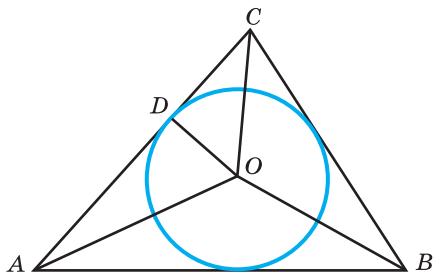


Рис. 171

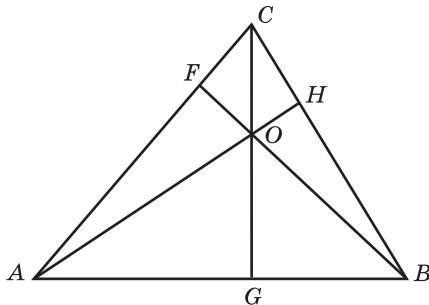


Рис. 172

Задача 3. Какая из высот треугольника наименьшая?

Решение. Пусть O — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 172). Если $AC < AB$, то $\angle C > \angle B$. Окружность с диаметром BC пройдет через точки F и G . Учитывая, что из двух хорд меньше та, на которую опирается меньший вписанный угол, получаем, что $CG < BF$, т.е. меньше та высота, которая опущена на большую сторону.

Теорема. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

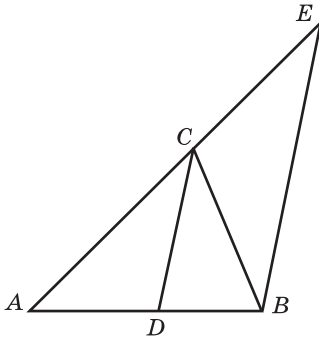


Рис. 173

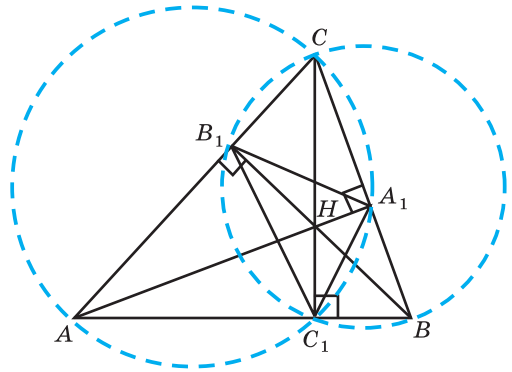


Рис. 174

Доказательство. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC (рис. 173). Докажем, что $AD : DB = AC : BC$. Проведём прямую BE , параллельную CD . В треугольнике BEC угол B равен углу E . Следовательно, $BC = EC$. По следствию из теоремы о пропорциональных отрезках, $AD : DB = AC : CE = AC : BC$. ■

Теорема. Пусть в остроугольном треугольнике ABC (рис. 174) точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот. Тогда точка H пересечения высот треугольника ABC является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

Доказательство. На сторонах AC и BC треугольника ABC , как на диаметрах, построим окружности. Точки A_1, C_1 и B_1, C_1 принадлежат соответствующим окружностям. Поэтому $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. $\angle B_1BC = \angle CAA_1$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. $\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Следовательно, $\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1$, т.е. CC_1 является биссектрисой угла $B_1C_1A_1$. Аналогичным образом показывается, что AA_1 и BB_1 являются биссектрисами углов $B_1A_1C_1$ и $A_1B_1C_1$. ■

Рассмотренный треугольник, вершинами которого являются основания высот данного остроугольного треугольника, даёт ответ на одну из классических экстремальных задач.

Задача Фаньяно. В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра.

Решение. Пусть ABC — данный остроугольный треугольник. На его сторонах требуется найти такие точки A_1, B_1, C_1 , для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ был бы наименьшим (рис. 175).

Зафиксируем сначала точку C_1 и будем искать точки A_1 и B_1 , для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший (при данном положении точки C_1).

Для этого рассмотрим точки D и E , симметричные точке C_1 относительно прямых AC и BC . Тогда $B_1C_1 = B_1D$, $A_1C_1 = A_1E$, и, следовательно, периметр треугольника $A_1B_1C_1$ будет равен длине ломаной DB_1A_1E . Ясно, что длина этой ломаной наименьшая, если точки B_1, A_1 лежат на прямой DE .

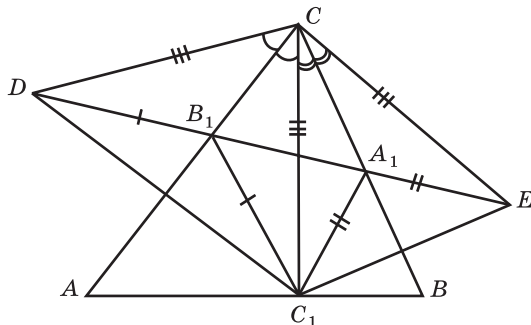


Рис. 175

Будем теперь менять положение точки C_1 и искать такое положение, при котором периметр соответствующего треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший.

Так как точка D симметрична C_1 относительно AC , то $CD = CC_1$ и $\angle ACD = \angle ACC_1$. Аналогично, $CE = CC_1$ и $\angle BCE = \angle BCC_1$. Следовательно, треугольник CDE равнобедренный. Его боковая сторона равна CC_1 . Основание DE равно периметру p треугольника $A_1B_1C_1$. Угол DCE равен удвоенному углу ACB треугольника ABC и, значит, не зависит от положения точки C_1 .

В равнобедренном треугольнике с данным углом при вершине основание тем меньше, чем меньше боковая сторона. Поэтому наименьшее значение периметра p достигается в случае наименьшего значения CC_1 . Это значение принимается в случае, если CC_1 является высотой треугольника ABC . Таким образом, искомой точкой C_1 на стороне AB является основание высоты, проведённой из вершины C .

Заметим, что мы могли бы фиксировать сначала не точку C_1 , а точку A_1 или точку B_1 и получили бы, что A_1 и B_1 являются основаниями соответствующих высот треугольника ABC .

Из этого следует, что искомым треугольником наименьшего периметра, вписанным в данный остроугольный треугольник ABC , является треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC . ■

Рассмотрим теперь замечательные точки и линии треугольника. К числу таких точек, изучаемых в школьном курсе геометрии, относятся:

- а) точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности);
- б) точка пересечения серединных перпендикуляров сторон (центр описанной окружности);
- в) точка пересечения высот (ортоцентр);
- г) точка пересечения медиан (центроид).

Добавим к ним некоторые другие замечательные точки и линии.

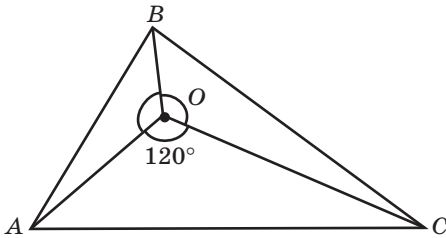


Рис. 176

Точка Торричелли. Пусть дан треугольник ABC . Точкой Торричелли этого треугольника называется такая точка O , из которой стороны данного треугольника видны под углом 120° (рис. 176), т.е. углы AOB , AOC и BOC равны 120° .

Докажем, что в случае, если все углы треугольника меньше 120° , точка Торричелли существует.

На стороне AB треугольника ABC построим равносторонний треугольник ABC' (рис. 177, а) и опишем около него окружность. Отрезок AB стягивает дугу этой окружности величиной 120° . Следовательно, точки этой дуги, отличные от A и B , обладают тем свойством, что отрезок AB виден из них под углом 120° . Аналогичным образом на стороне BC треугольника ABC построим равносторонний треугольник BCA' (см. рис. 177, а) и опишем около него окружность. Точки соответствующей дуги, отличные от B и C , обладают тем свойством, что отрезок BC виден из них под углом 120° . В случае, когда углы треугольника меньше 120° , эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке O . В этом случае $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$. Следовательно, и $\angle AOC = 120^\circ$. Поэтому точка O является искомой.

В случае, когда один из углов треугольника, например ABC , равен 120° , точкой пересечения дуг окружностей будет точка B (рис. 177, б). В этом случае точки Торричелли не существует, так как нельзя говорить об углах, под которыми видны из этой точки стороны AB и BC .

В случае, когда один из углов треугольника, например ABC , больше 120° (рис. 177, в), соответствующие дуги окружностей не пересекаются и точки Торричелли также не существует.

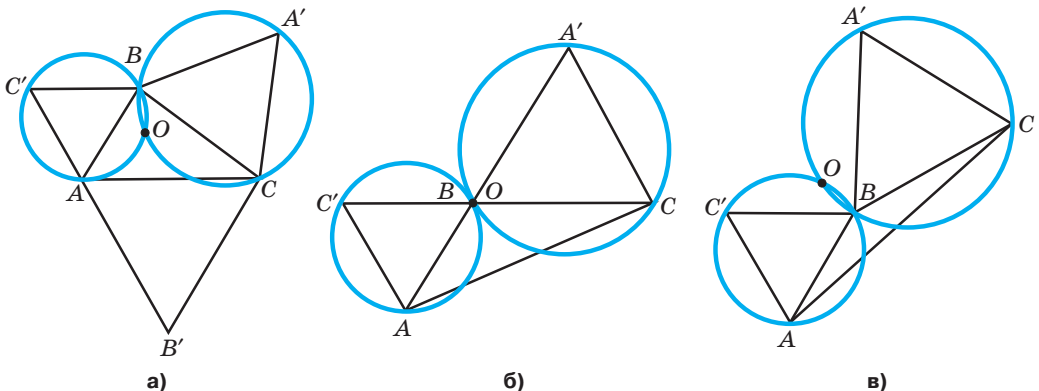


Рис. 177

С точкой Торричелли связана задача Ферма о нахождении точки, сумма расстояний от которой до трёх данных точек наименьшая.

Задача Ферма. Найти точку, сумма расстояний от которой до вершин данного треугольника принимает наименьшее значение.

Решение. Докажем, что в случае, если углы треугольника меньше 120° , искомой точкой в задаче Ферма является точка Торричелли.

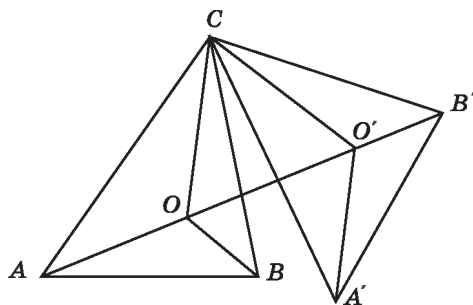


Рис. 178

Повернём треугольник ABC вокруг вершины C на угол 60° (рис. 178). Получим треугольник $A'B'C$. Возьмём произвольную точку O в треугольнике ABC . При повороте она перейдёт в какую-то точку O' . Треугольник $OO'C$ равносторонний, так как $CO = CO'$ и $\angle OCO' = 60^\circ$, следовательно, $OC = OO'$. Поэтому сумма длин $OA + OB + OC$ будет равна длине ломаной $AO + OO' + O'B$. Ясно, что наименьшее значение длины этой ломаной принимает в случае, если точки A, O, O', B лежат на одной прямой. Если O — точка Торричелли, то это так. Действительно, $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle COO' = 60^\circ$. Следовательно, точки A, O, O' лежат на одной прямой. Аналогично $\angle CO'O = 60^\circ$, $\angle CO'B' = 120^\circ$. Следовательно, точки O, O', B' лежат на одной прямой. Значит, все точки A, O, O', B' лежат на одной прямой. ■

Самостоятельно докажите, что в случае если один из углов треугольника больше или равен 120° , то решением задачи Ферма является вершина этого угла.

Окружность девяти точек. Пусть в треугольнике ABC (рис. 179) H — точка пересечения высот треугольника; точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот; A_2, B_2, C_2 — середины соответствующих сторон; A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH и CH . Тогда точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ лежат на одной окружности, называемой окружностью девяти точек или окружностью Эйлера.

Действительно, A_3B_2 — средняя линия треугольника AHC , и, следовательно, $A_3B_2 \parallel CC_1$. B_2A_2 — средняя линия треугольника ABC , и, следовательно, $B_2A_2 \parallel AB$. Так как $CC_1 \perp AB$, то $\angle A_3B_2A_2 = 90^\circ$.

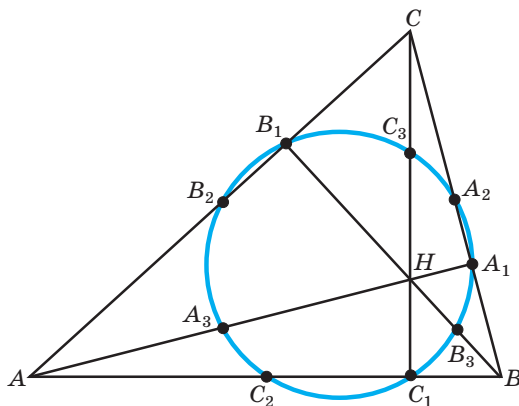


Рис. 179

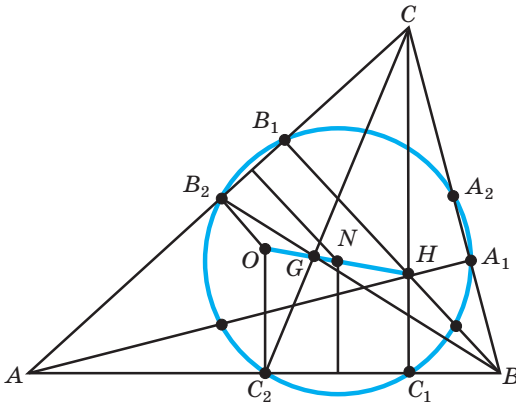


Рис. 180

Аналогично $\angle A_3C_2A_2 = 90^\circ$. Поэтому точки A_2, B_2, C_2, A_3 лежат на одной окружности с диаметром A_2A_3 . Так как $AA_1 \perp BC$, то точка A_1 также принадлежит этой окружности. Таким образом, точки A_1 и A_3 лежат на окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$. Аналогичным образом показывается, что точки B_1 и B_3, C_1 и C_3 лежат на этой окружности. Значит, все девять точек лежат на одной окружности.

Прямая Эйлера. В треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности девяти точек лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера. При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между центром пересечения высот и центром описанной окружности.

Действительно, пусть в треугольнике ABC (рис. 180) точка O — центр описанной окружности; G — точка пересечения медиан; H — точка пересечения высот. Требуется доказать, что точки O, G, H лежат на одной прямой и центр окружности девяти точек N делит отрезок OH пополам.

Рассмотрим гомотегию с центром в точке G и коэффициентом $-0,5$. Вершины A, B, C треугольника ABC перейдут соответственно в точки A_2, B_2, C_2 . Высоты треугольника ABC перейдут в высоты треугольника $A_2B_2C_2$, и, следовательно, точка H перейдет в точку O . Поэтому точки O, G, H будут лежать на одной прямой.

Покажем, что середина N отрезка OH является центром окружности девяти точек. Действительно, C_1C_2 — хорда окружности девяти точек. Поэтому серединный перпендикуляр к этой хорде содержит диаметр и пересекает OH в середине N . Аналогично серединный перпендикуляр к хорде B_1B_2 содержит диаметр и пересекает OH в той же точке N . Значит, N — центр окружности девяти точек. ■

Упражнения

1. Может ли точка пересечения биссектрис треугольника находиться вне этого треугольника?
2. Может ли точка пересечения медиан треугольника находиться вне этого треугольника?

3. Может ли точка пересечения высот или их продолжений находиться вне этого треугольника?
4. Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам:
 - а) прямоугольного треугольника;
 - б) остроугольного треугольника;
 - в) тупоугольного треугольника?
5. К какой из вершин треугольника ближе расположен ортоцентр?
6. К какой из сторон треугольника ближе расположен ортоцентр?
7. К какой из сторон треугольника ближе расположена точка пересечения медиан?
8. Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой?
9. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины A, B, C треугольника ABC с вершинами соответственно A', B', C' равносторонних треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (см. рис. 177, а), пересекаются в точке Торричелли.
10. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 10° и 100° . Найдите углы BOC и COA , где O — центр описанной окружности.
11. Докажите, что из четырёх точек, одна из которых есть ортоцентр треугольника с вершинами в трёх остальных точках, каждая является ортоцентром треугольника с вершинами в трёх остальных точках.
12. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и DCA лежат на диагонали BD и делят её на три равные части.
13. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны, то расстояние от точки до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника.
14. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC, CHA , равны между собой.
15. Докажите, что если какие-нибудь из замечательных точек треугольника совпадают, то этот треугольник — равносторонний.

§ 34. Теоремы Менелая и Чевы

Здесь мы рассмотрим общие теоремы, позволяющие устанавливать, в каком случае три точки, лежащие на сторонах треугольника или их продолжениях, принадлежат одной прямой (теорема Менелая), а также в каком случае три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке (теорема Чевы).

Начнём с теоремы Менелая, доказанной древнегреческим математиком и астрономом Менелаем Александрийским, жившим в I веке до н. э.

Теорема Менелая. Пусть на сторонах AB , BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (*)$$

Доказательство. Пусть точки A_1 , B_1 , C_1 принадлежат одной прямой (рис. 181). Опустим из вершин треугольника ABC перпендикуляры AA' , BB' , CC' на эту прямую.

Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны, и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB'}{CC'} \quad \text{и} \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CC'}{AA'}.$$

Перемножая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} = 1.$$

Докажем обратное. Пусть на сторонах AB , BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 , для которых выполняется равенство (*). Предположим, что прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C' . По доказанному, выполняется равенство

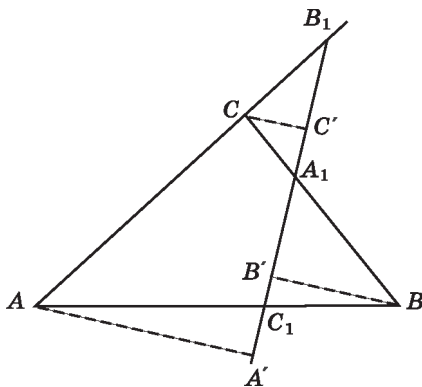


Рис. 181

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Учитывая равенство (*), получаем равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует совпадение точек C' и C_1 , и, значит, точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой. ■

Рассмотрим несколько примеров решения задач с использованием теоремы Менелая.

Пример 1. Точка C_1 делит сторону AB треугольника ABC в отношении $2 : 1$. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC , и $AC = CB_1$. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC ?

Решение. Пусть A_1 — точка пересечения B_1C_1 и BC . По условию $\frac{AC_1}{C_1B} = 2$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2}$. Используя теорему Менелая, находим $\frac{BA_1}{A_1C} = 1$.

Пример 2. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке, называемой центроидом тетраэдра, и делятся в ней в отношении $3 : 1$, считая от вершин.

Доказательство. Действительно, пусть $ABCD$ — тетраэдр, A_2, B_2, C_2, D_2 — центроиды соответствующих граней, A_1 — середина BC , O — точка пересечения AA_2 и DD_2 (рис. 182).

Применим теорему Менелая к треугольнику A_1DD_2 и прямой AA_2 . Имеем

$$\frac{A_1A_2}{A_2D} \cdot \frac{DO}{OD_2} \cdot \frac{D_2A}{AA_1} = 1.$$

Так как A_2 — точка пересечения медиан треугольника BCD , то $\frac{A_1A_2}{A_2D} = \frac{1}{2}$.

Так как D_2 — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $\frac{D_2A}{AA_1} = \frac{2}{3}$. Поэтому

$$\frac{DO}{OD_2} = \frac{3}{1}.$$

Заметим, что в таком же отношении делят отрезок DD_2 прямые BB_2 и CC_2 . Следовательно, они также проходят через точку O и делятся в ней в отношении $3 : 1$, считая от вершин.

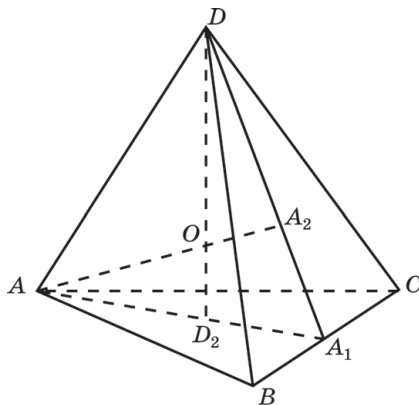


Рис. 182

Рассмотрим теперь теорему, опубликованную в 1678 году итальянским математиком и инженером Джованни Чевой.

Теорема Чевы. Пусть на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (*)$$

Доказательство. Предположим, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O (рис. 183). Опустим из вершин A и B треугольника ABC перпендикуляры AA' , BB' на прямую CC_1 . Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны, и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}.$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BOA}}{S_{COA}} \text{ и } \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{COB}}{S_{AOB}}.$$

Перемножая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

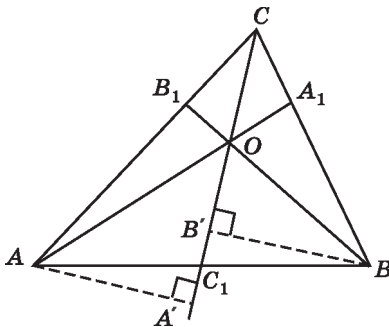


Рис. 183

Докажем обратное. Пусть для точек A_1 , B_1 , C_1 , взятых на соответствующих сторонах треугольника ABC , выполняется равенство (*). Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 через O и точку пересечения прямых CO и AB через C' . Тогда, на основании доказанного, имеет место равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Учитывая равенство (*), получим равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует совпадение точек C' и C_1 , и, значит, прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. ■

Заметим, что из теоремы Чевы непосредственно следует, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Пример 3. Точки C_1 и A_1 делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении $1 : 2$. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке O . Найдите отношение, в котором прямая BO делит сторону AC .

Решение. По условию $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2}$. Используя теорему Чебы, имеем $\frac{CB_1}{B_1A} = 4$.

Воспользуемся теоремой Чебы для установления ещё одной замечательной точки треугольника.

Точка Жергона. Прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.

Действительно, пусть окружность касается сторон треугольника ABC соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 (рис. 184).

Тогда $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$,

и, значит, прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

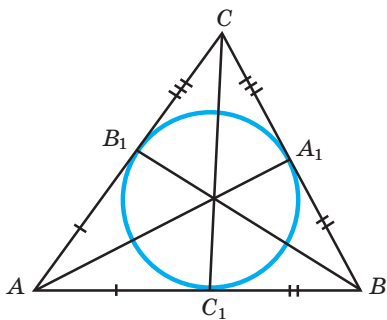


Рис. 184

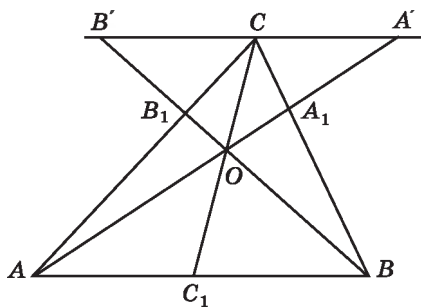


Рис. 185

Теорема Ван - Обеля. Пусть на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Если прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O , то имеет место равенство

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Доказательство. Через вершину C треугольника ABC проведём прямую, параллельную AB (рис. 185). Продолжим AA_1 и BB_1 до пересечения с этой прямой в точках A' и B' соответственно. Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C + CB'}{AB} = \frac{A'C}{AB} + \frac{CB'}{AB}.$$

Из подобия треугольников $A'SA_1$ и ABA_1 , $CB'B_1$ и ABB_1 имеем:

$$\frac{A'C}{AB} = \frac{CA_1}{A_1B}, \quad \frac{CB'}{AB} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Следовательно, $\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$. ■

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Пример 4. В каком отношении делятся биссектрисы треугольника точкой их пересечения?

Решение. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — биссектрисы треугольника ABC , O — точка их пересечения, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}.$$

Поэтому $\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$. Аналогично $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$ и $\frac{BO}{OB_1} = \frac{a+c}{b}$.

Упражнения

1. Точка C_1 — середина стороны AB треугольника ABC . Точка O — середина отрезка CC_1 . В каком отношении делит прямая AO сторону BC ?
2. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1 : 2. Точка B_1 делит сторону AC в отношении 2 : 1. Прямая A_1B_1 пересекает продолжение стороны AB в точке C_1 . Найдите отношение $AB : BC_1$.
3. Точки C_1 , B_1 , A_1 делят стороны AB , AC , BC соответственно в отношениях 4 : 1, 2 : 1, 1 : 2. Выясните, пересекаются ли прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 в одной точке.
4. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1 : 3. В каком отношении должна делить точку B_1 сторону AC , чтобы точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 принадлежала медиане CC_1 треугольника ABC ?
5. Используя теорему Ван-Обеля, докажите, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.
6. На продолжениях сторон AB , BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$. Найдите отношение, в котором прямая AB_1 делит сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

7. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $2 : 1$ и $1 : 2$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь треугольника AOB .
8. На медиане CC_1 треугольника ABC взята точка M . Прямые AM и BM пересекают стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AB и A_1B_1 параллельны.
9. Отрезок MN , соединяющий середины сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$, делится диагоналями на три равные части. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, одно из оснований AB или CD которой вдвое больше другого.
10. Пусть на продолжениях сторон AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

11. Пусть на стороне AB и продолжениях сторон BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

12. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (**точке Нагеля**). (Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон.)
13. Пусть на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что выполняется равенство

$$\frac{OA_1}{A_1A} + \frac{OB_1}{B_1B} + \frac{OC_1}{C_1C} = 1.$$

14. Пусть на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что выполняется равенство

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2.$$

15. Пусть на рёбрах AB , BC , CD и AD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1.$$

§35. Решение треугольников

Решение треугольника означает нахождение одних элементов треугольника по другим известным его элементам. К решению треугольников, в частности, относятся теоремы косинусов и синусов, рассмотренные в курсе геометрии 7—9-го классов. Напомним их формулировки.

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Таким образом, для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ имеет место равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Таким образом, для треугольника ABC имеют место равенства

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}.$$

Здесь мы уточним эту теорему и докажем, что для произвольного треугольника ABC отношение его сторон к синусам противолежащих углов постоянно и равно диаметру описанной около этого треугольника окружности, т. е. имеют место равенства

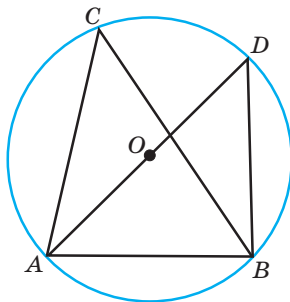


Рис. 186

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Действительно, пусть ABC — данный треугольник (рис. 186). Опишем около него окружность с центром O и радиусом R . Рассмотрим треугольник ABD , сторона AD которого проходит через O . Тогда углы C и D опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны. Угол ABD опирается на половину окружности и, следовательно, равен 90° .

Таким образом, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = AD = 2R$. Аналогично имеют место равенства $\frac{BC}{\sin A} = 2R = \frac{AC}{\sin B}$. ■

Применим теорему косинусов для доказательства ещё одной важной теоремы.

Теорема Стюарта. Пусть в треугольнике ABC дано: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Точка D делит сторону AB на отрезки $AD = c'$, $DB = c''$ и $CD = d$. Тогда имеет место равенство $d^2c = a^2c' + b^2c'' - cc'c''$.

Доказательство. Пусть CE — высота треугольника ABC (рис. 187). По теореме косинусов, применённой к треугольникам ADC и BDC , имеем:

$$\begin{aligned} b^2 &= (c')^2 + d^2 + 2c'DE, \\ a^2 &= (c'')^2 + d^2 - 2c''DE. \end{aligned}$$

Умножим первое равенство на c'' , второе — на c' и сложим. Получим $b^2c'' + a^2c' = (c' + c'')c'c'' + d^2(c' + c'')$, из которого и следует требуемое равенство. ■

Используя теорему Стюарта, вычислим биссектрису $CC_1 = \beta_c$ треугольника по его сторонам $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Для этого воспользуемся тем, что биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Обозначим $AC_1 = c'$, $BC_1 = c''$. Тогда $c' + c'' = c$ и $ac' = bc''$. Из этих двух уравнений находим c' и c'' :

$$c' = \frac{bc}{a+b}, \quad c'' = \frac{ac}{a+b}.$$

Подставляя теперь эти выражения в равенство теоремы Стюарта, получим $(\beta_c)^2c = a^2\frac{bc}{a+b} + b^2\frac{ac}{a+b} - c\frac{abc^2}{(a+b)^2}$. Откуда

$$\beta_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Рассмотрим формулы, выражающие площадь треугольника через его элементы.

В курсе геометрии 7—9-го классов доказывалось, что для площади S треугольника имеют место формулы:

$$S = \frac{1}{2}ah, \quad (1)$$

где a — сторона треугольника, h — высота, проведённая к этой стороне;

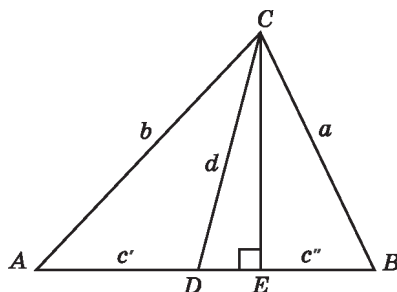


Рис. 187

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C, \quad (2)$$

где a , b — стороны треугольника, C — угол, заключённый между этими сторонами.

Ещё одна важная формула, выражающая площадь треугольника через его стороны, впервые была найдена древнегреческим математиком Героном Александрийским (приблизительно I в.) и носит название **формулы Герона**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a , b , c — стороны треугольника, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — его полупериметр.

Для доказательства этой формулы воспользуемся формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin C$. Выразим $\cos C$ через стороны треугольника по теореме косинусов, тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Отсюда $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Значит,

$$\begin{aligned} \sin^2 C &= 1 - \cos^2 C = (1 + \cos C)(1 - \cos C) = \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} = \\ &= \frac{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2b^2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a+b+c = 2p$, $a+b-c = 2p-2c$, $c+a-b = 2p-2b$, $c-a+b = 2p-2a$, получаем

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставляя это выражение в формулу площади треугольника, окончательно получаем

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Воспользуемся формулой Герона для выражения радиуса r вписанной в треугольник окружности через стороны a , b , c этого треугольника.

Из курса геометрии 7—9-го классов известна формула

$$S = pr,$$

выражающая площадь треугольника через полупериметр p и радиус r вписанной окружности. Подставляя вместо S её выражение по формуле Герона, получим

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr.$$

Откуда

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Упражнения

1. Сторона AB треугольника ABC равна 10 см. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если противолежащий этой стороне угол C равен: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° ; д) 150° .
2. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 3 см. Найдите сторону AB этого треугольника, если противолежащий ей угол C равен: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° ; д) 150° .
3. Вычислите площадь треугольника по трём сторонам: а) 13, 14, 15; б) 5, 5, 6.
4. Стороны треугольника равны a , b и c . Угол C , противолежащий стороне c , равен 120° . Докажите, что выполняется равенство $c^2 = a^2 + ab + b^2$.
5. Докажите, что если для сторон треугольника выполняется равенство $(b+c+a)(b+c-a) = 3bc$, то угол A , лежащий против стороны a , равен 60° .
6. В треугольнике ABC проведена медиана CD . Докажите, что имеет место равенство

$$\frac{AC}{\sin \angle BCD} = \frac{BC}{\sin \angle ACD}.$$

7. Стороны треугольника равны a , b и c . Найдите медиану m_c , проведённую к стороне c .
8. Стороны треугольника равны a , b и c . Найдите высоту h_c , проведённую к стороне c .
9. Докажите, что для произвольного треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ имеет место формула $c = a \cos B + b \cos A$.
10. Докажите, что для произвольного треугольника ABC имеет место формула $\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.
11. Докажите, что радиус R окружности, описанной около треугольника, выражается формулой

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S},$$

где a , b , c — стороны треугольника, S — его площадь.

12. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними φ . Найдите стороны параллелограмма.
13. Даны стороны параллелограмма a и b и один из его углов ψ . Найдите диагонали параллелограмма.
14. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
15. Докажите аналог теоремы косинусов для четырёхугольников: «Квадрат стороны выпуклого четырёхугольника равен сумме квадратов трёх других сторон без удвоенного произведения пар этих сторон и косинусов углов между ними».

§ 36. Углы и отрезки, связанные с окружностью

В курсе геометрии 7—9-го классов доказывалось, что угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Рассмотрим другие возможные случаи расположения угла и окружности.

Теорема. Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.

Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C внутри окружности и точками A и B на окружности. Пусть A_1, B_1 — точки пересечения с окружностью сторон вертикального к нему угла (рис. 188). Проведём хорду BB_1 . Угол ACB является внешним углом треугольника B_1CB . Следовательно, $\angle ACB = \angle AB_1B + \angle B_1BA_1$. Углы, стоящие в правой части равенства, измеряются половинами соответствующих дуг, что и завершает доказательство. ■

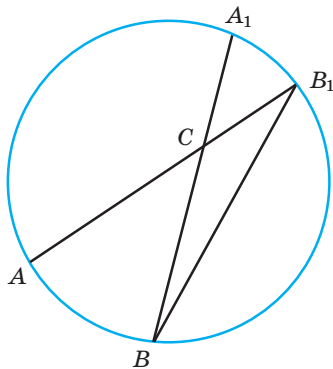


Рис. 188

Теорема. Угол между касательной к окружности и хордой, проведённой через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключённой внутри этого угла.

Доказательство. Пусть угол ACB образован касательной AC и хордой BC окружности. Если этот угол прямой (рис. 189, а), то BC — диаметр окружности и, следовательно, угол ACB измеряется половиной дуги полуокружности, заключённой внутри этого угла. Если угол ACB острый (рис. 189, б), то проведём диаметр CD . Имеем $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD$. Угол ACD измеряется половиной дуги CBD окружности. Угол BCD измеряется половиной дуги BD окружности.

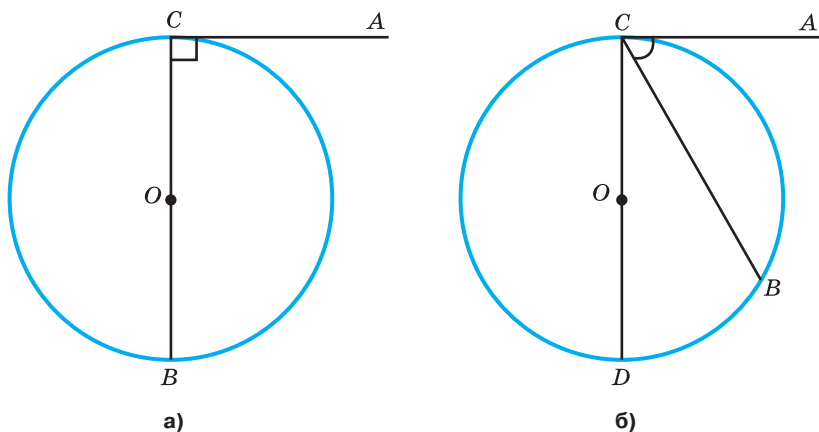


Рис. 189

Следовательно, их разность (угол ACB) измеряется половиной дуги CB окружности, заключённой внутри этого угла.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда угол ACB — тупой. ■

Теорема. Угол с вершиной вне круга, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключённых внутри этого угла.

Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C вне окружности и точками A и B на окружности. Пусть A_1 , B_1 — точки пересечения с окружностью сторон CA и CB (рис. 190). Проведём хорду AB_1 . Угол AB_1B является внешним углом треугольника AB_1C . Следовательно, $\angle ACB = \angle AB_1B - \angle B_1AA_1$. Углы, стоящие в правой части равенства, измеряются половинами соответствующих дуг, что и завершает доказательство. ■

Рассмотрим теперь некоторые свойства отрезков, связанные со взаимным расположением касательных и хорд окружности.

Теорема. Произведение отрезков любой хорды, проведённой через внутреннюю точку окружности, равно произведению отрезков диаметра, проведённого через ту же точку.

Доказательство. Пусть дана окружность с центром в точке O , хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке E (рис. 191). Докажем, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

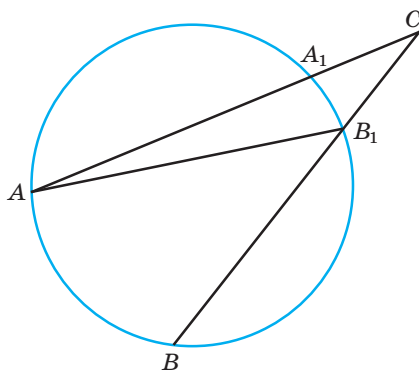


Рис. 190

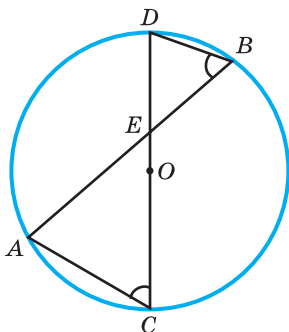


Рис. 191

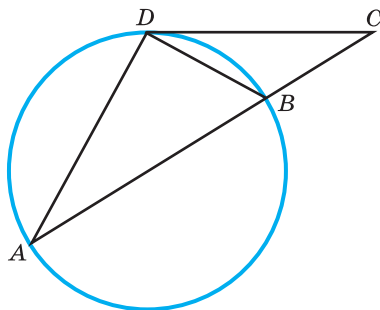


Рис. 192

Треугольники ACE и DBE подобны ($\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle B$). Следовательно,

$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}, \text{ и, значит, } AE \cdot BE = CE \cdot DE. \blacksquare$$

Теорема. Если через внешнюю точку C окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B , и касательная CD (D — точка касания), то произведение отрезков AC и BC секущей равно квадрату отрезка CD касательной.

Доказательство. Соединим точки B и D отрезком BD (рис. 192). Треугольники ACD и DCB подобны (угол A равен углу BDC , угол C общий).

Значит, $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BC}$, и, следовательно, $AC \cdot BC = CD^2$. $\blacksquare$

Упражнения

1. Через концы дуги в 60° проведены касательные. Найдите угол между ними.
2. Докажите, что угол между двумя касательными к окружности измеряется полуразностью дуг, заключённых между его сторонами.
3. Хорда AB стягивает дугу окружности в 44° . Найдите углы, которые образует эта хорда с касательными к окружности, проведёнными через её концы.
4. Из точки пересечения двух окружностей проведены их диаметры. Докажите, что другие концы диаметров и вторая точка пересечения окружностей принадлежат одной прямой.
5. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке A , проведена общая касательная BC (B и C — точки касания). Докажите, что угол BAC — прямой.

6. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведена секущая, которая делит эти окружности на четыре дуги. Докажите, что пары дуг, расположенные по разные стороны секущей и принадлежащие разным окружностям, имеют одинаковые градусные величины.
7. В угол ABC вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как $5 : 4$. Найдите величину угла ABC .
8. Окружность разделена точками A, B, C на дуги, градусные величины которых относятся как $11 : 3 : 4$. Через точки A, B, C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.
9. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, т. е. таких точек C , для которых угол ACB равен данному углу.
10. Дан отрезок AB и прямая s , ему параллельная. Найдите точку C на прямой s , из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.
11. Две хорды окружности пересекаются. Одна из них точкой пересечения делится на отрезки 2 см и 8 см, а другая — пополам. Найдите вторую хорду.
12. Как далеко видна поверхность Земли с самолёта (рис. 193), летящего на высоте $h = 10$ км над Землёй (радиус Земли $R \approx 6370$ км)?

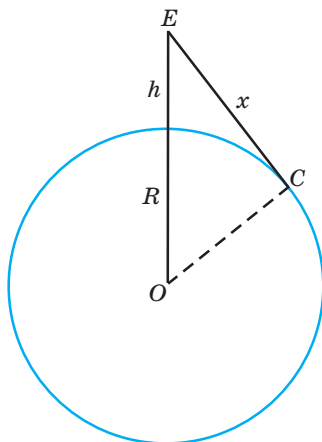


Рис. 193

§ 37. Вписанные и описанные многоугольники

В курсе геометрии 7—9-го классов доказывалось, что около всякого треугольника можно описать окружность и во всякий треугольник можно вписать окружность. Оказывается, для четырёхугольников это уже не имеет места.

Теорема. Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° .

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, около которого описана окружность (рис. 194, а). Докажем, что $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг ADC

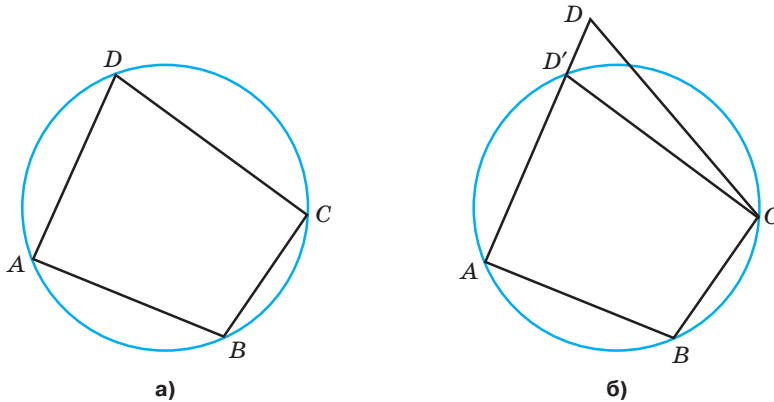


Рис. 194

и ABC , которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной дуги окружности, т. е. их сумма равна 180° .

Обратно, пусть в четырёхугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов равна 180° . Через вершины A, B, C проведём окружность. Предположим, что эта окружность не проходит через вершину D (рис. 194, б). Обозначим точку пересечения окружности с прямой AD через D' . Тогда четырёхугольник $ABCD'$ вписан в окружность и, следовательно, $\angle B + \angle D' = 180^\circ$. Но по условию $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Поэтому $\angle D = \angle D'$, что невозможно, так как прямые DC и $D'C$ не являются параллельными. Полученное противоречие показывает, что окружность, проходящая через точки A, B и C , должна пройти и через точку D . ■

Найдём условия, при которых около пятиугольника и шестиугольника можно описать окружности.

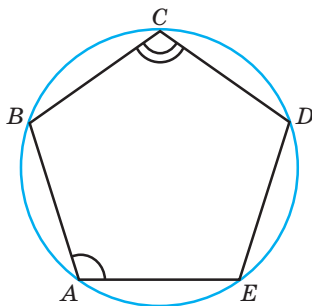


Рис. 195

Теорема. Сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше 180° .

Доказательство следует из того, что углы A и C вписанного пятиугольника $ABCDE$ опираются на дуги, в сумме составляющие всю окружность плюс дугу DE (рис. 195).

Теорема. Сумма трёх несмежных углов вписанного шестиугольника равна 360° .

Доказательство следует из того, что углы A, C и E вписанного шестиугольника $ABCDEF$ опираются на дуги, в сумме составляющие две окружности (рис. 196).

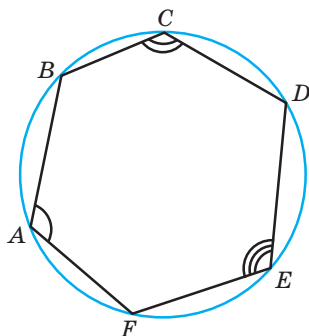


Рис. 196

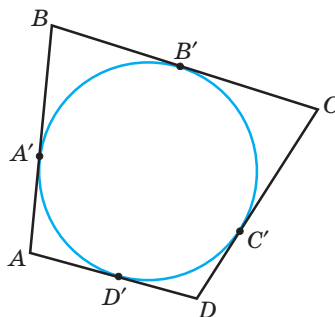


Рис. 197

Перейдём теперь к рассмотрению описанных многоугольников. Ситуация здесь в некотором смысле двойственная по отношению к вписанным многоугольникам. При этом стороны описанного многоугольника двойственны углам вписанного многоугольника. Так, например, если для вписанности четырёхугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных углов, то для описанности выпуклого четырёхугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных сторон. А именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема. Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырёхугольника равны.

Доказательство. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 197), A' , B' , C' , D' — точки касания. Тогда $AA' = AD'$, $BA' = BB'$, $DC' = DD'$, $CC' = CB'$. Складывая почленно эти равенства, получим равенство $AB + CD = AD + BC$, означающее, что суммы противоположных сторон вписанного четырёхугольника равны. ■

Теорема. Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ имеет место равенство $AB + CD = BC + AD$. Рассмотрим окружность, касающуюся сторон углов A и D (рис. 198). Центром этой окружности является точка пересечения биссектрис углов A и D . Предположим, что эта окружность не касается стороны BC . Проведём касательную $B'C'$, для которой угол B' равен углу B . Тогда четырёхугольник $AB'C'D$ будет описан около окружности и, следовательно,

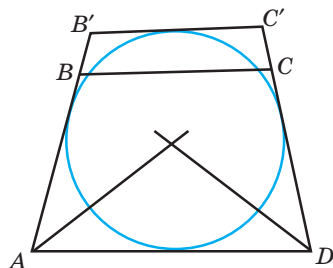


Рис. 198

для него будет выполняться равенство $AB' + C'D = AD + B'C'$. С другой стороны, по условию выполняется равенство $AB + CD = AD + BC$. Вычитая из первого равенства второе, получим равенство $BB' + CC' = B'C' - BC$, или $B'C' = BB' + BC + CC'$. Последнее равенство не может выполняться для точек, не лежащих на одной прямой, и, значит, неверным было наше предположение о том, что окружность не касается стороны BC . ■

Самостоятельно подумайте, где в доказательстве использовалась выпуклость четырёхугольника. Приведите пример невыпуклого четырёхугольника, у которого суммы противоположных сторон равны и в который нельзя вписать окружность.

Следующие теоремы, двойственные соответствующим теоремам для вписанных пятиугольников и шестиугольников, предлагаем для самостоятельного доказательства.

Теорема. Сумма любых двух несмежных сторон описанного пятиугольника меньше суммы трёх оставшихся сторон.

Теорема. Сумма любых трёх несмежных сторон описанного шестиугольника равна сумме трёх оставшихся сторон.

Упражнения

1. Можно ли описать окружность около: а) параллелограмма, отличного от прямоугольника; б) прямоугольника; в) ромба, отличного от квадрата?
2. Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные стороны, но неравные углы?
3. Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные углы, но неравные стороны?
4. Можно ли описать окружность около пятиугольника, углы которого последовательно равны: 80° , 90° , 100° , 130° , 140° ?
5. Можно ли описать окружность около шестиугольника, углы которого последовательно равны: 100° , 110° , 120° , 120° , 130° , 140° ?
6. Четыре последовательных угла вписанного шестиугольника равны 100° , 110° , 120° , 120° . Найдите оставшиеся два угла.
7. Стороны вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ равны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Найдите его диагонали.
8. Докажите, что сумма любых трёх несмежных углов вписанного семиугольника больше 360° .
9. Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник, отличный от квадрата; б) параллелограмм, отличный от ромба; в) ромб; г) квадрат; д) дельтоид (рис. 199)?
10. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание. Можно ли в образованный ими выпуклый четырёхугольник вписать окружность?

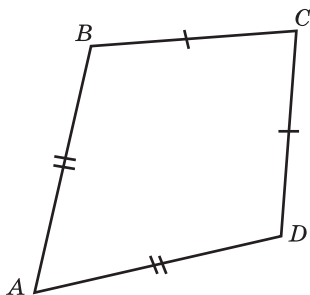


Рис. 199

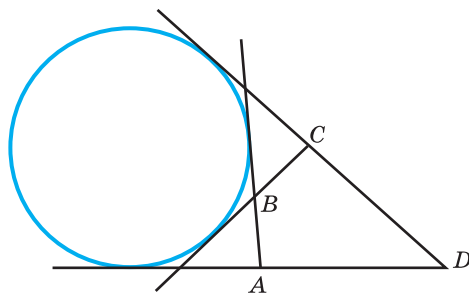


Рис. 200

11. Можно ли вписать окружность в четырёхугольник, стороны которого последовательно равны 1, 2, 3, 4?
12. Противоположные стороны четырёхугольника, описанного около окружности, равны 7 см и 10 см. Можно ли по этим данным найти периметр четырёхугольника?
13. Можно ли вписать окружность в пятиугольник, стороны которого последовательно равны: 1, 2, 1, 2, 1?
14. Три последовательные стороны четырёхугольника, в который можно вписать окружность, равны 6 см, 8 см и 9 см. Найдите четвёртую сторону и периметр этого четырёхугольника.
15. На рисунке 200 изображён четырёхугольник $ABCD$ и вневписанная в него окружность, касающаяся продолжений всех его сторон. Установите взаимосвязь между сторонами этого четырёхугольника.

§ 38. Парабола

Пусть на плоскости задана прямая d и точка F , не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудалённых от прямой d и точки F , называется **параболой**. Прямая d называется **директрисой**, а точка F — **фокусом** параболы (рис. 201).

Для того чтобы нарисовать параболу, потребуются линейка, угольник, нить длиной, равной большему катету угольника, и кнопки. Прикрепим один конец нити к фокусу, а другой — к вершине меньшего угла угольника. Приложим линейку к директрисе и поставим на неё угольник меньшим катетом. Карандашом натянем нить так, чтобы его острёй касалось бумаги и прижималось

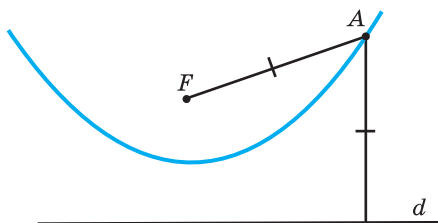


Рис. 201

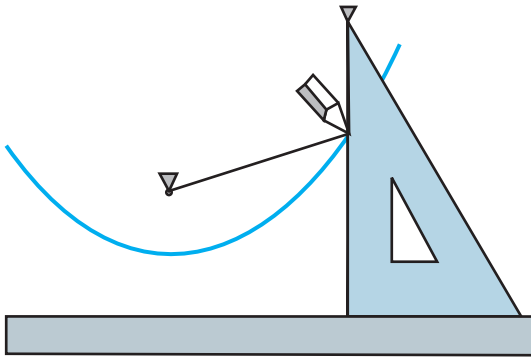


Рис. 202

к большему катету. Будем перемещать угольник и прижимать к его катету карандаш так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге параболу (рис. 202).

Осью параболы называется прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Точка пересечения параболы с её осью называется **вершиной** параболы.

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная её директрисе, называется **касательной** к параболе. Общая точка называется **точкой касания**.

Теорема. Пусть A — точка на параболы с фокусом F и директрисой d , AD — перпендикуляр, опущенный на директрису (рис. 203). Тогда касательной к параболы, проходящей через точку A , будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD .

Доказательство. Докажем, что прямая a , содержащая биссектрису угла FAD , будет касательной к параболы (см. рис. 203). Действительно, треугольник FAD равнобедренный. Следовательно, прямая a будет средним перпендикуляром к отрезку FD . Из произвольной точки A' прямой a , отличной от A , опустим перпендикуляр $A'D'$ на прямую d . Тогда

$$A'F = A'D > A'D'.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит параболы, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с параболы, т. е. является касательной. ■

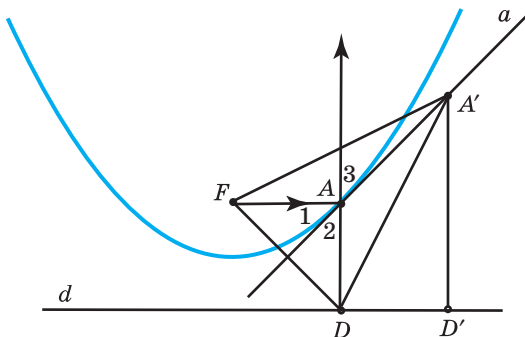


Рис. 203

Фокальное свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведённой в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F параболы, a — касательная, AD — прямая, перпендикулярная директрисе (см. рис. 203). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла FAD . Углы 2 и 3 равны как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 1, то угол отражения будет равен углу 3, т. е. направление отражённого луча будет перпендикулярно директрисе.

Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.

Построение касательной к параболе. Пусть парабола задана фокусом F и директрисой d . Используя циркуль и линейку, построим касательную к параболе, проходящую через данную точку C .

С центром в точке C и радиусом CF проведём окружность и найдём её точки пересечения с директрисой d . Если расстояние от точки C до фокуса больше, чем расстояние до директрисы, то таких точек две (рис. 204). Обозначим их D_1 и D_2 . Проведём биссектрисы углов FCD_1 и FCD_2 соответственно. Прямые a_1 и a_2 , содержащие эти биссектрисы, являются серединными перпендикулярами к отрезкам FD_1 и FD_2 и, значит, будут искомыми касательными к параболе. Для построения точек касания через точки D_1 и D_2 проведём прямые, перпендикулярные директрисе, и найдём их точки пересечения A_1 и A_2 с прямыми a_1 и a_2 . Они и будут искомыми точками касания.

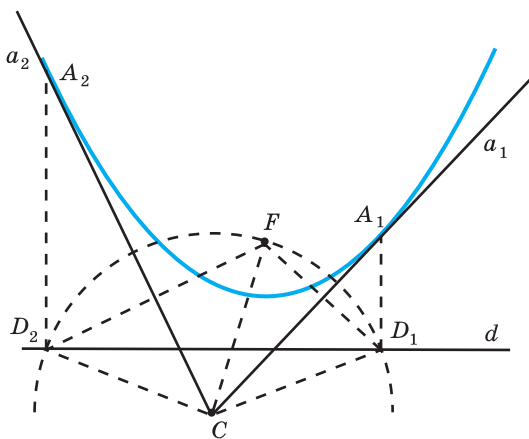


Рис. 204

Может случиться, что расстояние от точки C до фокуса равно расстоянию до директрисы. В этом случае точка C будет лежать на параболе, окружность с центром в точке C и радиусом CF будет касаться директрисы в некоторой точке D , и, следовательно, через точку C будет проходить одна касательная — биссектриса угла FCD .

В случае, если расстояние от точки C до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, точек пересечения окружности с директрисой нет и, следовательно, нет касательных к параболе, проходящих через эту точку.

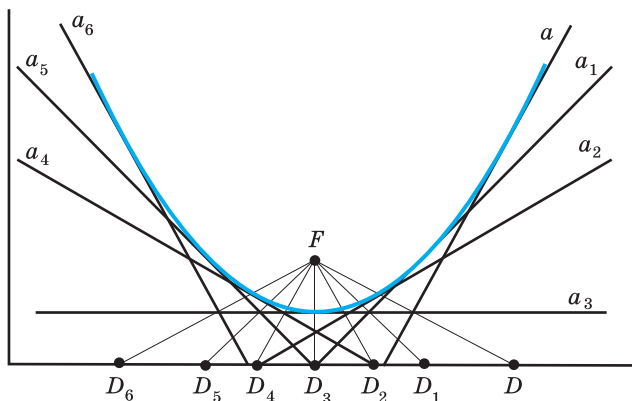


Рис. 205

Лабораторная работа

Укажем способ получения параболы из листа бумаги. Возьмём лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большей стороны точку F . Сложим лист так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой D на большей стороне и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 205). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FD и, следовательно, касательной к параболе. Разогнём лист и снова согнём его, совместив точку F с другой точкой большей стороны. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к параболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму параболы.

Упражнения

1. Изготовьте прибор для построения параболы. Для заданных фокуса и директрисы постройте соответствующую им параболу.
2. Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек на параболы до директрисы? Укажите соответствующую точку на параболы.
3. Для точки F , не принадлежащей прямой d , найдите геометрическое место точек, расстояния от которых до точки F : а) меньше расстояния до прямой d ; б) больше расстояния до прямой d .
4. Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?
5. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, проходящую через данную точку: а) на параболы; б) вне параболы.

6. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, перпендикулярную оси параболы.
7. Докажите, что две касательные к параболе, проведённые из точки, принадлежащей директрисе, перпендикулярны.
8. Найдите геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.
9. Для заданных фокуса и директрисы параболы с помощью циркуля и линейки постройте несколько точек параболы.
10. Даны фокус параболы и две касательные. Постройте директрису этой параболы.
11. Даны фокус, касательная и на ней точка касания. Постройте директрису параболы.
12. Даны директриса параболы и две касательные. Постройте фокус параболы.
13. Даны директриса, касательная и на ней точка касания. Постройте фокус.
14. Даны две пересекающиеся прямые. Нарисуйте какую-нибудь параболу, касающуюся этих прямых. Сколько таких парабол? Какие точки плоскости могут быть фокусами таких парабол?

§ 39. Эллипс

Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 , F_2 есть величина постоянная, называется **эллипсом**. Точки F_1 , F_2 называются **фокусами** эллипса.

Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 сумма $AF_1 + AF_2$ постоянна и равна некоторому заданному отрезку c (рис. 206). Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть больше отрезка F_1F_2 .

Ещё И. Кеплер обнаружил, что планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причём Солнце находится в фокусах этих **эллипсов**. Точка орбиты

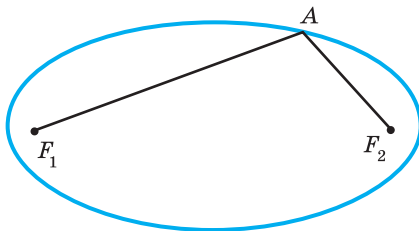


Рис. 206

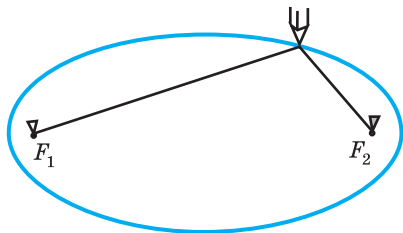


Рис. 207

планеты, ближайшая к Солнцу, называется перигелием, а наиболее удалённая — афелием. Однако из-за того, что орбита Земли представляет собой очень мало сжатый эллипс, похожий на окружность, такое приближение и удаление от Солнца незначительно сказывается на температуре. Гораздо большее значение для температуры на поверхности Земли имеет угол падения солнечных лучей. Например, когда Земля бывает в перигелии, в нашем полушарии зима, а когда в афелии — в нашем полушарии лето. Луна, искусственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Для того чтобы нарисовать эллипс, потребуется нить и кнопки. Прикрепим концы нити к фокусам. Карандашом натянем нить так, чтобы его острый кончик касался бумаги. Будем перемещать карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге эллипс (рис. 207).

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку. Общая точка называется **точкой касания**.

Теорема. Пусть A — произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2 . Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A , является прямая, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2 .

Доказательство. Докажем, что прямая a , содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2 , будет касательной к эллипсу (рис. 208). Рассмотрим точку F' на прямой F_1A , для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F' . Для произвольной точки A' прямой a , отличной от A , имеем:

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = F_1A + AF_2 = c.$$

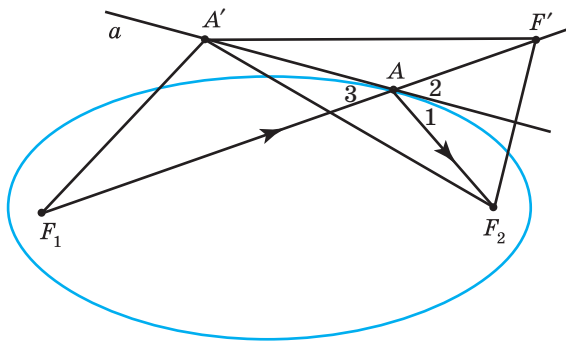


Рис. 208

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т. е. является касательной. ■

Фокальное свойство эллипса. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом его фокусе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведённой в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a — касательная (см. рис. 208). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_2AF' . Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдёт в направлении AF_2 .

Построение касательной к эллипсу. Пусть эллипс задан своими фокусами F_1 , F_2 и постоянной c . Используя циркуль и линейку, построим касательную к эллипсу, проходящую через данную точку C .

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведём окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведём другую окружность и найдём её точки пересечения с первой окружностью (рис. 209). Таких точек может быть две — F' , F'' , одна или ни одной, в зависимости от расположения точки C . В первом случае проведём биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a' , a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$, $F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведём прямые F_1F' , F_1F'' и найдём их точки пересечения A' , A'' с касательными a' , a'' , соответственно CA' и CA'' будут искомыми касательными.

Во втором случае, когда проведённые окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

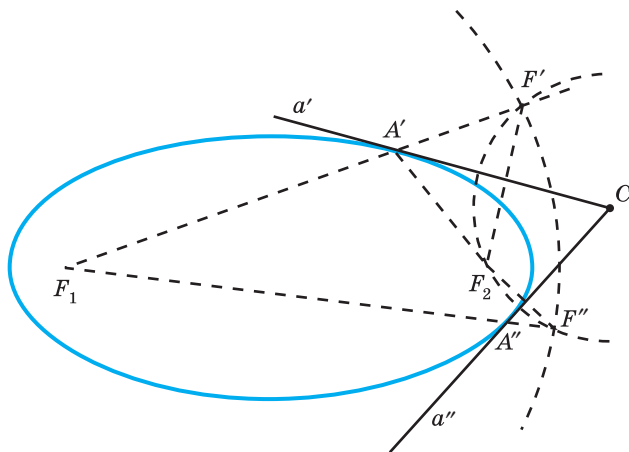


Рис. 209

Лабораторная работа

Укажем способ получения эллипса из листа бумаги. Вырежем из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставим точку F . Сложим круг так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности круга и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 210). Линия сгиба будет

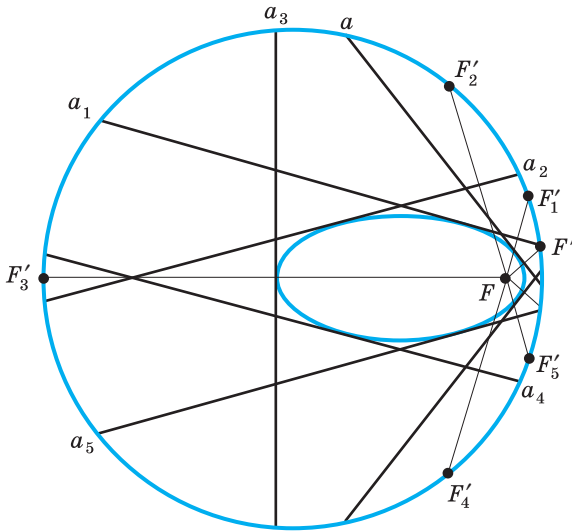


Рис. 210

серединым перпендикуляром к отрезку FF' и, следовательно, касательной к эллипсу. Разогнём круг и снова согнём его, совместив точку с другой точкой окружности круга. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к эллипсу. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму эллипса.

Для другого способа получения эллипса потребуется сковорода и картонный круг диаметром вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой

лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положив круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острый карандаш к бумаге, то на бумаге появится эллипс.

Упражнения

1. Нарисуйте эллипс с заданными фокусами F_1, F_2 . Сколько таких эллипсов?
2. Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и константой c . Найдите наибольшее расстояние между точками эллипса. Укажите эти точки.
3. Расстояние между фокусами эллипса равно 4 см. Константа c равна 6 см. Найдите наименьшее расстояние от точек эллипса до фокуса.
4. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и суммой радиусов.
5. Даны фокусы эллипса и сумма расстояний до них. С помощью циркуля постройте несколько точек этого эллипса.

6. Что будет происходить с эллипсом, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?
7. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них s постройте точки на эллипсе, равноудалённые от фокусов. Сколько таких точек?
8. Найдите геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1, F_2 : а) меньше заданной величины s ; б) больше заданной величины s .
9. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C , для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине s .
10. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AD = BC$ и $AB = CD$ (рис. 211), сторона AD закреплена, а остальные подвижны. Найдите геометрическое место точек пересечения сторон AB и CD .
11. Пусть дан эллипс с центрами F_1, F_2 и константой s . Докажите, что окружность с центром в фокусе и радиусом $r = \frac{1}{2}(s - F_1F_2)$ лежит внутри эллипса. Нарисуйте эти эллипс и окружность.
12. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательные, перпендикулярные прямой F_1F_2 .
13. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательную, проходящую через заданную точку: а) на эллипсе; б) вне эллипса.
14. Даны фокусы F_1, F_2 эллипса и сумма расстояний до них s . Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом s серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к эллипсу. Найдите точку касания.
15. Даны два фокуса и касательная к эллипсу. Постройте постоянную s и нарисуйте эллипс.
16. Даны две касательные, фокус и постоянная s . Постройте второй фокус эллипса.
- ★17. Возьмём сковородку и картонный круг, диаметр которого вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положим круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острiestь карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс. Докажите.

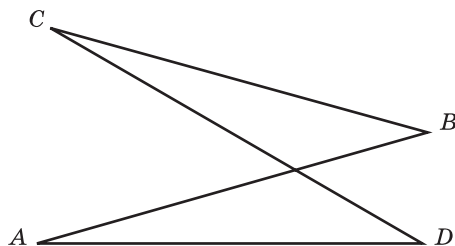


Рис. 211

- ★18. Леонардо да Винчи предложил следующий способ построения эллипса. Вырежем из бумаги произвольный треугольник ABC . Проведём на листе бумаги две прямые a и b . Будем прикладывать треугольник ABC так, чтобы вершина A принадлежала прямой a , вершина B — прямой b , отмечая всякий раз на бумаге положение вершины C . Различные положения вершины C будут заполнять эллипс. Докажите.

§ 40. Гипербола

Геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется **гиперболой**. Точки F_1, F_2 называются **фокусами** гиперболы (рис. 212).

Таким образом, для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется одно из равенств: $AF_1 - AF_2 = c, AF_2 - AF_1 = c$, где c — некоторый заданный отрезок.

Гипербола состоит из двух ветвей, для точек которых выполняется соответственно первое или второе равенство.

Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть меньше отрезка F_1F_2 .

Для того чтобы нарисовать гиперболу, потребуется линейка, нить, длина которой меньше длины линейки, а разность длин линейки и нити была бы меньше, чем расстояние между фокусами. Прикрепим один конец нити к концу линейки, а второй конец к фокусу. Второй конец линейки совместим со вторым фокусом. Натянем нить, прижав её к линейке остриём карандаша (рис. 213). Если поворачивать линейку вокруг фокуса, прижимая к ней карандаш и оставляя нить натянутой, то карандаш будет описывать гиперболу.

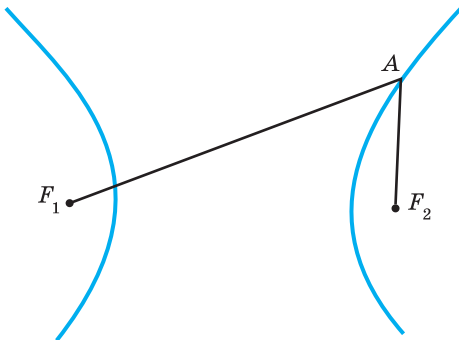


Рис. 212

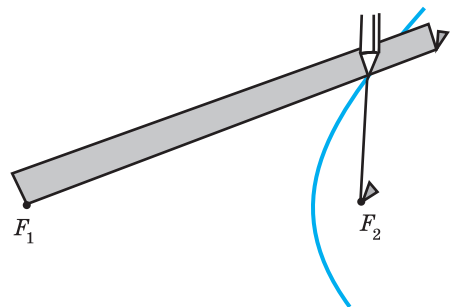


Рис. 213

Рассмотрим ветвь гиперболы, точки которой удовлетворяют равенству $AF_1 - AF_2 = c$. Она разбивает плоскость на две области — внешнюю, для точек A' которой выполняется неравенство $A'F_1 - A'F_2 < c$, и внутреннюю, для точек A'' которой выполняется неравенство $A''F_1 - A''F_2 > c$.

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат во внешней области, т. е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 - A'F_2 < c$, называется **касательной** к гиперболе. Точка A называется **точкой касания**.

Аналогичным образом определяется касательная для точки, лежащей на другой ветви гиперболы.

Теорема. Пусть A — точка гиперболы с фокусами F_1, F_2 . Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A , является прямая, содержащая биссектрису угла F_1AF_2 .

Доказательство. Докажем, что прямая a , содержащая биссектрису угла F_1AF_2 , будет касательной к гиперболе (рис. 214).

Рассмотрим точку F' на прямой F_1A , для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F' . Для произвольной точки A' прямой a , отличной от A , имеем:

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - A'F' < F_1F' = AF_1 - AF_2 = c.$$

Следовательно, прямая a является касательной. ■

Фокальное свойство гиперболы. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от неё, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 гиперболы, a — касательная (см. рис. 214). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла F_1AF_2 . Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдёт в направлении AF_2 .

Построение касательной к гиперболе. Пусть гипербола задана своими фокусами F_1, F_2 и постоянной c . Используя циркуль и линейку, построим касательную к гиперболе, проходящую через данную точку C .

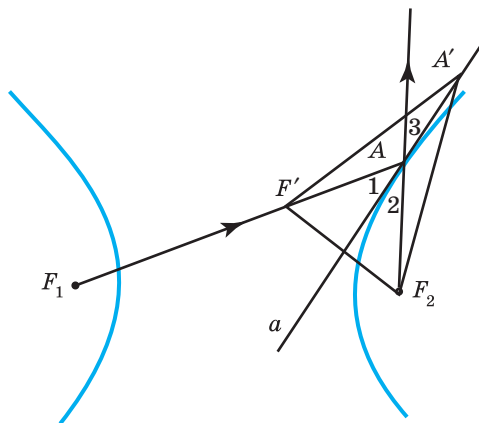


Рис. 214

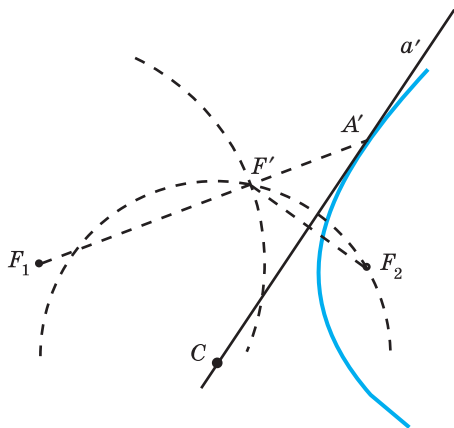


Рис. 215

F_1F' , F_1F'' и найдём их точки пересечения A' , A'' с касательными a' , a'' соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведённые окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

Лабораторная работа

Укажем способ получения гиперболы из листа бумаги. Вырежем из листа бумаги круг и отметим точку F на оставшейся части листа. Сложим лист так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности вырезанного круга и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогнём лист и снова согнём его, совместив точку с другой точкой окружности. Сделаем так несколько раз. Линии сгибов будут касательными к гиперболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму гиперболы.

Упражнения

1. Изготовьте прибор для построения гиперболы. Нарисуйте гиперболу с заданными фокусами F_1 , F_2 . Сколько таких гипербол?
2. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и разностью радиусов.
3. С помощью циркуля постройте несколько точек гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них.
4. Найдите геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек F_1 , F_2 : а) меньше заданной величины s ; б) больше заданной величины s .

5. Расстояние между фокусами гиперболы равно 6 см, константа c равна 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек гиперболы до фокусов? Укажите соответствующие точки на гиперболе.
6. Что будет происходить с гиперболой, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?
7. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AB = CD$ и $AD = BC$, сторона AB закреплена, а остальные стороны подвижны (рис. 216). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AD и BC .
8. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.
9. Через точку гиперболы с заданными фокусами проведите касательную к гиперболе.
10. Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и разностью расстояний до них s найдите точки, касательные в которых перпендикулярны прямой F_1F_2 .
11. Через точку вне гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них s проведите касательную к этой гиперболе.
12. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами в точках пересечения имеют перпендикулярные касательные.
13. Даны фокусы F_1, F_2 гиперболы и разность расстояний до них s . Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом s серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к гиперболе, если он пересекается с прямой F_2C . Найдите точку касания.
14. Даны два фокуса и касательная к гиперболе. Постройте постоянную s и нарисуйте гиперболу.
15. Даны две касательные, фокус и постоянная s . Постройте второй фокус гиперболы.
16. Даны фокусы F_1 и F_2 гиперболы. Световой луч исходит из фокуса F_1 и отражается от гиперболы в точке A . Постройте отражённый луч.

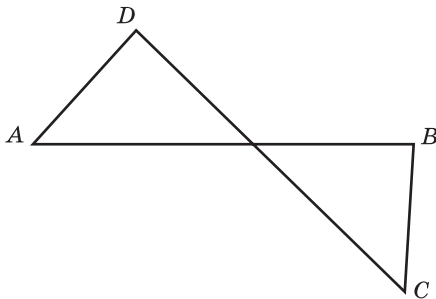


Рис. 216

§ 41. Построение циркулем и линейкой

Построение циркулем и линейкой занимает важное место в школьном курсе геометрии. Среди задач на построение курса геометрии 7—9-го классов отметим следующие:

- а) деление отрезка пополам и построение серединного перпендикуляра к отрезку;
- б) построение биссектрисы угла;
- в) проведение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой;
- г) проведение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой;
- д) построение касательной к окружности, проходящей через данную точку;
- е) построение треугольника по его элементам;
- ж) построение правильных многоугольников, вписанных и описанных около данной окружности и др.

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, какие задачи на построение выполнимы с помощью циркуля и линейки, а какие — нет.

Построение циркулем и линейкой предполагает возможность выполнения следующих операций:

1. Проведение прямой через две данные точки.
2. Проведение окружности с центром в данной точке и данным радиусом.

В результате этих операций к точкам данной совокупности можно присоединять:

- а) точку пересечения двух прямых, полученных в результате операции 1;
- б) точки пересечения прямой и окружности, полученных в результате операций 1 и 2;
- в) точки пересечения двух окружностей, полученных в результате операции 2.

Выясним, какие точки можно построить циркулем и линейкой, исходя из данной совокупности точек $A_0, A_1, \dots$.

С помощью циркуля и линейки построим оси координат так, чтобы точка A_0 была началом координат, а отрезок A_0A_1 — единичным отрезком на оси абсцисс.

Каждой точке A на плоскости можно сопоставить её координаты (x, y) . Ясно, что точку A можно построить тогда и только тогда, когда можно построить её координаты.

Переходя от точек плоскости к координатам, выясним, какие числа можно построить, исходя из данной совокупности действительных чисел.

Теорема. Число c можно построить, исходя из данной совокупности чисел, тогда и только тогда, когда оно выражается через данные числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

Доказательство. Покажем достаточность. Если числа a и b можно построить, то можно построить и числа $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$.

Например, для построения $a \cdot b$ сначала построим какой-нибудь угол и отложим на его сторонах отрезки $OA = a$, $OE = 1$ и $OB = b$ (рис. 217). Через точку B проведём прямую, параллельную EA , и обозначим C точку её пересечения с прямой OA . Отрезок OC будет искомым. Действительно, по теореме о пропорциональных отрезках

$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OE}$ и, следовательно,

$$OC = OA \cdot OB = a \cdot b.$$

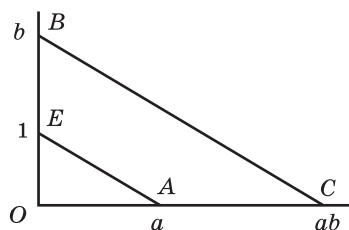


Рис. 217

Аналогичным образом для данных отрезков a , b , c строятся отрезки $\frac{a}{b}$ (рис. 218) и $\sqrt{c}$ (рис. 219).

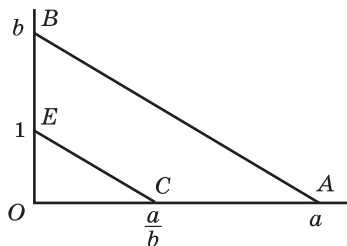


Рис. 218

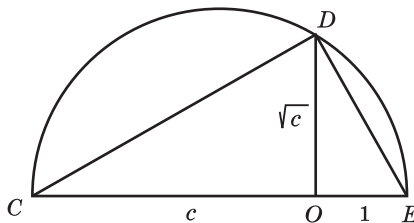


Рис. 219

Таким образом, любое число, выражающееся через данные числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня, можно построить.

Покажем необходимость, а именно, что построения с помощью циркуля и линейки, исходя из данной совокупности действительных чисел, приводят только к числам, выражающимся через данные с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение двух прямых, проходящих через точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ и $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$, координаты которых принадлежат данной совокупности.

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2, \\ (y_3 - y_4)x + (x_4 - x_3)y = x_4y_3 - x_3y_4. \end{cases}$$

Переобозначив коэффициенты, перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Координаты x и y выражаются через координаты точек A_1, A_2, A_3 и A_4 по формулам:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

т.е. с помощью операций вычитания, умножения и деления.

2. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение прямой, проходящей через данные точки $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$, и окружности с центром в данной точке $A_3(x_3, y_3)$ и радиусом r .

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r^2. \end{cases}$$

Переобозначив коэффициенты, перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r^2. \end{cases}$$

Выразим x или y из первого уравнения и подставим во второе. Получим квадратное уравнение, корни которого выражаются через числа данной совокупности с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

3. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение двух окружностей, проходящих через данные точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, с данными радиусами r_1, r_2 .

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе. Получим линейное уравнение

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2.$$

Добавим к нему второе уравнение. Получим систему, аналогичную системе из второго случая. Поэтому её решения выражаются через числа данной совокупности с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Что и завершает доказательство. ■

Рассмотрим теперь некоторые классические задачи на построение.

I. Задача удвоения куба. Она состоит в построении куба, имеющего объём, вдвое больший данного. Точнее, для данного единичного отрезка требуется построить циркулем и линейкой ребро куба, имеющего объём, равный двум.

Длина ребра искомого куба является действительным корнем кубического уравнения $x^3 - 2 = 0$. Поэтому для ответа на вопрос, можно или нельзя выполнить построение циркулем и линейкой, нужно ответить на вопрос о том, можно ли число $\sqrt[3]{2}$ выразить через 1 с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

В курсе алгебры доказывается, что этого сделать нельзя, следовательно, задача удвоения куба не разрешима.

II. Задача о трисекции угла состоит в делении произвольного угла на три равные части.

Конечно, некоторые углы, например угол, равный 90° , можно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки. Рассмотрим вопрос о возможности такого деления произвольного угла φ .

Используя тригонометрические формулы, нетрудно получить уравнение

$$\cos \varphi = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3}.$$

Следовательно, число $\cos \frac{\varphi}{3}$ является корнем уравнения

$$4x^3 - 3x - \cos \varphi = 0.$$

В частности, если $\varphi = 60^\circ$, получаем уравнение $8x^3 - 6x - 1 = 0$, которое заменой $2x$ на y можно привести к виду $y^3 - 3y - 1 = 0$.

Таким образом, ответ на вопрос о возможности деления угла в 60° на три равные части сводится к вопросу о том, можно ли корень этого уравнения выразить через 1 с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

В курсе алгебры доказывается, что этого сделать нельзя, следовательно, задача о трисекции угла не разрешима.

III. Задача о квадратуре круга состоит в построении квадрата, равновеликого данному кругу.

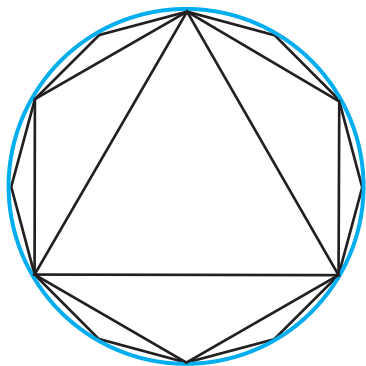


Рис. 220

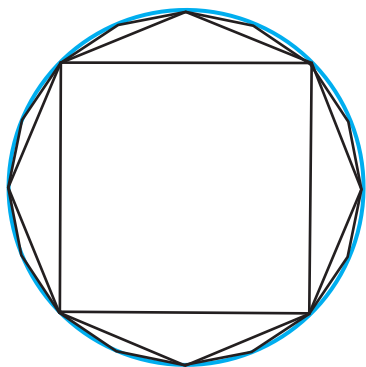


Рис. 221

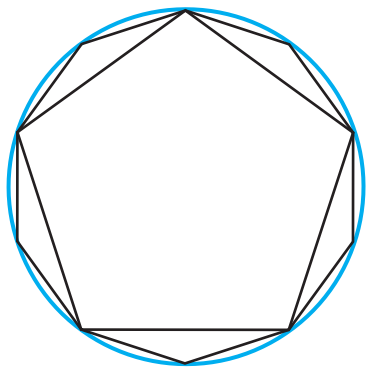


Рис. 222

Она не разрешима с помощью циркуля и линейки, так как сводится к построению числа, которое нельзя выразить через 1 с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

IV. Задача о построении правильных многоугольников, вписанных в единичную окружность. Пусть дана окружность единичного радиуса. С помощью циркуля и линейки можно вписать в эту окружность правильные треугольник, шестиугольник и т. д., $3 \cdot 2^n$ -угольник (рис. 220). Аналогично в единичную окружность можно вписать правильные $2 \cdot 2^n$ -угольники (рис. 221), правильные $5 \cdot 2^n$ -угольники (рис. 222).

Полностью вопрос о возможности построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки был исследован Гауссом. А именно, он доказал, что правильный n -угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда n представимо в виде произведения степени двойки и различных простых чисел Ферма, т. е. простых чисел вида $2^{2^n} + 1$. В частности, из этого следует, что правильный семиугольник нельзя построить циркулем и линейкой, а правильный семнадцатигульник — можно.

Упражнения

1. Постройте середину заданного отрезка.
2. Постройте медиану данного треугольника.
3. Постройте биссектрису данного треугольника.
4. Постройте высоту данного треугольника.
5. Постройте центр вписанной окружности данного треугольника.

6. Постройте центр описанной окружности данного треугольника.
7. Постройте угол величиной: а) 90° ; б) 45° ; в) $22^\circ 30'$.
8. Постройте угол вдвое больше данного.
9. По данным отрезкам длины 1 и a постройте отрезок длины: а) a^2 ; б) a^3 ; в) $\frac{1}{a}$; г) $\frac{1}{a^2}$.
10. По данным отрезкам длины 1 и a , b укажите способ построения отрезка $\frac{a}{b}$.
11. По данным отрезкам длины 1 и c укажите способ построения отрезка $\sqrt{c}$.
12. Для данного отрезка a постройте отрезок $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}a$.
13. Постройте прямоугольный треугольник по заданным катетам.
14. Постройте прямоугольный треугольник по заданному катету и гипотенузе.
15. На данной прямой найдите центр окружности, проходящей через две заданные точки.
16. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.
17. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить дугу данной окружности пополам?
18. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол величиной: а) 10° ; б) 15° ; в) 30° ; г) 40° ; д) 50° ?
19. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить отрезок, равный длине данной окружности?

ОТВЕТЫ

§ 1. 1. а) Бесконечно много; б) одну. 2. а) Бесконечно много; б) бесконечно много; в) ни одной. 3. Нет. 4. Диаметральны противоположные. 5. Иметь общий центр. 6. а) Если расстояние между центрами сфер больше суммы или меньше разностей их радиусов, то сферы не имеют общих точек; б) если расстояние между центрами сфер равно сумме или разности их радиусов, то сферы касаются; в) если расстояние между центрами сфер меньше суммы и больше разностей их радиусов, то сферы пересекаются. 7. Окружностью. 8. 4 см. 9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 10. $\frac{\pi R^2}{4}$. 11. 4 см. 12. 30 см. 13. а) Две; б) одну; в) бесконечно много. 14. Да. 15. а) Плоскость, параллельная данным; б) две биссектральные плоскости без линии их пересечения. 16. $R : \sin \frac{\varphi}{2}$. 17. а) Если расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса, то сфера и прямая не имеют общих точек; б) если расстояние от центра сферы до прямой равно радиусу, то прямая касается сферы; в) если расстояние от центра сферы до прямой меньше радиуса, то сфера и прямая пересекаются. 18. Бесконечно много. 19. а), б) Бесконечно много. 21. а) Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая; б) две плоскости, параллельные данной плоскости; в) две сферы или одна сфера, концентрические с данной сферой. 22. Да, если одна из сфер не содержится в другой.

§ 2. 1. а), б) Да; в), г) нет. 2. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 3. 1,5 дм. 4. Да. 5. 2 дм. 7. 3 м. 8. Пирамида, в основании которой ромб. 9. Около него можно описать окружность. 10. Высота — $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, центр — середина AB . 14. Около основания призмы можно описать окружность. 15. Призма, в основании которой ромб. 16. Тупоугольный. 17. а) В основании лежит остроугольный треугольник; б) в основании лежит прямоугольный треугольник; в) в основании лежит тупоугольный треугольник. 18. 13 см. 19. Нет. 22. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 23. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 24. 4.

§ 3. 1. Да, центр куба. 2. Нет. 3. Высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в основание. 4. Пирамида, в основании которой прямоугольник. 6. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. 7. $\frac{c(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2}$. 8. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. 9. $\frac{h}{3}$. 10. $\frac{1}{2} a \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. 11. $\frac{a\sqrt{3}}{4 + \sqrt{2}}$. 12. $\sqrt{3}$. 13. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 15. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

§ 4. 1. Бесконечно много. 2. Расстояние между основаниями цилиндра. 3. Круг, равный основаниям. 4. Прямоугольником. 5. Прямоугольником. 6. а) Да; б) нет; в) да. 7. а) Одна; б) бесконечно много. 10. 5 м. 11. $2r\sqrt{d^2 - 4r^2}$. 12. $\frac{\sqrt{Q}}{2}$. 13. $4\pi \text{ см}^2$. 14. 3 дм. 15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 16. $\sqrt{2}Q$. 17. а) Ось цилиндра; б) круг, лежащий в пло-

скости, параллельной основаниям и проходящей через центр симметрии цилиндра. 18. Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая. 19. Два пересекающихся круга. 20. Кругом. 21. Равнобедренным треугольником. 22. 16 см^2 .

23. $h\sqrt{2}/2$. 24. $\sqrt{3} \text{ см}^2$. 25. 10 м. 26. 5 см, $5\sqrt{3} \text{ см}$. 27. 90° . 28. $9\pi \text{ м}^2$. 29. $16\sqrt{3} \text{ см}^2$.

30. Осевое сечение. 31. Осевое сечение. 32. Ось конуса.

§ 5. 1. Круг. 2. Прямые, содержащие стороны прямоугольника или пересекающие его и параллельные его стороне. 3. Например, вращением прямоугольной трапеции вокруг высоты, опущенной из вершины тупого угла на нижнее основание, которое меньше удвоенного верхнего основания. 4. Конус. 5. а) Прямоугольный треугольник; б) прямоугольная трапеция. 6. Шар. 13. Цилиндр. 14. а) Цилиндр; б) фигура, ограниченная двумя равными частями гиперboloида вращения. 15. Конус. 16. Конус, если основание высоты принадлежит основанию пирамиды. 17. Фигура, ограниченная гиперboloидом вращения и двумя параллельными плоскостями. 18. а) Биконус; б) фигура, ограниченная гиперboloидом вращения и двумя параллельными плоскостями; в) фигура, ограниченная двумя гиперboloидами вращения и двумя параллельными плоскостями. 19. а) Фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух конусов и гиперboloидом вращения между ними; б) фигура, ограниченная тремя гиперboloидами вращения и двумя параллельными плоскостями; в) фигура, ограниченная четырьмя гиперboloидами вращения и двумя параллельными плоскостями. 20. а) Фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух конусов и трёх гиперboloидов вращения между ними; б) фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух усечённых конусов, гиперboloидом вращения и двумя параллельными плоскостями; в) фигура, ограниченная четырьмя гиперboloидами вращения и двумя параллельными плоскостями.

§ 6. 1. 2г. 2. а) Нет; б) да. 3. Нет. 5. $\frac{\sqrt{4r^2 + h^2}}{2}$. 6. $\frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2}$. 7. Нет. 8. Перпен-

дикулярна. 9. Параллельны. 10. Не лежащие внутри соответствующей цилиндрической поверхности. 11. Не лежащие внутри соответствующей цилиндрической поверхности и параллельные её оси. 12. Если оси цилиндров параллельны и один из них не содержится в другом. 13. а), б), г), д) Да; в) нет. 14. а) Не всегда; б), г), д) да; в) нет.

§ 7*. 1. Форму эллипса. 4. $\cos \varphi$; 60° . 9. а) $\frac{x^2}{R^2} + \frac{k^2 y^2}{R^2} = 1$; б) $2R$, $2\frac{R}{k}$;

в) $(-c, 0)$, $(c, 0)$, где $c = \frac{R\sqrt{k^2 - 1}}{k}$. 11. а) $\pi R^2 \frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\pi R^2 \sqrt{2}$; в) $2\pi R^2$. 18. $-\frac{\pi}{2}$.

20. $6\sqrt{\pi^2 + 1} \text{ см}$.

§ 8. 1. $d\frac{\sqrt{3}}{6}$. 2. $r(\sqrt{2}-1)$. 3. 3 м. 4. $\frac{r}{h}(\sqrt{r^2 + h^2} - r)$. 5. $r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. 7. $d\frac{\sqrt{3}}{3}$. 8. r .

9. $6\frac{1}{4} \text{ м}$. 10. 8 см; 2 см. 11. $\frac{r^2 + h^2}{2h}$. 12. $\frac{r}{\sin 2\varphi}$. 13. $\frac{b^2}{2h}$. 14. а), в) Да; б) нет. 15. а), в),

г) Да; б) нет. 16. Сумма радиусов оснований усечённого конуса равна его образующей.

17. $\sqrt{Rr}$.

- § 9*. 1. Эллипса, параболы или гиперболы. 2. Эллипса, параболы или гиперболы. 3. а) Гипербола; б) парабола. 4. а), б), в), г) Да. 5. Фигура, ограниченная параболой. 6. Фигура, ограниченная: а) гиперболой; б) параболой; в) эллипсом. 7. а) Больше 60° ; б) 60° ; в) меньше 60° . 8. $4c \cdot y = x^2$, где c — расстояние от фокуса до оси абсцисс. 9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 13. $\frac{\pi\sqrt{6}}{16}$.

§ 10. 1. Центральнo-симметричные: куб, прямоугольный параллелепипед, шар и др.; не центральнo-симметричные: пирамида, конус и др. 2. Может. 3. Центр симметрии — точка пересечения данных прямых. Оси симметрии — две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми, и прямая, проходящая через точку пересечения данных прямых и перпендикулярная их плоскости. Если данные прямые перпендикулярны, то сами они также являются осями симметрии. Плоскости симметрии: плоскость данных прямых и две плоскости, проходящие через биссектрисы углов, образованных данными прямыми, и перпендикулярные их плоскости. 4. 9 осей симметрии. 5. Бесконечно много. 6. Три плоскости симметрии. 7. Пирамида, в основании которой параллелограмм, может иметь ось симметрии, но не имеет плоскости симметрии. Правильная треугольная пирамида имеет плоскости симметрии, но не имеет осей симметрии. 8. Правильные треугольные, четырёхугольные пирамиды. 9. Третьего. 10. Центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего порядка. 11. а) Семь осей симметрии; б) семь плоскостей симметрии. 12. а) $2n - 1$ осей симметрии, одна ось симметрии $(2n - 1)$ -го порядка; б) $2n$ плоскостей симметрии. 13. Центром симметрии. 14. а) 3 оси симметрии; б) 3 плоскости симметрии. 15. Центром симметрии. 16. Нет. 17. а) Одна ось симметрии, n плоскостей симметрии; б) нет осей симметрии, n плоскостей симметрии (n — число сторон основания пирамиды). 18. а) Одна, если n чётно, и ни одной, если n нечётно; б) n плоскостей симметрии. 19. Может: например, пирамида, в основании которой ромб, может иметь ось симметрии и две плоскости симметрии. 20. Нет. 21. Да. 22. Тетраэдр имеет оси симметрии третьего порядка; куб имеет центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии и оси симметрии третьего порядка; октаэдр имеет центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего и четвёртого порядков; икосаэдр имеет центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего и пятого порядков; додекаэдр имеет центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего и пятого порядков. 23. Нет.

§ 11. 1. а) Центральная симметрия; б) осевая симметрия; в) зеркальная симметрия. 2. а) Центральная симметрия, зеркальная симметрия, осевая симметрия, параллельный перенос; б) центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, зеркальная симметрия; в) осевая симметрия. 6. Поворот, зеркальная симметрия. 7. а) Поворот; б) зеркальная симметрия; в) зеркальная симметрия. 9. При повороте на 120° вокруг оси, проходящей через центр закрашенной грани; при симметрии относительно плоскости, перпендикулярной закрашенной грани. 10. 24. 11. а) Да, параллельный перенос, зеркальная симметрия; б) да, осевая симметрия; в) нет. 12. Поворота на 90° вокруг оси, перпендикулярной закрашенной грани; осевой симметрии относительно оси, перпендикулярной закрашенной грани; зеркальной симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных закрашенной грани. 13. 48. 14. а) 48; б) 120; в) 120.

§ 12*. 1. Боковая поверхность цилиндра. 2. а), б), в) Да. 3. Две. 4. а) Да; б) нет. 5. а), г). 6. а) Две; б), в) одна. 7. Две. 8. Две сцепленные дважды перекручен-

ные ленты. 9. Сцепленные лист Мёбиуса и четырежды перекрученная лента. 11. Лист Мёбиуса; дважды перекрученная лента. 13. Одна. 14. в) Две; г) одну. 15. Односторонняя поверхность; граница — треугольник ABC .

§ 13. 1. а) Нет; б) да. 2. Куб с ребром, равным 1, и прямоугольный параллелепипед с рёбрами 1, 2 и 0,5. 3. Семь куб. ед. 4. Три куб. ед. 5. 20 см^3 . 6. $1 : 1$.

7. $\frac{8\sqrt{3}}{9} \text{ см}^3$. 8. а), б), в) Да; г) нет. 9. $\frac{\pi \cdot a^3}{4} \text{ см}^3$. 10. Та, которая шире. 11. 60 см^3 .

12. 200 см^3 . 13. а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) увеличится в 4 раза, в 9 раз, в n^2 раз; в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в n^3 раз. 14. 12 см. 15. $1 : 3$.

16. $V = \frac{n \cdot a^2 h}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$. 17. $\frac{3V}{4}$. 18. а) $1 : 8$; б) $1 : 27$; в) $1 : n^3$. 19. $\pi \cdot a^3$. 20. 3 см. 21. 140 см^3 .

22. 3 м³. 23. $V = \frac{\pi \cdot d^3}{4} \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi$. 24. $a : b$. 25. В 2 раза. 26. $243\pi \text{ см}^3$. 27. 4 см.

28. $\pi R^3 \operatorname{tg} \varphi$. 29. Часть $ABCC_1B_1$. 32. Верно, если n чётно. 33. $\frac{1}{6}$. 34. $\frac{16\sqrt{3}}{9} a^3$.

§ 14. 1. Нет. 2. Да. 3. Да. 4. Да. 5. $2 : 1$. 6. Да. 7. Да. 8. $3 : 1$. 9. $V = S \cdot b \cdot \sin \varphi$. 10. 168 дм^3 . 11. $Q \cdot b \cdot \sin \varphi$. 12. $\pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \sin \varphi$. 13. $\sqrt{2} \text{ м}^3$. 14. $\frac{\sqrt{3}}{8} ad \sqrt{4a^2 - d^2}$. 15. 3060 см^3 .

18. Плоскость, проходящая через центры симметрии параллелепипедов. 19. Объём фигуры Φ_2 в k раз больше объёма фигуры Φ_1 .

§ 15. 1. Одну треть. 2. $\frac{1}{3} abh$. 3. $\frac{\sqrt{3}a^2h}{12}$. 4. $\frac{d^2h}{6}$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. 6. $V = \frac{1}{3} a^2h$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

8. $V = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$. 9. 32 м^3 . 10. 7 см. 11. $\frac{b^3}{6}$. 12. $V = \frac{1}{12} n \cdot a^2 \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

13. Уменьшится в n раз. 14. $\frac{\sqrt{3}}{12} b^3$. 15. $\frac{1}{2} V$. 16. $\frac{1}{3}$. 17. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 18. $\frac{1}{6}$. 19. $\frac{3a^3}{4}$. 20. $1 : 7$.

21. а) Равнобедренный треугольник; б) $\frac{\sqrt{11}}{16} a^2$; в) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{33}}{33}$; г) $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ и $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

22. $\frac{3a^3}{4}$. 23. $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. 24. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. 25. $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$. 26. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. 27. $\frac{a^3}{24}$. 29. $m : n$. 30. $\frac{V}{4}$.

§ 16. 1. а) В 3 раза; б) в 4 раза. 2. Увеличится в 2 раза. 3. $120\pi \text{ см}^3$. 4. $1 : 7$.

5. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{b^2 - R^2}$. 6. $16\pi \text{ см}^3$. 7. $72\pi \text{ см}^3$. 8. $9\pi \text{ см}^3$. 9. $\frac{\pi a^3}{4}$. 10. Нет. 11. $19\pi \text{ см}^3$.

12. $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$. 13. $\frac{\pi a^2 h}{36}$. 14. $\frac{\pi a^2 h}{6}$. 15. $10\frac{1}{3}$ м³. 16. 2325 м³. 17. $\frac{a^3 - b^3}{2}$. 18. $\frac{\pi(R^3 - r^3)}{3}$.

19. 8 см. 20. 7 см. 21. $R = 4r$. 22. $\frac{7}{27}V$. 23. 63π .

§ 17. 1. $\frac{32\pi}{3}$ см³. 2. а) В 27 раз; б) в 64 раза. 3. 6 см. 4. 27. 5. $\left(3\frac{5}{7}\right)^3 \approx 50$ раз.

6. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 7. $\frac{4000}{3}\pi$ см³. 8. $5 \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ см. 9. $\frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3)$. 10. 288π см³. 11. $\frac{7}{250}$.

12. $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)$. 13. 112500π см³. 14. Если центр шара лежит между па-

раллельными плоскостями, то $V = \frac{434\pi}{3}$ см³. В противном случае $V = \frac{38\pi}{3}$ см³.

15. $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$. 16. $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$. 17. $\frac{\pi a^3 (15 - 8\sqrt{2})}{12}$. 18. $2\pi^2 r^2 h$.

§ 18. 1. 6. 2. а) $\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{3}$. 3. 24 м². 4. 12π м². 5. Двумя способами, в обоих площади равны. 6. 4π м². 7. $6S$. 8. 24π м². 9. $a\left(3b + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. 10. $\frac{1}{2}n \cdot a^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} + n \cdot a \cdot b$.

11. $2 : 1$. 12. $2\sqrt{2}Q$. 13. $\frac{a}{2}$. 14. πQ . 15. 20 см². 16. $4Q$. 17. 60° . 18. $\pi : 4$. 19. $\pi r^2 + \pi R^2 + \pi b(R + r)$. 20. 169π см². 21. 4. 22. Равнобедренный.

§ 19. 1. 12 см². 2. Увеличится в: а) 4 раза; б) 9 раз; в) n^2 раз. 3. $\approx 13,8$ раза.

4. 400π см². 5. 400π см². 6. $\frac{1125\pi}{2}$ м³. 7. $2 : 3$. 8. $m\sqrt{m} : n\sqrt{n}$. 9. $\sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$. 10. В три раза. 11. 8π дм². 12. $2 : 3$, $2 : 3$. 15. 2500π дм². 16. $2\pi R(R - x)$. 17. $2\pi R \times \left(\sqrt{R^2 - R_2^2} \pm \sqrt{R^2 - R_1^2}\right)$, $R_1 \geq R_2$. 18. $\frac{4}{3}\pi R^2$. 19. $\frac{2}{3}\pi R^2$.

§ 20. 2. а) (1, 3, 0), (5, -6, 0); б) (0, 3, 4), (0, -6, 2); в) (1, 0, 0), (5, 0, 0); г) (0, 0, 4), (0, 0, 2). 3. а) Плоскость Oyz ; б) плоскость Oxz ; в) плоскость Oxy ; г) ось Oz ; д) ось Oy ; е) ось Ox ; ж) начало координат. 4. а) 3; б) 2; в) 1. 5. а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. 6. а) Плоскость, параллельная плоскости Oyz и проходящая через точку (1, 0, 0); б) прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку (1, 1, 0). 7. а) $z = x$; б) $x = y = z$. 8. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(1, 1, 0)$, $A_1(1, 0, 1)$, $B_1(0, 0, 1)$, $C_1(0, 1, 1)$, $D_1(1, 1, 1)$. 9. $B(-2, -2, 0)$, $C(2, -2, 0)$, $D(2, 2, 0)$, $A_1(-2, 2, 4)$, $B_1(-2, -2, 4)$, $C_1(2, -2, 4)$, $D_1(2, 2, 4)$. 10. $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$. 11. Не имеет общих

точек с координатной плоскостью Oxy ; касается координатной плоскости Oxz ; пересекает координатную плоскость Oyz . 12. Пересекает ось Ox в точке с координатами $(1, 0, 0)$;

не проходит через начало координат. 13. а) Да; б), в) нет. 14. $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

15. а) $\left(0, \frac{3}{2}, 2\right)$; б) $\left(3, \frac{3}{2}, 1\right)$. 16. а) $(-x, y, z), (x, -y, z), (x, y, -z)$; б) $(-x, -y, z),$

$(-x, y, -z), (x, -y, -z)$; в) $(-x, -y, -z)$. 17. 4 случая: 1) $C(0, \sqrt{3}, 0), D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$;

2) $C(0, -\sqrt{3}, 0), D\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; 3) $C(0, \sqrt{3}, 0), D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; 4) $C(0, -\sqrt{3}, 0),$

$D\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

§ 21. 1. 3, $\sqrt{29}$. 2. Точка A . 3. $\sqrt{2}(5 + \sqrt{7} + \sqrt{19})$. 4. Равносторонний. 5. а) $C(2, -5, 0), R = 3$; б) $C(0, 6, -1), R = \sqrt{11}$. 6. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. 7. а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$; в) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$. 8. а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 5$; б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 10$; в) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 13$. 9. 8 сфер, $(x \pm R)^2 + (y \pm R)^2 + (z \pm R)^2 = R^2$. 10. $O(2, 0, 0), R = 2$. 11. $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 16$. Точка M принадлежит, а точка K не принадлежит этой сфере. 12. Лежит внутри сферы. 13. Не имеют общих точек. 14. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$. 15. Цилиндрическая поверхность.

§ 22. 1. а) $(-2, 6, 1)$; б) $(1, 3, 0)$; в) $(0, -3, 2)$; г) $(-5, 0, 5)$. 2. а) $(-7, 9, -16)$; б) $(5, -8, -2)$; в) $(8, 0, 19)$. 3. $(-a, -b, -c)$. 4. $x_2 = t \cdot x_1, y_2 = t \cdot y_1, z_2 = t \cdot z_1$. 5. $(2, 0, 4); (2, 3, 4); (0, 0, 4); (0, 3, 0)$. 6. $(1, 3, -2); (1, -3, 6)$. 7. а) $(1, -2, 30)$;

б) $\left(-1, 2, 3\frac{1}{4}\right)$; в) $(11, -22, 7)$. 8. $(5, -6, -7)$. 9. а) Первая и вторая координаты равны

нулю; б) вторая и третья координаты равны нулю. 10. а) $(1, 2, 4), (1, 2, 2)$; б) $(2, 2, 3), (0, 2, 3)$. 11. а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{65}$; в) $\sqrt{5}$. 12. $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. 13. $\sqrt{14}, \sqrt{46}$.

§ 23. 1. а) 90° ; б) 135° ; в) 90° ; г) 120° ; д) 135° . 2. -4. 3. а) Плюс; б) минус.

4. а) $\cos \varphi = -\frac{4\sqrt{6}}{21}$; б) $\varphi = 45^\circ$. 5. $z = 2$. 9. 60° . 10. $t = 0$. 14. а) $\frac{1}{2}a^2$; б) $-\frac{1}{2}a^2$; в) $-\frac{1}{2}a^2$; г) $\frac{1}{4}a^2$;

д) $-\frac{1}{4}a^2$; е) 0. 17. а) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $90^\circ, \cos \varphi = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \varphi = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; в) $180^\circ, 90^\circ, 90^\circ$; г) $90^\circ,$

$\cos \varphi = \frac{3}{5}, \cos \varphi = \frac{4}{5}$. 18. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 19. 24.

- § 24.** 1. $z = 0, y = 0, x = 0$. 2. A, C, D . 3. $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{3}$. 4. $\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right), \left(0, -\frac{d}{b}, 0\right), \left(0, 0, -\frac{d}{c}\right)$. 5. $-x + y + z - 1 = 0$. 6. $2x - 4y + z + 21 = 0$. 7. а) $x + y + z - 1 = 0$; б) $x + 4y + 3z - 5 = 0$. 8. а) $y = -2$; б) $y = 2$; в) $x + y = 3$. 9. а), в). 10. а) $3x + y - z - 7 = 0$; б) $x - y + 5z + 7 = 0$. 12. а) Да; б) нет. 13. а) $\cos \varphi = \frac{1}{3}$; б) $\cos \varphi = \frac{16}{21}$. 15. а) $ax + by - cz + d = 0, ax - by + cz + d = 0, -ax + by + cz + d = 0$; б) $ax - by - cz + d = 0, -ax + by - cz + d = 0, -ax - by + cz + d = 0$; в) $-ax - by - cz + d = 0$. 16. а) 2; б) 2. 17. Да. 18. а) $O(0, 0, 0), R = 2$; б) $O(0, 1, 0), R = \sqrt{3}$; в) $O\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), R = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 19. а) $y = 3$; б) $2x - 2y + z - 9 = 0$.

§ 25*. 1. Ось Ox $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ ось Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0; \end{cases}$ ось Oz $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0, \\ z = z_0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0 + t. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$ 6. $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

7. Перпендикулярны. 8. $\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, 2\right)$. 9. Перпендикулярны. 10. $(3, 9, 10)$.

11. $\sqrt{14}$. 12. $\frac{\sqrt{19}}{4}$. 13. а) $\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = -ct - z_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = -bt - y_0, \\ z = ct + z_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -at - x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = -bt - y_0, \\ z = -ct - z_0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -at - x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = -ct - z_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -at - x_0, \\ y = -bt - y_0, \\ z = ct + z_0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = -at - x_0, \\ y = -bt - y_0, \\ z = -ct - z_0. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x = 10 + 3t, \\ y = 16 + 5t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$ 17. $\frac{5}{13}$.

18. $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$

- § 26.** 1. Системой этих неравенств. 2. а), б) Первому; в) второму. 3. Прямоугольный параллелепипед. 4. Цилиндр. 6. $|x + y| + z \leq 1, |x - y| - z \leq 1$.

8. $x^2 + y^2 \leq \left(R \frac{h-z}{h}\right)^2$, $0 \leq z \leq h$. 9. а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$.
 10. а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. 12. Октаэдр. 17. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 18. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

§ 27*. 2. Плоскость. 3. Параллелен. 4. Проходит через начало координат. 5. а) Поднимется на единицу; б) опустится на единицу. 6. -2. 8. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$.

9. С 1-го склада — 10 т, со 2-го — 20 т, с 3-го — 5 т. 10. С 1-го склада — 0 т, со 2-го и 3-го — по 17,5 т. 11. Хватит. Наименьшее число станков равно 44, из них 20 должны работать в первом режиме.

§ 28*. 2. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 3. $A(2, 45^\circ)$, $B(10, 180^\circ)$, $C(2, -60^\circ)$, $D(2, 150^\circ)$.

4. Да. 5. а) Окружность; б) луч. 6. $(1, 60^\circ)$, $(1, 120^\circ)$, $(1, 180^\circ)$, $(1, 240^\circ)$, $(1, 300^\circ)$. 13. Спираль Архимеда.

§ 29*. 1. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(0, -\sqrt{3}, -1)$, $(0, 0, 1)$. 2. А: $r = \sqrt{3}$, $\sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $B(\sqrt{2}, 45^\circ, 180^\circ)$; $C(2, 90^\circ, 0^\circ)$. 3. $(0, 0^\circ, 0^\circ)$; $(1, 0^\circ, 0^\circ)$; $(\sqrt{2}, 0^\circ, 45^\circ)$;

$(1, 0^\circ, 90^\circ)$; $(1, 90^\circ, 0^\circ)$; $(\sqrt{2}, 45^\circ, 0^\circ)$; $(\sqrt{3}, \psi, \varphi)$, $\sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(\sqrt{2}, 45^\circ, 90^\circ)$.

4. а) $(r, -\psi, \varphi)$, $(r, \psi, 180^\circ - \varphi)$, $(r, \psi, -\varphi)$; б) $(r, -\psi, -\varphi)$, $(r, -\psi, 180^\circ - \varphi)$, $(r, \psi, 180^\circ + \varphi)$; в) $(r, -\psi, 180^\circ + \varphi)$. 9. На полюсах. 10. а) Сфера; б) коническая поверхность; в) полуплоскость. 11. а) Полушар; б) полушар; в) четверть шара. 12. 2.

§ 31. 1. 9. 2. 20. 3. 1, 2, 3, 5, 7. 6. Внутри лежат точки B , D и F , снаружи — A , C и E . 9. Многоугольники изображены на рисунках б) и г). 10. Число вершин равно числу сторон. 11. а) 2; б) 3; в) 4; г) $n - 2$. 12. а) 9; б) $\frac{n(n-3)}{2}$. 13. а), в) Нет; б) да.

14. а) Да, пятиугольник; б) да, четырёхугольник; в) да, многоугольник с числом сторон, большим пяти. 15. а) Одна; б) пять; в) $\frac{n(n-3)}{2}$. 17. Да. 18. Нет.

§ 32. 1. $\frac{\psi - \varphi}{2}$. 2. $\psi - \varphi$. 4. 70° . 5. 36° , 72° , 108° , 144° . 6. Семь. 7. а) 10; б) 15.

9. Три. 11. а), б) 180° . 12. а) -5; б) -7.

§ 33. 1. Нет. 2. Нет. 3. Да. 4. а) В середине гипотенузы; б) внутри треугольника; в) вне треугольника. 5. К вершине большего угла. 6. К меньшей. 7. К большей. 8. Нет. 10. 140° и 20° .

§ 34. 1. $2 : 1$. 2. $3 : 1$. 3. Да. 4. $1 : 3$. 6. $1 : 2$. 7. $\frac{2}{7}$.

§ 35. 1. а) 10 см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см; г) 5 см; д) 10 см. 2. а) 3 см; б) $3\sqrt{2}$ см;

в) $3\sqrt{3}$ см; г) 6 см; д) 3 см. 3. а) 84; б) 12. 7. $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

8. $h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$. 12. $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 - 2dc \cos \varphi}$, $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2dc \cos \varphi}$.

13. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}$; $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}$.

§ 36. 1. 120° . 3. 22° . 7. 20° . 8. 80° , 60° , 40° . 9. Дуги двух окружностей одинакового радиуса, опирающихся на отрезок AB , без точек A и B . 10. Точка пересечения прямой c и серединного перпендикуляра к отрезку AB . 11. 8 см. 12. $\sqrt{127500} \approx 357$ (км).

§ 37. 1. а), в) Нет; б) да. 2. Нет. 3. Да. 4. Нет. 5. Нет. 6. 140° и 130° . 7. $AC^2 = \frac{(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab}{ab + cd}$, $BC^2 = \frac{(a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad}{bc + ad}$. 9. а), б) Нет; в), г), д) да. 10. Да. 11. Нет. 12. Да, 34 см. 13. Нет. 14. 7 см; 30 см.

§ 38. 2. 2 см. 3. а) Точки, расположенные внутри параболы; б) точки, расположенные вне параболы. 4. а) Ветви параболы расширяются; б) ветви параболы сжимаются. 8. Директриса. 15. Построим две перпендикулярные касательные. Точка их пересечения будет принадлежать директрисе. Аналогично строим вторую точку, принадлежащую директрисе, и проводим через них прямую. Она и будет директрисой параболы. С центрами в каких-нибудь двух точках параболы и радиусами, равными расстояниям от этих точек до директрисы, проводим окружности. Фокус параболы будет точкой пересечения этих окружностей.

§ 39. 2. c ; точки пересечения эллипса с прямой, проходящей через фокусы. 3. 1 см. 4. Эллипс. 6. а) Эллипс приближается к окружности; б) эллипс растягивается вдоль прямой, проходящей через фокусы, и сжимается вдоль перпендикулярной ей прямой. 7. Две точки. 8. а) Точки внутри эллипса; б) точки вне эллипса. 9. Эллипс с фокусами A и B , за исключением двух точек, принадлежащих прямой AB . 10. Эллипс.

§ 40. 2. Гипербола. 4. а) Точки, расположенные между ветвями гиперболы; б) точки, расположенные внутри ветвей гиперболы. 5. 1 см. 6. а) Ветви гиперболы сжимаются; б) ветви гиперболы расширяются. 7. Гипербола. 8. Ветви гиперболы. 10. Точки пересечения прямой F_1F_2 с гиперболой.

§ 41. 17. Да. 18. а), г), д) Нет; б), в) да. 19. Нет.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсцисса точки в пространстве 74
Аналитическое задание пространственных фигур 91
Аппликата точки в пространстве 74
- Боковая поверхность
— конуса 16
— цилиндра 15
Большая окружность сферы 4
Большая ось эллипса 27
— полуось эллипса 27
Большой круг шара 4
Бутылка Клейна 48
- Вектор нормали 85
Вершина конуса 16
— ломаной 118
— многоугольника 120
Винтовая линия 91
Вращение 19
Высота конуса 16
- Гипербола 35, 162
Гиперболоид вращения 20
- Движение 42
Диагональ многоугольника 121
Директриса параболы 34, 153
- Задача о квадратуре круга 169
— о трисекции угла 169
— удвоения куба 169
— Фаньяно 130
— Ферма 133
Задачи оптимизации 94
Зеркальная симметрия 39
Зеркально-симметричные фигуры 39
- Касательная плоскость к конусу 31
— к сфере 4
— к цилиндру 25
Касательная прямая к сфере 5
Компьютерная программа «Математика» 110
Коническая поверхность 21
Конические сечения 33
Конус 15
— вписанный 30
— круговой 55
— наклонный 16
— описанный 30
— прямой 16
— усечённый 16
Координатные векторы 79
— плоскости 74
— прямые 74
Координаты вектора 79
— полярные 99
— сферические 103
— точки 74
- Лист Мёбиуса 45
Логарифмическая спираль 101
Локсодромия 105
Ломаная 118
— замкнутая 118
— простая 118
- Малая ось эллипса 27
— полуось эллипса 27
Меридиан 105
Многогранник
— вписанный в сферу 8
— описанный около сферы 12
Многоугольник 120
— вписанный 149
— выпуклый 120
— описанный 149
- Начало координат 73
- Образующая конуса 16
— цилиндра 15
Объём конуса 62
— параллелепипеда 51
— пирамиды 58
— призмы 51
— усечённого конуса 63
— фигур в пространстве 49
— цилиндра 50
— шара 65
— шарового кольца 66
— пояса 67
— сегмента 66
— сектора 67
Окружность вневписанная 141
— девяти точек (Эйлера) 133
Ордината точки в пространстве 74
Ориентация поверхности 44
Ортодромия 105
Осевая симметрия 38
Осевое сечение
— конуса 17

- — цилиндра 15
- Оси координат 74
- Основание конуса 16
- Основания цилиндра 15
- Ось вращения 19
 - абсцисс 74
 - аппликат 74
 - конуса 17
 - ординат 74
 - параболы 20
 - полярная 99
 - симметрии 38
 - — n -го порядка 42
 - цилиндра 15
- Парабола 20, 34, 53
- Параболоид вращения 20
- Параллель 105
- Параметрические уравнения 88
- Плоскость
 - биссектральная 13
 - симметрии 39
- Площадь поверхности 68
 - — конуса 69
 - — многогранника 68
 - — цилиндра 68
 - — шара и его частей 71
- Поворот 19
- Полярные координаты 99
- Полярный радиус 99
 - угол 99
- Принцип Кавальери 54
- Прямая Эйлера 134
- Прямоугольная система координат 73
- Радиус сферы 4
 - шара 4
- Расстояние между двумя точками 77
- Сечения конуса 17, 33
 - сферы 4
 - цилиндра 15, 26
 - шара 4
- Симметрия 38
- Скалярное произведение векторов 81
- Скалярный квадрат 82
- Спираль Архимеда 100
- Сторона
 - ломаной 118
 - многоугольника 120
- Сфера 4
 - вписанная в конус 30
 - — в многогранник 13
 - — в цилиндр 24
 - описанная около конуса 31
 - — — многогранника 9
 - — — цилиндра 24
- Сферические координаты 103
- Теорема Ван-Обеля 139
 - косинусов 142
 - Менелая 136
 - синусов 142
 - Стюарта 143
 - Чебы 138
- Тор 20
- Точка
 - Жергона 139
 - Нагеля 141
 - Торричелли 132
- Транспортная задача 94
- Трилистник 102
- Угол 81
 - между векторами 81
 - полярный 99
- Уравнение плоскости 84
 - прямой 87
 - сферы 78
- Усечённый конус 16, 62
- Фигуры вращения 18
- Фокальное свойство гиперболы 163
 - — параболы 154
 - — эллипса 26, 158
- Фокус гиперболы 35, 162
 - параболы 34, 153
 - эллипса 33, 157
- Формула Герона 144
- Центр
 - симметрии 38
 - сферы 4
 - шара 4
- Центральная симметрия 38
- Центрально-симметричные фигуры 38
- Цилиндр 15
 - вписанный 24
 - круговой 50
 - наклонный 16
 - описанный 24
 - прямой 15
- Цилиндрическая поверхность 21
- Шар 4
- Шаровое кольцо 66
- Шаровой пояс 67
 - сегмент 66
 - сектор 67
- Эллипс 157
- Эллипсоид вращения 20

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. КРУГЛЫЕ ТЕЛА	
§ 1. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости	4
§ 2. Многогранники, вписанные в сферу	8
§ 3. Многогранники, описанные около сферы	12
§ 4. Цилиндр. Конус	15
§ 5. Поворот. Фигуры вращения.....	18
§ 6. Вписанные и описанные цилиндры.....	24
§ 7*. Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс	26
§ 8. Вписанные и описанные конусы.....	30
§ 9*. Конические сечения.....	33
§ 10. Симметрия пространственных фигур	38
§ 11. Движение	42
§ 12*. Ориентация поверхности. Лист Мёбиуса	44
Глава II. ОБЪЁМ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ	
§ 13. Объём фигур в пространстве. Объём цилиндра.....	49
§ 14. Принцип Кавальери.....	54
§ 15. Объём пирамиды	58
§ 16. Объём конуса	62
§ 17. Объём шара и его частей	65
§ 18. Площадь поверхности	68
§ 19. Площадь поверхности шара и его частей.....	71
Глава III. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ	
§ 20. Прямоугольная система координат в пространстве	73
§ 21. Расстояние между точками в пространстве.....	77
§ 22. Координаты вектора	79
§ 23. Скалярное произведение векторов	81
§ 24. Уравнение плоскости в пространстве	84
§ 25*. Уравнения прямой в пространстве.....	87
§ 26. Аналитическое задание пространственных фигур.....	91
§ 27*. Многогранники в задачах оптимизации	94
§ 28*. Полярные координаты на плоскости.....	99
§ 29*. Сферические координаты в пространстве	103
§ 30*. Использование компьютерной программы «Математика» для изображения пространственных фигур.....	110
Глава IV. ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ*	
§ 31. Многоугольники.....	118
§ 32. Сумма углов многоугольника.....	124
§ 33. Замечательные точки и линии треугольника	129
§ 34. Теоремы Менелая и Чевы.....	136
§ 35. Решение треугольников.....	142

§ 36. Углы и отрезки, связанные с окружностью	146
§ 37. Вписанные и описанные многоугольники	149
§ 38. Парабола	153
§ 39. Эллипс	157
§ 40. Гипербола	162
§ 41. Построение циркулем и линейкой	166
Ответы	172
Предметный указатель	181