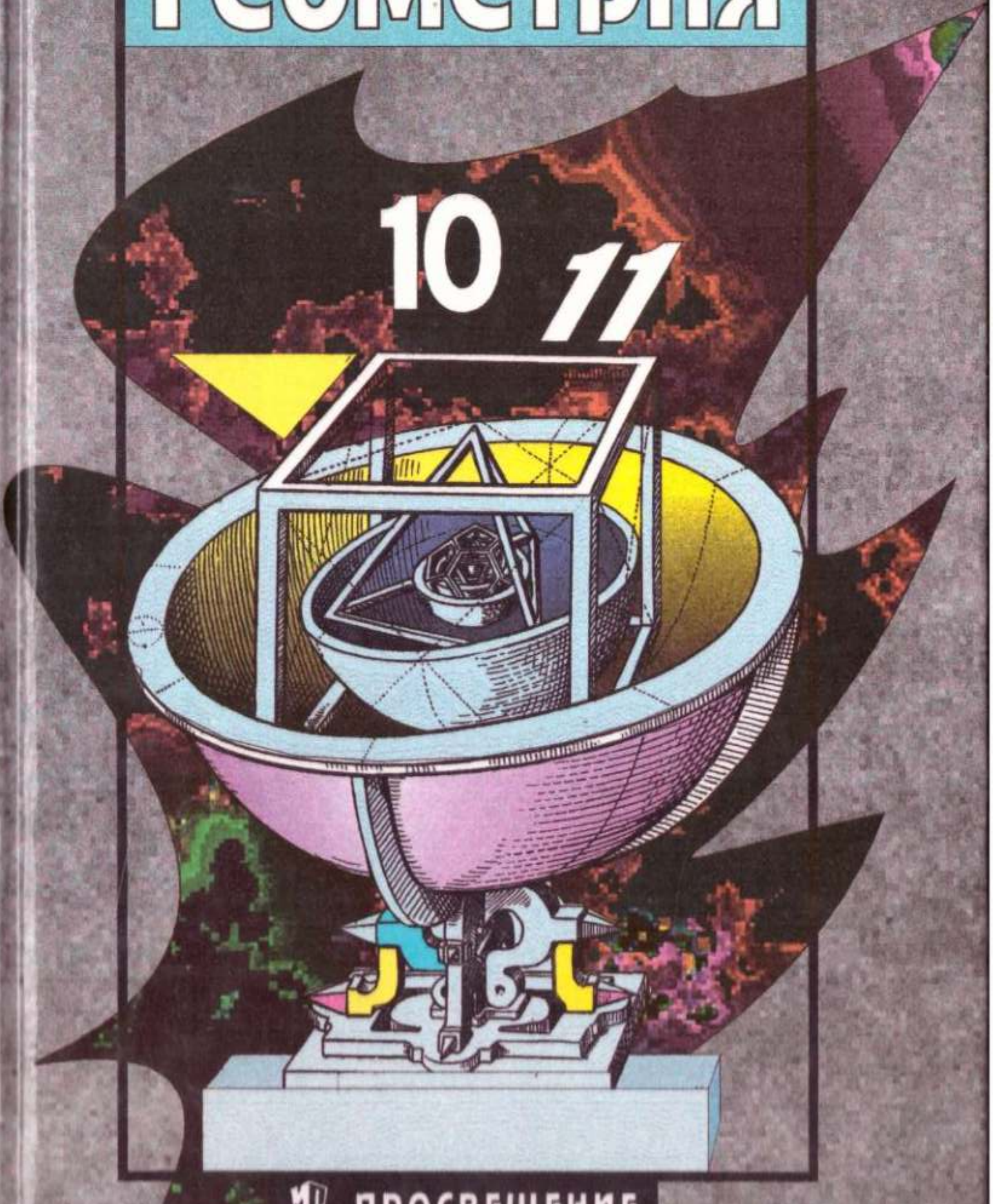
И. М. СМИРНОВА

Геометрия

10–11



ПРОСВЕЩЕНИЕ

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
С50

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук,
ст. преподаватель кафедры алгебры и геометрии МГОПИ *В. Г. Покровский*;
учитель-методист школы № 67 Москвы *Л. И. Звавич*;
учитель математики школы № 1140 Москвы *Г. Л. Борисова*

Смирнова И. М.
С50 Геометрия: Учеб. пособие для 10—11 кл. гуманит. профиля.— М.: Просвещение, 1997.— 159 с.: ил.— ISBN 5-09-007085-7.

Данное учебное пособие соответствует программе по математике для общеобразовательной школы. Однако по сравнению с традиционным изложением в нем несколько сокращен теоретический материал, больше внимания уделяется вопросам исторического, мировоззренческого и прикладного характера.

С $\frac{4306020500-599}{103(03)-97}$ План выпуска 1996 г., № 181 ББК 22.151я72

ISBN 5-09-007085-7

Дорогие ребята!

Вы начинаете изучать один из самых увлекательных и важных разделов школьной геометрии — стереометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она формирует необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения пространственных фигур, что позволяет правильно ориентироваться в окружающем нас мире.

Во-вторых, стереометрия дает метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению выдающегося российского математика академика А. Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в которой они взаимно организуют и направляют друг друга («...лед и пламень не столь различны меж собой»). Кроме этого, изучение стереометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Наконец, стереометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых ученых: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского и многих других.

В стереометрии изучаются красивые математические объекты, например многогранники — правильные, полуправильные, звездчатые. Их формы находят широкое применение в искусстве — живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Вспомните, например, силуэты церквей и соборов, которые, как правило, вписываются в форму пирамиды. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора».

Многие удивительно красивые геометрические фигуры придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы — природные многогранники. Многие их свойства, которые вы изучали на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Стереометрия связана с современными разделами математики, такими, как топология, теория графов, линейное программирование. Глубокие результаты в этих областях получены известными российскими учеными: А. Д. Александровым, П. С. Александровым, Б. Н. Делоне, Л. В. Канторовичем, А. В. Погореловым и другими.

Вот с какой замечательной наукой вам предстоит познакомиться.

Весь материал учебника разбит на отдельные пункты, каждый из которых рассчитан на одно занятие (два урока). В них рассматриваются теоретические вопросы, задачи — устные, основные и повышенной трудности; предлагается дополнительный материал. Новые понятия и наиболее важные свойства выделены **жирным** шрифтом. Утверждения, на которые нужно обратить особое внимание, выделены *курсивом*. В учебнике имеются следующие обозначения:

● — начало и конец доказательства;
◦ — устная задача;
* — дополнительный материал, задачи повышенной трудности.

По мере необходимости в тексте даются рекомендации по литературе для углубленного изучения соответствующего вопроса.

Желаем успехов в изучении стереометрии!

ЗАНЯТИЕ 1

История возникновения и развития стереометрии

Стереометрия, или геометрия в пространстве,— это раздел геометрии, изучающий форму, размеры и свойства различных фигур и их положение в пространстве. Стереометрия — слово греческого происхождения (στερεος — пространственный и μετρεω — измерять).

Стереометрия, как и планиметрия, возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до н. э. древнегреческий ученый Геродот (V до н. э.) писал, что египетский фараон разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и в соответствии с этим уменьшал налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию.

При строительстве даже самых примитивных сооружений необходимо было рассчитать, сколько материала пойдет на постройку, уметь вычислить расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так, египетские пирамиды, сооруженные за 2—3 тысячи лет до н. э., поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие стереометрические положения и расчеты.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времен года, уметь определять свое местонахождение по карте, измерять расстояние и находить направление движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звездами и применение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволили решить многие задачи небесной механики, дали начало новой науке — астрономии.

Начиная с VII в. до н. э. в Древней Греции возникают так называемые философские школы. В них все большее значение приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства. Происходит постепенный переход от наглядно-практической к теоретической геометрии.

Одной из первых и наиболее известных таких школ была Пифагорейская (VI — V до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора. Вам хорошо известно это имя (в курсе планиметрии вы изучали теорему Пифагора о соотношении длин

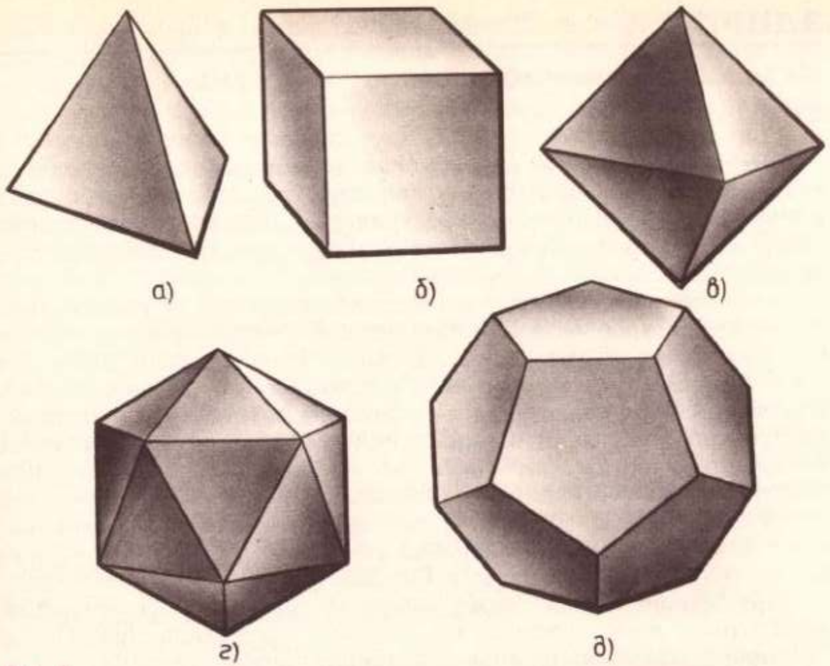


Рис. 1

сторон прямоугольного треугольника). Философское объяснение устройства мира пифагорейцы тесно связывали с математикой. Выделяя стихии как первоосновы бытия, древние ученые приписывали их атомам форму правильных многогранников, а именно: атомам огня — форму *тетраэдра*[1] (рис. 1, *а*), земли — *гексаэдра*[2] (рис. 1, *б*), воздуха — *октаэдра*[3] (рис. 1, *в*), воды — *икосаэдра*[4] (рис. 1, *г*). Всей вселенной присваивалась форма *додекаэдра*[5] (рис. 1, *д*). Испанский живописец Сальвадор Дали использовал этот символ в своей картине «Тайная вечеря», на которой Христос и его ученики изображены сидящими на фоне огромного прозрачного додекаэдра (рис. 5 вклейки). Гранями додекаэдра являются правильные пятиугольники. Если стороны правильного пятиугольника продолжить до взаимного пересечения, то получится правильный звездчатый пятиугольник (рис. 2). Эта фигура, называемая также пентаграммой, была эмблемой школы Пифагора. Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов. Вот что мы находим, читая «Фауста» Гете:

[1] От греч. τετρα — четыре, εδρα — грань.
[2] От греч. γεξ — шесть, εδρα — грань.
[3] От греч. οκτω — восемь, εδρα — грань.
[4] От греч. εικοσι — двадцать, εδρα — грань.
[5] От греч. δοδεκα — двенадцать, εδρα — грань.

Мефистофель: *Нет, трудновато выйти мне теперь,*
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

Фауст: *Не пентаграмма ль этому виной?*
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Мефистофель: *Изволили ее вы плохо начертить,*
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей,— и я свободно мог вскочить.

Более поздняя философская школа — Александрийская, интересна тем, что дала миру знаменитого ученого Е в к л и д а (IV до н. э.). К сожалению, жизнь его мало известна. В одном из своих сочинений математик Папп, современник Евклида, изображает его как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм. Насколько серьезно и строго он относился к изучению математики, можно судить по следующему известному рассказу: царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его «Начала». Евклид на это ответил: «В геометрии нет царского пути».

Славу Евклиду принесло его научное сочинение из 13 книг под общим названием «Начала», в котором впервые было представлено стройное аксиоматическое построение геометрии, т. е. сначала вводились основные неопределяемые понятия и постулировались их свойства (аксиомы), а все остальные утверждения (теоремы, следствия) выводились путем логических рассуждений из аксиом и ранее доказанных утверждений. На протяжении более двух тысячелетий «Начала» Евклида остаются основой изучения систематического курса геометрии.

В последние столетия возникли и развивались новые направления геометрических исследований: аналитическая геометрия, геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология и др. Появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволяющие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Геометрические методы широко используются в других науках: теории относительности, квантовой механике, кристаллографии и т. д.

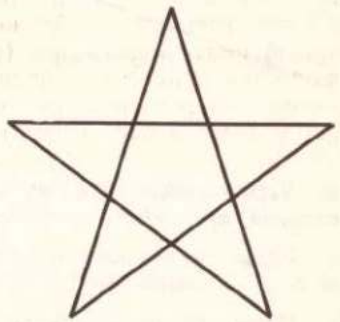


Рис. 2

ЗАНЯТИЕ 2

Основные понятия стереометрии

Основные понятия стереометрии — **точка, прямая** и **плоскость** являются идеализацией объектов реального пространства.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Евклид в своей книге «Начала» определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, стола, зеркала и т. д.

Как и раньше, точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, ..., прямые будем обозначать строчными латинскими буквами a, b, c, ..., плоскости будем обозначать греческими буквами α, β, γ, ...

Точки, прямые и плоскости будем изображать так, как показано на рисунке 3.

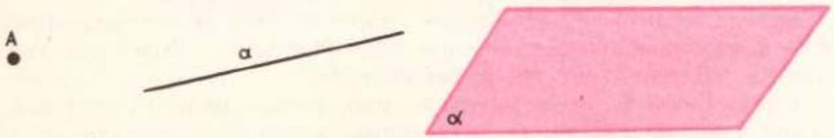
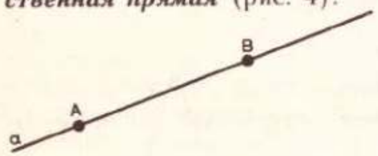


Рис. 3

Среди свойств, которыми обладают точки, прямые и плоскости, выделяют следующие основные свойства — аксиомы стереометрии:

1. ***Через любые две точки пространства проходит единственная прямая*** (рис. 4).



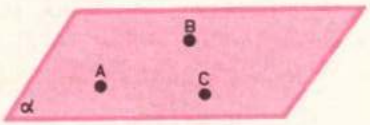
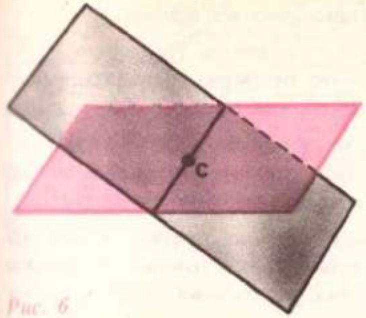


Рис. 4 Рис. 5

2. ***Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость*** (рис. 5).

3. ***Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой*** (рис. 6).

4. ***На любой плоскости в пространстве выполняются все аксиомы планиметрии.***



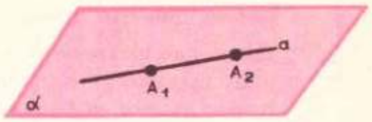


Рис. 6 Рис. 7

Используя эти свойства, можно доказать справедливость других свойств, которые назовем следствиями из аксиом стереометрии.

Следствие 1. *Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она целиком содержится в этой плоскости.*

● Доказательство. Пусть прямая a имеет с плоскостью α две общие точки A_1 и A_2 (рис. 7). По аксиоме 4, в плоскости α через точки A_1 и A_2 проходит единственная прямая. Предположим, что она не совпадает с прямой a, тогда через точки A_1 и A_2 в пространстве проходят две прямые, а это противоречит аксиоме 1. Следовательно, прямая a целиком лежит в плоскости α. ●

Следствие 2. *Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.*

Следствие 3. *Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.*

Докажите эти следствия самостоятельно.

ЗАДАЧИ

1°. **Какое минимальное число точек определяет: а) прямую; б) плоскость?**

2°. **Могут ли две плоскости иметь: а) только одну общую точку; б) только две общие точки?**

3°. **Как расположены две плоскости, если в них содержится один и тот же треугольник?**

4. **Изобразите плоскость и лежащие в ней прямую и точку так, чтобы данная точка не принадлежала этой прямой.**

5. **Изобразите плоскость и лежащие в ней две пересекающиеся прямые.**

6. Изобразите плоскость и пересекающую ее прямую.

7. Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Покажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку, лежат в одной плоскости.

8. Даны две прямые, пересекающиеся в точке A. Покажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

9. В пространстве даны четыре точки. Сколько прямых можно провести через различные пары этих точек? Сколько плоскостей можно провести через различные тройки этих точек?

10*. В пространстве даны n точек A_1, ..., A_n. Сколько прямых можно провести через различные пары этих точек? Сколько плоскостей можно провести через различные тройки этих точек?

11. а) Из шести спичек сложите четыре равных треугольника.
б) Из девяти спичек сложите семь равных треугольников.

ЗАНЯТИЕ 3

Основные пространственные фигуры

Среди пространственных фигур, изучаемых в стереометрии, особо выделяются **многогранники** — фигуры, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, называемых **гранями** многогранника. Стороны многоугольников называются **ребрами** многогранника, а вершины многоугольников — **вершинами** многогранника.

Примерами многогранников, с которыми вы уже встречались, являются:

куб — многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис. 8);

параллелепипед — многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 9);

прямоугольный параллелепипед — параллелепипед, у которого грани — прямоугольники (рис. 10);

призма — многогранник, изображенный на рисунке 11. Его поверхность состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых боковыми гранями призмы;

прямая призма — призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники (рис. 12);

правильная призма — прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники (см. рис. 12);

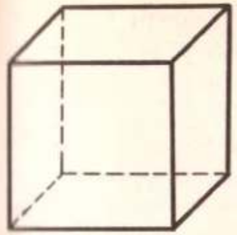


Рис. 8

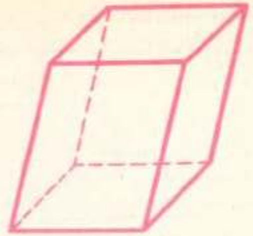


Рис. 9

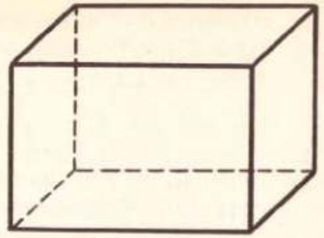


Рис. 10

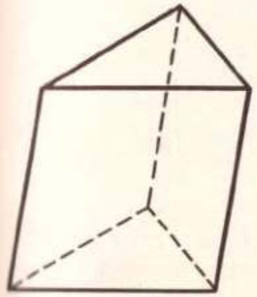


Рис. 11

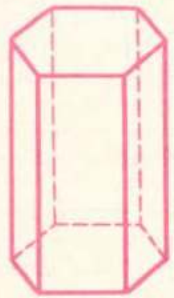


Рис. 12

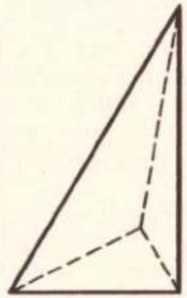


Рис. 13

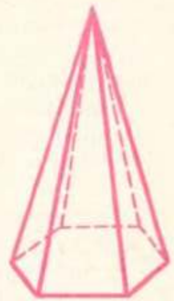


Рис. 14

пирамида — многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых боковыми гранями пирамиды. Общая вершина этих треугольников называется вершиной пирамиды (рис. 13);

правильная пирамида — пирамида, в основании которой правильный многоугольник и все боковые ребра равны (рис. 14).

Примерами пространственных фигур являются также знакомые вам цилиндр (рис. 15), конус (рис. 16), шар (рис. 17) и правильные многогранники (см. рис. 1).

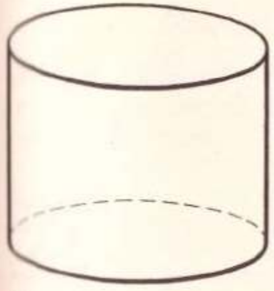


Рис. 15


Рис. 16

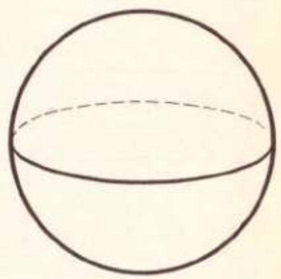


Рис. 17

В дальнейшем мы рассмотрим более подробно эти и другие пространственные фигуры, в том числе полуправильные и звездчатые многогранники.

Так же как и для фигур на плоскости, для пространственных фигур можно определить понятия равенства и подобия. А именно, две фигуры F и F' в пространстве называются **равными**, если существует преобразование одной из них в другую, сохраняющее расстояния между точками, т. е. переводящее любые две точки A, B одной фигуры в точки A', B' другой фигуры так, что $A'B'=AB$.

Две фигуры F и F' в пространстве называются **подобными**, если существует преобразование одной из них в другую, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. переводящее любые две точки A, B одной фигуры в точки A', B' другой фигуры так, что $A'B'=kAB$, где k — некоторое фиксированное число, называемое коэффициентом подобия.

Для равенства и подобия фигур в пространстве справедливы те же свойства, что и для фигур на плоскости. В частности, имеют место признаки равенства и подобия треугольников.

Рассмотрим теперь вопрос об изготовлении моделей пространственных фигур и прежде всего моделей многогранников.

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная на плоскости фигура называется **разверткой** многогранника. На рисунке 18 изображены развертки куба и треугольной пирамиды.

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем, согнув ее по пунктирным линиям, склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами (рис. 19).

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей многогранников с помощью конструктора,

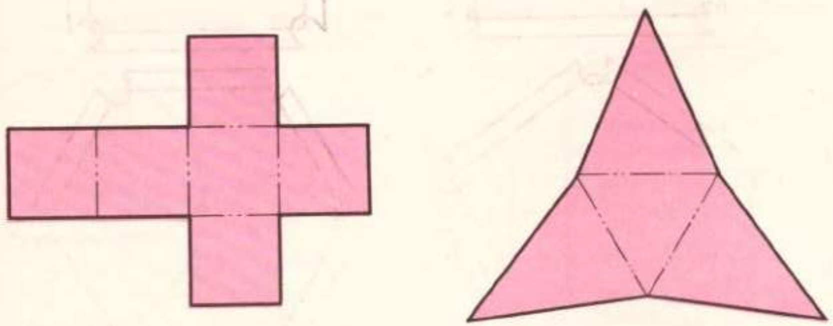


Рис. 18

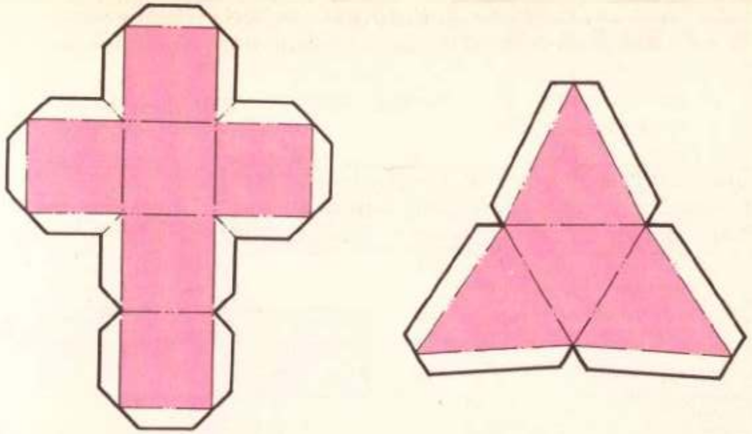


Рис. 19

состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами, и резиновых колечек — основной крепежной детали конструктора (рис. 20). Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке.

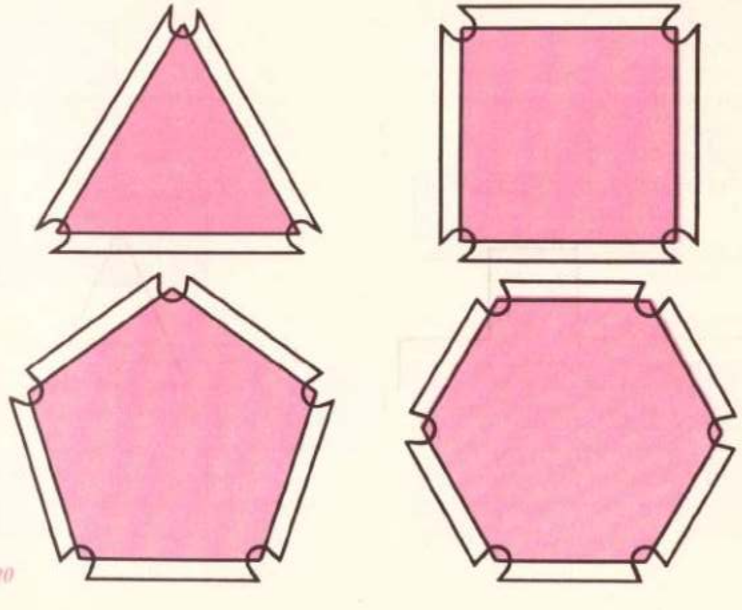


Рис. 20

ЗАДАЧИ

1°. На рисунке 21 укажите фигуры, которые являются развертками куба.

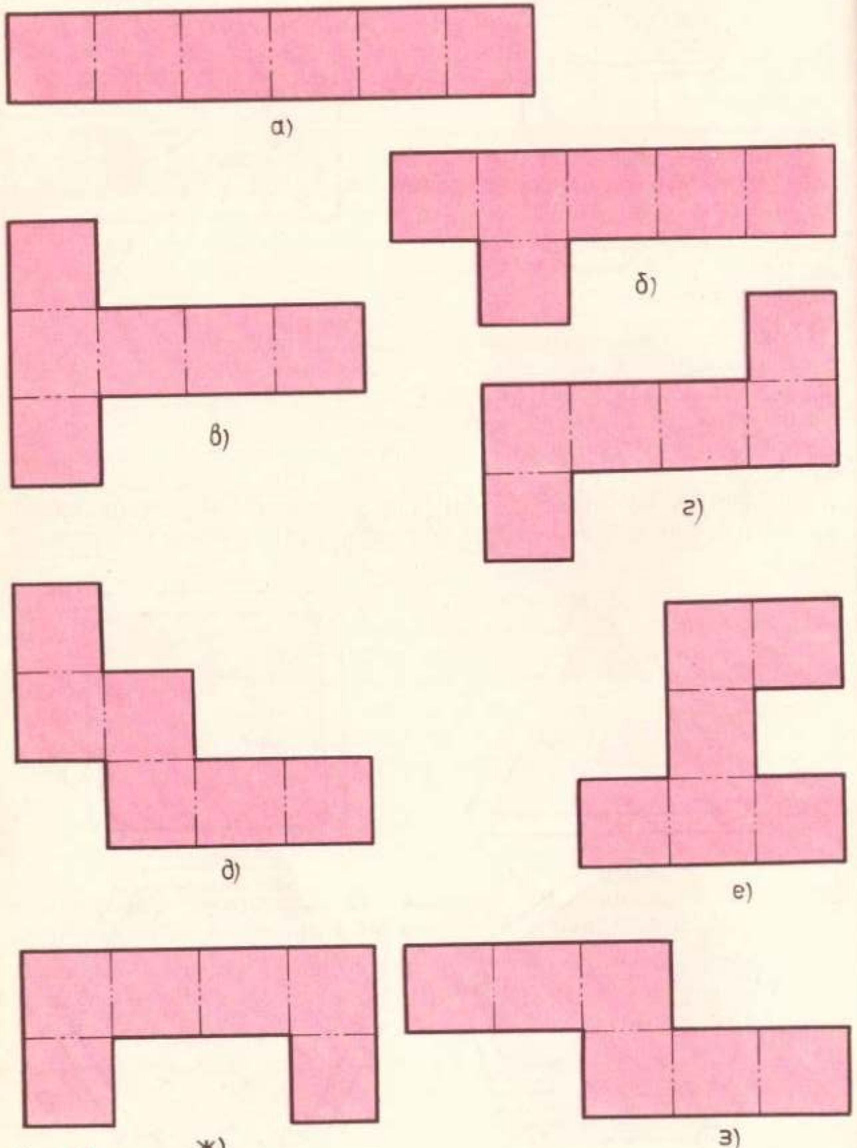


Рис. 21

2°. На рисунке 22 укажите фигуры, которые являются развертками призм. Определите вид этих призм.

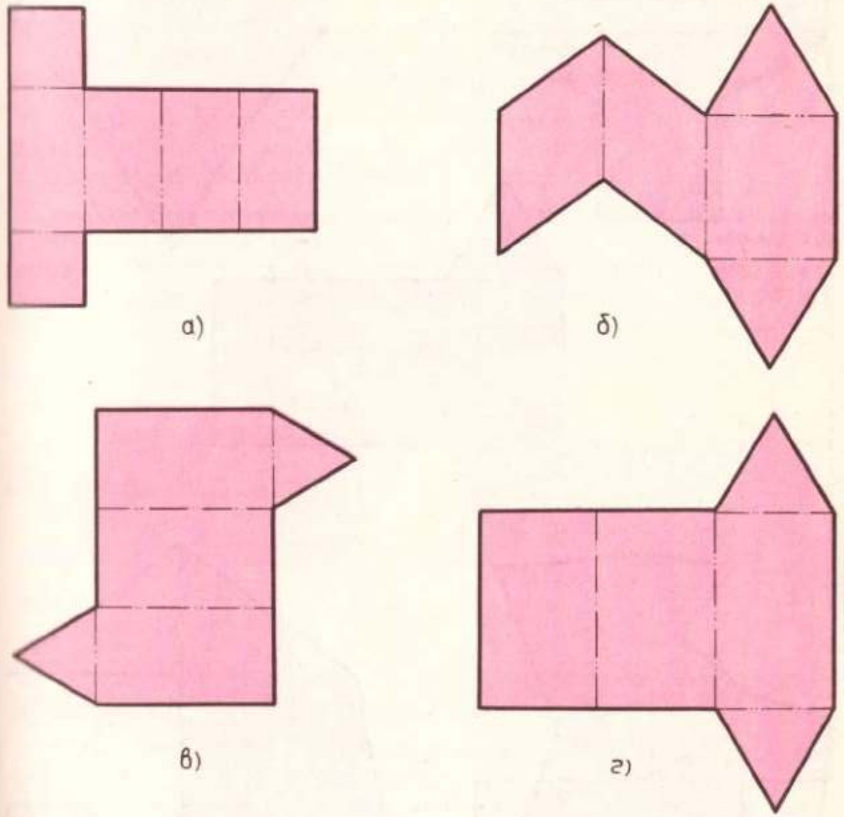


Рис. 22

3°. Среди данных на рисунке 23 разверток определите развертки пирамид. Выясните их вид.

4°. Какое минимальное число цветов нужно взять для окраски поверхности куба, чтобы его соседние грани были разного цвета?

5. Нарисуйте развертки прямоугольного параллелепипеда и правильной четырехугольной пирамиды.

6. Изготовьте развертки и склейте из них модели куба и треугольной пирамиды.

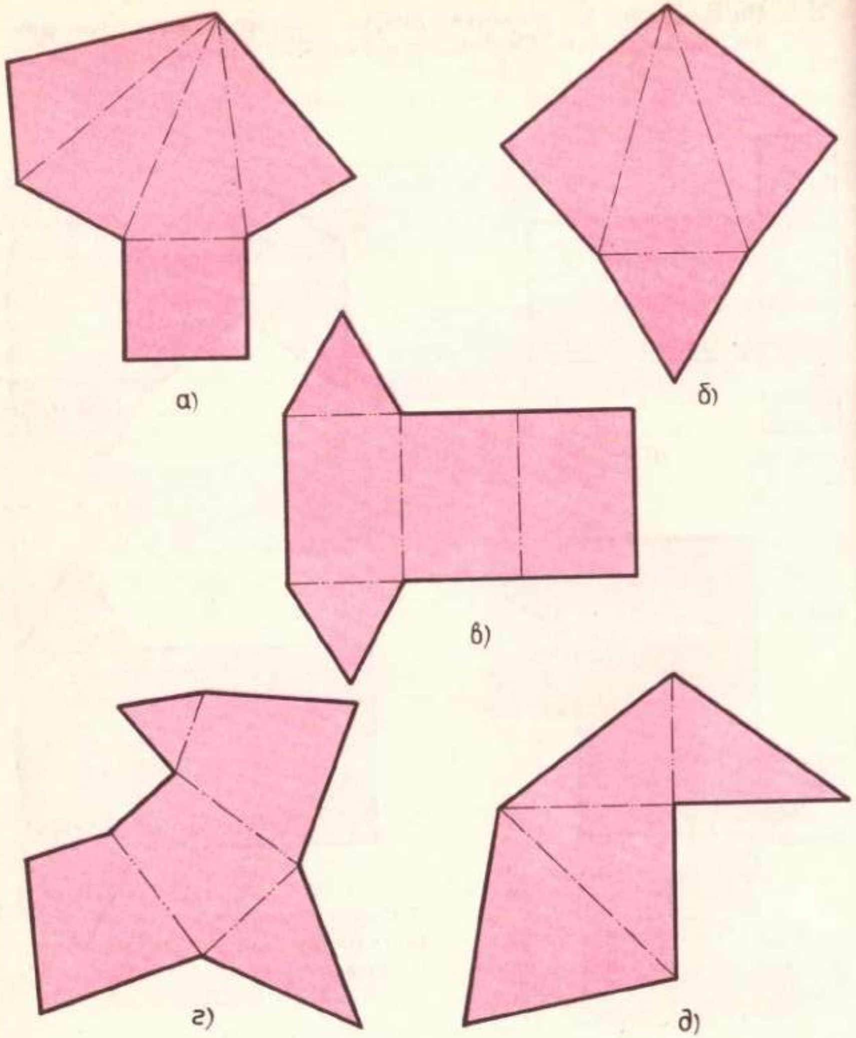


Рис. 23

7. **Сделайте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников и шестиугольников с одинаковыми сторонами. Изготовьте с помощью этого конструктора какие-нибудь модели многогранников.**

8°. **Может ли разверткой пирамиды быть квадрат?**

ЗАНЯТИЕ 4

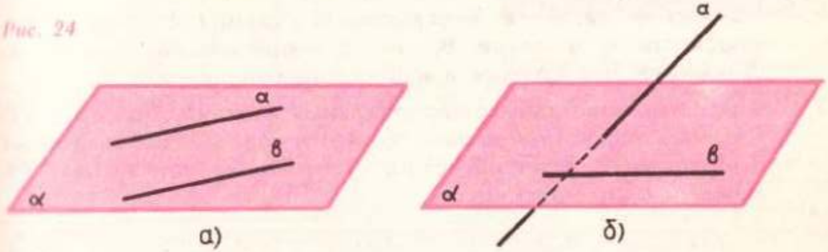
Параллельность прямых в пространстве

В предыдущих классах вы изучили понятие параллельности прямых на плоскости. Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. Определим теперь понятие параллельности прямых в пространстве.

Определение. Две прямые в пространстве называются **параллельными,** если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. параллельны в этой плоскости (рис. 24, *а*).

Заметим, что для параллельности прямых в пространстве кроме требования, чтобы прямые не пересекались, нужно, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости. Прямые в пространстве могут не пересекаться, но лежать в разных плоскостях (рис. 24, *б*).

Рис. 24



Определение. Две прямые в пространстве называются **скрещивающимися,** если они не лежат в одной плоскости.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, A_1B_1 параллельны, а ребра AB, A_1D_1 — скрещиваются.

Представим все случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве в виде следующей схемы:

ЗАДАЧИ

1°. Всегда ли две не пересекающиеся прямые в пространстве параллельны?

2°. В параллелепипеде, призме и пирамиде укажите пары параллельных и скрещивающихся ребер.

3. Докажите, что через точку в пространстве, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

4. Даны две параллельные прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые, лежат в одной плоскости.

5. Даны плоскость α и прямая a, лежащая в плоскости α. Через точку A плоскости α проведите прямую, скрещивающуюся с прямой a.

6. Прямая a лежит в плоскости α. Прямая b пересекает плоскость α в точке B, не принадлежащей прямой a. Докажите, что прямые a и b скрещивающиеся.

7*. В пространстве даны n параллельных между собой прямых. Сколько плоскостей можно провести через различные пары этих прямых, если известно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости?

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Вопрос о количестве прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой, имеет давнюю и интересную историю. Среди аксиом в «Началах» Евклида пятый по счету постулат по своему содержанию совпадает с аксиомой параллельности, с которой вы познакомились в VII классе: *через точку, взятую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.*

На протяжении двух тысячелетий после Евклида математики пытались доказать это свойство, однако все их попытки заканчивались неудачей, рано или поздно обнаруживалась ошибка. Лишь в 1826 г. великий русский геометр Н. И. Л о б а ч е в с к и й (1792—1856), профессор Казанского университета, доказал, что это свойство нельзя логически вывести из других аксиом геометрии Евклида, т. е. нельзя доказать. Поэтому его можно взять только в качестве аксиомы или в качестве аксиомы параллельности может быть взято другое свойство о существовании нескольких прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой. Положив в основу геометрии эту аксиому параллельности,

Лобачевский создал новую геометрию, которая была названа неевклидовой геометрией Лобачевского.

Николай Иванович Лобачевский

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и настолько противоречили так называемому здравому смыслу, что их не поняли даже крупные математики того времени. Несмотря на это Лобачевский не отказался от своих идей. Он не только был убежден в логической непротиворечивости новой геометрии, но и твердо верил в ее применимость к исследованию реального физического пространства. С этой целью он проводил сложнейшие астрономические наблюдения и измерения, однако недостаточная точность измерительных приборов не позволила ему подтвердить его гипотезу.

Признание геометрии Лобачевского пришло только после его смерти. Работы Лобачевского были переведены и изучались математиками всего мира. В настоящее время геометрия Лобачевского является неотъемлемой частью современной математики и находит применение во многих областях человеческого знания, способствует более глубокому пониманию окружающего нас мира.

Литература

1. Александров П. С. Николай Иванович Лобачевский // Квант.—1976.— № 2.

2. Силин А. В., Шмакова Н. А. Открываем неевклидову геометрию: Книга для внеклассного чтения уч-ся 9—10 классов средней школы.— М.: Просвещение, 1988.— (Мир знаний).

ЗАНЯТИЕ 5

Параллельность прямой и плоскости

Рассмотрим вопрос о том, как могут располагаться прямая и плоскость относительно друг друга.

Прямая может лежать в плоскости, т. е. все точки прямой принадлежат плоскости. Прямая может пересекать плоскость, т. е. иметь с плоскостью только одну общую точку. Наконец, прямая может не пересекаться с плоскостью, т. е. не иметь с плоскостью ни одной общей точки.

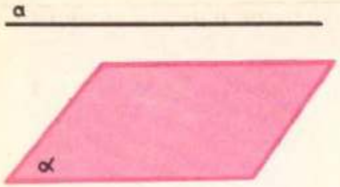


Рис. 25

Определение. Прямая называется **параллельной** плоскости, если она не пересекается с этой плоскостью (рис. 25).

Зафиксируем взаимное расположение прямой и плоскости относительно друг друга с помощью следующей схемы:

Рассмотрим свойство, связывающее понятие параллельности прямой и плоскости с понятием параллельности двух прямых.

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.

● Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и прямая b является линией пересечения этих плоскостей (рис. 26). Покажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости — плоскости α. Кроме этого, прямая b лежит в плоскости β, а по условию прямая a параллельна плоскости β, т. е. не пересекается с этой плоскостью. Следовательно, прямая a не пересекается и с прямой b. Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны. ●

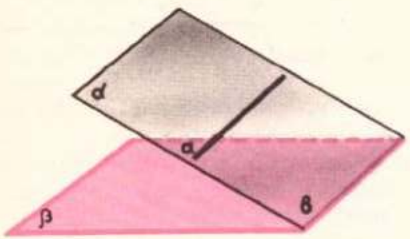


Рис. 26

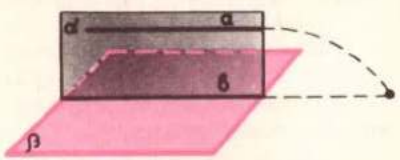


Рис. 27

Следующая теорема дает достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

Теорема 1. *(Признак параллельности прямой и плоскости.)* ***Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой в этой плоскости, то эта прямая параллельна и самой плоскости.***

● Доказательство. Пусть прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости β (рис. 27). Покажем, что прямая a параллельна плоскости β. Для этого рассмотрим плоскость α, проходящую через прямые a и b. Предположим противное, т. е. что прямая a пересекает плоскость β. Тогда их точка пересечения принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, следовательно, принадлежит их пересечению — прямой b. Значит, прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Следовательно, прямая a параллельна плоскости β. ●

ЗАДАЧИ

1°. **Используя признак параллельности прямой и плоскости, укажите прямые, параллельные плоскостям: а) в параллелепипеде; б) в призме.**

2°. **Прямая a параллельна прямой b — линии пересечения двух плоскостей α и β. Как может располагаться прямая a относительно этих плоскостей?**

3°. **Дан параллелограмм ABCD (рис. 28); сторона AD лежит в плоскости α, сторона BC не лежит в плоскости α. Покажите, что BC параллельна плоскости α.**

4°. **Составьте и решите задачу по рисунку 29 (MNKL — трапеция).**

5°. **Верно ли утверждение: прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости?**

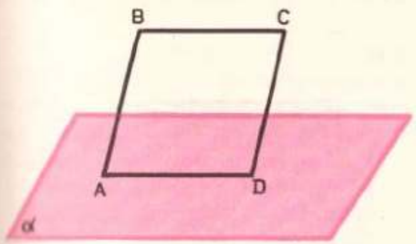


Рис. 28

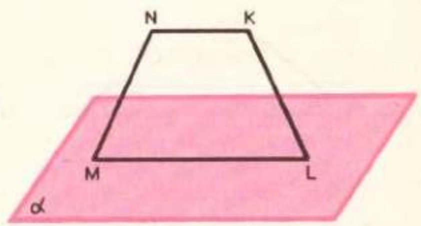


Рис. 29

6. Покажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AB_1 грани AA_1B_1B параллельна грани DD_1C_1C.

7. Через точку, не лежащую в данной плоскости, проведите прямую, параллельную этой плоскости.

8. Даны плоскость и параллельная ей прямая. Через точку, взятую на плоскости, проведите в этой плоскости прямую, параллельную данной прямой.

9. Используя рисунок 30, покажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

10. Покажите, что если прямая a пересекает плоскость α и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также пересекает плоскость α.

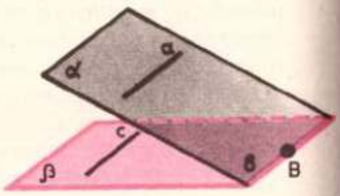


Рис. 30

11°. Возможно ли такое расположение карандашей, как показано на рисунке 3 вклейки?

ЗАНЯТИЕ 6

Параллельность двух плоскостей

Согласно аксиоме 3, если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Отсюда следует, что две плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки.

Определение. Две плоскости в пространстве называются **параллельными,** если они не пересекаются.

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве можно представить в виде схемы:

Две плоскости

не имеют общих точек; параллельны	имеют общую точку; пересекаются по прямой

Рассмотрим свойство, связывающее понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности двух прямых.

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β пересечены плоскостью γ; a, b — линии пересечения этих плоскостей с плоскостью γ (рис. 31). Покажем, что прямые a и b параллельны.

Действительно, они лежат в одной плоскости — плоскости γ. Кроме этого, они лежат в параллельных, т. е. не пересекающихся, плоскостях и, следовательно, не пересекаются. Значит, прямые a и b параллельны.

Докажите это свойство методом от противного.

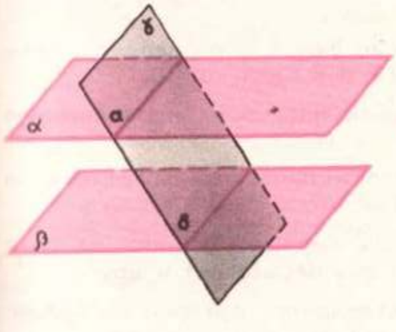


Рис. 31

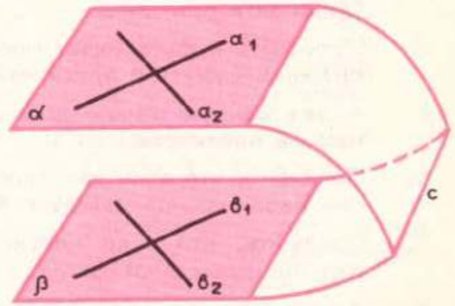


Рис. 32

Следующая теорема дает достаточное условие параллельности двух плоскостей.

Теорема 2. *(Признак параллельности двух плоскостей.)* ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.***

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 в плоскости α соответственно параллельны прямым b_1, b_2 в плоскости β (рис. 32). Покажем, что плоскости α и β параллельны.

Предположим, что плоскости α и β пересекаются и пусть c — линия их пересечения. По признаку параллельности прямой и плоскости, прямая a_1 параллельна плоскости β, а по свойству параллельности прямой и плоскости, она параллельна прямой c.

Аналогично прямая a_2 также параллельна прямой c.

Таким образом, в плоскости α мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой c, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что наше предположение было неверным. Следовательно, плоскости α и β параллельны.

ЗАДАЧИ

1°. Используя признак параллельности двух плоскостей, укажите параллельные плоскости: а) в параллелепипеде; б) в призме.

2°. Верно ли утверждение: если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны? Почему? Приведите примеры.

3°. Верно ли утверждение: если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым в другой плоскости, то эти плоскости параллельны? Почему? Приведите примеры.

4°. Плоскость α пересекает плоскости β и γ по параллельным прямым. Будут ли плоскости β и γ параллельны?

5. Через данную точку проведите плоскость, параллельную данной плоскости.

6. Покажите, что если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.

7. Покажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

8. Через одну из двух скрещивающихся прямых проведите плоскость, параллельную другой прямой.

9. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проведите параллельные плоскости.

10*. Найдите наибольшее число прямых, по которым могут попарно пересекаться 3, 4, 5, ..., n плоскостей.

Взаимное расположение трех плоскостей

Исследуем взаимное расположение трех плоскостей α, β, γ.

Пусть какие-нибудь две плоскости, например α и β, будут параллельны. Тогда для плоскости γ имеются две возможности:

1) γ пересекает α и β по параллельным прямым (см. рис. 31);

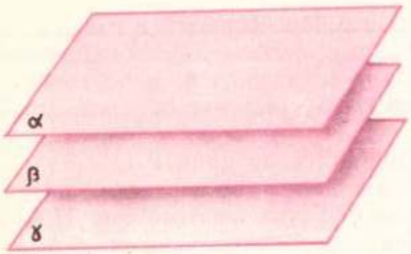


Рис. 33

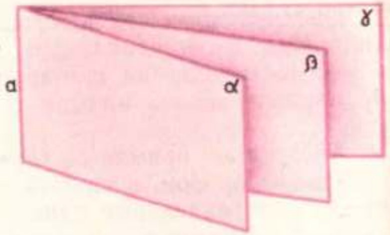


Рис. 34

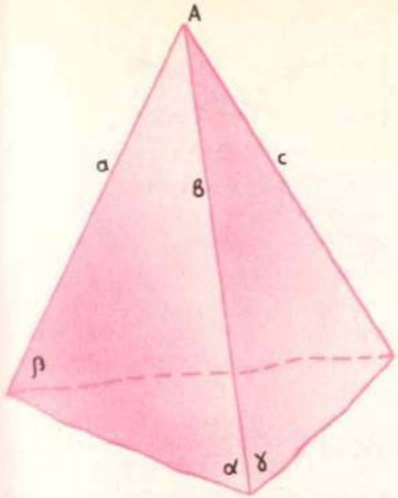


Рис. 35

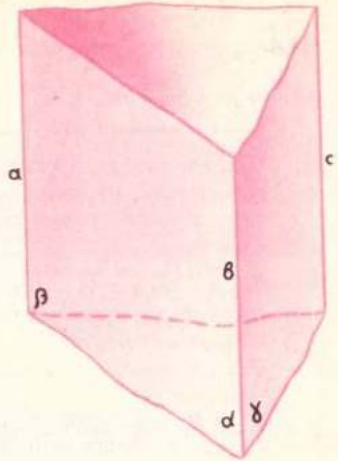


Рис. 36

2) γ параллельна обеим плоскостям (рис. 33).

Пусть теперь среди плоскостей α, β, γ нет параллельных, т. е. все они попарно пересекаются. Соответствующие линии пересечения обозначим $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = c$. Обратим внимание на прямые a и b. Они принадлежат одной плоскости α, значит, могут либо совпадать, либо пересекаться, либо быть параллельными.

Если прямые a и b совпадают, то плоскость β пересекается с плоскостью γ по той же прямой, т. е. все три плоскости пересекаются по одной прямой. Такое расположение плоскостей напоминает раскрытую книгу (рис. 34).

Если прямые a и b пересекаются в точке A, то A принадлежит всем трем плоскостям. В этом случае плоскости расположены как боковые грани в пирамиде (рис. 35).

Если прямые a и b параллельны, то в этом случае $b \parallel c \parallel a$. (Покажите это самостоятельно.) В этом случае плоскости расположены как боковые грани треугольной призмы (рис. 36).

ЗАНЯТИЕ 7

Параллельное проектирование

Как известно, в стереометрии изучаются пространственные фигуры. Когда же мы изображаем их на чертеже, то получаем плоскую фигуру. Каким же образом изобразить пространственную фигуру на плоскости?

Одним из самых удобных способов изображения пространственных фигур является параллельное проектирование. Оно наглядно и легко выполнимо.

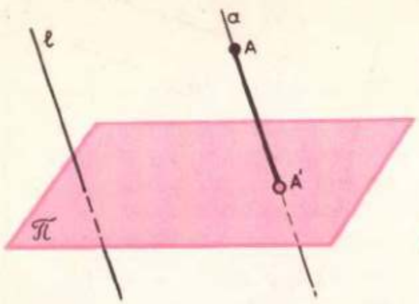


Рис. 37

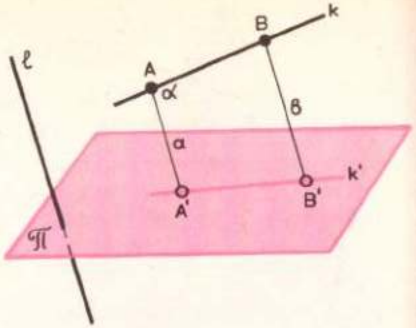


Рис. 38

Пусть π — некоторая плоскость, l — пересекающая ее прямая, A — точка в пространстве (рис. 37). Определим понятие параллельного проектирования на плоскость π в направлении прямой l. Если точка A не принадлежит прямой l, то проведем через нее прямую, параллельную прямой l. Точка A' — точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется **проекцией точки** A на плоскость π в направлении прямой l. Если точка A принадлежит прямой l, то ее проекцией на плоскость π считается точка пересечения прямой l с плоскостью π.

Таким образом, каждой точке A пространства сопоставляется единственная точка A' — ее проекция на плоскость π. Это соответствие называется **параллельным проектированием** на плоскость π в направлении прямой l.

Если Φ — некоторая фигура в пространстве, то проекции всех ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется **параллельной проекцией фигуры** Φ на плоскость π в направлении прямой l. Говорят также, что фигура Φ' получена из фигуры Φ параллельным проектированием.

Примером параллельной проекции может быть тень, отброшенная предметом на плоскую поверхность под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим свойства параллельного проектирования. (Будем считать, что проектируемые прямые (или отрезки) не параллельны прямой l и не совпадают с ней.)

1. ***Проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка — отрезок.***

Действительно, возьмем какую-нибудь прямую k и точку A на ней и проведем через точку A прямую a, параллельную l (рис. 38). Ее пересечение с плоскостью проектирования π даст точку A', являющуюся проекцией точки A. Через прямые a и k проведем плоскость α. Ее пересечением с плоскостью π будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k. Ясно, что проекцией отрезка AB будет отрезок $A'B'$ (см. рис. 38).

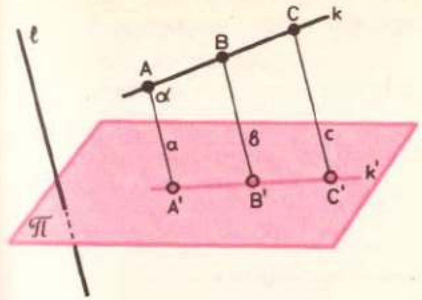


Рис. 39

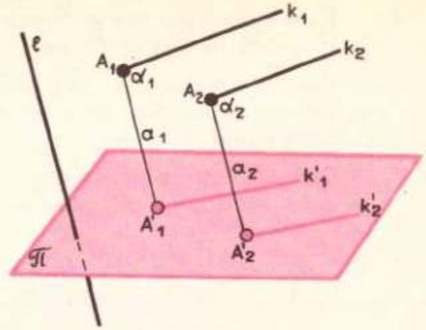


Рис. 40

2. ***Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, сохраняется.***

Действительно, пусть прямая k' является проекцией прямой k на плоскость π в направлении прямой l. A, B, C — точки прямой k; A', B', C' — их проекции; a, b, c — соответствующие прямые, проходящие через эти точки и параллельные прямой l (рис. 39). Тогда из теоремы Фалеса следует равенство отношений $AB:BC=A'B':B'C'$. В частности, если B — середина отрезка AC, то B' — середина отрезка $A'C'$.

3. ***Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.***

Действительно, пусть k_1, k_2 — параллельные прямые. Так же как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с плоскостью π дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 40). Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой по признаку параллельности плоскостей (прямая k_1 параллельна k_2, прямая a_1 параллельна a_2). В силу свойства параллельных плоскостей линии пересечения этих плоскостей с плоскостью π параллельны.

Если проектируемые прямые (отрезки) параллельны прямой l или совпадают с ней, то их проекциями являются точки.

ЗАДАЧИ

1°. **Всегда ли параллельной проекцией точки будет точка?**

2°. **В каком случае параллельной проекцией прямой является точка?**

3°. **Сколько точек может получиться при проектировании трех различных точек пространства?**

4. **Какие фигуры могут служить проекциями: а) двух пересекающихся прямых; б) двух скрещивающихся прямых?**

5. **Как расположен отрезок по отношению к плоскости проектирования, если известно, что его длина равна длине проекции?**

6. **Покажите, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых.**

7. **Какие свойства ромба, прямоугольника, квадрата, трапеции сохраняются при параллельном проектировании?**

ЗАНЯТИЕ 8

Параллельные проекции плоских фигур

При изображении пространственных фигур на плоскости важно уметь правильно изображать плоские фигуры, поскольку поверхность основных пространственных фигур составлена из плоских фигур. Например, плоские многоугольники являются гранями многогранников, круг — основанием цилиндра и конуса.

Покажем, что *если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования π, то ее проекция на эту плоскость будет равна фигуре F.*

Действительно, определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их проекции. Тогда, если A и B — точки фигуры F и A', B' — их проекции, то $ABB'A'$ — параллелограмм (рис. 41). Следовательно, $A'B'=AB$. Таким образом, это преобразование сохраняет расстояния между точками и, значит, фигуры F и F' равны.

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования π, то ее проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Из свойств параллельного проектирования следует, что если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Кроме этого, отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, сохраняется. Поэтому проекцией параллелограмма является параллелограмм. Но поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы могут изменяться, то проекцией ромба может быть не ромб, проекцией прямоугольника не прямоугольник, проекцией прямоугольного треугольника не прямоугольный треугольник. Вообще говоря, проекцией правильного многоугольника является неправильный многоугольник.

Рассмотрим теперь проекции наиболее часто встречающихся многоугольников. Случай, *когда фигура лежит в плоскости,*

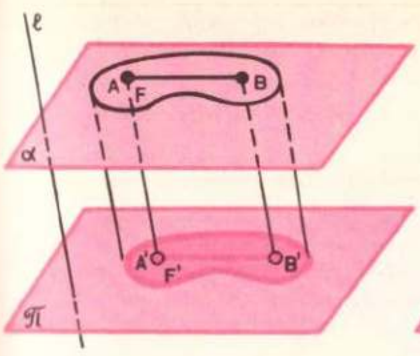


Рис. 41

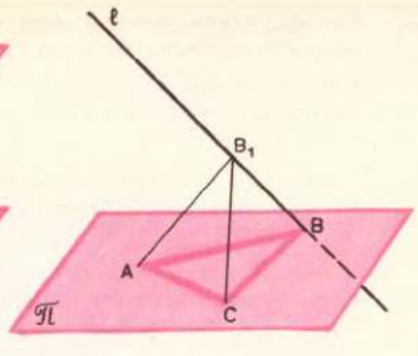


Рис. 42

параллельной направлению проектирования и, следовательно, *проектируется в отрезок,* исключаем.

Простейшим многоугольником является т р е у г о л ь н и к. Если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Покажем, что в общем случае *треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.*

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 42). Построим на одной из его сторон, например AC, равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не лежала в плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией равностороннего треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

Теперь построим параллельную проекцию правильного ш е с т и у г о л ь н и к а $ABCDEF$ с центром в точке O (рис. 43). Выберем какой-нибудь треугольник, например AOB. Его проекцией может быть произвольный треугольник $A'O'B'$. Далее отложим $O'D'=A'O'$ и $O'E'=B'O'$. Соединим точки E' и D'. Теперь из точек A' и D' проведем прямые, параллельные прямой $B'O'$; из точек B'

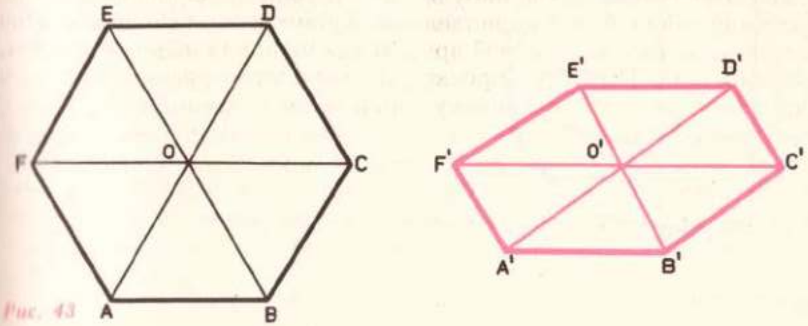
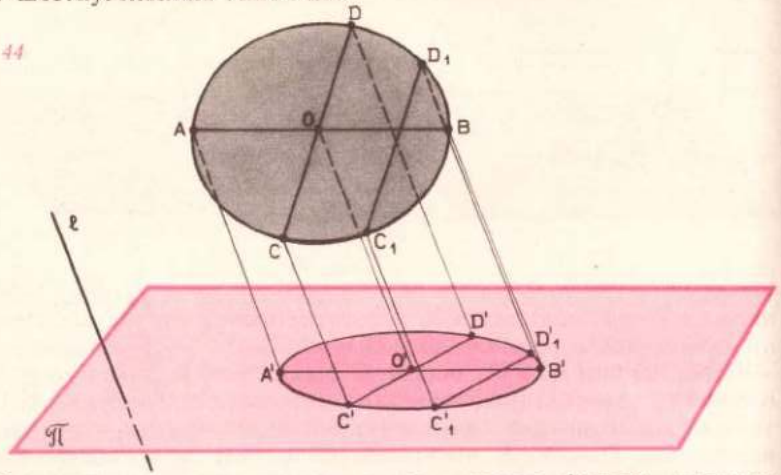


Рис. 43

и E' проведем прямые, параллельные прямой $A'O'$. Точки пересечения соответствующих прямых обозначим F' и C'. Шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ и будет искомой проекцией правильного шестиугольника $ABCDEF$.

Рис. 44



Рассмотрим теперь вопрос о том, какая фигура является параллельной проекцией к р у г а. Пусть F — круг в пространстве, F' — его проекция на плоскость π в направлении прямой l. (Напомним, если прямая l параллельна или лежит в плоскости круга, то его проекцией является отрезок, равный диаметру круга.) Рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость круга (рис. 44). Пусть AB — диаметр круга, параллельный плоскости π, и $A'B'$ его проекция на эту плоскость. Тогда $AB = A'B'$. Рассмотрим какой-нибудь другой диаметр CD круга, и пусть $C'D'$ — его проекция. Обозначим отношение $C'D':CD$ через k. Так как при параллельном проектировании сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, ее проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна $C'D'$ и отношение $C_1'D_1':C_1D_1$ будет равно k. Таким образом, проекция круга получается сжатием или растяжением круга в направлении какого-нибудь его диаметра в одно и то же число раз. Такая фигура на плоскости называется **эллипсом.** Например, на рисунке 45 изображен эллипс, полученный сжатием круга в направлении диаметра CD в два раза.

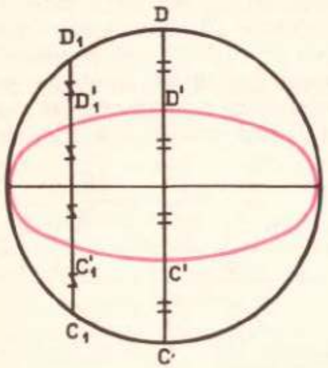


Рис. 45

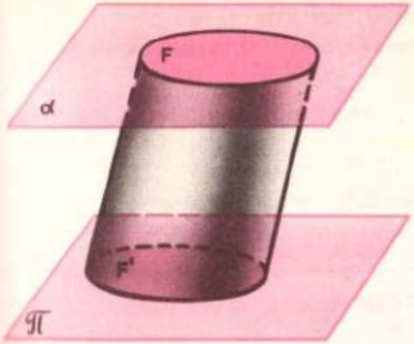


Рис. 46

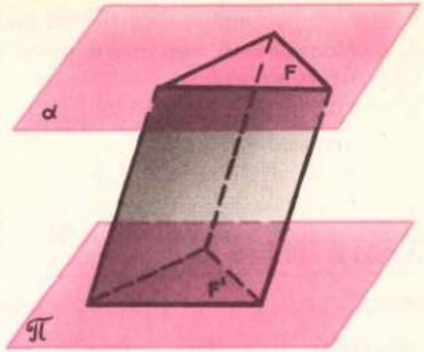


Рис. 47

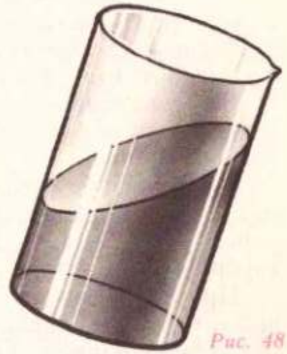


Рис. 48

Рассмотрим пространственную фигуру, тесно связанную с параллельным проектированием.

Пусть α и π — две параллельные плоскости, l — пересекающая эти плоскости прямая. Для плоской фигуры F на одной из этих плоскостей обозначим через F' ее проекцию на другую плоскость (рис. 46). Отрезки, соединяющие точки фигуры F с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую называют **цилиндром.** Фигуры F и F' называются **основаниями** цилиндра. В случае если фигура F является кругом, цилиндр называется **круговым.** Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, называются **образующими** цилиндра. Заметим также, что *частным случаем цилиндра является призма* (рис. 47).

Если некоторая плоскость пересекает цилиндр, то в сечении цилиндра этой плоскостью получается фигура, являющаяся параллельной проекцией основания цилиндра на эту плоскость. В случае кругового цилиндра его сечением будет эллипс или круг. Форму эллипса принимает поверхность воды в круглом наклоненном стакане (рис. 48).

ЗАДАЧИ

1°. **Может ли параллельная проекция треугольника быть отрезком?**

2°. **Что является параллельной проекцией прямоугольника?**

3°. Параллельной проекцией каких фигур может быть квадрат?

4. Постройте параллельную проекцию: а) прямоугольника; б) трапеции.

5. Постройте параллельную проекцию правильного восьмиугольника.

ЗАНЯТИЕ 9

Изображение пространственных фигур на плоскости

Для изображения пространственных фигур на плоскости используют параллельную проекцию. Плоскость, на которую проектируется фигура, называется **плоскостью изображений,** а сама проекция фигуры — **изображением.**

Все изображения пространственных фигур, приведенные нами ранее, были выполнены в параллельной проекции. Рассмотрим их более подробно.

Изображение *параллелепипеда* строится исходя из того, что все его грани параллелограммы и, следовательно, изображаются параллелограммами. Для большей наглядности невидимые ребра изображаются штриховой линией (см. рис. 9).

При изображении *куба* плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из граней куба. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений, изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами (см. рис. 8). Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед (см. рис. 10).

Для того чтобы построить изображение *призмы,* достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем из вершин этого многоугольника провести прямые, параллельные между собой, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы (см. рис. 11, 12).

Для того чтобы построить изображение *пирамиды,* достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем выбрать какую-нибудь точку S, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить ее с вершинами многоугольника (см. рис. 13, 14). Полученные отрезки будут изображать боковые ребра пирамиды.

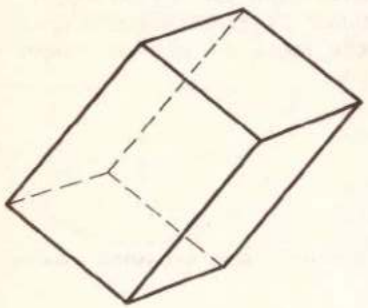


Рис. 49

ЗАДАЧИ

1°. Изображением какого многогранника является четырехугольник с проведенными в нем диагоналями?

2°. Можно ли рисунок 49 принять за изображение куба?

3°. На рисунке 50 показаны различные изображения одного и того же куба, по-разному расположенного в пространстве

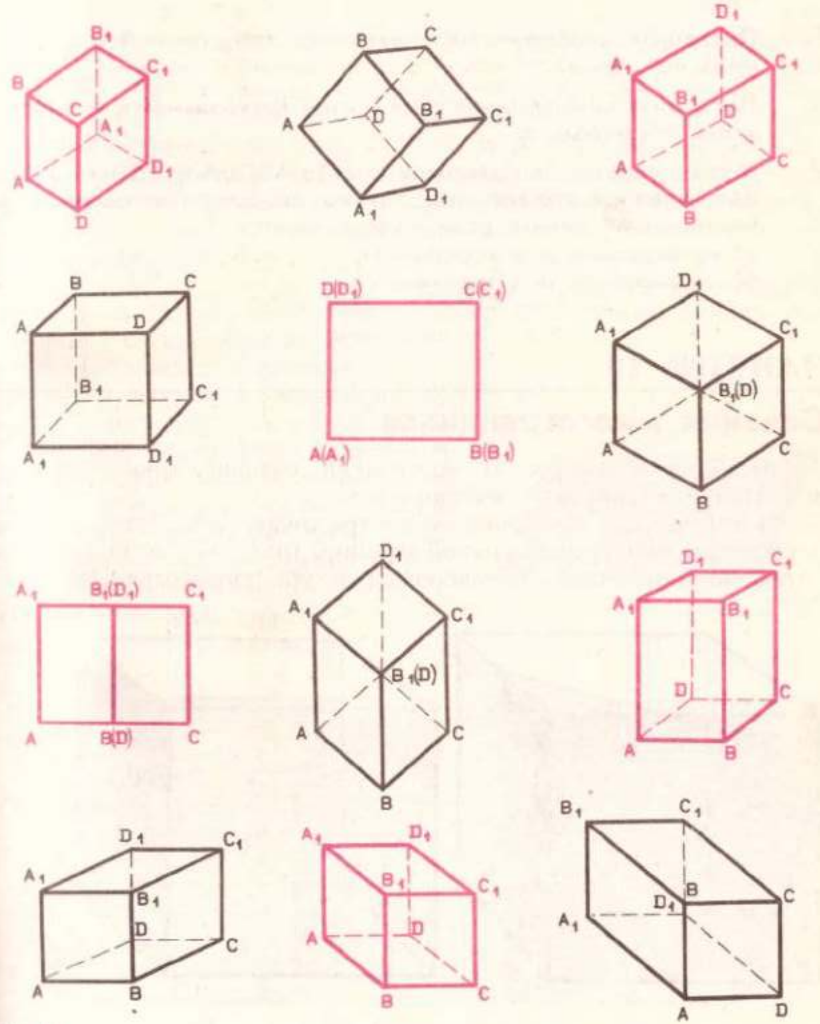


Рис. 50

относительно плоскости изображений. Укажите изображения куба:

а) две грани которого параллельны плоскости изображений;

б) ни одна из граней которого не параллельна плоскости изображений;

в) для которых направления проектирования параллельны каким-нибудь ребрам куба.

4. Постройте изображения прямого и наклонного параллелепипедов.

5. Постройте изображения правильной треугольной и шестиугольной призм.

6. Постройте изображения правильной треугольной и четырехугольной пирамид.

7. Муха движется по поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходит через все его вершины только один раз. Постройте путь наименьшей длины, если муха движется:

а) из вершины A в вершину D;

б) из вершины A в вершину D_1.

ЗАНЯТИЕ 10

Сечения многогранников

Рассмотрим вопрос о построении сечений многогранника плоскостью на примере сечений куба.

Пусть даны изображение куба и три точки, лежащие на ребрах этого куба, выходящих из одной вершины (рис. 51). Тогда, для того чтобы построить изображение сечения куба плоскостью, проходя-

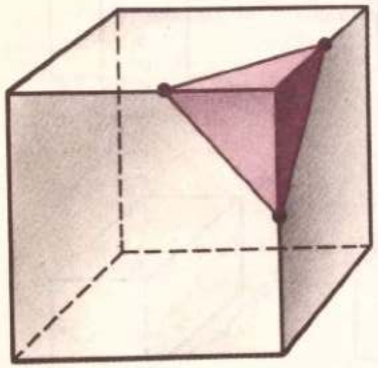


Рис. 51

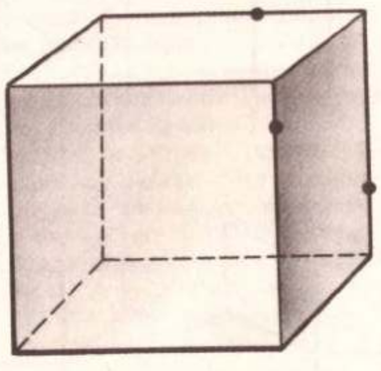


Рис. 52

щей через эти точки, достаточно соединить их отрезками. Полученный треугольник и будет искомым изображением сечения куба.

Предположим теперь, что три точки, через которые проходит сечение куба, расположены таким образом, что две из них лежат на ребрах, выходящих из одной вершины, а третья на ребре, параллельном одному из этих ребер (рис. 52). Самостоятельно постройте изображение сечения куба в этом случае. Воспользуйтесь тем, что линии пересечения параллельных граней куба плоскостью параллельны.

Для построения более сложных сечений используют *метод нахождения точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам на прямой и их проекциям на плоскость.* А именно, пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π (рис. 53). Тогда пересечение прямой k с прямой k', проходящей через точки A', B', и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π.

Используя этот метод, построим изображение сечения куба, проходящее через три точки, лежащие на скрещивающихся ребрах этого куба.

Пусть A, B, C — три точки на скрещивающихся ребрах куба (рис. 54, *а*). Найдем пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Построим параллельные проекции этих точек на основание куба в направлении его бокового ребра (рис. 54, *б*). Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она лежит в плоскости сечения и в плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Пересечение этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку

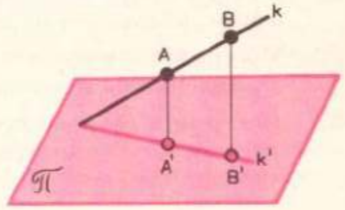


Рис. 53

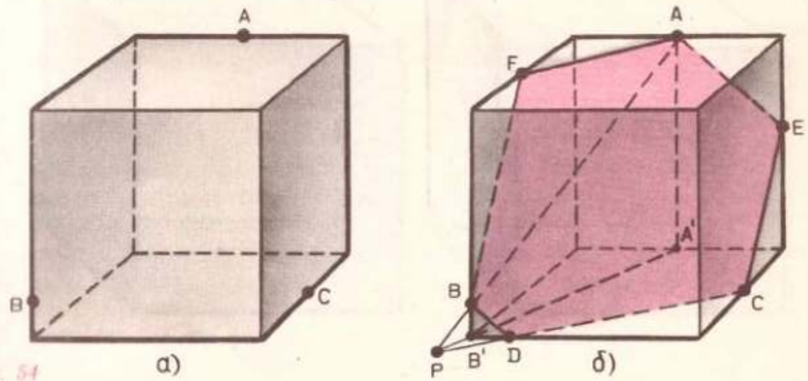


Рис. 54

D сечения куба. Соединим точки B и D отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную BD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки B и F отрезком. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью.

ЗАДАЧИ

1°. Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный треугольник?

2°. Может ли в сечении куба плоскостью получиться квадрат, прямоугольник, ромб, параллелограмм?

3°. Может ли в сечении куба плоскостью получиться пятиугольник? правильный пятиугольник?

4°. Может ли в сечении куба плоскостью получиться шестиугольник? правильный шестиугольник?

5°. Может ли в сечении куба плоскостью получиться многоугольник с числом сторон больше шести?

6. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 55.

7. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 56.

8. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 57.

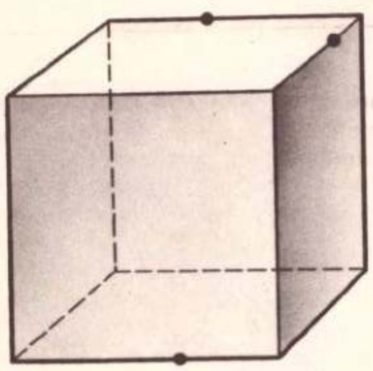


Рис. 55

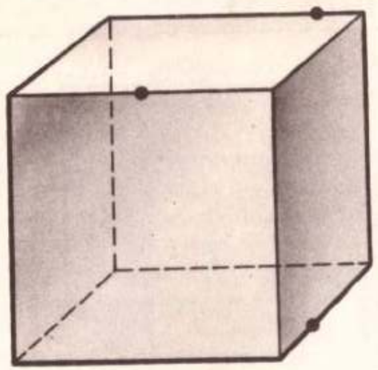


Рис. 56

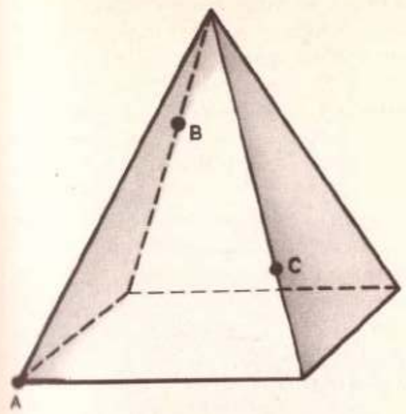


Рис. 57

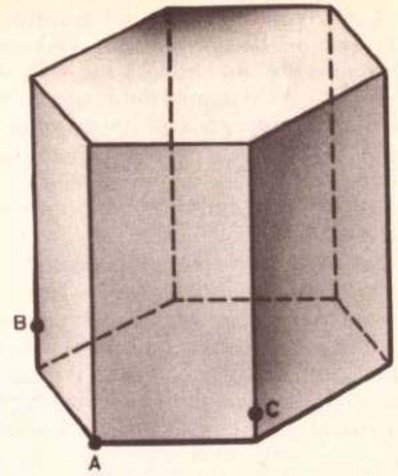


Рис. 58

9. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 58.

10*. Меньший куб поставлен на больший куб таким образом, что они имеют общую вершину и их грани параллельны. Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на скрещивающихся ребрах меньшего куба.

11. Даны три равных куба. Не прибегая к вычислениям, с помощью одной линейки найдите длину диагонали куба.

ЗАНЯТИЕ 11*

Золотое сечение

С давних времен ученые занимались поисками гармонии и совершенства. Древние греки считали, что мир устроен по законам гармонии и задача познания мира, таким образом, является задачей поиска гармонии.

Одним из вопросов, волновавших древних ученых, был вопрос о нахождении наилучшего соотношения неравных частей, составляющих вместе единое целое. Его решение связывают с именем Пифагора, который установил, что наиболее совершенным делением целого на две неравные части является такое деление, при котором *меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.* Тогда такое деление целого называлось *гармоническим отношением.*

Интерес к гармоническому отношению необычайно возрос в эпоху Возрождения (XV — XVII). В 1509 г. итальянский математик монах Лука Пачоли (1445 — ок. 1514) написал книгу «О божественной пропорции», в которой говорил о воздействии божественной пропорции на человека как о «существенном, невыразимом, чудесном, неизъяснимом, неугасимом, возвышенном, превосходнейшем, непостижимом». Иллюстрации к этой книге выполнил великий художник эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519).

Пачоли назвал гармоническое отношение божественной пропорцией (*Sectio divina*). Термин *золотое сечение* (*Sectio aurea*) появился в Германии в первой половине XIX в.

Выясним, каким числом выражается золотое сечение. Для этого примем целое за единицу и обозначим большую из его частей через x. Тогда меньшая часть будет равна $1-x$. По определению золотого сечения должно выполняться равенство

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}.$$

Решим его относительно x. Из квадратного уравнения $x^2+x-1=0$ получим $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Так как отрицательный корень не подходит, окончательно получаем

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Полученное число обозначается греческой буквой φ, т. е.

$$\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия (V до н. э.), который часто использовал золотое сечение в своих произведениях. Самыми знаменитыми из них были статуи Зевса Олимпийского (которая считалась одним из семи чудес света) и Афины Парфенос (рис. 59).

Золотое сечение заложено в пропорциях человеческого тела. На рисунке 60 показаны соотношения статуи Аполлона Бельведерского. Отношения $\frac{CE}{AE}$, $\frac{CD}{CE}$ и $\frac{BC}{AC}$ равны φ. Не только вся статуя, но и отдельные ее части делятся в золотом отношении.

На рисунке 61 изображена схематически голова взрослого человека. Отношения $\frac{CF}{AF}$, $\frac{DF}{CF}$, $\frac{BC}{AC}$ и $\frac{DE}{DF}$ равны φ.

Еще раз подчеркнем, что пропорции золотого сечения создают впечатление гармонии, красоты. Поэтому скульпторы, архитекторы, художники использовали и используют золотое сечение в своих произведениях.

Рис. 59

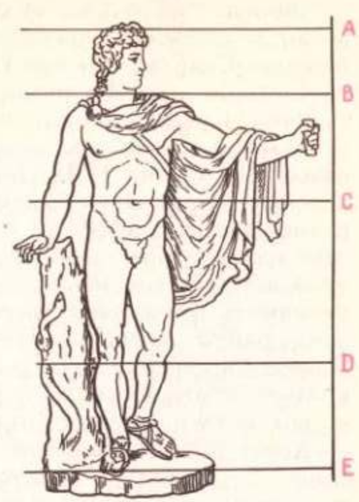


Рис. 60

На рисунке 62 схематически изображен фасад одного из красивейших произведений древнегреческой архитектуры — Парфенона в Афинах (V до н. э.). Отношение высоты здания к его длине равно φ. Если произвести деление высоты Парфенона по золотому сечению, получим те или иные выступы здания, так, например, отношение высоты несомой части (AC) к высоте несущей части (CB) и отношение CB к высоте здания равны φ.

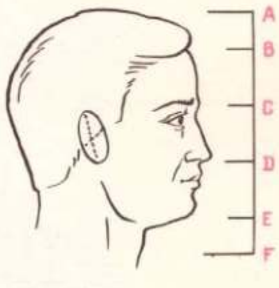


Рис. 61

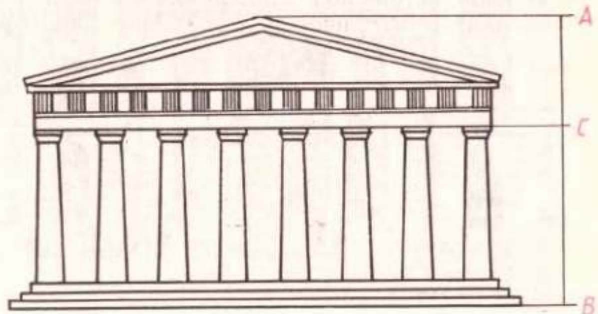


Рис. 62

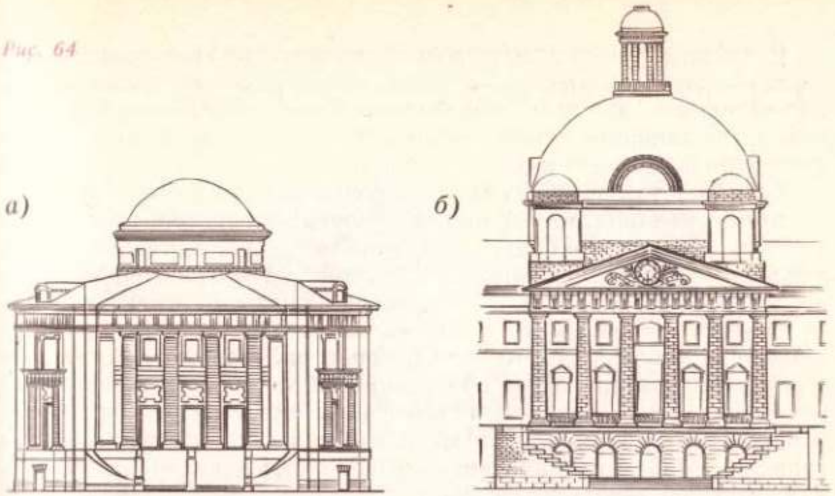
Знаменитый русский архитектор М. Ф. Казаков широко использовал в своем творчестве золотое сечение. Таковы его здания бывшего Сената в Кремле (рис. 63), дворца в Петровском Алабине (рис. 64, *а*) и Голицынской больницы в Москве (рис. 64, *б*) (сейчас Первая клиническая больница им. Н. И. Пирогова).

Мотивы золотого сечения просматриваются на одной из самых известных картин И. И. Шишкина «Корабельная роща» (рис. 1 вклейки). Ярко освещенная солнцем сосна (стоящая на первом плане) делит картину по золотому сечению. Справа от сосны — освещенный солнцем пригорок. Он делит по золотому сечению правую часть картины по горизонтали. Слева от главной сосны находится множество сосен — при желании можно с успехом продолжить деление картины по золотому сечению и дальше. Наличие в картине ярких вертикалей и горизонталей, делящих ее в золотых отношениях, придают ей характер уравновешенности и спокойствия в соответствии с замыслом художника.

Холст, на котором написана «Тайная вечеря» Сальвадора Дали (рис. 5 вклейки), имеет форму *золотого прямоугольника*, т. е. прямоугольника, стороны которого находятся в золотом отношении. Золотые прямоугольники меньших размеров использованы художником при размещении фигур двенадцати апостолов.

Рис. 63

Рис. 64



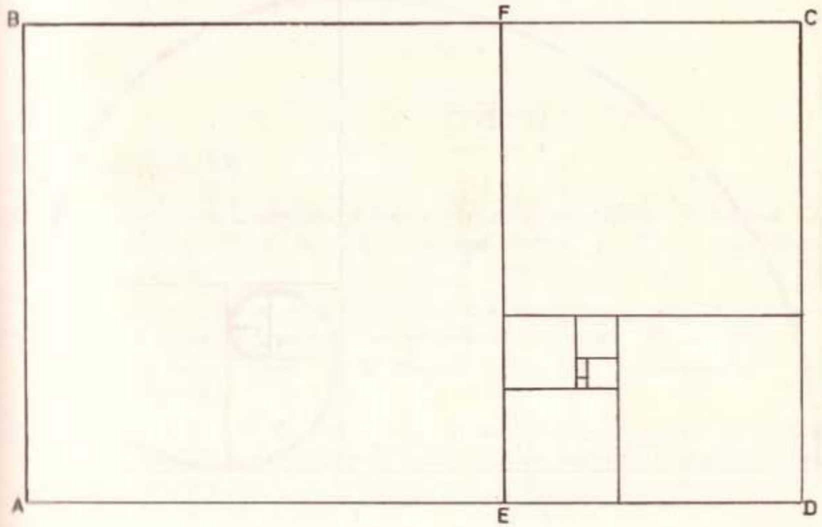
Золотой прямоугольник обладает многими интересными свойствами. Если, например, от золотого прямоугольника $ABCD$ отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник $EFCD$, но меньших размеров (рис. 65).

Действительно, если $AD=a$, $AB=\varphi a$, то

$$FC=a-\varphi a,\ \frac{FC}{FE}=\frac{a-\varphi a}{\varphi a}=\frac{1-\varphi}{\varphi}=\frac{\varphi}{1}=\varphi,$$

т. е. $EFCD$ — золотой прямоугольник.

Рис. 65



Если этот процесс продолжить, то получим так называемые *вращающиеся квадраты*, и весь прямоугольник оказывается составленным из этих квадратов. Если соединить вершины квадратов плавной кривой, как показано на рисунке 66, то получим кривую, называемую *золотой спиралью*.

Если золотой прямоугольник использовался художниками для создания у зрителя ощущения уравновешенности, покоя, то золотая спираль, напротив, применялась для выражения тревожных, бурно развивающихся событий. Эскиз гравюры «Избиение младенцев» (рис. 67), выполненный Рафаэлем в 1509 г., как раз отличается динамизмом и драматизмом сюжета. На рисунке проведена золотая спираль, по которой располагаются основные фигуры композиции. Мастер не довел свой замысел до завершения, его эскиз был гравирован известным итальянским графиком Маркантонио Раймонди, который на основе этого эскиза создал гравюру «Избиение младенцев» (рис. 2 вклейки). (Попытайтесь найти на ней золотую спираль.)

Золотая спираль нередко используется в технических устройствах. Например, вращающиеся ножи имеют профиль золотой спирали, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по золотой спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Раковины многих моллюсков, улиток, а также рога архаров (горных козлов) закручиваются по золотой спирали (рис. 4 вклейки). Один из наиболее распространенных пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает ее нити также по золотой спирали.

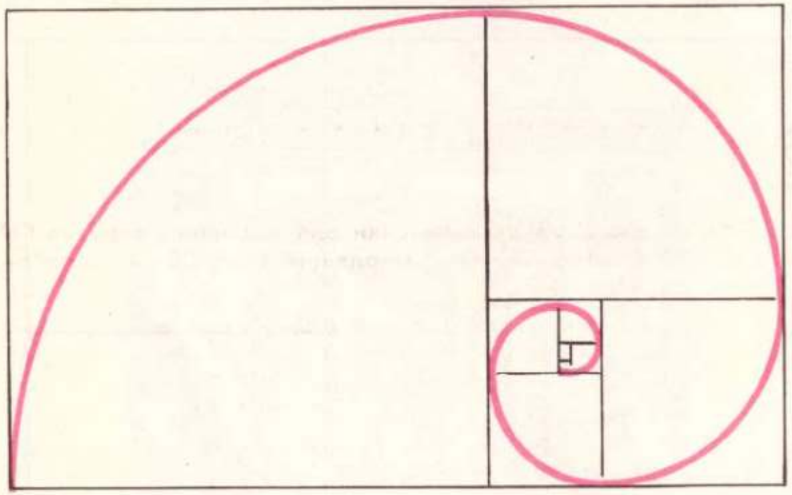


Рис. 66

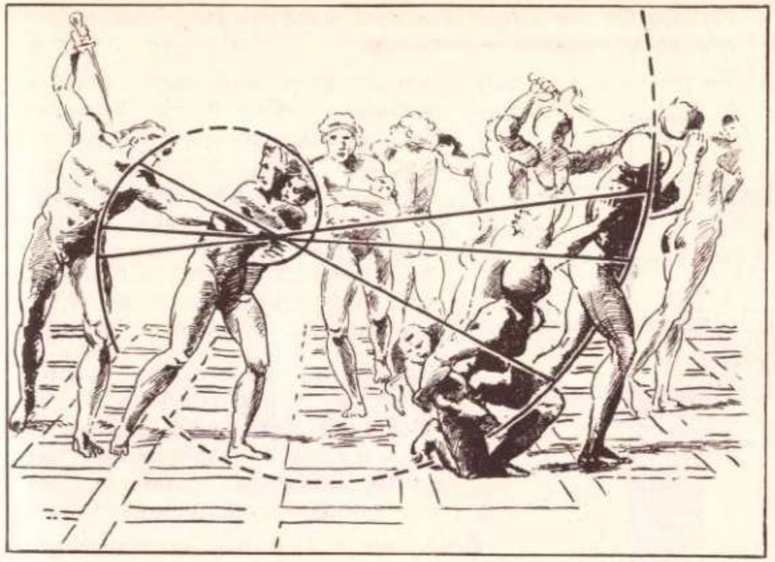


Рис. 67

По золотой спирали закручены и многие галактики, в частности Галактика нашей Солнечной системы.

Можно сказать, что золотое сечение, золотой прямоугольник и золотая спираль являются математическими символами идеального соотношения формы и роста. Великий немецкий поэт Иоганн Вольфганг Гете считал их даже математическим символом жизни и духовного развития.

ЗАДАЧИ

1. **С помощью циркуля и линейки для заданного отрезка *CD* постройте отрезок *AB*, находящийся с *CD* в золотом отношении.**

2. **Найдите углы в равнобедренном треугольнике, основание и боковая сторона в котором находятся в золотом отношении. Такой треугольник называется золотым треугольником.**

3. **Докажите, что биссектриса угла при основании золотого треугольника отсекает от него также золотой треугольник. Продолжая этот процесс, постройте последовательность вращающихся золотых треугольников.**

4. Покажите, что в пентаграмме, изображенной на рисунке 2, все треугольники — золотые.

5. На рисунке 68 изображен лотарингский крест, служивший эмблемой «Свободной Франции» — организации, которую в годы второй мировой войны возглавлял генерал де Голль. Он составлен из тринадцати единичных квадратов. Покажите, что прямая, проходящая через точку A и делящая площадь лотарингского креста на две равные части, делит отрезок BC в золотом отношении.

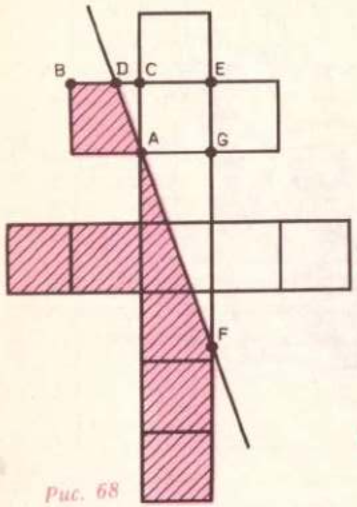


Рис. 68

6. Докажите, что сторона правильного вписанного в окружность десятиугольника равна большей части золотого сечения радиуса этой окружности. Впишите в данную окружность правильный десятиугольник.

7. Впишите в данную окружность правильный пятиугольник.

Литература

1. Бендукидзе А. Д. Золотое сечение // Квант.— 1973.— № 8.

2. Прохоров А. И. Золотая спираль // Квант.— 1984.— № 9.

3. Шевелев И. Ш., Марутаев М. А., Шмелев И. П. Золотое сечение.— М.: Стройиздат, 1990.

ЗАНЯТИЕ 12

Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых

Для определения понятия угла между пересекающимися прямыми в пространстве заметим, что эти прямые лежат в одной плоскости, и поэтому для них понятие угла уже было определено в планиметрии.

Определение. **Углом между пересекающимися прямыми** в пространстве называется угол, который они образуют в плоскости, проходящей через эти прямые.

Определение. Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными,** если они пересекаются под прямым углом.

Например, в кубе пересекающиеся ребра перпендикулярны, диагональ грани куба образует с ребрами этой грани углы 45°

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что пересекающиеся диагонали двух различных граней куба образуют угол 60°.

2. В пирамиде, гранями которой являются равносторонние треугольники, найдите угол между высотами этих треугольников, проведенными к общему ребру.

3. В треугольной призме, основаниями которой являются равносторонние треугольники, а боковыми гранями — квадраты, найдите угол между пересекающимися диагоналями боковых граней.

4. Используя свойства параллельного проектирования, покажите, что углы с соответственно параллельными сторонами равны.

5. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через данную на этой прямой точку? Ответьте на этот вопрос для точки, не лежащей на данной прямой.

6. Из планиметрии известно: две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

Теорема 3. ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна любой пересекающей ее прямой, лежащей в этой плоскости.***

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна прямым b_1, b_2 плоскости β, O — точка их пересечения. Рассмотрим произвольную прямую b плоскости β, проходящую через точку O, и покажем, что прямые a и b перпендикулярны (рис. 69).

Проведем в плоскости β прямую, пересекающую прямые b_1, b_2, b в точках B_1, B_2, B соответственно. Отложим на прямой a от точки O в противоположные стороны равные отрезки OC, OD и соединим точки C, D с точками B_1, B_2, B. Треугольники OB_1C и OB_1D равны по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $B_1C=B_1D$. Аналогично $B_2C=B_2D$. Треугольники B_1B_2C и B_1B_2D равны по третьему признаку, следовательно $\angle CB_1B=\angle DB_1B$. Треугольники B_1BC и B_1BD равны по первому признаку, следовательно, $BC=BD$. Треугольники OBC и OBD равны по третьему признаку, следовательно, $\angle BOC=\angle BOD=90°$, т. е. прямые a и b перпендикулярны.

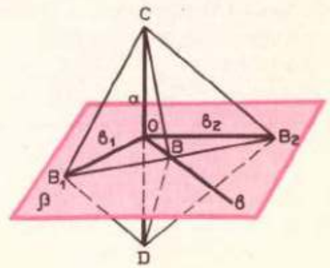


Рис. 69

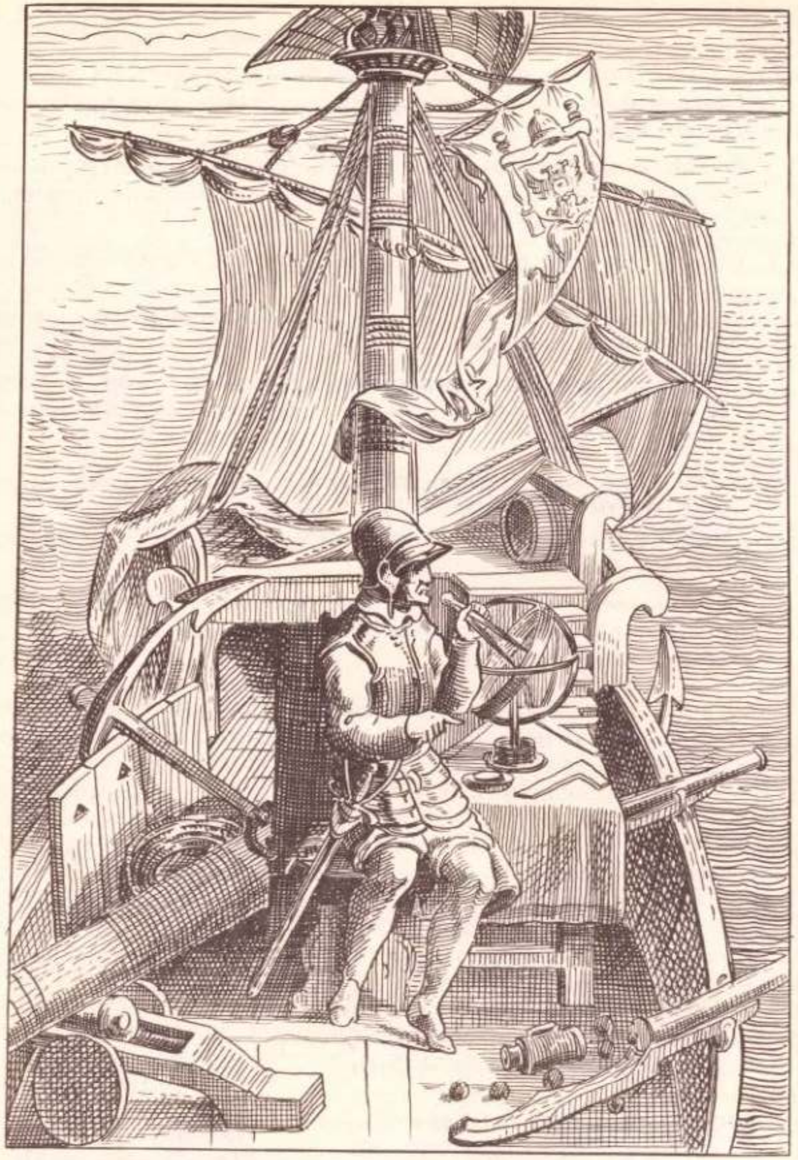


Рис. 70

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Проблема измерения углов между прямыми в пространстве восходит к глубокой древности. Астрономические наблюдения, необходимость определения положения солнца и звезд на небе потребовали создания специальных приборов для определения углов, под которыми видны эти светила. На старинной гравюре (рис. 70) художник изобразил моряка эпохи великих географических открытий, прокладывающего курс корабля с помощью измерительных инструментов. Одним из первых угломерных инструментов была *астролябия*, изобретенная еще Гиппархом (180—125 до н. э.) и усовершенствованная впоследствии немецким ученым Региомонтаном (1436—1476). Она состояла из тяжелого медного диска — лимба, который подвешивался за кольцо так, чтобы он висел вертикально и линия $\Gamma_1\Gamma_2$ принимала горизонтальное положение (рис. 71). По краю лимба наносилась

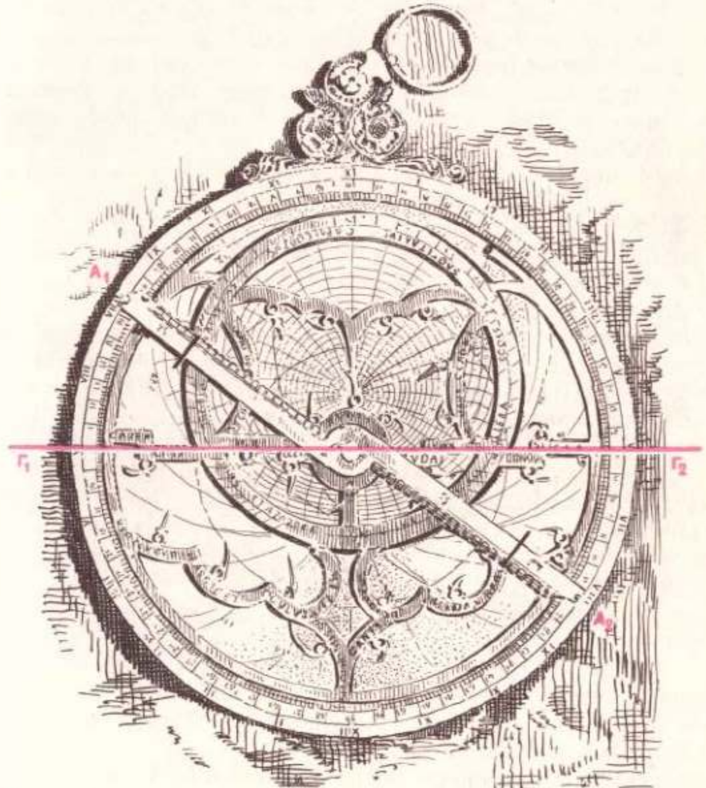


Рис. 71

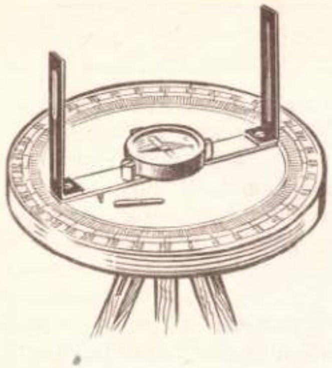


Рис. 72

шкала, разделенная на градусы. Кроме этого, на лимбе имелась полоса A_1A_2, называемая алидадой, которая могла вращаться вокруг центра лимба и имела на концах поперечные пластинки с отверстиями, называемыми диоптрами.

Для определения высоты звезды над горизонтом наблюдатель прикладывал глаз к нижнему диоптру и поворачивал алидаду так, чтобы звезда была видна через другой диоптр. Деление на шкале, около которого останавливался край алидады, и показывало высоту звезды в градусах над горизонтом, измеряя фактически градусную величину дуги Γ_1A_1.

Располагая плоскость лимба горизонтально, как на школьной астролябии (рис. 72), можно измерять углы и в горизонтальной плоскости. Для этого после установки астролябии алидаду наводят сначала на один объект наблюдения и засекают угол на шкале лимба, а затем на другой объект и также засекают угол. Разность между этими углами и есть искомый угол, под которым видны данные объекты.

Другим инструментом для измерения углов был *квадрант*, представляющий собой $\frac{1}{4}$ часть астролябии (рис. 73). Квадрант имел то преимущество перед астролябией, что его можно было сделать значительно больших размеров и тем самым увеличить точность измерения углов.

Существенные усовершенствования в конструкции астролябии и квадранта были сделаны французским ученым Жаном Пикаром в середине XVII в. Пикар заменил диоптры зрительной трубой, изобретенной незадолго до этого Галилеем. Перед линзой трубы он установил сетку из перекрещивающихся волосков, а для плавного вращения алидады использовал микрометрический винт, что значительно повысило точность измерения.

Наиболее совершенным угловым инструментом, применяющимся в настоящее время для выполнения геодезических работ, является *теодолит* (рис. 74), состоящий из двух лимбов, расположенных в вертикальной и горизонтальной плоскостях, что позволяет измерять вертикальные и горизонтальные углы одновременно. На вертикальном лимбе имеется зрительная труба, с помощью которой алидады вертикального и горизонтального лимбов наводятся на объект наблюдения. Точность измерения углов при этом составляет доли минуты.

Существует много способов приближенного измерения углов. Например, измерение с помощью ногтя указательного пальца.

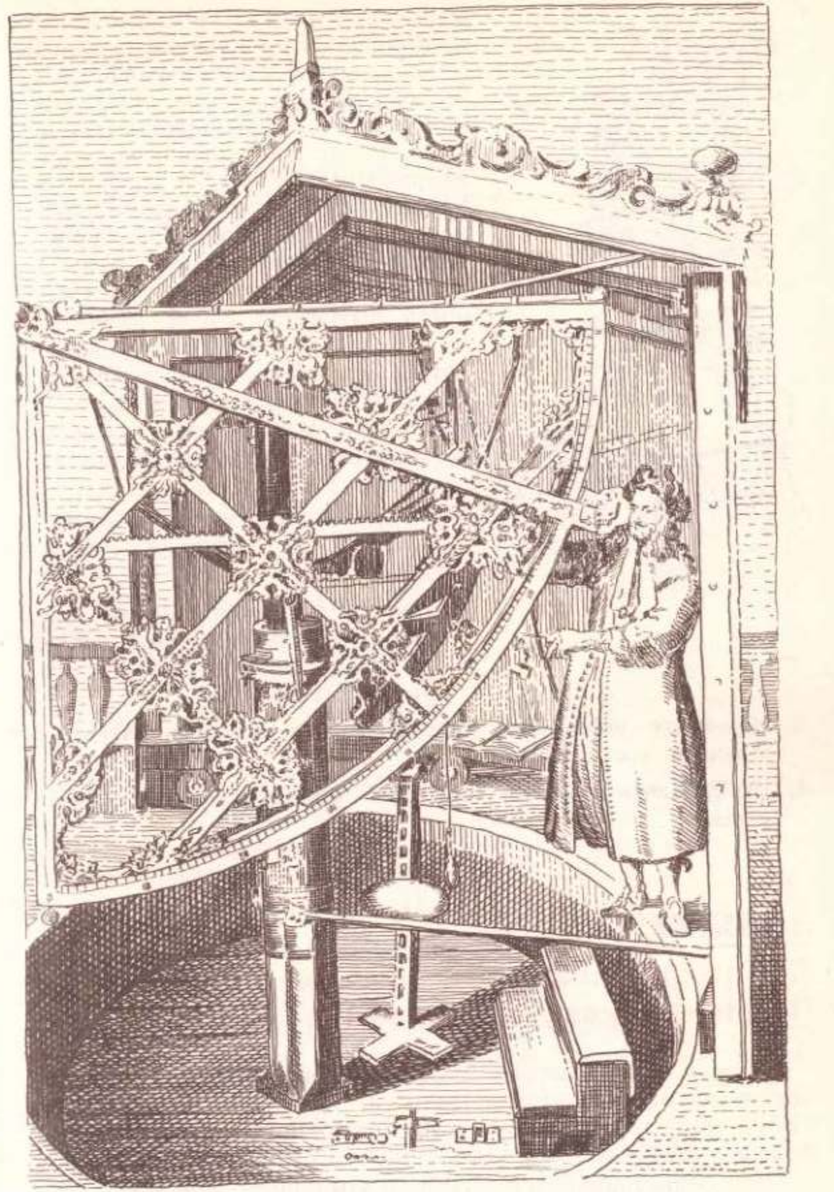


Рис. 73

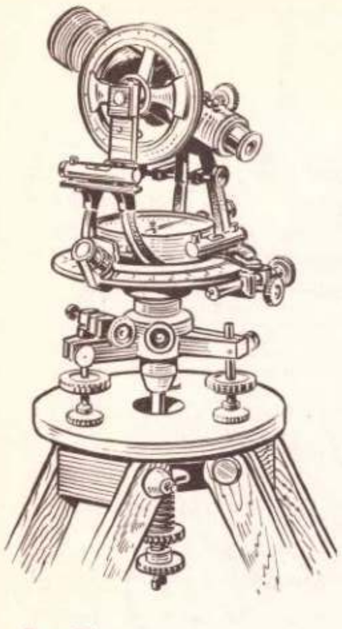


Рис. 74

Ширина ногтя указательного пальца приближенно равна 1 см, а расстояние от глаза до ногтя вытянутой вперед руки 60 см. Поэтому угол, под которым виден ноготь, приближенно равен 1°. Это следует из решения простой геометрической задачи, в которой нужно найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, у которого основание (ширина ногтя) равно 1 см, а высота (расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки) равно 60 см.

Измерьте ширину ногтя своего указательного пальца и расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки. Рассчитайте угол, под которым виден ноготь, и выполните следующие задания:

1. **Среди окружающих предметов найдите те, которые видны под углом 1°.**
2. **Измерьте ширину двух, трех и четырех пальцев руки и рассчитайте углы, под которыми они видны на вытянутой руке.**
3. **Измерьте углы, под которыми видны какие-нибудь окружающие вас предметы.**
4. **Придумайте другие способы приближенного измерения углов.**

ЗАНЯТИЕ 13

Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения.

Переформулируя теорему 3 предыдущего занятия, получаем достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 3. *(Признак перпендикулярности прямой и плоскости.)* ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.***

ЗАДАЧИ

1. **Покажите, что в прямой призме боковые ребра перпендикулярны основаниям.**
2. **Прямая a перпендикулярна плоскости α и прямая b параллельна a. Докажите, что прямая b также перпендикулярна плоскости α.**
3. **Прямая a перпендикулярна плоскости α и плоскость β параллельна α. Докажите, что прямая a перпендикулярна и плоскости β.**

Для точки A, не лежащей на плоскости π, рассмотрим прямую a, проходящую через эту точку и перпендикулярную π. Точку пересечения прямой a с плоскостью π обозначим A'. Отрезок AA' называется **перпендикуляром,** опущенным из точки A на плоскость π. Длина этого перпендикуляра называется **расстоянием** от точки A до плоскости π.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также его длина называются **высотой** пирамиды.

Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная к ней.

Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не лежащую на плоскости, с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром.

Ортогональным проектированием называется параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости. Ясно, что ортогональное проектирование обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

ЗАДАЧИ

4. **Докажите, что перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.**
5. **Докажите, что наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, равны в том и только том случае, когда равны их ортогональные проекции на эту плоскость.**
6. **Докажите, что в правильной пирамиде высота проходит через центр основания.**
7. **Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны a, b и c.**

8. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро b. Найдите высоту пирамиды.

9. Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой.

10. Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух данных точек.

11. Измерив расстояние до какого-нибудь здания и угол, под которым оно видно, определите высоту здания.

12. Измерив угол, под которым виден телеграфный столб, и зная его высоту (8 м), найдите расстояние до столба. Аналогичным образом попробуйте найти расстояния до других предметов, например до дерева, человека, самолета и т. п.

ЗАНЯТИЕ 14

Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями

Считают, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

Определение. **Углом между наклонной и плоскостью** называют угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость (рис. 75).

ЗАДАЧИ

1. Найдите угол между диагональю куба и плоскостью его основания.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро b. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

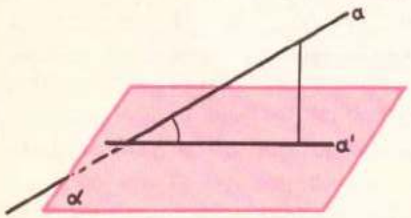


Рис. 75

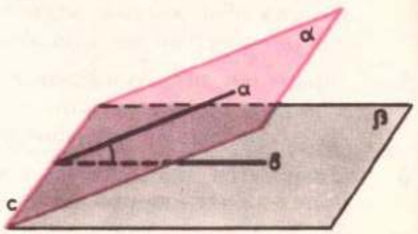


Рис. 76

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c. Если провести плоскость γ, перпендикулярную прямой c, то она пересечет плоскости α и β по прямым a и b соответственно (рис. 76). Угол между этими прямыми называется **углом между плоскостями** α и β. Плоскости называются **перпендикулярными,** если они образуют прямой угол.

Покажем, что *определение угла между плоскостями не зависит от выбора плоскости* γ.

Доказательство. Пусть γ_1, γ_2 — две плоскости, перпендикулярные прямой c и пересекающие плоскости α и β по прямым a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно (рис. 77), $a_1 \| a_2$ и $b_1 \| b_2$, так как они перпендикулярны одной и той же прямой c. Следовательно, углы, образованные этими прямыми, равны.

ЗАДАЧИ

3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро b. Найдите угол между боковой гранью и основанием пирамиды.

4. Покажите, что пересекающиеся грани прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны.

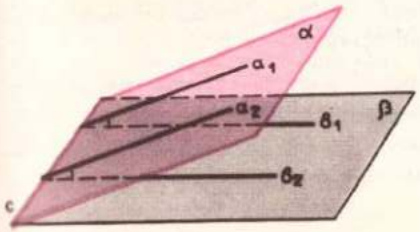


Рис. 77

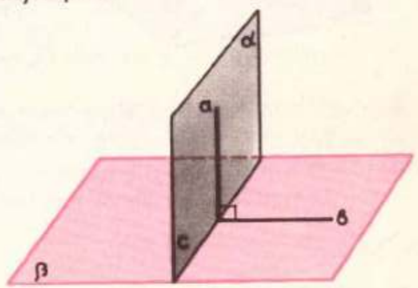


Рис. 78

Теорема 4. *(Признак перпендикулярности двух плоскостей.)* ***Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***

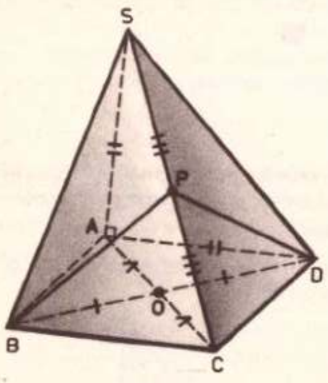
Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости β (рис. 78). Покажем, что плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости β через точку пересечения прямой a с плоскостью β проведем прямую b, перпендикулярную прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Через прямые a и b проведем плоскость γ. Прямая c будет перпендикулярна плоскости γ, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым a и b в этой плоскости. Угол, образованный прямыми a и b, прямой, так как прямая a перпендикулярна плоскости β. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны.

ЗАДАЧИ

5°. Можно ли утверждать, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны между собой?

6. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости α и β перпендикулярны третьей плоскости γ, то линия пересечения первых двух плоскостей будет перпендикулярна плоскости γ.

Рис. 79



7°. Для пирамиды, изображенной на рисунке 79, назовите номера верных утверждений:

1. Угол между плоскостями *SAB* и *DBC* прямой.
2. Плоскости *SBC* и *SAB* перпендикулярны.
3. Плоскости *SAC* и *DBC* перпендикулярны.
4. Угол между плоскостями *SCD* и *DBC* прямой.
5. Плоскости *DBC* и *ASP* перпендикулярны.
6. Угол между плоскостями *SBC* и *ASP* прямой.

8. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

9. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых.

ЗАНЯТИЕ 15

Центральное проектирование и его свойства

Пусть π — некоторая плоскость, S — не лежащая на ней точка — **центр проектирования** (рис. 80). Для точки A пространства проведем прямую a, соединяющую эту точку с точкой S. Точка A' — пересечение этой прямой с плоскостью π называется **центральной проекцией точки** A на плоскость π. Соответствие, при котором точкам A пространства сопоставляются их централь-

Рис. 80

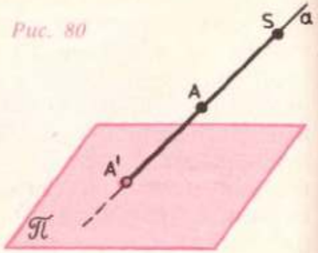
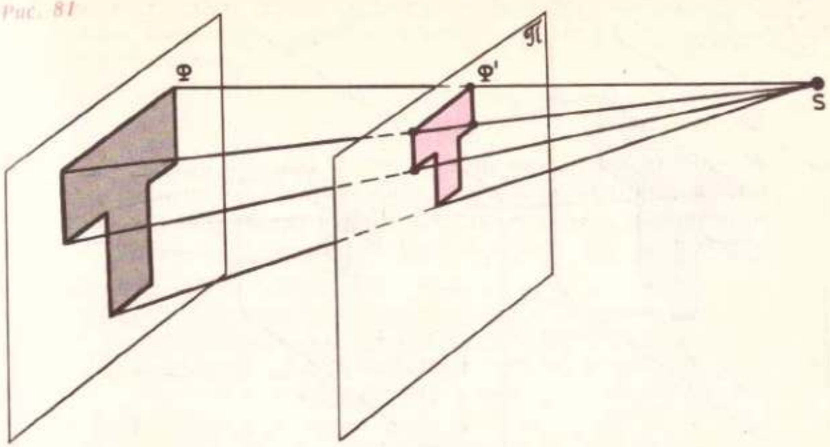


Рис. 81



ные проекции A', называется **центральным проектированием** или, иначе, **перспективой**.

Заметим, что не для каждой точки пространства определена ее центральная проекция. В случае *если прямая a параллельна плоскости π, точка A не имеет проекции на эту плоскость.*

Если Φ — фигура в пространстве, то проекции всех ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется **центральной проекцией фигуры** Φ на плоскость π. Говорят также, что фигура Φ' является **перспективой фигуры** Φ.

На рисунке 81 показано центральное проектирование в случае, когда плоскость проектирования расположена между фигурой Φ и центром проектирования S. Если центр проектирования

Рис. 82

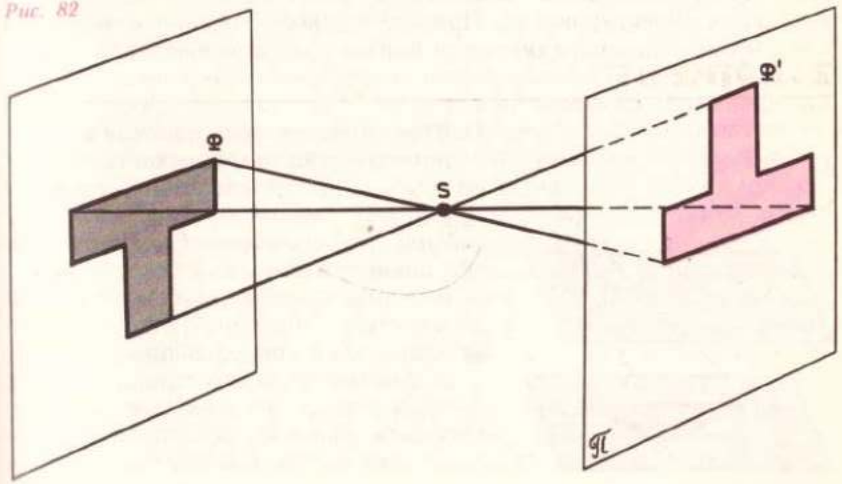
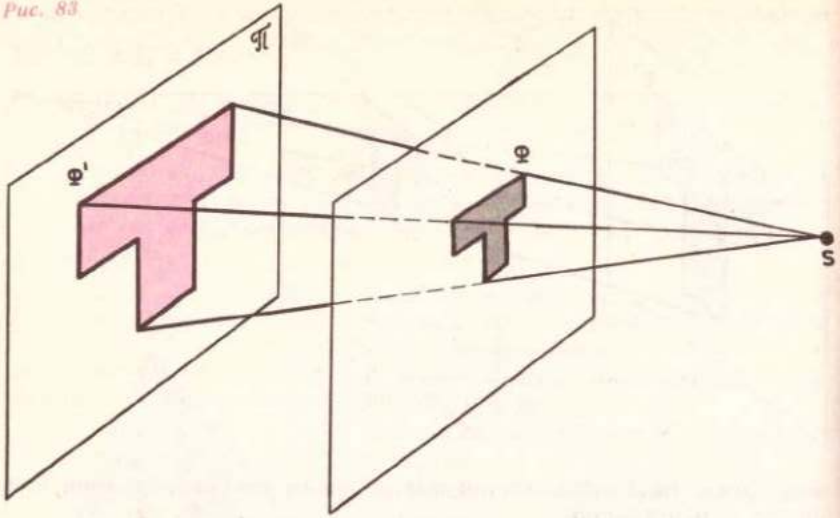


Рис. 83

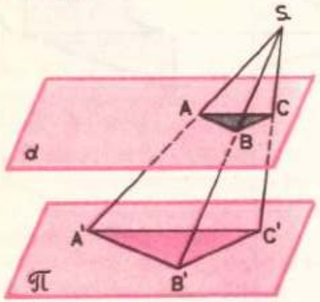


представлять себе как глаз наблюдателя, то впечатление, производимое на него изображением Φ′, будет таким же, как и от самой фигуры Φ. Отсюда ясно, что центральное проектирование дает наиболее наглядное изображение пространственных фигур.

На рисунке 82 показано центральное проектирование в случае, когда центр проектирования расположен между фигурой Φ и плоскостью проектирования. Такое перевернутое изображение получается на пленке фотоаппарата, объектив которого помещен в центр проектирования.

На рисунке 83 показано центральное проектирование в случае, когда фигура Φ расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования. Примером такой проекции может быть тень, отброшенная предметом от близко расположенного точечного источника света. Такие проекции получаются на экране при показе кинофильмов, диафильмов и т. д.

Рис. 84



Покажем, что *если плоская фигура F расположена на плоскости α, параллельной плоскости проектирования π, то ее центральной проекцией будет фигура F', подобная F*, причем коэффициент подобия k будет равен отношению расстояний от центра S до плоскостей π и α (рис. 84).

Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их проекции. Через центр S проведем прямую, перпендикулярную плоскости π. Так как плоскости α и π

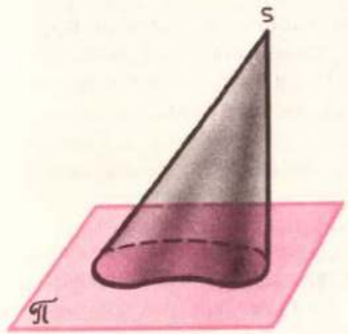
параллельны, то эта прямая будет перпендикулярна и плоскости α. Точки пересечения этой прямой с плоскостями α и π обозначим C и C' соответственно.

Для точек A и B фигуры F на плоскости α рассмотрим их проекции A', B' и треугольники ABS, $A'B'S$ и ACS, $A'C'S$. Они подобны, и коэффициент подобия k равен отношению $SC:SC'$.

Таким образом, определенное преобразование фигуры F в фигуру F' изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры F и F' подобны.

Рассмотрим пространственную фигуру, тесно связанную с центральным проектированием.

Пусть F — фигура на плоскости π и S — точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S, образуют фигуру в пространстве, которую называют **конусом.** Фигура F называется **основанием** конуса, а точка S — **вершиной** конуса (рис. 85).



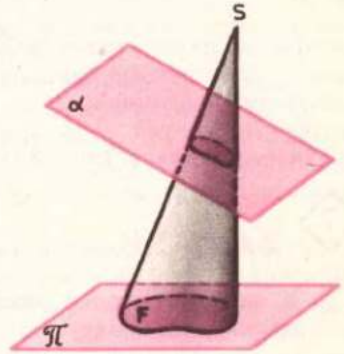


Рис. 85

Рис. 86

В случае если фигура F является кругом, конус называется **круговым.** Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются **образующими** конуса.

Если перпендикуляр, опущенный из вершины кругового конуса на плоскость π, проходит через центр основания, то такой конус называется **прямым** круговым. Раньше прямой круговой конус мы называли просто конусом и рассматривали только такие конусы.

Заметим, что *частным случаем конуса является пирамида.* Если конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, то его часть, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом.**

Центральные проекции плоских фигур можно рассматривать как сечения конуса плоскостью (рис. 86). Если плоскость сечения параллельна основанию конуса, то в сечении получается

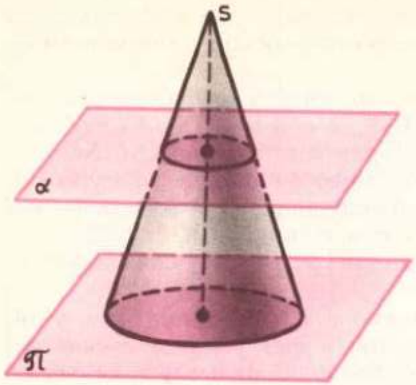


Рис. 87

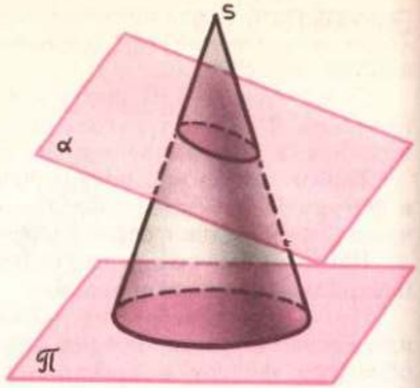


Рис. 88

фигура, подобная основанию. В частности, в сечении кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, получаются круг, подобный основанию (рис. 87). Если же плоскость сечения кругового конуса не параллельна основанию, то в сечении получается эллипс (рис. 88).

ЗАДАЧИ

1°. **У всех ли точек пространства существует центральная проекция?**

2°. **Укажите геометрическое место точек в пространстве, для которых не существует центральных проекций на плоскость π с центром проектирования S.**

3°. **В каком случае центральное проектирование дает перевернутое изображение фигуры?**

4. **В прямом круговом конусе с радиусом основания R и высотой h на расстоянии x от вершины проведено сечение плоскостью, параллельной основанию. Найдите радиус получившегося в сечении круга.**

5. **Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны основания равны 10 см и 2 см. Определите боковое ребро пирамиды.**

6. **Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 дм и 1 дм. Боковое ребро — 2 дм. Найдите высоту.**

7*. **Докажите, что в сечении кругового конуса плоскостью, не параллельной основанию, получается эллипс.**

ЗАНЯТИЕ 16

Изображение пространственных фигур в центральной проекции

Прежде чем перейти непосредственно к изображению пространственных фигур в центральной проекции, рассмотрим вопрос о том, куда при центральном проектировании переходит прямая.

Пусть прямая a пересекает плоскость проектирования π и центр проектирования S не принадлежит прямой a. Найдем проекцию этой прямой на плоскость π. Для этого через прямую a и центр проектирования S проведем плоскость α и линию ее пересечения с плоскостью π обозначим a' (рис. 89). В плоскости α через точку S проведем прямую, параллельную a, и точку ее пересечения с прямой a' обозначим S'. Легко видеть, что *прямая a'* без точки S' и *является искомой проекцией прямой a* на плоскость π.

Рассмотрим вопрос о том, куда при центральном проектировании переходят параллельные прямые.

Как мы знаем, при параллельном проектировании параллельные прямые переходят или в параллельные прямые, или в одну прямую, или в две точки, в зависимости от расположения этих прямых. Оказывается, что при центральном проектировании *параллельные прямые могут переходить и в пересекающиеся.*

Пусть прямые a и b параллельны и пересекают плоскость π, а центр проектирования не лежит в плоскости этих прямых (рис. 90). Тогда, выполняя предыдущие построения для прямых a и b, получим, что их проекциями будут пересекающиеся прямые a' и b', за исключением общей точки S'.

Впечатление, что параллельные прямые пересекаются, возникает, когда мы смотрим на уходящую вдаль дорогу, железнодорожные рельсы, провода и т. д.

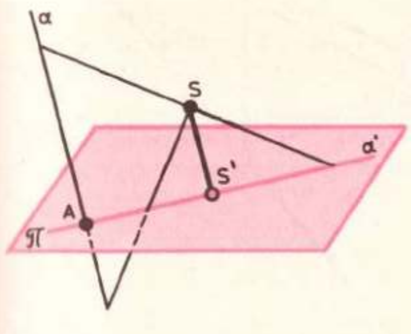


Рис. 89

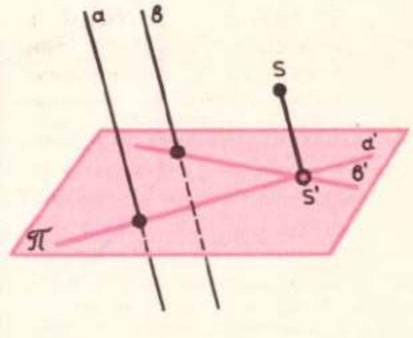


Рис. 90

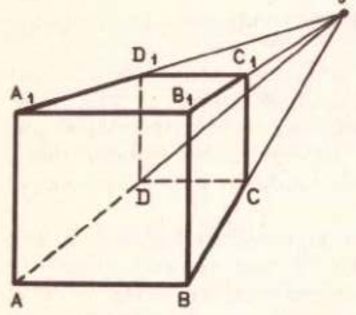
ЗАДАЧИ

1. Пусть прямая a пересекает плоскость π и не проходит через точку S. Покажите на рисунке 89, куда при центральном проектировании переходит часть прямой a, расположенная ниже плоскости π. Куда переходит часть прямой a, расположенная выше плоскости π?

2. Рассмотрите вопрос о том, куда при центральном проектировании переходит прямая, параллельная плоскости π.

3. Покажите, что если прямые a и b параллельны плоскости проектирования π и центр проектирования S не лежит в плоскости этих прямых, то их проекциями являются параллельные прямые.

Рис. 91



Используя рассмотренные свойства, перейдем к изображению пространственных фигур в центральной проекции.

На рисунке 91 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1.

На рисунке 92 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную ребру BB_1, но не параллельную его граням.

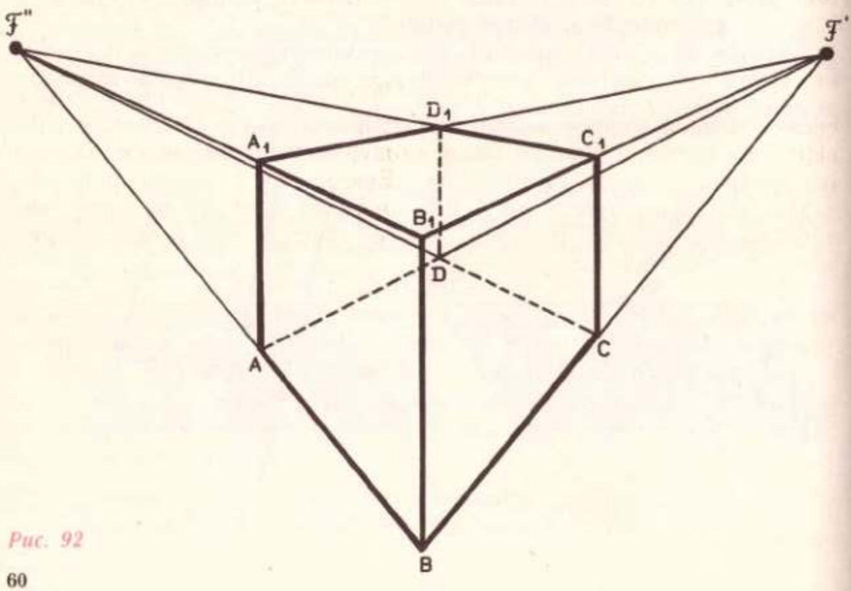


Рис. 92

ЗАДАЧИ

4. Нарисуйте центральную проекцию куба на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1, так, чтобы точка F лежала внутри изображения грани ABB_1A_1.

5. Нарисуйте центральную проекцию куба на плоскость, не параллельную никакому ребру этого куба.

6. Нарисуйте центральную проекцию прямого кругового цилиндра на плоскость, параллельную основаниям цилиндра, и на плоскость, не параллельную основаниям цилиндра.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Центральное проектирование, или перспектива, как наука возникло еще в Древней Греции. Первые упоминания о ней встречаются в работах Эсхила (525—456 до н. э.). Значительное место изображению пространственных фигур с использованием перспективы уделено в трактате «О геометрии» известного мыслителя и ученого Демокрита (ок. 460—370 до н. э.).

Следующее упоминание о перспективе находим в работах Евклида. Помимо своих знаменитых «Начал», он написал много других сочинений. В том числе в работе «Оптика» Евклид с позиций геометрии подробно изложил природу человеческого зрения, того, как получается изображение различных предметов на сетчатке глаза. Евклид писал, что мы ощущаем предметы, когда исходящие от них прямолинейные лучи сходятся в нашем глазу, поэтому всю систему лучей зрения можно представить себе в виде пирамиды, вершина которой находится в глазу, а основанием ее служит рассматриваемый нами предмет. Евклид ввел также постулат о том, что кажущиеся размеры предмета зависят от угла, под которым он виден. В этой работе содержится также теория искажения в зеркалах.

Самыми значительными работами по перспективе древнегреческого периода считаются работы римского архитектора и инженера Марка Витрувия Поллиона (конец I до н. э.). Способы построения изображений в перспективе изложены ученым в десяти книгах «Об архитектуре». Одним из обязательных компонентов архитектуры Витрувий считал ординацию, так им было названо проектирование, которое придавало надлежащую меру отдельным частям зданий. Витрувий пользовался чертежами планов и фасадов зданий, тем самым был одним из первых основателей начертательной геометрии.

Следующим важным этапом в развитии теории перспективы стала эпоха Возрождения. Теоретиком перспективы этого времени считается итальянский архитектор Филиппо Брунеллески (1377—1446), а практиками, воплотившими ее достижения в своих произведениях,— художники, скульпторы и архитекторы этой замечательной эпохи.

Выдающийся немецкий ученый, математик, гравер и художник Альбрехт Дюрер (1471—1528) предложил в своих книгах несколько устройств, позволяющих получать перспективу. Например, для получения перспективного изображения какого-либо предмета между глазом наблюдателя и предметом помещается стеклянная пластинка или рамка, разделенная на небольшие квадраты сеткой или черными нитями. Сначала копируются контуры модели на стеклянной пластинке, а затем полученное изображение переносится на бумагу. Описанное устройство художник изобразил на одной из своих гравюр (рис. 93).

Леонардо да Винчи в своем произведении «Трактат о живописи» делит перспективу на три основные части:

1. Линейная перспектива, которая изучает законы построения уменьшения фигур по мере удаления их от наблюдателя.

2. Воздушная и цветовая перспектива, которая трактует изменение цвета предметов в зависимости от их расстояния до наблюдателя и влияния слоя воздуха на насыщенность и локальность цвета.

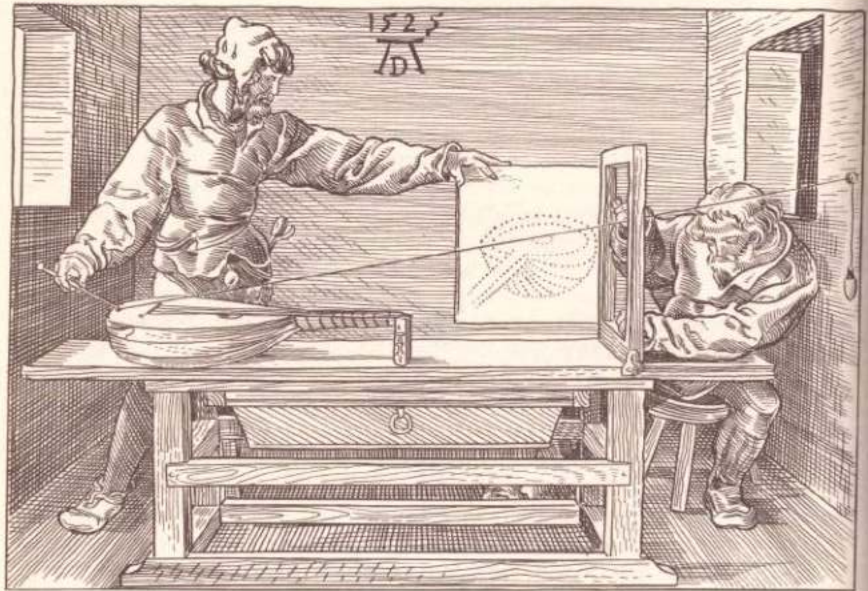


Рис. 93

3. Перспектива четкости очертания формы предмета, в которой анализируются изменения степени отчетливости границ фигур и контраста света и тени на них по мере удаления их в глубину пространства, изображаемого на картине.

Два последних раздела не получили дальнейшего теоретического развития из-за сложности исследования проблемы. Первый же раздел развился в точную науку — линейную перспективу, которая позднее вошла как составная часть в начертательную геометрию.

Основателем этого раздела геометрии считают знаменитого французского ученого, геометра, инженера и активного общественного деятеля Великой французской революции Гаспара Монжа (1746—1818). Его книга «Начертательная геометрия», изданная в 1795 г., явилась первым систематизированным изложением методов изображения пространственных фигур на плоскости. В этой книге сделаны первые попытки построить тени на ортогональном чертеже — *эпюре* и в перспективе. Там же даны рекомендации, как выполнить тушевку предмета в соответствии с законами воздушной перспективы. Работы Г. Монжа явились своеобразным логическим завершением всего, что было сделано раньше, и началом нового этапа в развитии науки о графическом изображении — начертательной геометрии.

Русские художники XVII — XIX вв. хорошо владели теорией перспективы и применяли ее в своих картинах. Крупнейшим представителем русской академической школы, лучшим рисовальщиком своего времени был А. П. Лосенко (1737—1773). Он требовал от своих учеников тщательного изучения теории перспективы и применения ее законов в академическом рисунке. Более 20 лет вел поиск способа овладения видением натуры на основе законов перспективы известный русский художник А. Г. Венецианов (1780—1847). Он считал, что обучение художественным навыкам необходимо начинать с изучения законов перспективы, которую художник рассматривал как метод изображения реальных предметов в конкретной обстановке. Большое значение придавал изучению перспективы замечательный русский художник и педагог Н. Н. Ге (1831—1894). Обращаясь к своим ученикам, он говорил: «Учите перспективу, и когда овладеете ею, внесите ее в работу, в рисование. Никогда не отделяйте ее от рисования, как это делают многие, т. е. рисуют по чувству, а потом поправляют правилами перспективы,— напротив, пусть перспектива у вас будет всегдашним спутником вашей работы и стражем верности».

Картина, упрощенно говоря, это перспективное изображение. И в зависимости от своего творческого замысла художник выбирает положение центра проектирования, от которого зависит зрительское восприятие. Например, в картине Н. Н. Ге «Петр Первый допрашивает царевича Алексея» (рис. 7 вклейки) главная точка — центр перспективы находится в центре картины. Такое же положение центр перспективы занимает и в картине И. Е. Репина

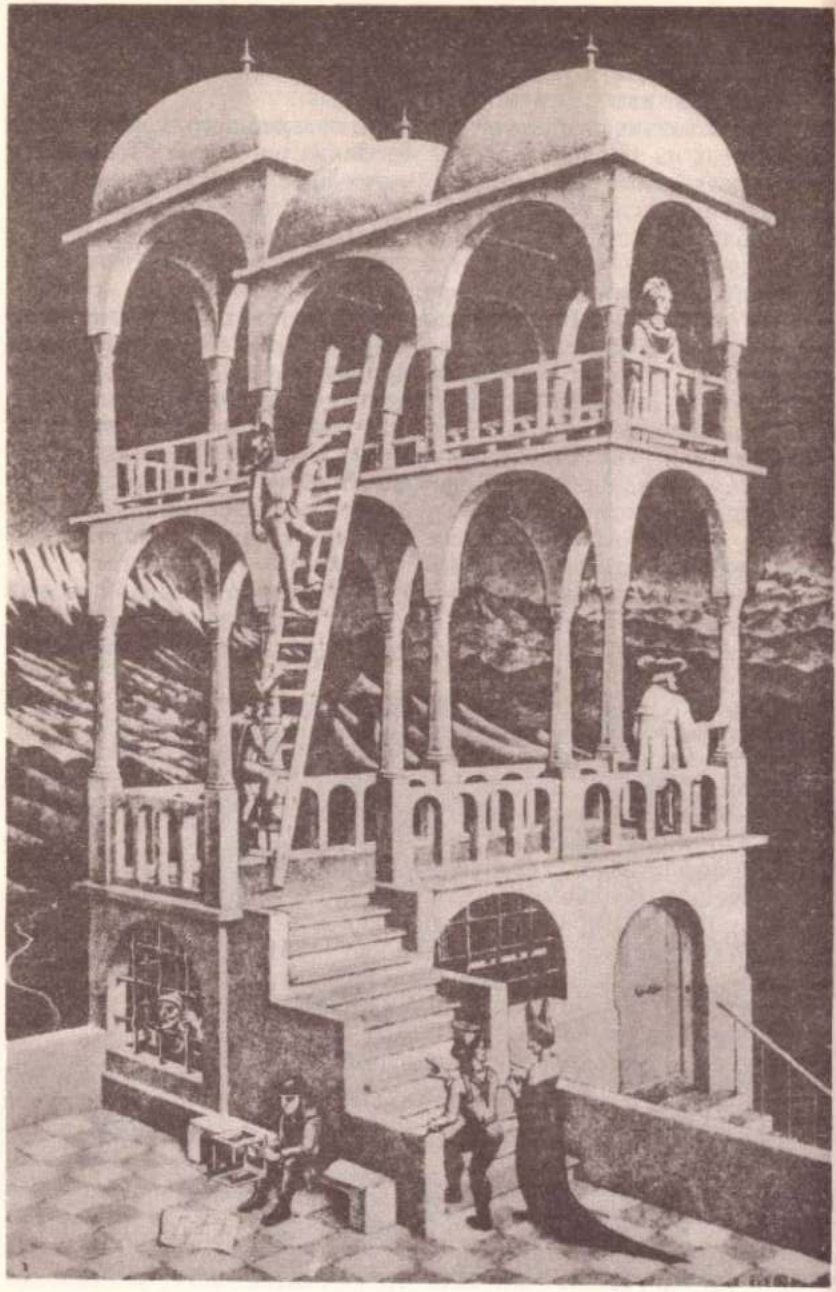


Рис. 94

«Не ждали» (рис. 8 вклейки). В картине П. А. Федотова «Сватовство майора» он смещен, чтобы подчеркнуть смысловое содержание изображенных событий (рис. 9 вклейки).

1°. На рисунке 10 вклейки воспроизведена фотография «невозможного объекта». Подумайте, что и как было сфотографировано.

2°. В основе рисунка М. Эшера «Бельведер» (рис. 94) лежит идея «перепутанного куба». Попробуйте разобраться в этом рисунке.

3°. Посмотрев на знаменитую «Троицу» А. Рублева (рис. 11 вклейки), попробуйте ответить на вопрос: чем отличается обратная перспектива от обычной перспективы и почему художник выбрал именно обратную перспективу для изображения «Троицы»?

Литература

1. Макарова М. Н. Перспектива.— М.: Просвещение, 1989.
2. Соловьев С. А. Перспектива.— М.: Просвещение, 1981.
3. Фукс Д. Б. Перспектива // Квант.— 1984.— № 2.

ЗАНЯТИЕ 17

Обобщающее повторение

1. Перечислите основные понятия стереометрии. Идеализацией каких реальных объектов они являются?

2. Перечислите свойства основных понятий стереометрии, принимаемые за аксиомы.

3. Сформулируйте и докажите некоторые следствия из аксиом стереометрии.

4. Сформулируйте определение параллельных прямых в пространстве. Какие прямые называются скрещивающимися?

5. Сформулируйте определение параллельности прямой и плоскости. Укажите случаи взаимного расположения прямой и плоскости.

6. Сформулируйте и докажите признак параллельности прямой и плоскости.

7. Сформулируйте определение параллельности двух плоскостей. Перечислите случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве.

8. Сформулируйте и докажите признак параллельности двух плоскостей.
9. Какое преобразование называется параллельным проектированием?
10. Сформулируйте свойства параллельного проектирования.
11. Сформулируйте общее определение цилиндра.
12. Сформулируйте определение угла между пересекающимися прямыми в пространстве. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
13. Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
14. Сформулируйте и докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
15. Сформулируйте определение угла между прямой и плоскостью.
16. Сформулируйте определение угла между двумя плоскостями.
17. Сформулируйте определение перпендикулярности двух плоскостей.
18. Сформулируйте и докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.
19. Какое преобразование называется центральным проектированием?
20. Сформулируйте общее определение конуса.

ЗАНЯТИЕ 18

Выпуклые многогранники

Среди плоских и пространственных фигур выделяют так называемые **выпуклые** фигуры. Это такие фигуры, которые вместе с любыми двумя своими точками целиком содержат и соединяющий их отрезок.

Определение. Многогранник называется **выпуклым,** если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 95 показаны выпуклый и невыпуклый многоугольники. Многоугольник *б* не является выпуклым, так как не содержит отрезок AB.

На рисунке 96 показаны выпуклый и невыпуклый многогранники. Многогранник *б* не является выпуклым, так как не содержит отрезок AB.

Все многогранники, которые мы до сих пор рассматривали, были выпуклыми многогранниками (куб, параллелепипед, призма, пирамида и др.).

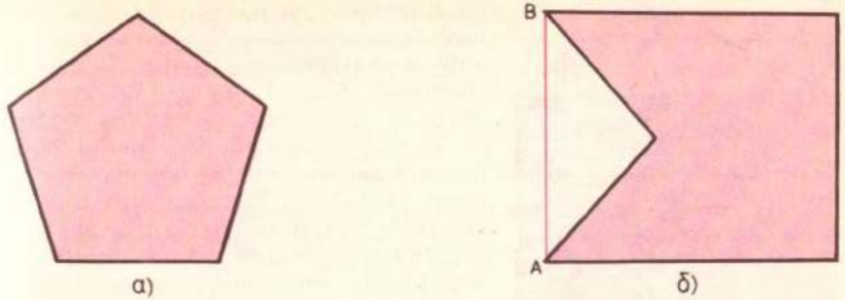


Рис. 95

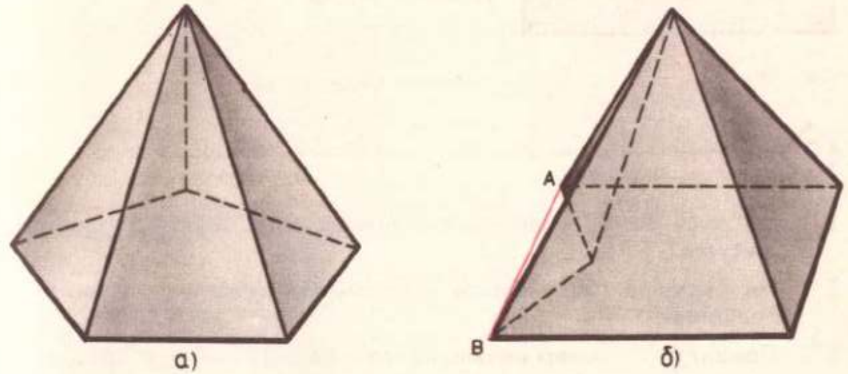


Рис. 96

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.

1. ***В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.***

Действительно, пусть F — какая-нибудь грань многогранника M (рис. 97) и A, B — точки, принадлежащие грани F. Из условия выпуклости многогранника M следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M. А поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет содержаться и в этом многоугольнике.

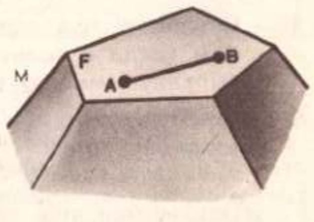


Рис. 97

2. ***Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.***

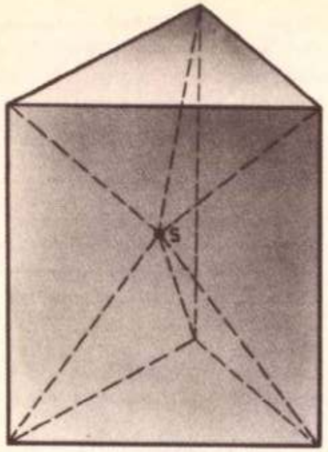


Рис. 98

Действительно, пусть M — выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника. Соединим точку S с вершинами многогранника отрезками (рис. 98). Заметим, что в силу выпуклости многогранника M все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника. Эти пирамиды целиком содержатся в M, и все вместе составляют многогранник M.

ЗАДАЧИ

1°. На рисунке 99 укажите выпуклые и невыпуклые плоские фигуры.

2°. На рисунке 100 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

3°. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

4. Покажите, что в сечении выпуклого многогранника плоскостью всегда получается выпуклая фигура.

5. Покажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основанием является выпуклый многоугольник.

6. Покажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основанием является выпуклый многоугольник.

7. Покажите, что пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

8. Покажите, что объединение выпуклых фигур может не быть выпуклой фигурой.

9*. Покажите, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от каждой своей грани.

10. Покажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на конечное число тетраэдров.

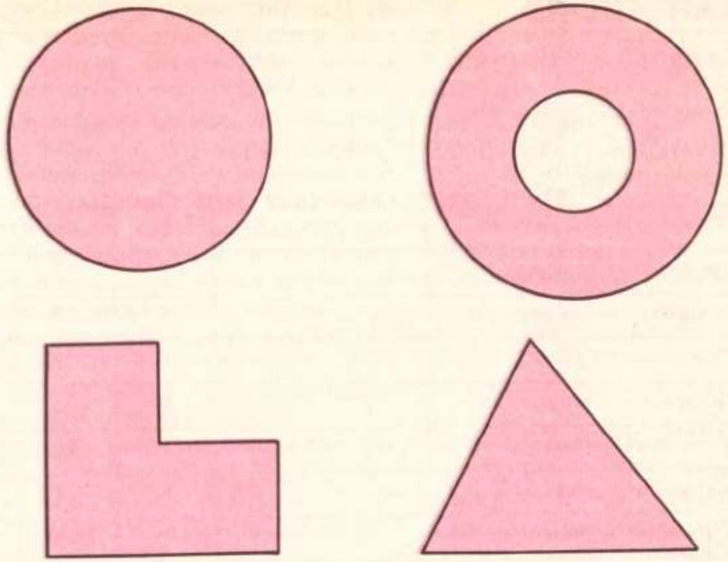


Рис. 99

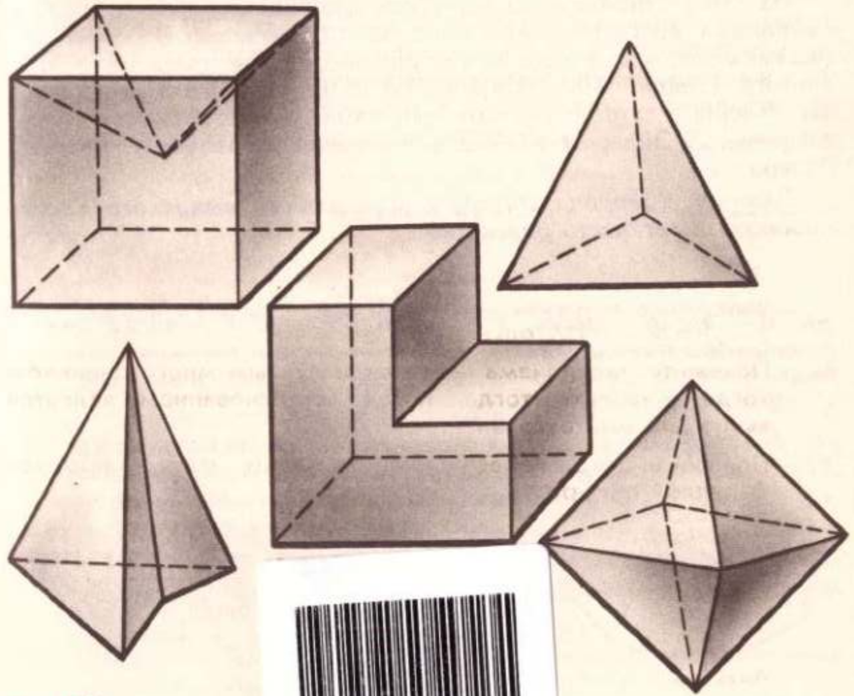


Рис. 100

ЗАНЯТИЕ 19

Теорема Эйлера

Рассмотрим известные вам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней.

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$
n-угольная усеченная пирамида	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство $В-Р+Г=2$. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Л. Эйлером в 1752 г. и получило название теоремы Эйлера.

Теорема. (*Теорема Эйлера.*) ***Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство***

$$В-Р+Г=2, \qquad (*)$$

где* В *— число вершин,* Р *— число ребер и* Г *— число граней данного многогранника.

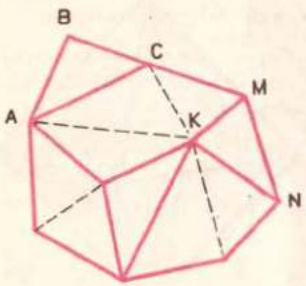


Рис. 101

Доказательство. Представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку (рис. 101), содержащую $Г'=Г-1$ многоугольников (которые по-прежнему будем называть гранями), В вершин и Р ребер.

Для этой сетки нужно доказать соотношение

$$В-Р+Г'=1, \qquad (**)$$

тогда для многогранника будет справедливо требуемое соотношение (*).

Покажем, что соотношение (**) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике сетки провести диагональ. Действительно, после проведения такой диагонали в сетке будет В вершин, $Р+1$ ребер и $Г'+1$ граней и, следовательно, $В-(Р+1)+Г'+1=В-Р+Г'$. Пользуясь этим свойством, проведем в сетке диагонали, разбивающие входящие в нее многоугольники на треугольники, и для полученной сетки покажем выполнимость соотношения (**). Для этого будем последовательно убирать внешние ребра сетки, уменьшая в ней количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника ABC требуется снять два ребра, в нашем случае AB и BC;

б) для удаления треугольника MKN требуется снять одно ребро, в нашем случае MN.

В обоих случаях соотношение (**) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника сетка будет состоять из $В-1$ вершин, $Р-2$ ребер и $Г'-1$ граней, $(В-1)-(Р-2)+(Г'-1)=В-Р+Г'$. Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношение (**). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придем к сетке, состоящей из одного треугольника. Для такой сетки $В=3$, $Р=3$, $Г'=1$ и, следовательно, $В-Р+Г'=1$. Значит, соотношение (**) имеет место и для исходной сетки, откуда окончательно получаем, что для данного многогранника справедливо соотношение (*).

ЗАДАЧИ

1°. **Опишите все выпуклые многогранники с пятью вершинами.**

2. **Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.**

3. **Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если: а) $Р=12$; б) $Р=15$? Нарисуйте эти многогранники.**

4*. **Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 сторон, и в каждой вершине сходится по три ребра. Покажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.**

5. **Покажите, что не существует выпуклого многогранника с семью ребрами.**

6. **Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней, а в каждой из них по 13 сторон?**

7. **В выпуклом многограннике известно число граней, причем каждая грань имеет одно и то же известное число сторон. Можно ли узнать по этим данным, сколько ребер в многограннике?**

8. **В выпуклом многограннике известно число вершин, причем в каждой вершине сходится одно и то же известное число ребер. Можно ли узнать, сколько ребер в многограннике?**

9*. **Покажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходится три ребра.**

10*. **Докажите, что у каждого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.**

11*. **Подумайте, где в рассуждениях, показывающих справедливость теоремы Эйлера, использовалась выпуклость многогранника.**

12. **Приведите пример многогранника, для которого не выполняется равенство В—Р+Г=2, где В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней данного многогранника.**

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Леонард Эйлер

В 1993 г. исполнилось 210 лет со дня смерти Леонарда Эйлера (1707—1783) — одного из величайших математиков мира, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Эйлер долгое время жил и работал в России, был действительным членом Петербургской Академии наук, оказал большое влияние на развитие русской математической школы и в деле подготовки кадров ученых математиков и педагогов России. Поражает своими размерами научное наследие ученого. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причем последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжелый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти проблему, которая не была бы затронута в его произведениях. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, недаром французский ученый П. С. Лаплас говорил: «Читайте Эйлера, он — учитель всех нас».

Литература

1. Гиндикин С. Г. Леонард Эйлер // Квант.— 1983.— № 10, 11.
2. Яковлев А. Я. Леонард Эйлер.— М.: Просвещение, 1983.— (Из серии «Люди науки»).

ЗАНЯТИЕ 20*

Приложения теоремы Эйлера

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой **топологии** — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек.

Такие свойства фигур называются топологическими. Соотношение Эйлера В—Р+Г=2 для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, однако их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Заметим, что при доказательстве соотношения Эйлера мы уже использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. При этом на плоскости получался многоугольник, подразделенный на более мелкие многоугольники, для которых справедливо соотношение В—Р+Г′=1, где В — число вершин, Р — число ребер и Г′ — число граней (многоугольников). Ребра и сами многоугольники могут быть искривлены, и это не влияет на соотношение Эйлера.

Совокупность вершин и соединяющих их ребер на плоскости называется **графом.** Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы выставок, структурные формулы молекул и т. д. Графы широко используются в современной математике и программировании. Они находят все новые приложения в теории планирования и управления, теории расписаний, социологии, математической лингвистике, экономике, биологии, медицине и т. д. Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких головоломок была задача о трех домиках и трех колодцах, которую мы сейчас и рассмотрим.

Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу?

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками D_1, D_2, D_3, а колодцы — точками K_1, K_2, K_3. Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые должны попарно не пересекаться (рис. 102).

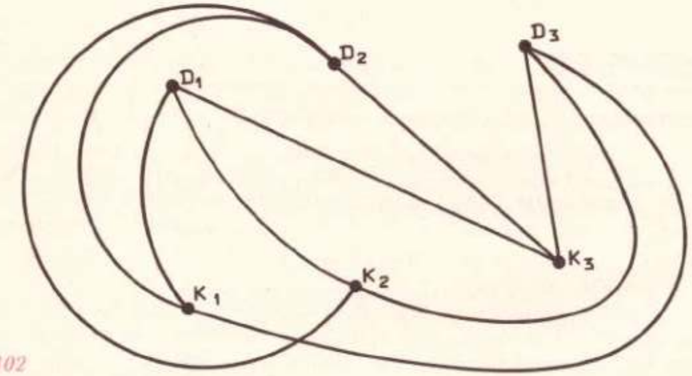


Рис. 102

Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, подразделенный на более мелкие многоугольники — грани. Поэтому для числа вершин, ребер и граней должно выполняться соотношение Эйлера $В-Р+Г'=1$. Добавим к рассматриваемым граням еще одну грань — внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид $В-Р+Г=2$, причем $В=6$ и $Р=9$. Следовательно, $Г=5$. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, то количество ребер должно быть не меньше $\frac{5\cdot 4}{2}=10$, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Другой задачей-головоломкой, связанной с именем Эйлера, была задача Эйлера о кенигсбергских мостах.

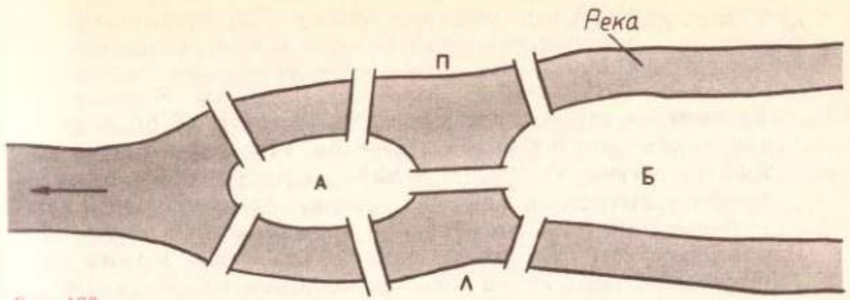


Рис. 103

Во времена Эйлера в городе Кенигсберге (ныне Калининград) *было семь мостов через реку Прегель* (рис. 103). *Л — левый берег, П — правый берег, А, Б — острова. Можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост ровно по одному разу?*

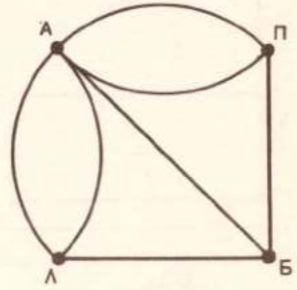


Рис. 104

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т. е. «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют так называемые **уникурсальные графы.**

На рисунке 104 изображен граф, соответствующий задаче о кенигсбергских мостах. Требуется доказать, что этот граф является уникурсальным.

Для этого, используя понятие **индекса вершины** (число ребер графа, сходящихся в данной вершине), докажем, что если граф уникурсален, то он содержит не более двух вершин нечетного индекса. Действительно, если граф уникурсален и его начало не совпадает с концом, то начало и конец являются единственными вершинами нечетного индекса. Остальные вершины имеют четный индекс, так как в каждую точку мы входим и выходим из нее. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечетным индексом нет.

Приступим теперь к решению задачи. Определим четность вершин графа на рисунке 104. Вершина А имеет индекс 5, Б — 3, П — 3, Л — 3.

Таким образом, мы имеем четыре вершины нечетного индекса и, следовательно, данный граф не является уникурсальным.

Отсюда получаем, что нельзя пройти во время прогулки по городу Кенигсбергу по всем семи мостам, проходя по каждому только один раз.

ЗАДАЧИ

1. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале только один раз? Соответствующий граф приведен на рисунке 105. Вершины графа — это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра — залы и коридоры. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

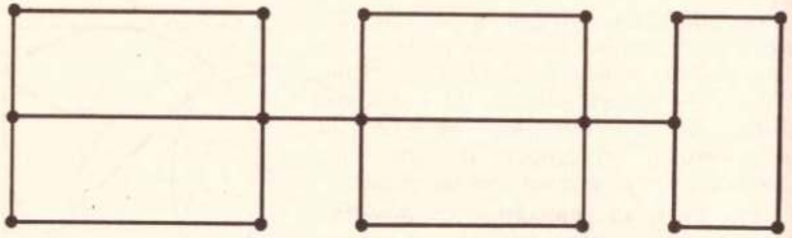


Рис. 105

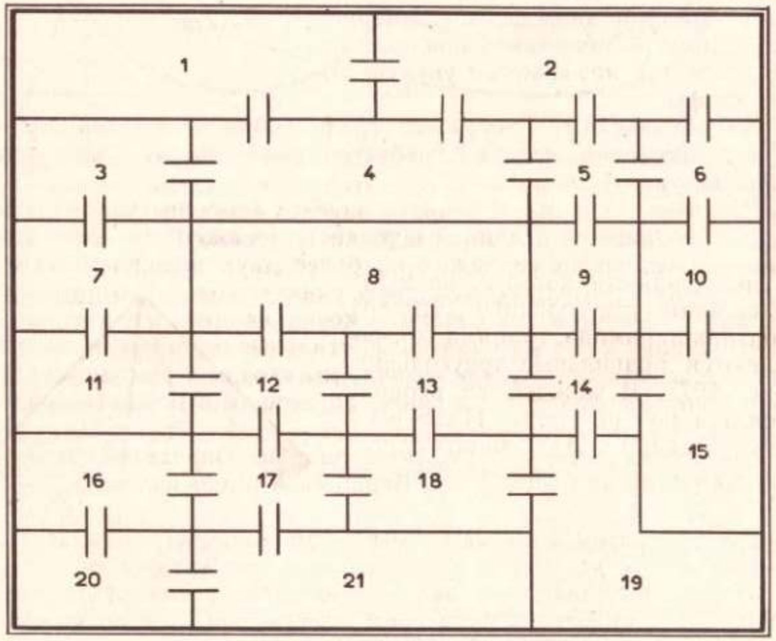


Рис. 106

2. На рисунке 106 изображен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После смерти рыцаря его наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую; сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

Литература

1. Бекламов Б. В. Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам // Квант, 1974.— № 10.
2. Березина Л. Ю. Графы и их применение.— М.: Просвещение.— 1979.
3. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология.— М.: Наука, 1982.— Вып. 21.— (Библиотечка «Квант»).

ЗАНЯТИЕ 21

Правильные многогранники

Дадим сначала определение правильного многогранника.

Определение. Выпуклый многогранник называется **правильным**, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

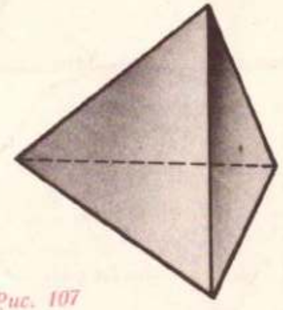


Рис. 107

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Это треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. 107). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также **тетраэдром**, что в переводе с греческого означает четырехгранник.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 108. Его

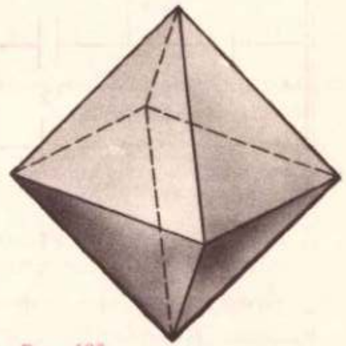


Рис. 108

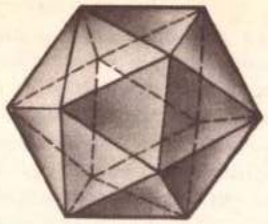


Рис. 109

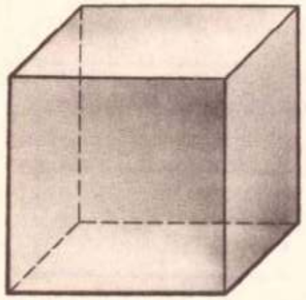


Рис. 110

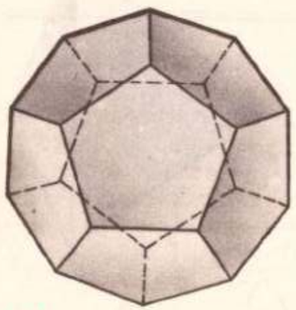


Рис. 111

поверхность состоит из восьми правильных треугольников, и поэтому он называется **октаэдром**.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 109. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, и поэтому он называется **икосаэдром**.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме **куба** (рис. 110), не существует других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром*.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 111. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, и поэтому он называется **додекаэдром**.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует, и, таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр.

ЗАДАЧИ

1°. **Почему гранями правильного многогранника не могут быть правильные шестиугольники?**

2°. **Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли она правильным многогранником? Почему?**

3°. **На рисунке 112 изображена пространственная фигура, составленная из семи кубов (трехмерный крест). Почему этот многогранник не является правильным? Сколько квадратов ограничивают его поверхность? Сколько ребер и вершин у этого многогранника?**

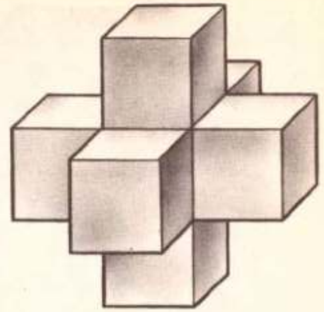


Рис. 112

4°. **Какие фигуры, из представленных на рисунке 113, можно считать развертками октаэдра?**

5. **Нарисуйте правильные многогранники.**

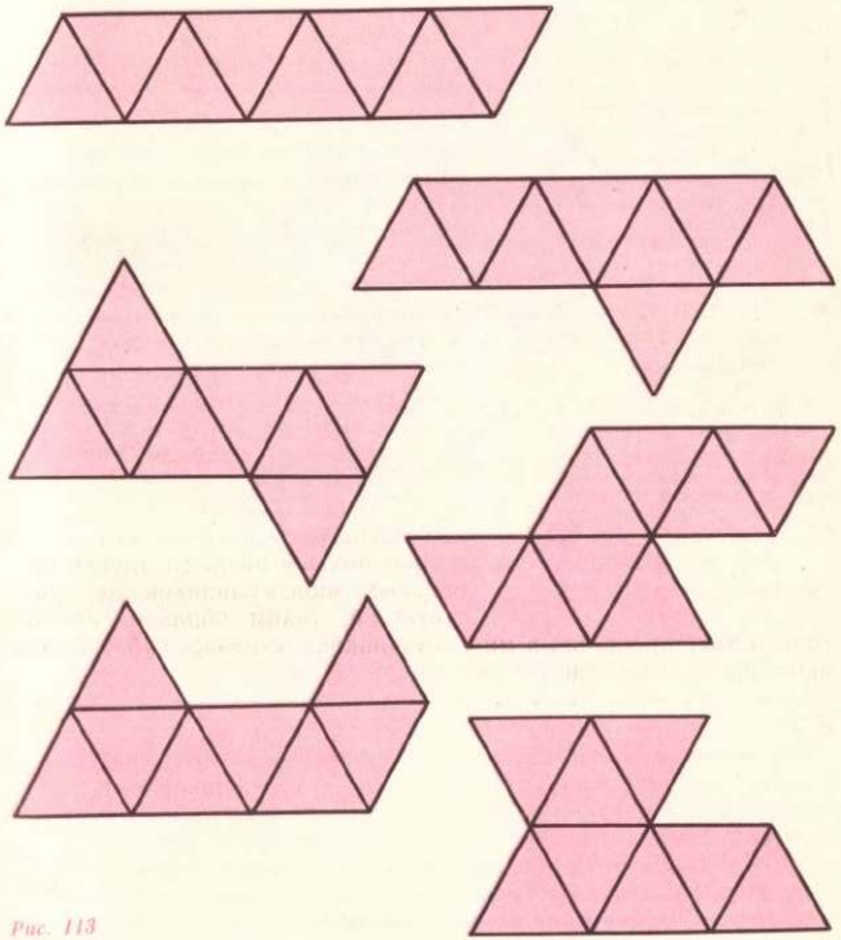
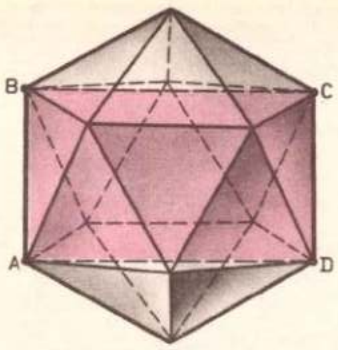


Рис. 113



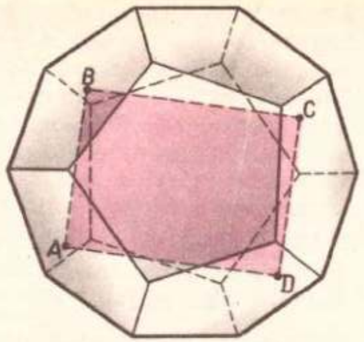


Рис. 114 *Рис. 115*

6. Покажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра и, наоборот, центры граней октаэдра являются вершинами куба.

7. Покажите, что центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра и, наоборот, центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра.

8. Покажите, что прямоугольник $ABCD$, вписанный в икосаэдр (рис. 114), является золотым.

9. Покажите, что прямоугольник $ABCD$, вписанный в додекаэдр (рис. 115), является золотым. A, B, C, D — центры граней додекаэдра.

10. Ребро октаэдра равно а. Определите расстояние между его противоположными вершинами (ось октаэдра).

11. Ребро куба равно а. Вычислите ребро вписанного в него октаэдра.

12. Изготовьте модели правильных многогранников из разверток и с помощью конструктора.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, архитекторов, художников и т. д. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон. Именно поэтому правильные многогранни-

Рис. 116

ки называются также **телами Платона.** Правильным многогранникам посвящена последняя, XIII книга знаменитых «Начал» Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли «О божественной пропорции». Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер. В своей гравюре «Меланхолия» (рис. 116) он дал перспективное изображение додекаэдра. В 1525 г. А. Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

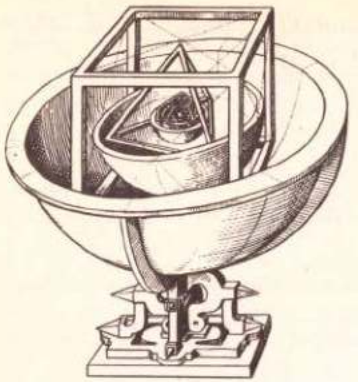


Рис. 117

Немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630) в своей работе «Тайна мироздания» (1596), используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: «Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия». Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера (рис. 117), но от ее истинности впоследствии пришлось отказаться.

ЗАНЯТИЕ 22*

Топологически правильные многогранники

Рассмотрим понятие правильного многогранника с точки зрения топологии. Как мы видели, с этой точки зрения все треугольники эквивалентны, так как один треугольник всегда может быть получен из любого другого соответствующим сжатием или растяжением сторон. Вообще все многоугольники с одинаковым числом сторон эквивалентны по той же причине. Аналогично все треугольные пирамиды эквивалентны и т. д.

Как в такой ситуации определить понятие правильного многогранника? Иначе говоря, какие свойства в определении правильного многогранника следует оставить, а какие отбросить?

Напомним, что *выпуклый многогранник — правильный, если его гранями являются правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.* В этом определении количество сторон и количество граней являются топологически устойчивыми, т. е. не меняющимися при непрерывных деформациях. Правильность же многоугольников не является топологически устойчивым свойством и от него приходится отказываться. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. Выпуклый многогранник называется **топологически правильным,** если его гранями являются многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Например, все треугольные пирамиды являются топологически правильными многогранниками, эквивалентными между собой. Четырехугольная пирамида не является топологически правильным многогранником. Все параллелепипеды являются топологически правильными многогранниками, также эквивалентными между собой.

Рассмотрим вопрос о том, сколько существует не эквивалентных между собой топологически правильных многогранников.

Как мы знаем, правильных многогранников существует только пять. Казалось бы, топологически правильных многогранников должно быть гораздо больше. Однако оказывается, что никаких других топологически правильных многогранников, не эквивалентных уже известным (тетраэдру, кубу, октаэдру, икосаэдру и додекаэдру), не существует.

Для доказательства этого воспользуемся теоремой Эйлера. Пусть дан топологически правильный многогранник, гранями которого являются n-угольники, и в каждой вершине сходится m ребер. Ясно, что n и m больше или равны трем. Обозначим, как и раньше, В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней этого многогранника. Тогда

$$\text{Г}\cdot n=2\cdot\text{Р};\ \text{Г}=\frac{2\cdot\text{Р}}{n};\ \text{В}\cdot m=2\cdot\text{Р};\ \text{В}=\frac{2\cdot\text{Р}}{m}.$$

По теореме Эйлера, $\text{В}-\text{Р}+\text{Г}=2$ и, следовательно,

$$\frac{2\cdot\text{Р}}{m}-\text{Р}+\frac{2\cdot\text{Р}}{n}=2.$$

Откуда $\text{Р}\left(\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1\right)=2$. Из последнего равенства, в частности, следует, что должно выполняться неравенство $\frac{2}{n}+\frac{2}{m}>1$, решая которое относительно n и m получим следующие ограничения: $3\leqslant n<6$, $3\leqslant m<6$.

Рассмотрим все возможные значения n и m, удовлетворяющие найденным ограничениям, и заполним следующую таблицу:

n \ m	3	4	5
3	В=4, Р=6, Г=4 тетраэдр	В=6, Р=12, Г=8 октаэдр	В=12, Р=30, Г=20 икосаэдр
4	В=8, Р=12, Г=6 куб	не существует	не существует
5	В=20, Р=30, Г=12 додекаэдр	не существует	не существует

Самостоятельно проверьте правильность заполнения таблицы.

Из этой таблицы следует, что возможными топологически правильными многогранниками являются только правильные многогранники, перечисленные выше, и многогранники, им эквивалентные.

ЗАНЯТИЕ 23

Полуправильные многогранники

На предыдущем занятии мы рассмотрели правильные многогранники, т. е. такие выпуклые многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине которых сходится одинаковое число граней. Если в этом определении допустить, чтобы гранями многогранника могли быть различные правильные многоугольники, то получим многогранники, которые называются полуправильными.

Определение. **Полуправильным** многогранником называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники, возможно и с разным числом сторон, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

К полуправильным многогранникам относятся *правильные n-угольные призмы, все ребра которых равны,* т. е. боковыми гранями которых являются квадраты. Например, правильная шестиугольная призма, изображенная на рисунке 118, имеет своими гранями два правильных шестиугольника — основания призмы и шесть квадратов, образующих боковую поверхность призмы.

К полуправильным многогранникам относятся также так называемые *n-угольные антипризмы,* все ребра которых равны. На

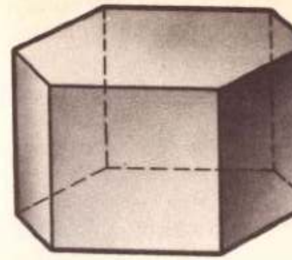


Рис. 118

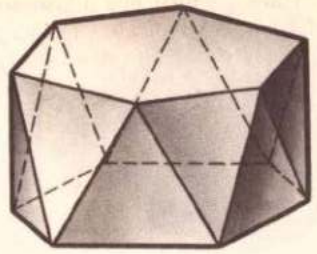


Рис. 119

рисунке 119 изображена шестиугольная антипризма, полученная из шестиугольной призмы поворотом одного из оснований относительно другого на угол 30°. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания. Если высоту призмы подобрать таким образом, чтобы все боковые грани являлись правильными треугольниками, то полученная антипризма будет полуправильным многогранником.

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется еще только 14 полуправильных многогранников, 13 из которых впервые открыл и описал древнегреческий математик, физик и механик Архимед (287—212 до н. э.). Поэтому эти полуправильные многогранники называются также **телами Архимеда.**

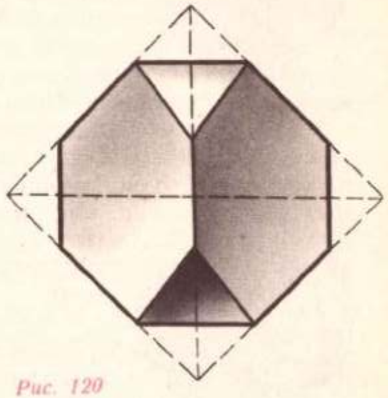


Рис. 120

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией «усечения», состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника.

Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим *усеченный тетраэдр,* имеющий восемь граней (рис. 120). Из них четыре — правильные шестиугольники и четыре — правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходится три грани.

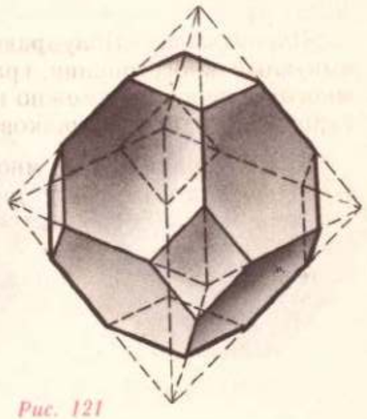


Рис. 121

Если указанным образом срезать углы октаэдра и икосаэдра, то полу-

Рис. 122

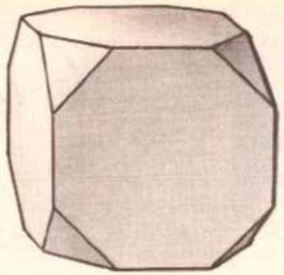


Рис. 123

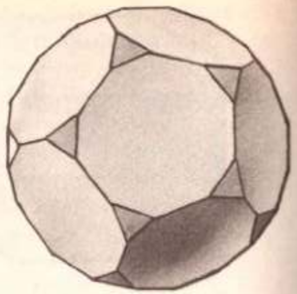


Рис. 124

чим *усеченный октаэдр* (рис. 121) и *усеченный икосаэдр* (рис. 122). Обратите внимание, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра.

Из куба и додекаэдра также можно получить *усеченный куб* (рис. 123) и *усеченный додекаэдр* (рис. 124).

Заметим, что если к этим усеченным многогранникам опять применить операцию «усечения», то полуправильные многогранники уже не получатся. Подумайте почему?

Для того чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе секущие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется *кубооктаэдр* (рис. 125). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название — кубооктаэдр.

Аналогично если в додекаэдре секущие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется *икосододекаэдр* (рис. 126). У него двенадцать граней — правильные пятиугольники и двадцать граней — правильные треугольники, т. е. все грани додекаэдра и икосаэдра.

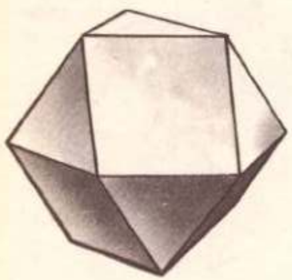


Рис. 125

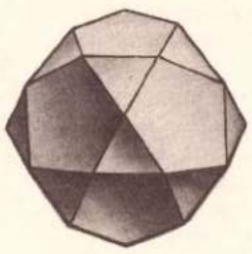


Рис. 126

Рис. 127

К последним двум многогранникам снова применим операцию «усечения». Получим соответственно *усеченный кубооктаэдр* (рис. 127) и *усеченный икосододекаэдр* (рис. 128).

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся — многогранники более сложного типа. Перечислим их.

Ромбокубооктаэдр (рис. 129). У него 26 граней, из них 18 квадратов и 8 правильных треугольников.

Рис. 128

Ромбоикосододекаэдр (рис. 130). У него 62 грани, из них 30 квадратов, 20 правильных треугольников и 12 правильных пятиугольников.

«Плосконосый» (иногда называют «курносый») *куб* (рис. 131). У него 38 граней, из них 6 квадратов, 32 правильных треугольника.

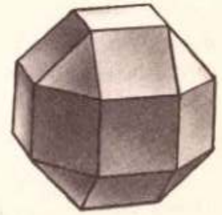


Рис. 129

«Плосконосый» («курносый») *додекаэдр* (рис. 132). У него 92 грани, из них 12 правильных пятиугольников и 80 правильных треугольников.

Интересно отметить, что на протяжении более двух тысяч лет, со времен Архимеда, считалось, что других полуправильных многогранников не существует. И только совсем недавно, в середине нашего столетия, был открыт еще один и последний полуправильный многогранник. Он получается из ромбокубооктаэдра поворотом верхней чаши на угол 45° (рис. 133).

Рис. 130

Рис. 131

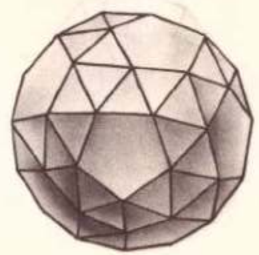


Рис. 132

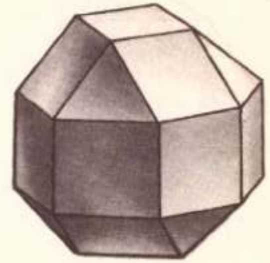


Рис. 133

ЗАДАЧИ

1°. Найдите число вершин, ребер, граней и определите вид граней: а) усеченного куба; б) кубооктаэдра; в) усеченного икосаэдра.

2. Определите, какую часть ребер куба, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный куб был полуправильным многогранником.

3. Покажите, что высота шестиугольной антипризмы равна $a\sqrt{\sqrt{3}-1}$, где a — длина ребра антипризмы.

4. Нарисуйте какие-нибудь полуправильные многогранники.

5. Изготовьте модели каких-нибудь полуправильных многогранников.

6*. На рисунке 134 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией. Что это за операция? Как она применяется в каждом случае? Как называются все изображенные многогранники? Вычислите длины их ребер, если длина ребра куба равна a.

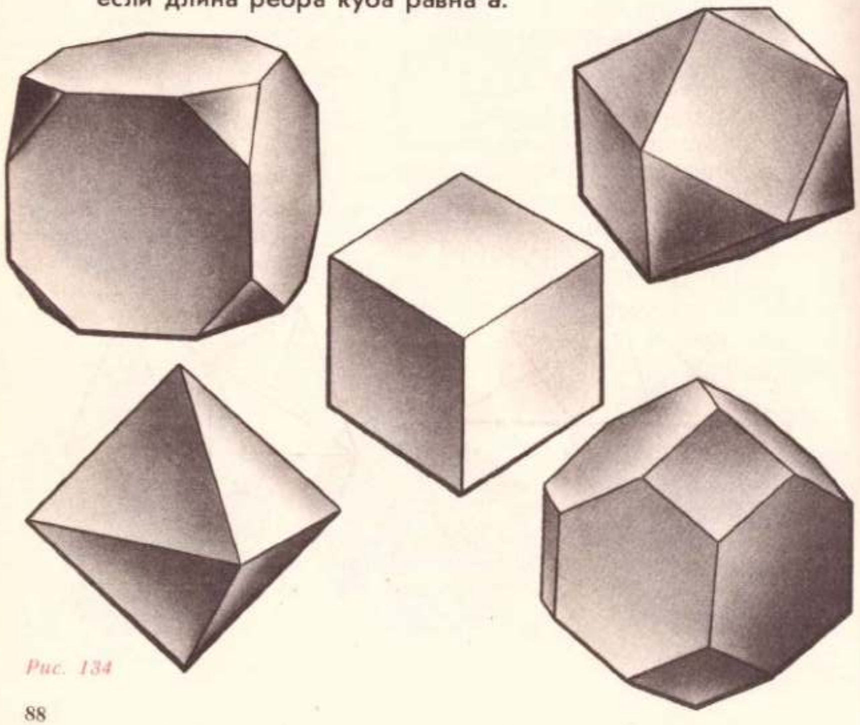


Рис. 134

ЗАНЯТИЕ 24

Звездчатые многогранники

Кроме правильных и полуправильных многогранников, красивую форму имеют так называемые звездчатые многогранники. Мы рассмотрим правильные звездчатые многогранники. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером, а два других в 1840 г. построил французский инженер, механик и математик Л. Пуансо (1777—1859). Именно поэтому правильные звездчатые многогранники получили название **тел Кеплера — Пуансо.** Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или ребер.

Из тетраэдра, куба и октаэдра звездчатых многогранников не получается.

Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его ребер приводит к замене каждой грани звездчатым правильным пятиугольником (рис. 135, *а*), и в результате получаем многогранник, который называется *малым звездчатым додекаэдром* (рис. 135, *б*).

При продолжении граней додекаэдра возникает две возможности. Во-первых, при этом можно рассматривать правильные выпуклые пятиугольники (рис. 136, *а*), тогда получается многогранник, который называется *большой додекаэдр* (рис. 136, *б*). Во-

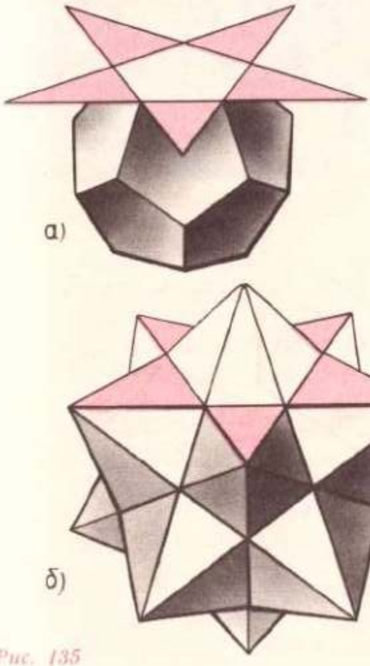


Рис. 135

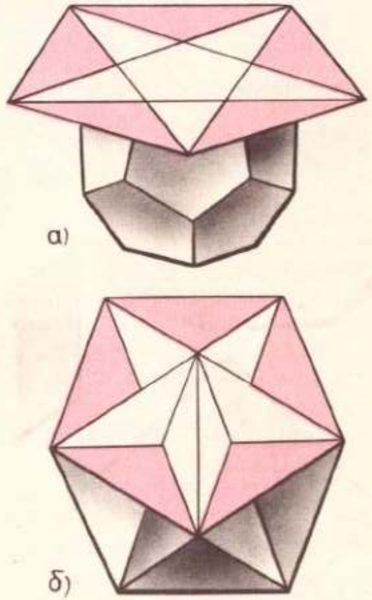
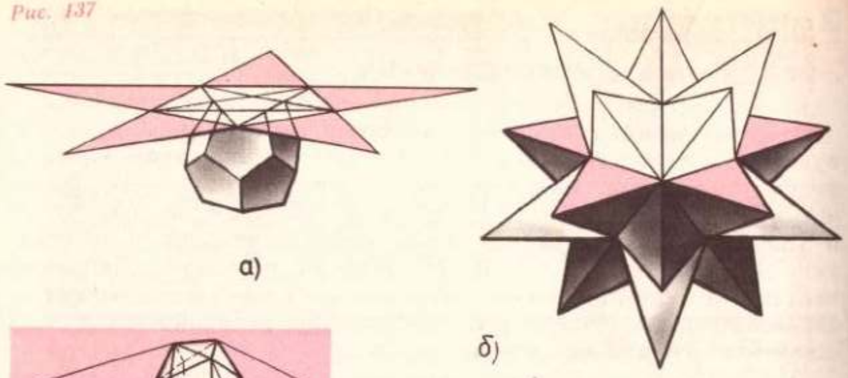


Рис. 136

Рис. 137



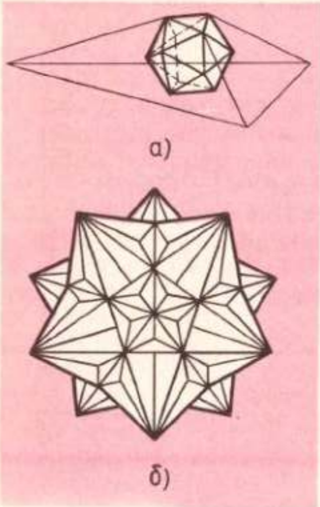


Рис. 138

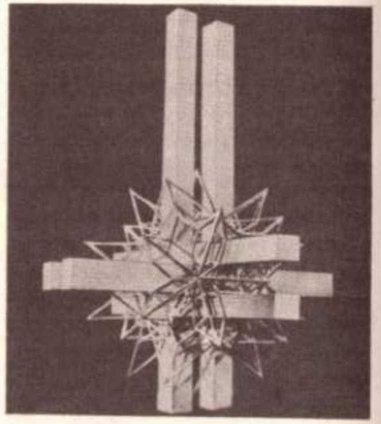


Рис. 139

вторых, в качестве граней можно рассматривать звездчатые пятиугольники (рис. 137, *а*), тогда получается многогранник, который называется *большой звездчатый додекаэдр* (рис. 137, *б*).

Рассмотрим теперь икосаэдр. При продолжении его граней получается многогранник, который называется *большой икосаэдр* (рис. 138).

Аналогично тому, как из правильных многогранников получают правильные звездчатые многогранники, так из полуправильных многогранников получают полуправильные звездчатые многогранники. В настоящее время известен 51 вид таких многогранников, но неизвестно, исчерпываются ли ими все такие многогранники.

Звездчатые многогранники очень декоративны, что позволяет широко применять их в ювелирной промышленности.

С помощью звездчатых многогранников в скучную архитектуру

Рис. 140

наших городов — в царство прямоугольных форм и углов — могут ворваться невиданные космические формы. На рисунке 139 вы видите оригинальную конструкцию, выполненную доктором искусствоведческих наук В. Н. Гамаюновым. Именно это неожиданное сочетание длинных прямоугольных балок с каркасом сложного звездчатого многогранника было положено в основу проекта административного здания в одном из итальянских городов. А необычный многогранник «Звезда» В. Н. Гамаюнова (рис. 140) вдохновил архитектора В. А. Сомова на создание проекта Национальной библиотеки в Дамаске (рис. 141).

Многие формы звездчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки — это звездчатые многогранники (рис. 12 вклейки). С древности люди пытались описать всевозможные типы снежинок, составлялись специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

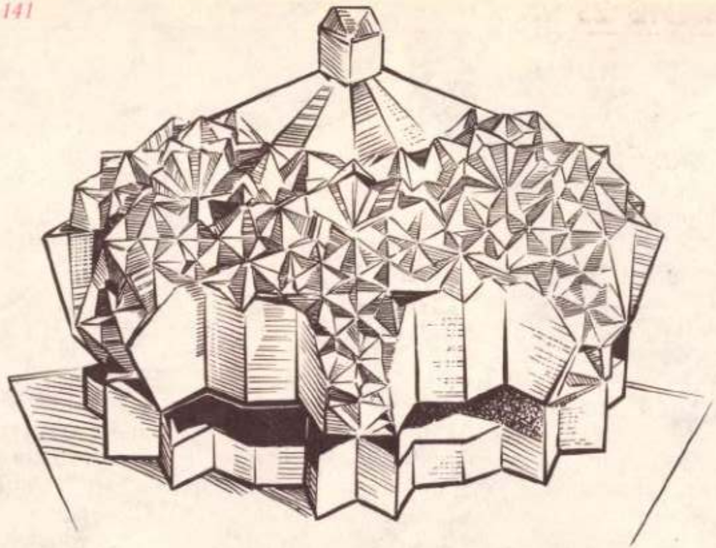


Рис. 141

ЗАДАЧИ

1°. На рисунке 142 изображен многогранник (звездчатый октаэдр), который является объединением двух равных правильных тетраэдров. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет был переоткрыт И. Кеплером и назван им «*Stella octangula*» — звезда восьмиугольная. Является ли этот многогранник правильным звездчатым? Почему?

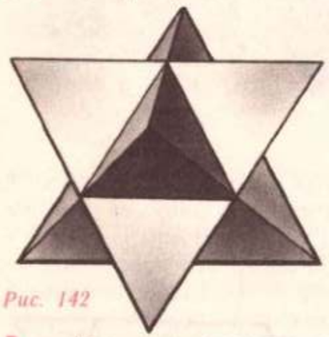


Рис. 142

2. Как можно получить звездчатый октаэдр из куба?

3. Звездчатый октаэдр является объединением двух равных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров.

4. Определите число вершин, ребер и граней каждого правильного звездчатого многогранника.

5. Нарисуйте и изготовьте модели каких-нибудь звездчатых многогранников.

ЗАНЯТИЕ 25

Фигуры вращения

Важным классом фигур в пространстве, помимо многогранников, рассмотренных на предыдущих занятиях, является класс фигур, называемых фигурами вращения. С некоторыми из них вы уже знакомы. Это прямые круговые цилиндр и конус, шар и др.

Прежде чем дать определение фигуры вращения, рассмотрим понятие поворота в пространстве вокруг прямой, которое является аналогом понятия поворота на плоскости вокруг точки. Напомним, что точка A' на плоскости α получается из точки A этой плоскости поворотом вокруг точки O на угол φ, если $OA'=OA$ и $\angle A'OA=\varphi$ (рис. 143).

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A не лежащая на этой прямой. Через точку A проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку их пересечения обозначим O. Говорят, что *точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг точки O на угол φ* (рис. 144).

Определение. Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой на угол φ, называется **поворотом** вокруг прямой a (или **вращением**). Прямая a при этом называется **осью вращения.**

Говорят, что *фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a, если точки фигуры Φ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a.* Фигура Φ при этом называется **фигурой вращения.**

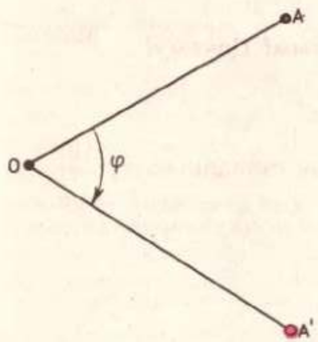


Рис. 143

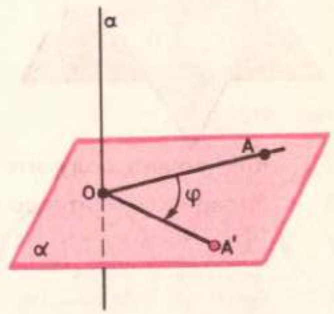


Рис. 144

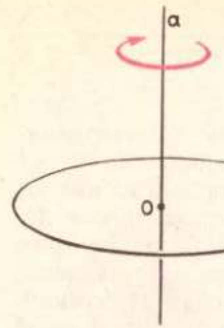


Рис. 145

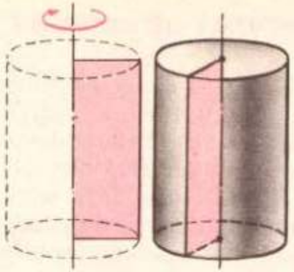


Рис. 146

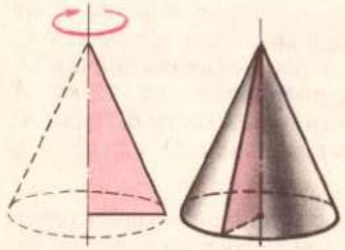


Рис. 147

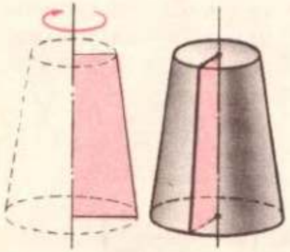


Рис. 148

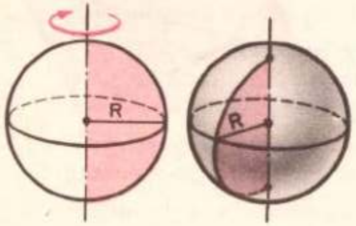


Рис. 149

Например, при вращении точки A вокруг прямой a (рис. 145) получается окружность с центром в точке O и радиусом OA.

Цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 146).

Конус получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 147).

Усеченный конус получается вращением прямоугольной трапеции вокруг ее меньшей боковой стороны (рис. 148).

Шар получается вращением полукруга вокруг его диаметра (рис. 149).

Если круг вращать вокруг прямой, лежащей в плоскости круга и не пересекающей его, то полученная фигура вращения называется *тором* (рис. 150) и по форме напоминает баранку или бублик.

Фигура, полученная вращением параболы вокруг ее оси, называется *параболоидом вращения* (рис. 151). В форме параболоида вращения изготавливаются отражающие поверхности прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.

Фигура, полученная вращением эллипса вокруг его оси, называется *эллипсоидом вращения* (рис. 152).

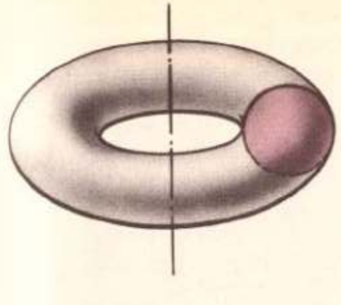


Рис. 150

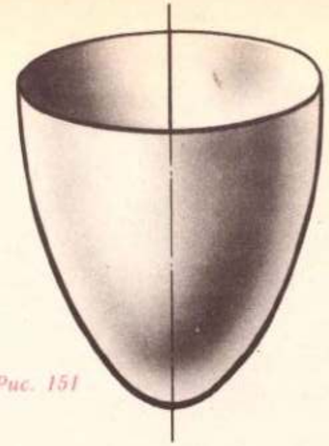


Рис. 151

Фигура, полученная вращением гиперболы вокруг ее оси, называется *гиперболоидом вращения* (рис. 153). Эта форма гиперболоида вращения часто используется в архитектурных сооружениях. Так, Шаболовская радиобашня в Москве, построенная по проекту замечательного русского инженера, почетного академика В. Г. Шухова (1853—1939), составлена из частей гиперболоида вращения (рис. 154). Интересной особенностью таких сооружений является то, что их можно изготовить из прямолинейных конструкций. Так, Шаболовская башня в действитель-

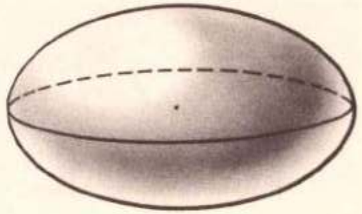


Рис. 152

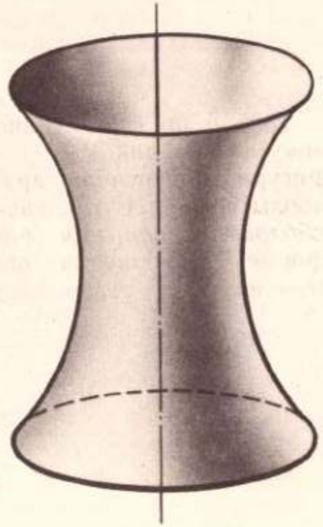


Рис. 153

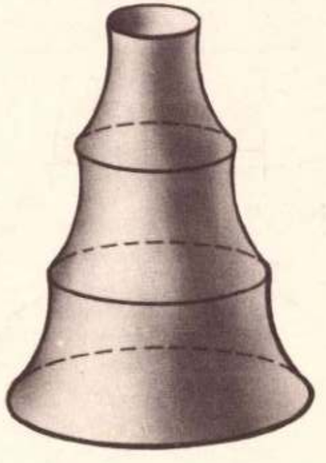


Рис. 154

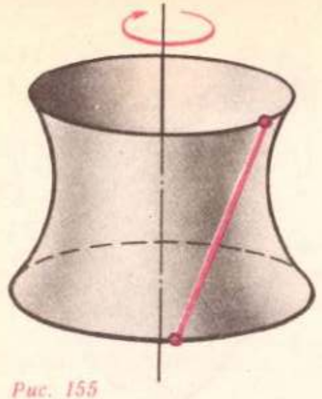


Рис. 155

ности состоит из прямолинейных металлических стержней, соединяющих соседние окружности (рис. 6 вклейки). Свойство, положенное в основу этой конструкции, состоит в том, что гиперболоид вращения можно получить вращением отрезка прямой, скрещивающейся с осью вращения. При вращении концов отрезка получаются окружности, а вращение самого отрезка дает часть поверхности гиперболоида, заключенную между этими окружностями (рис. 155).

ЗАДАЧИ

1°. **Цилиндр катится по плоскости. Какая фигура описывается при этом его осью?**

2. **Нарисуйте фигуры, полученные вращением треугольников вокруг стороны *AB* (рис. 156). Как эти фигуры можно получить из конусов?**

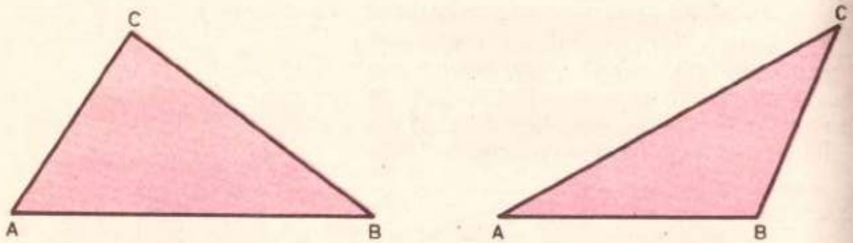


Рис. 156

3. **Нарисуйте фигуру, полученную вращением треугольника вокруг прямой, проходящей через одну из его вершин и лежащей в плоскости треугольника (рис. 157). Как эту фигуру можно получить из конусов?**

4. **Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней?**

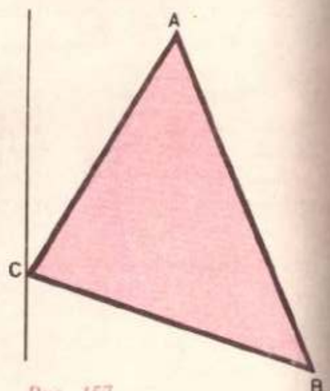
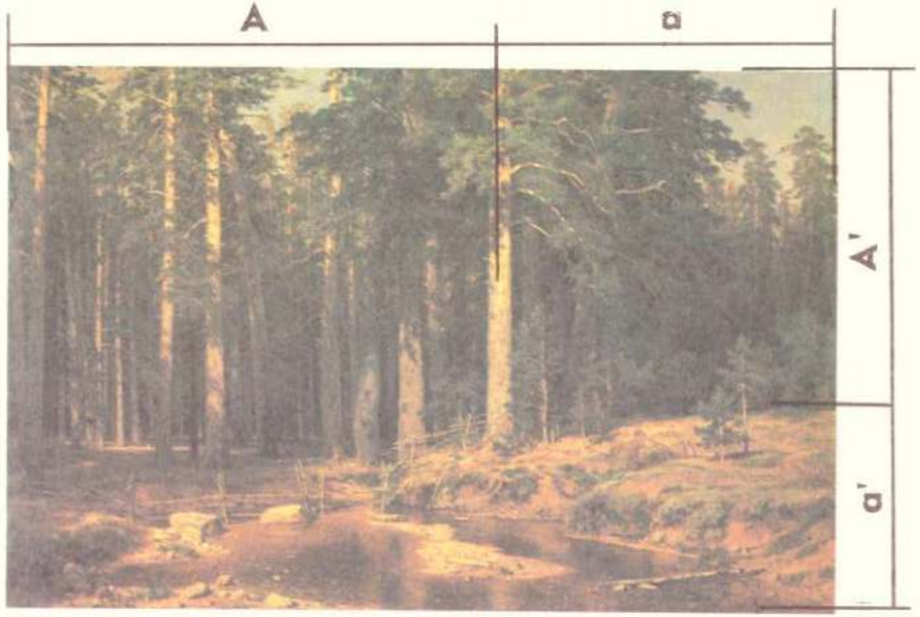


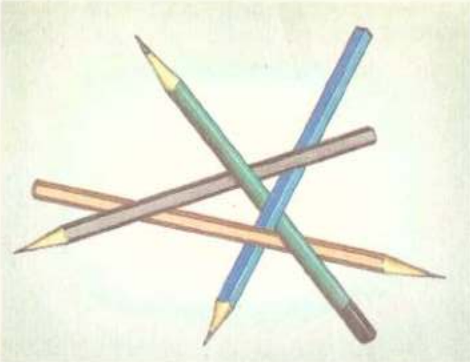
Рис. 157



1. И. И. Шишкин. Корабельная роща

2. М. Раймонди. Избиение младенцев

4* И. М. Смирнова



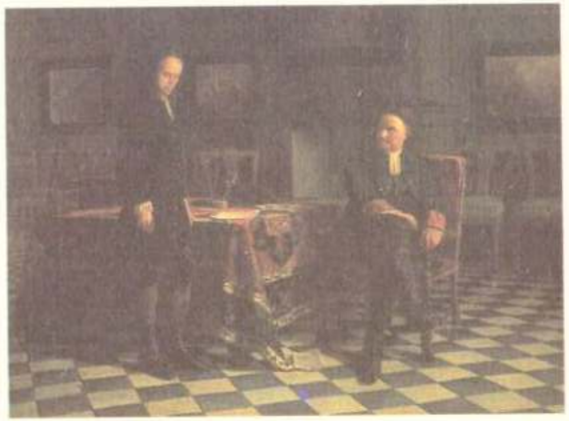
3. Возможно ли это?

4.

5. С. Дали. Тайная вечеря

6. Радиобашня (впоследствии телебашня) Шухова на Шаболовке

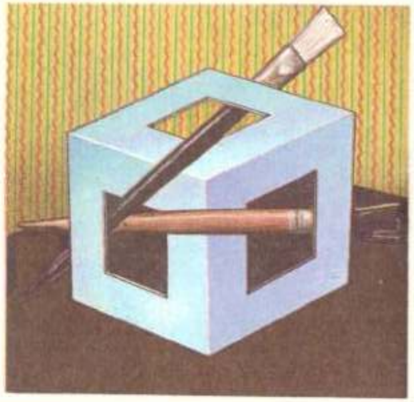
7. Н. Н. Ге. Петр I допрашивает царевича Алексея



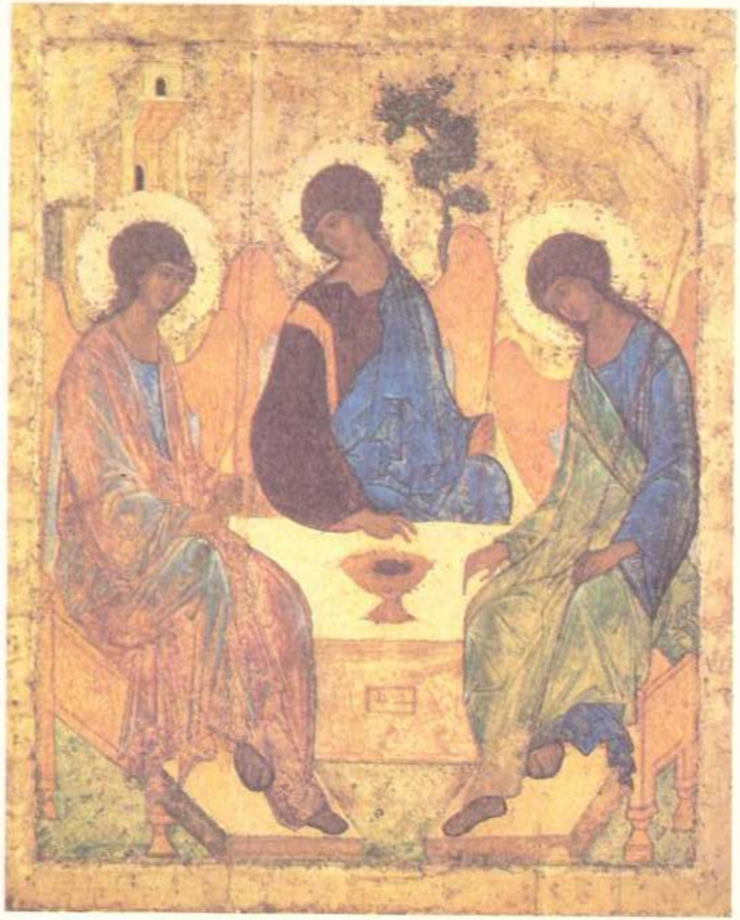
8. И. Е. Репин. Не ждали

9. П. А. Федотов. Сватовство майора

10. Невозможный объект

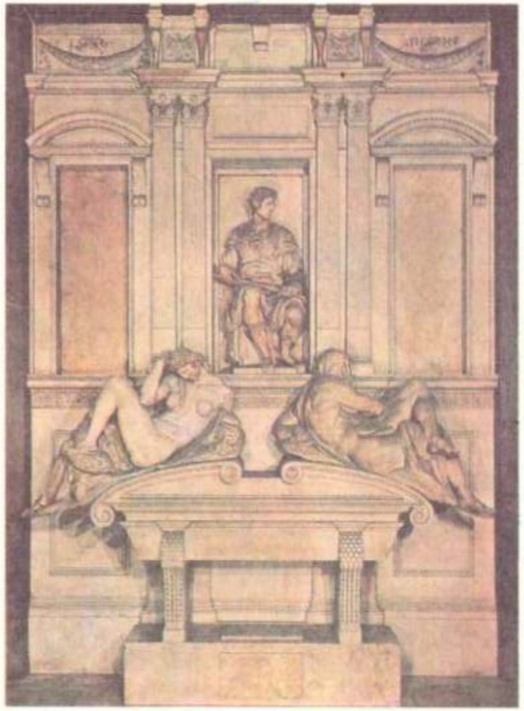


11. Андрей Рублев. Троица



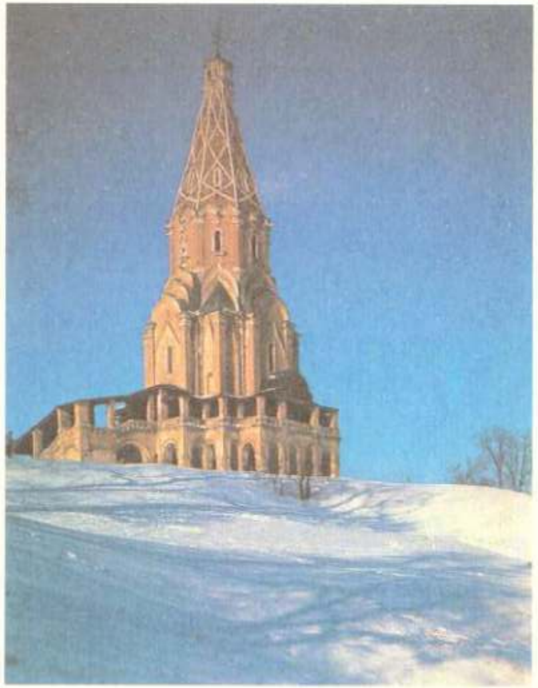
12.

13. Бордюры

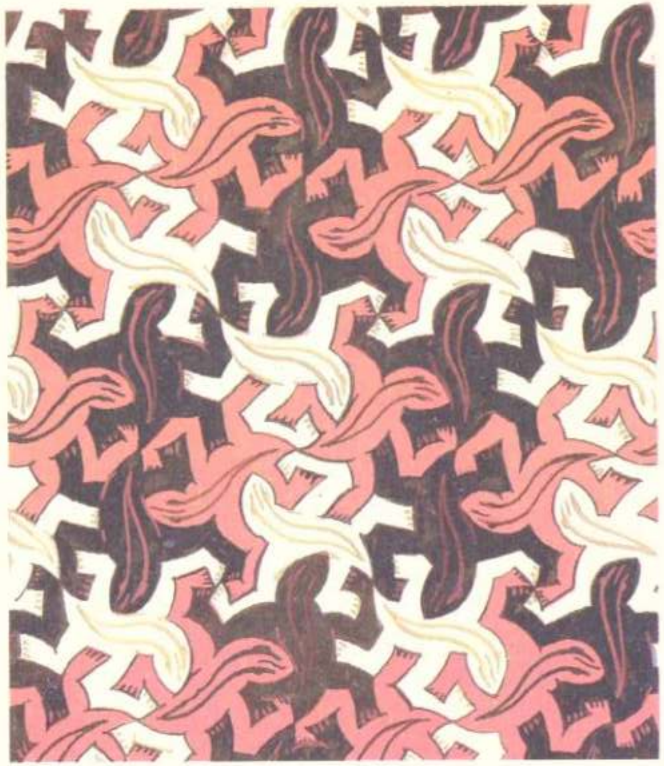


14. Микеланджело. Гробница Джулиано Медичи

15. Кижи. Справа церковь Преображения. 1714 г.



16. Церковь Вознесения в селе Коломенском (ныне Москва). 1532 г.

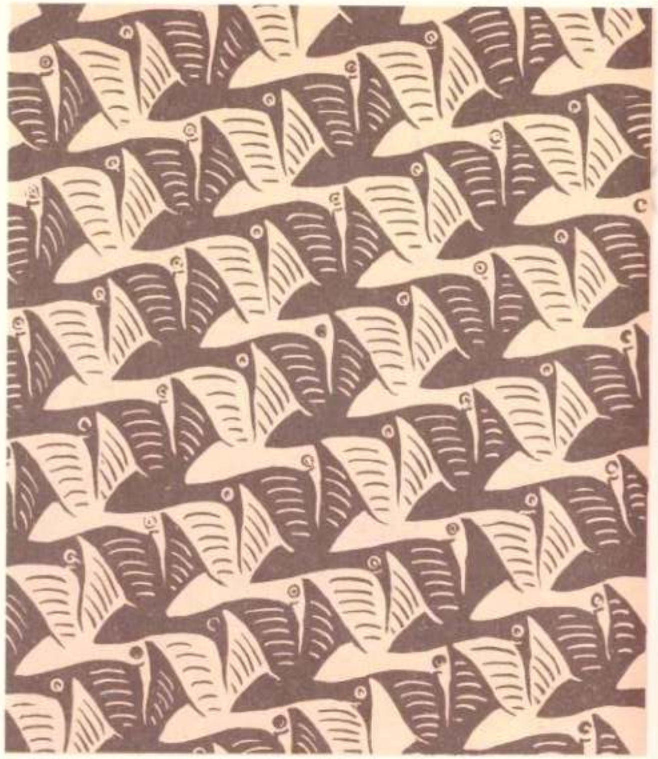


17. М. Эшер. Ящерицы

18. Кристаллы граната, кварца, каменной соли

19. М. Эшер. Порядок и хаос

20. М. Эшер. Летящие птицы



21. М. Эшер. Силы гравитации

22. Природные кристаллы

5. Какая фигура получается при вращении пирамиды вокруг ее высоты?

6*. Какая фигура получается при вращении куба вокруг его диагонали? Попробуйте нарисовать эту фигуру.

7. Покажите, что если пространственная фигура Ф получается вращением пространственной фигуры F, то ее можно получить вращением и плоской фигуры, лежащей в одной плоскости с осью вращения.

ЗАНЯТИЕ 26*

О взаимосвязи сечений цилиндра и тригонометрических функций

Рассмотрим способ образования синусоиды, предложенный в книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» (М.: Наука, 1981.— С. 120).

Если обернуть свечу несколько раз листом бумаги, перерезать свечу наклонно острым ножом, затем разнять обе половинки свечи и, наконец, развернуть бумагу, то разрез края бумаги будет образовывать синусоиду.

Выясним, почему действительно так происходит. Для этого переведем задачу на язык математики, т. е. построим математическую модель.

Представим себе прямоугольник с нарисованными на нем осями координат, параллельными соответствующим сторонам прямоугольника (рис. 158). Свернем этот прямоугольник в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен единице. При этом ось Ox свернется в окружность, а ось Oy станет образующей цилиндра. Через диаметр OO_1 полученной окружности проведем

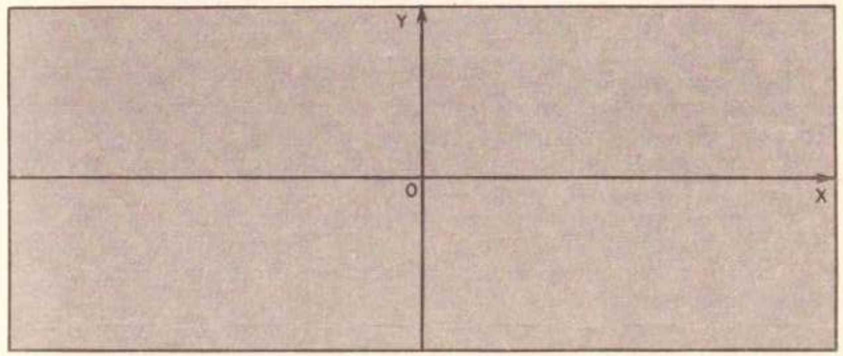
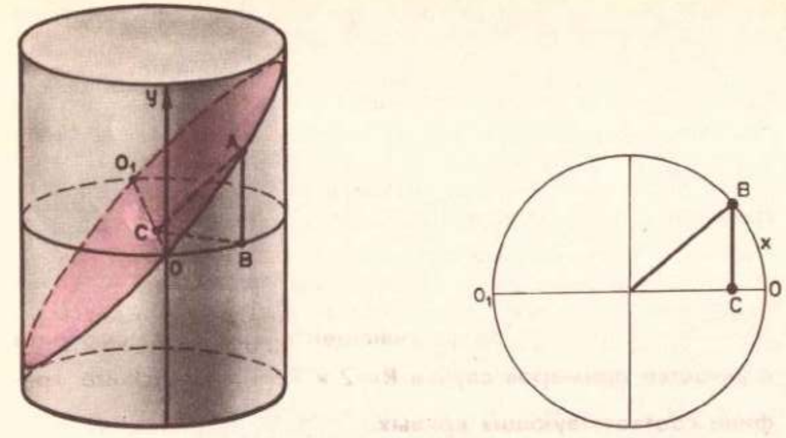


Рис. 158



а) б)

Рис. 159

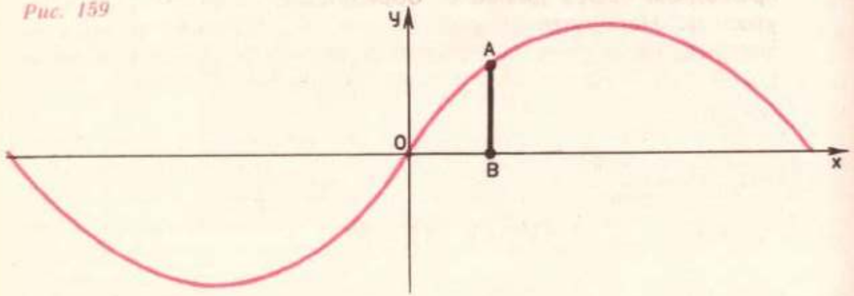


Рис. 160

сечение плоскостью, составляющей с плоскостью окружности угол 45°. Ранее мы видели, что такое сечение является эллипсом. Его можно получить, нарисовав эллипс на поверхности цилиндра (рис. 159, *а*).

Возьмем какую-нибудь точку A на эллипсе и опустим из нее перпендикуляры на плоскость окружности и выбранный диаметр. Соответствующие точки пересечения обозначим B и C. Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle B=90°$, $\angle C=45°$. Следовательно, $AB=BC$.

Заметим, что длина отрезка BC равна $\sin x$, где x — длина дуги OB окружности. (Убедитесь в этом, обратившись к рисунку 159, *б* и вспомнив определение синуса.) Длина отрезка AB также равна $\sin x$.

Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. При этом эллипс перейдет в кривую, для которой $AB=\sin x$, где $x=OB$ (рис. 160), т. е. эта кривая является частью синусоиды.

ЗАДАЧИ

1. Выясните, какие кривые получаются, если сечение цилиндра проводить не под углом 45°, а под некоторым другим углом φ. Напишите формулу для получающейся кривой. Рассмотрите в качестве примеров случаи $\varphi=30°$, $\varphi=60°$. Постройте графики соответствующих кривых.

2. Выясните, какие кривые получаются, если исходный прямоугольник сворачивать в прямой круговой цилиндр не единичного радиуса, а некоторого другого радиуса R. Напишите формулу для получающейся кривой. Рассмотрите в качестве примеров случаи $R=2$ и $R=\frac{1}{2}$. Постройте графики соответствующих кривых.

3. Выясните, какие кривые получаются, если плоскость сечения цилиндра проводить не через точку O, а так, чтобы она проходила через диаметр, образующий с диаметром OO_1 угол ψ. Напишите формулу для получающейся кривой. Рассмотрите в качестве примеров случаи $\psi=30°$, $\psi=60°$. Постройте графики соответствующих кривых.

ЗАНЯТИЕ 27*

О форме и размерах Земли

Представления людей о форме и размерах Земли складывались постепенно на протяжении многих веков. Первые мысли о шарообразности Земли возникли в VI — V вв. до н. э. и были связаны, с одной стороны, с наблюдениями лунных затмений, при которых тень Земли на Луне имела форму круга. А с другой стороны, с наблюдениями мореплавателей за появлением из-за горизонта приближающихся кораблей: сначала показывалась верхняя часть мачты, а затем, постепенно, по мере приближения корабля, появлялись и остальные его части. Объяснить эти явления можно было, считая форму Земли шарообразной.

Заметим, что, когда говорят о шарообразности Земли, не имеют в виду реальную земную поверхность. Действительно, поверхность Земли неровная, на ней имеются высокие горы и глубокие ущелья, океанские впадины. Имеют в виду некоторую идеальную, среднюю поверхность, часть которой составляет поверхность Мирового океана. Там же, где нет океанов или морей, такую поверхность представляют мысленно и относительно нее считают высоту рельефа местности. Именно эта высота и указывается на географических картах.

После того как была высказана гипотеза о шарообразности Земли, возник вопрос о нахождении ее размеров. Первое измерение Земли, по-видимому, было произведено халдеями в VI в. до н. э. Однако способ, которым они производили измерения, до нас не дошел. В Древней Греции также занимались измерениями Земли, на что указывает древнегреческий философ Аристотель (384—322 до н. э.), однако и эти вычисления не сохранились.

Первый дошедший до нас способ измерения размеров Земли был предложен и осуществлен александрийским ученым Эратосфеном в III в. до н. э. Из рассказов путешественников Эратосфену было известно, что в городе Сиена (ныне Асуан), находящемся к югу от Александрии, имеется колодец, дно которого освещается Солнцем ровно в полдень самого длинного дня в году. Измерения Эратосфена показали, что в тот же день и час отклонение Солнца от зенита в Александрии составляет 1/50 часть окружности, следовательно, длина окружности Земли в 50 раз больше расстояния от Александрии до Сиены. Измерив это расстояние с помощью посланного им гонца, Эратосфен определил длину окружности Земли. Она оказалась равна 250 тысячам стадий. Стадия не была точно определенной мерой длины. За стадию принималось расстояние, которое проходил человек за время, нужное для подъема Солнца над горизонтом. Учитывая среднюю скорость человека и то, что подъем Солнца над горизонтом происходит за 2 минуты, можно заключить, что стадия составляла примерно 160—185 м. Если за стадию принять 160 м, то получится точный результат 40 000 км. Однако ясно, что измерения Эратосфена не могли быть такими точными хотя бы потому, что Сиена расположена не строго на юг от Александрии и точность измерения шагами очень невелика.

Более точные измерения Земли, использующие астрономические наблюдения, были проведены только в XVII в. Для этого на поверхности Земли выбирались два пункта A и B, расположенные на одном меридиане. Наблюдая из них за Солнцем или звездами, например, за Полярной звездой в северном полушарии, определяли величину φ дуги этого меридиана (рис. 161). Измерив затем расстояние d между этими пунктами на поверхности Земли, находили длину l всей окружности Земли по формуле $l=\frac{360}{\varphi}\cdot d$.

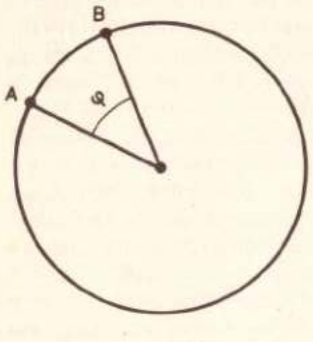


Рис. 161

Следует сказать, что если мы хотим добиться хорошей точности, то измерение больших расстояний на поверхности Земли оказывается не таким простым делом, как может показаться на первый взгляд. Как уже говорилось, земная поверхность

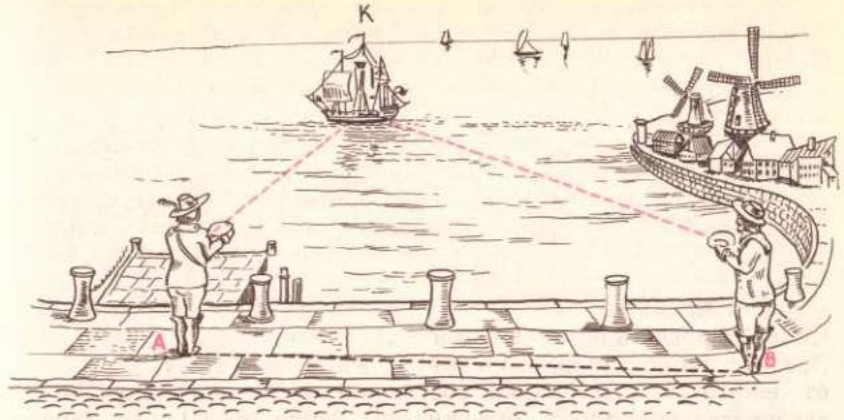


Рис. 162

не является ровной. Одни ее точки расположены выше, другие ниже. На пути могут встретиться препятствия: горы, болота, реки и т. д., что создает затруднения для измерения расстояний. Преодолеть эти трудности позволяет использование математического аппарата.

Из тех, кого мы знаем, первым, кто применил математику для нахождения расстояний до недоступных объектов, был древнегреческий математик и астроном Фалес Милетский (VI до н. э.).

Один из способов состоит в следующем. Пусть требуется измерить расстояние от пункта A на берегу до корабля K, находящегося в море в пределах видимости от берега (рис. 162). На берегу выбирается еще один пункт B. Измеряется расстояние AB и углы A и B в треугольнике ABK. После этого с помощью тригонометрических формул находят расстояние. Например, используя теорему синусов, получим $AK=\frac{AB\sin B}{\sin K}$.

В начале XVII в. этот способ нахождения расстояний усовершенствовал голландский математик В. Снеллиус (1580—1626). Для нахождения расстояния между значительно удаленными друг от друга пунктами A и K Снеллиус строил сеть из треугольников с началом в A и концом в K, которую он назвал *триангуляцией* (рис. 163). Сеть строилась таким образом, чтобы из каждой вершины были видны соседние с ней вершины. Измерив расстояние между какими-нибудь соседними вершинами, например AB, и углы, образованные сторонами треугольников, входящих в триангуляцию, с помощью тригонометрических формул находилось все расстояние AK.

Для вычисления длины земного меридиана с помощью метода триангуляции Снеллиус измерил расстояние между городками Алькмааром и Берген-оп-Зоомом в Голландии. В пересчете на

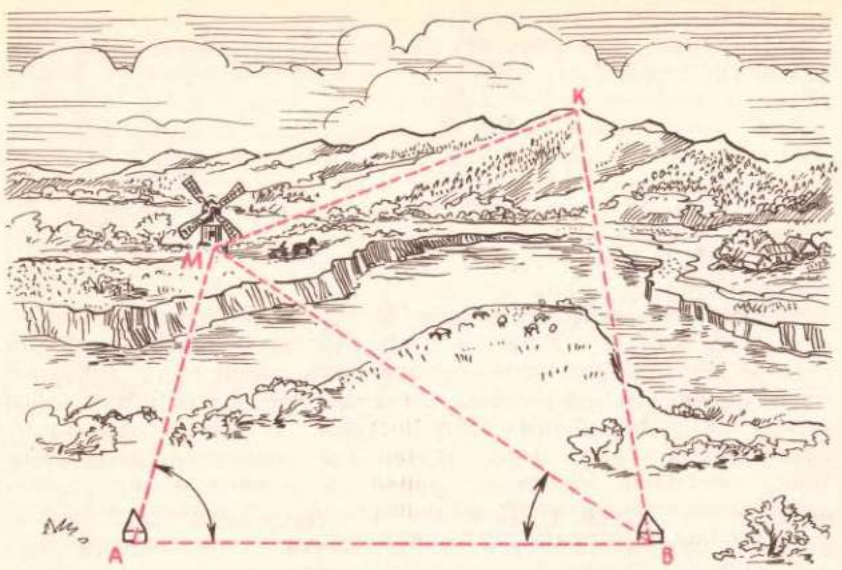


Рис. 163

километры длина меридиана оказалась равна 38 605 км. Довольно большая ошибка объясняется тем, что для измерения углов Снеллиус использовал недостаточно точные приборы. Через несколько лет Ж. Пикар, используя метод Снеллиуса и усовершенствованные им приборы, снова измерил длину меридиана. Она оказалась равна 40 036 км.

После этого многие ученые в разных странах мира стали заниматься вычислением длин дуг меридианов. Оказалось, что длина дуг меридианов в 1° различна в зависимости от места расположения этих дуг. Разница могла быть за счет погрешности вычислений, а также в случае если поверхность Земли не является в точности сферической поверхностью.

Используя физические соображения, основанные на учете вращения Земли, И. Ньютон высказал предположение, что Земля сжата у полюсов, как мандарин, и имеет форму эллипсоида вращения. С другой стороны, немецкий ученый И. Эйзеншмидт, основываясь на таблицах измерений дуг меридианов, утверждал, что Земля не только не сплюснута у полюсов, но, наоборот, вытянута, как лимон.

Между учеными разгорелись споры по поводу этих двух точек зрения. Каждая из сторон приводила доводы в пользу своей правоты. Для того чтобы разобраться с этим вопросом, в 1735 г. Парижская академия решила послать две экспедиции: одну на экватор в Перу, другую на север в Лапландию. Преодолев значительные трудности, жару и холод, экспедиции произвели

измерения, убедительно доказавшие правоту Ньютона. Длина дуги меридиана в 1° в Лапландии составила 111,95 км, во Франции — 111,21 км, в Перу — 110,61 км. Сжатие поверхности Земли у полюсов составило около 20 км с каждой стороны.

Мы привели данные в километрах, однако в то время ни метра, ни километра еще не существовало. Все измерения проводились в других единицах, большое число которых и неточная определенность вносили существенную путаницу в вычисления. Для того чтобы унифицировать измерения, Национальное собрание Франции в 1791 г. решило ввести единую меру длины, в качестве которой была принята одна десятимиллионная часть дуги парижского меридиана от Северного полюса до экватора. Она была названа метром, от греческого слова «μεροσ», что значит мера. Тогда же были учреждены две экспедиции для точного измерения этого меридиана. Экспедициями была построена сеть треугольников от Барселоны на южном берегу Испании до Дюнкерка на северном берегу Франции. Шесть лет заняли измерения и вычисления, пришедшиеся как раз на годы французской революции. В результате работ был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве и называется архивным метром.

Анализ проведенных измерений длины дуги парижского меридиана позволил французскому математику, физику и астроному П. Лапласу (1749—1827) в начале XIX в. сделать еще один важный вывод о форме Земли. Оказалось, что форма Земли не совпадает точно с эллипсоидом. Поверхность Земли имеет неровности. Конечно, речь идет не о неровностях рельефа, а о неровностях мыслимой идеальной поверхности. Оказалось, что в одних местах эта поверхность имеет большую выпуклость — бугры, в других она более плоская. Высота бугров по сравнению с размерами Земли очень небольшая и не превосходит 150 м. Их расположение на поверхности Земли хаотично и зависит от плотности соответствующего участка.

После открытия Лапласа стало ясно, что измерения только очень больших дуг дают правильные значения длин меридианов. Россия обладала достаточными просторами для проведения таких измерений, и в начале XIX в. они начались под руководством В. Я. Струве. Работа продолжалась в течение сорока лет. В результате была измерена дуга меридиана длиной в 25°20′ (около 2820 км). Погрешность на всем протяжении дуги не превысила 13 м, т. е. одной двухсоттысячной всей дуги.

В XX в. использование ЭВМ и искусственных спутников Земли дало возможность еще более точных измерений. Определяя с помощью радаров расстояния от станций наблюдения до спутника и обрабатывая их на ЭВМ, находят траекторию движения спутника, а по ней уточняют и форму Земли.

ЗАНЯТИЕ 28

Вписанные и описанные фигуры в пространстве

Тема «Вписанные и описанные фигуры в пространстве» является аналогом соответствующей темы курса планиметрии, в которой, в частности, показывалось, что около каждого треугольника и правильного многоугольника можно описать окружность, в каждый треугольник и правильный многоугольник можно вписать окружность.

Здесь мы рассмотрим аналогичные свойства для пространственных фигур.

Аналогом окружности в пространстве является сфера — поверхность шара.

Аналогом многоугольника в пространстве является многогранник.

При этом аналогом треугольника является треугольная пирамида, а аналогом правильных многоугольников являются правильные многогранники.

Определение. Сфера называется **описанной** около многогранника, если все его вершины лежат на сфере. Сам многогранник при этом называется **вписанным** в сферу.

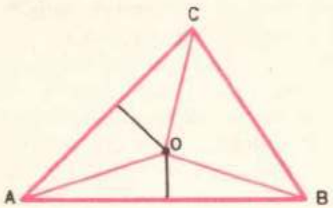


Рис. 164

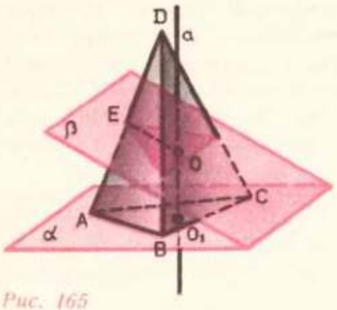


Рис. 165

Теорема. ***Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу, и притом только одну.***

● Доказательство. Для доказательства этой теоремы обратимся к доказательству аналогичной теоремы планиметрии. С чего мы начинали? Прежде всего мы находили геометрическое место точек, равноудаленных от двух вершин треугольника, например A и B (рис. 164). Таким геометрическим местом является серединный перпендикуляр, проведенный к отрезку AB. Затем находили геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и C. Это серединный перпендикуляр к отрезку AC. Точка пересечения этих серединных перпендикуляров и будет искомым центром O описанной около треугольника ABC окружности. Теперь обратимся к ситуации в пространстве и попробуем сделать аналогичные построения.

Пусть нам дана треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 165). Точки A, B, C определяют плоскость α.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех точек A, B, C, является перпендикуляр a, проведенный к плоскости α и проходящий через центр O_1 описанной около треугольника ABC окружности.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A, D, является плоскость β, перпендикулярная отрезку AD и проходящая через его середину — точку E.

Плоскость β и прямая a пересекаются в точке O, которая и будет искомым центром описанной около треугольной пирамиды $ABCD$ сферы.

Действительно, в силу построения точка O одинаково удалена от всех вершин пирамиды $ABCD$. Причем такая точка будет единственной, так как пересекающиеся прямая и плоскость имеют единственную общую точку. ●

Теорема. ***Около всякого правильного многогранника можно описать сферу.***

● Доказательство. Рассмотрим две смежные грани (F_1 и F_2) правильного многогранника (рис. 166), через их центры O_1 и O_2 проведем перпендикуляры к этим граням. Эти перпендикуляры лежат в одной плоскости, перпендикулярной ребру A_1A_2 и проходящей через его середину B_1. Поэтому они пересекаются в некоторой точке O.

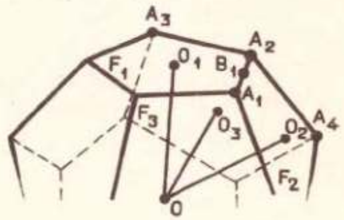


Рис. 166

Покажем, что точка O является искомым центром описанной сферы.

Действительно, она отстоит на одинаковое расстояние от вершин граней F_1 и F_2 данного многогранника. Пусть F_3 — грань, смежная с F_1 и F_2. Тогда у нее имеется три вершины, принадлежащие граням F_1 и F_2. На рисунке это вершины A_2, A_3, A_4. Точка O одинаково удалена от этих вершин. Следовательно, она должна лежать на перпендикуляре к грани F_3, проведенном через ее центр O_3. Но тогда она одинаково удалена от всех вершин грани F_3.

Продолжая этот процесс, можно перебрать все грани данного правильного многогранника.

В результате получим, что точка O одинаково удалена от всех вершин правильного многогранника, т. е. является центром описанной сферы. ●

ЗАДАЧИ

1°. Может ли центр описанной около треугольной пирамиды сферы находиться вне этой пирамиды?

2°. Какое условие нужно наложить на многоугольник, лежащий в основании пирамиды, чтобы около этой пирамиды можно было описать сферу?

3. На рисунке 167 изображена пирамида $ABCD$, у которой угол ACB прямой, $AC=CB=CD=DB=AD$ и $AO=OB$. Докажите, что O — центр описанной сферы.

4. Приведите пример пирамиды, около которой нельзя описать сферу.

5. При каком условии около прямой призмы можно описать сферу? Приведите пример прямой призмы, около которой нельзя описать сферу.

6. Покажите, что около любого прямоугольного параллелепипеда можно описать сферу. Найдите центр этой сферы.

7. Можно ли описать сферу около наклонной призмы? наклонного параллелепипеда?

8. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 дм. Одно из боковых ребер равно 2 дм и перпендикулярно основанию. Найдите радиус описанной сферы.

9. Прямой круговой цилиндр будем называть вписанным в сферу, если окружности его оснований лежат на сфере. Покажите, что любой прямой круговой цилиндр можно вписать в сферу. Для цилиндра с радиусом оснований R и высотой h найдите радиус описанной сферы.

10. Прямой круговой конус будем называть вписанным в сферу, если его вершина и окружность основания лежат на сфере. Покажите, что любой прямой круговой конус можно вписать в сферу. Для конуса с радиусом основания R и высотой h найдите радиус описанной сферы.

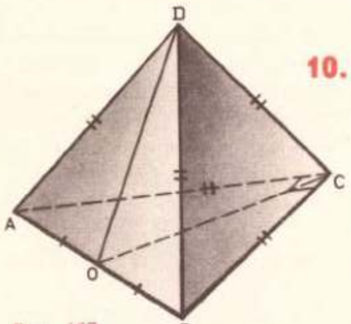


Рис. 167

ЗАНЯТИЕ 29

Вписанные и описанные фигуры в пространстве (продолжение)

Прежде чем приступить непосредственно к изучению фигур, описанных около сферы, рассмотрим вопрос о взаимном расположении сферы и плоскости.

Пусть в пространстве заданы сфера с центром в точке O и радиусом R и плоскость α. Опустим из точки O на плоскость α перпендикуляр OO_1. Возможны следующие случаи:

1. Длина этого перпендикуляра, т. е. расстояние от точки O до плоскости α, больше R. В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки плоскости α и подавно больше R. Следовательно, сфера и плоскость не пересекаются (рис. 168).

2. Расстояние от точки O до плоскости α равно R. В этом случае пересечением сферы и плоскости является единственная точка O_1. Плоскость α в этом случае называется **касательной** к сфере (рис. 169).

3. Расстояние d от точки O до плоскости α меньше R. В этом случае пересечением сферы и плоскости является окружность с центром в точке O_1 и радиусом $\sqrt{R^2-d^2}$, где $d=OO_1$ (рис. 170).

Пусть теперь даны две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c. Рассмотрим вопрос о том, как следует находить сферы, касающиеся одновременно этих двух плоскостей. Для этого через прямую c проведем плоскость γ, делящую угол между плоскостями

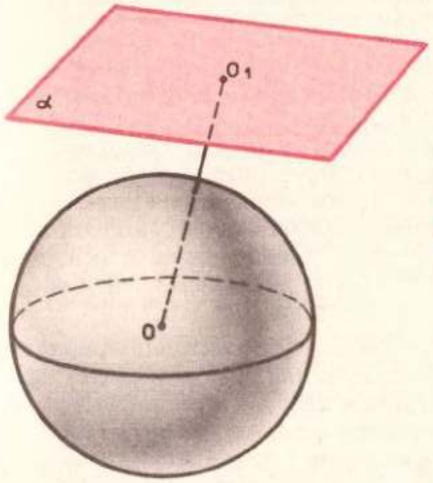


Рис. 168

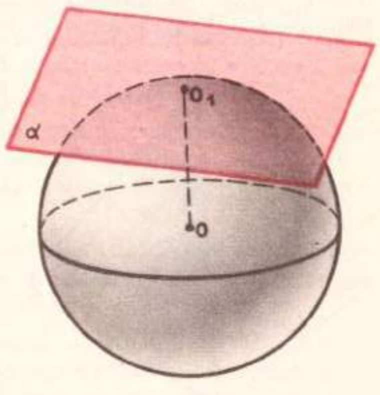


Рис. 169

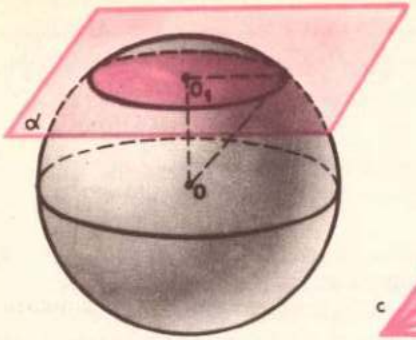


Рис. 170

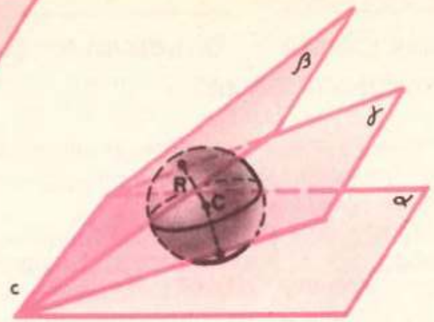


Рис. 171

α и β пополам (рис. 171). Такая плоскость называется **биссектральной.** Точки плоскости γ обладают тем свойством, что расстояния от них до плоскостей α и β одинаковы (проверьте это самостоятельно для любой точки $C \in \gamma$). Если это расстояние принять за радиус сферы R, то сфера с центром в точке C и радиусом R и будет искомой. Таким образом, биссектральная плоскость γ дает геометрическое место центров сфер, касающихся одновременно плоскостей α и β.

Определение. Сфера называется **вписанной** в многогранник, если все его грани касаются сферы. Сам многогранник называется при этом **описанным** около сферы.

Теорема. ***В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну*** (рис. 172).

● Доказательство. Ясно, что центром вписанной сферы будет точка, одинаково удаленная от всех граней треугольной пирамиды. Для ее нахождения рассмотрим три биссектральные плоскости углов, образованных боковыми гранями пирамиды с основанием. Точка пересечения этих плоскостей будет одинаково удалена как от боковых граней, так и от основания, т. е. будет искомым центром вписанной сферы. ●

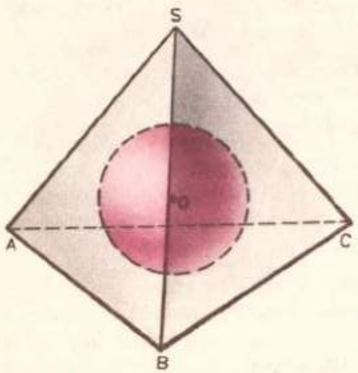


Рис. 172

Теорема. ***Во всякий правильный многогранник можно вписать сферу. Причем центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы.***

● Доказательство. Действительно, как следует из построения, рассмотренного на предыдущем занятии, центр описанной сферы O лежит на перпендикулярах, восставленных из центров O_1, O_2, ... граней F_1, F_2, ... правильного многогранника, причем отрезки OO_1, OO_2, ... равны между собой. Обозначим их длину через r. Тогда сфера с центром O и радиусом r будет касаться граней многогранника в точках O_1, O_2, ..., т. е. будет искомой вписанной сферой, и по построению ее центр совпадает с центром описанной сферы. ●

ЗАДАЧИ

1. **При каком условии в n-угольную пирамиду можно вписать сферу?**
2. **Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу.**
3. **Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед?**
4. **При каком условии в прямую призму можно вписать сферу?**
5*. **Дана треугольная пирамида $SABC$. Грань пирамиды SCB перпендикулярна плоскости основания; ребра SC и SB равны a; плоские углы при вершине равны между собой и равны $60°$. Определите радиус вписанной сферы.**
6. **Сферу будем называть вписанной в прямой круговой цилиндр, если она касается оснований и пересекается с боковой поверхностью цилиндра по окружности. Найдите условие, при котором в прямой круговой цилиндр можно вписать сферу.**
7. **Сферу будем называть вписанной в прямой круговой конус, если она касается основания конуса, пересекает боковую поверхность конуса по окружности и целиком содержится в конусе. Докажите, что в прямой круговой конус всегда можно вписать сферу. По известному радиусу основания R и высоте h конуса найдите радиус вписанной сферы.**
8. **Определите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна h, а угол между боковой гранью и основанием равен $60°$.**
9. **Основанием пирамиды служит ромб со стороной основания a и острым углом α. Углы между боковыми гранями и основанием равны φ. Определите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.**
10. **Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом α и гипотенузой c. Найдите радиус сферы, вписанной в эту призму.**
11. **Докажите, что центр описанной и вписанной сфер правильного тетраэдра является также центром сферы, касающейся всех его ребер в их серединах. Можно ли этот результат обобщить для всех правильных многогранников?**

ЗАНЯТИЕ 30

Симметрия в пространстве

Понятие симметрии фигур на плоскости рассматривалось в курсе планиметрии. В частности, определялись понятия центральной и осевой симметрий. Для пространственных фигур понятие симметрии определяется аналогичным образом.

Определение. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно точки** O, если O является серединой отрезка AA' (рис. 173, *а*). Точки A и A' называются также центрально-симметричными, а точка O — **центром симметрии.**

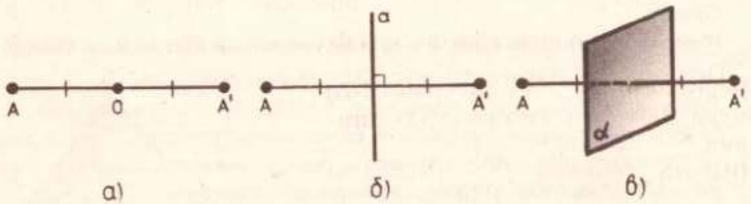


Рис. 173

Фигура Ф в пространстве называется центрально-симметричной относительно точки O, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно точки O некоторой точке A′ фигуры Ф.

Например, прямоугольный параллелепипед центрально-симметричен относительно точки пересечения его диагоналей (рис. 174). Шар центрально-симметричен относительно своего центра и т. д.

Определение. Точки A и A' называются **симметричными относительно прямой** a, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку (см. рис. 173, *б*). Прямая a при этом называется **осью симметрии.**

Фигура Ф в пространстве называется симметричной относительно оси a, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно этой оси некоторой точке A′ фигуры Ф.

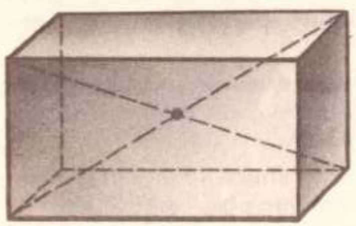


Рис. 174

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней, прямой круговой цилиндр симметричен относительно оси вращения и т. д.

Определение. Точки A и A' в пространстве называются **симметричными относительно плоскости** α, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна ему (см. рис. 173, *в*). Плоскость α при этом называется **плоскостью симметрии.**

Фигура Ф в пространстве называется симметричной относительно плоскости α, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно этой плоскости некоторой точке A′ фигуры Ф.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из его граней. Прямой круговой цилиндр симметричен относительно любой плоскости, проходящей через ось симметрии, и т. д.

Помимо осей симметрии, рассмотренных выше, рассматриваются также оси симметрии n-го порядка ($n \geqslant 2$).

Определение. Прямая a называется **осью симметрии n-го порядка** фигуры Ф, если при повороте фигуры Ф на угол $\frac{360°}{n}$ относительно прямой a фигура Ф совмещается сама с собой.

Ясно, что ось симметрии 2-го порядка является просто осью симметрии.

Высота правильной треугольной пирамиды, опущенная на основание, являющееся равносторонним треугольником, является осью симметрии 3-го порядка (рис. 175), поскольку при повороте на 120° относительно этой оси пирамида совмещается сама с собой. Вообще высота правильной n-угольной пирамиды является осью симметрии n-го порядка.

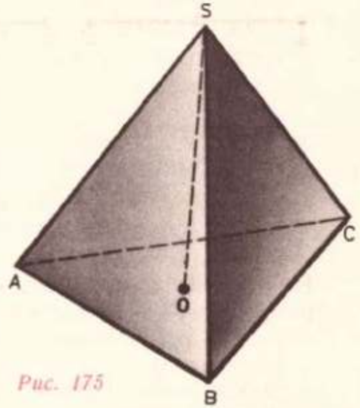


Рис. 175

ЗАДАЧИ

1°. **Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур в пространстве.**

2°. **Может ли фигура иметь два или более центров симметрии?**

3°. **Приведите примеры фигур с осевой симметрией.**

4°. **Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?**

5. **Покажите, что фигуры вращения являются симметричными относительно оси вращения.**

6°. **Сколько осей симметрии имеет шар?**

7. **Приведите примеры пространственных фигур, имеющих плоскость симметрии.**

8. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?

9. Покажите, что фигуры вращения являются симметричными относительно любой плоскости, проходящей через ось симметрии.

10. Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии и, наоборот, есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.

11. Приведите примеры пространственных фигур с осями симметрии 3-го, 4-го и т. д. порядков.

12. Осью симметрии какого порядка является диагональ куба?

13. Укажите элементы симметрии правильных многогранников.

14*. В тетраэдре закрасили одну грань. В результате каких перемещений он самосовместится?

15*. В результате каких перемещений переходит в себя куб, у которого окрашена одним цветом: а) одна грань; б) две грани?

СИММЕТРИЯ В ИСКУССТВЕ: АРХИТЕКТУРЕ, СКУЛЬПТУРЕ, ЖИВОПИСИ

По словам известного немецкого математика Г. Вейля, «симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения искусства: архитектуры, живописи, скульптуры и т. д. Элементы симметрии можно увидеть в общих планах зданий, архитектуре фасадов, в оформлении внутренних помещений, орнаментах, карнизах, колоннах, потолках и т. д. Широко использовалась симметрия при строительстве церквей. На рисунке 176 (слева) изображен величественный Успенский собор в кремле города Ростова Великого. Это постройка XVI в., симметрия видна как в общей композиции, так и в отдельных строениях: башнях и так называемом четверике основного храма с пятиглавым чином русского православия. На рисунке 16 вклейки представлена известная Церковь Вознесения в Коломенском. Красота этого храма поражала людей Древней Руси. «Бе же церковь та велми чудна высотою, красотою и светлостью, яко не бывало прежде сего в Руси»,— записал летописец в год окончания постройки в 1532 г. Красота этого храма непосредственно связана с симметрией его ярусов: могучего четверика (правильной четырехугольной призмы) — основания, поднимающегося над ним восьмерика

Рис. 176

(правильной восьмиугольной призмы), завершающегося уникальным по своей форме шатром (правильной усеченной 8-угольной пирамидой). Еще один пример — памятник деревянного зодчества — знаменитая Преображенская церковь (XVIII в.) в Кижах (рис. 15 вклейки). Центральная глава окружена четырьмя ярусами. В первых двух ярусах симметрично расположены по четыре главы, в третьем — восемь и в последнем, четвертом — четыре. В целом, несмотря на сложность композиции, симметрия в каждом ярусе хорошо сохраняет монолитность храма, и он воспринимается как единая пирамида, особенно с далекого расстояния.

Скульптура, как и архитектура, тоже дает множество ярких примеров использования симметрии для решения эстетических задач. Посмотрите на гробницу Джулиано Медичи (рис. 14 вклейки), созданную великим Микеланджело. В целом это симметричная композиция. Но здесь для повышения выразительности своего произведения автор сочетает симметрию с ассиметрией. Фигуры расположены симметрично, изображены в одинаковых позах, они одного размера. Но это разные фигуры: фигура женщины — Ночь, а фигура мужчины — День. То же самое можно сказать и о фигуре самого Медичи. В целом его фигура, поза симметричны, но обратите внимание на легкий разворот туловища, положение ног, поворот головы, это делает фигуру более живой и интересной.

Законы симметрии широко используются в прикладном искусстве, особенно во всевозможных бордюрах, орнаментах и т. д. Фантазии мастеров, кажется, здесь нет предела. Разнообразные бордюры изображены на рисунке 13 вклейки. На рисунке 177 воспроизведен древнеегипетский орнамент, а на рисунке 178 — орнамент, украшающий окно мечети в Каире.

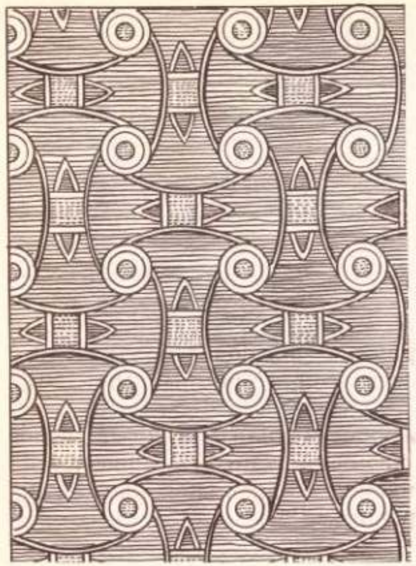


Рис. 177

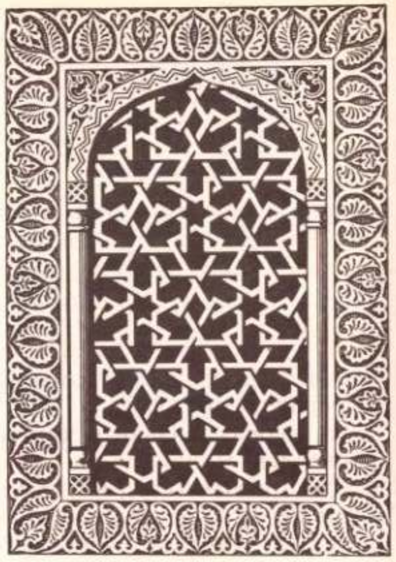


Рис. 178

Много причудливых мозаик-орнаментов создала фантазия знаменитого голландского художника Мариуса Эшера (1898—1972). Он изучил законы сочетания элементов симметрии и использовал их в своих картинах для достижения художественного эффекта. Основой его орнаментов являются изображения птиц, животных, людей, растений. В качестве примера приведем лишь две иллюстрации: «Летящие птицы» (рис. 20 вклейки) и «Ящерицы» (рис. 17 вклейки). Каждая картина — это сплав научной и художественной мысли автора. Эшер увлекался изучением многогранников и посвятил им многие свои гравюры, например всемирно известную «Порядок и хаос» (рис. 19 вклейки), на которой порядок олицетворяет правильный звездчатый многогранник — малый додекаэдр. Этот многогранник изображен также на другой гравюре, которая называется «Силы гравитации» (рис. 21 вклейки).

Литература

1. Гильде В. Зеркальный мир.— М.: Мир, 1982.
2. Тарасов Л. В. Этот удивительно симметричный мир.— М.: Просвещение, 1982.
3. Узоры симметрии.— М.: Мир, 1980.
4. Шафрановский И. И. Симметрия в природе.— Л.: Недра, 1985.

ЗАНЯТИЕ 31*

Кристаллы — природные многогранники

Многие формы многогранников изобрел не человек, а создала природа в виде кристаллов. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба, кристаллы льда и горного хрусталя (кварца) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды. Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра. Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда; гранат — ромбододекаэдра (двенадцатигранника), у которого все грани ромбы (рис. 18, 22 вклейки), и т. д.

На уроках физики и химии вы уже изучили многие свойства кристаллов. Например, на уроках физики рассмотрели кристаллическое строение твердых тел, упорядоченное расположение частиц в кристалле — кристаллическую решетку, взаимное притяжение частиц в кристалле, тепловое колебательное движение частиц в кристалле, постоянную температуру плавления кристаллических тел, разрушение кристаллической решетки при плавлении, образование кристалла при затвердевании, полупроводниковые свойства некоторых кристаллов и т. д.

На уроках химии вы изучали образование кристаллов из растворов, очистку веществ кристаллизацией, плотную упаковку частиц в кристалле, молекулярную кристаллическую решетку, физические свойства металлов как результат особенности строения кристаллов, аллотропные видоизменения углерода как результат различия строения кристаллических решеток и др.

Перечисленные свойства кристаллов определяются особенностями их геометрического строения, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решетке. Внешние формы кристаллов являются следствием их внутренней симметрии.

Основными элементами симметрии кристаллов, как и многогранников, являются: *плоскости симметрии, оси симметрии* и *центр симметрии*. Кроме основных элементов симметрии возможны и другие, получающиеся композицией основных симметрий. Полный набор всех элементов симметрии называется *группой симметрии* данного кристалла. Каждый кристалл характеризуется своей группой симметрии.

Основной вклад в изучение симметрии кристаллов внес выдающийся русский математик и кристаллограф Е. С. Федоров (1853—1919). Он строго математически вывел всевозможные группы симметрии кристаллов. Это было за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, когда само существование атома ставилось под сомнение. Только через 27 лет с их помощью на опыте было доказано существование кристаллической структуры и тем самым подтверждено блестящее предвидение Е. С. Федорова. Ученым было выведено 230 групп симметрии кристаллов, которые впоследствии были названы федоровскими. Это был исполинский труд, научный подвиг ученого, сумевшего подвести под единую геометрическую схему весь природный «хаос» бесчисленных кристаллообразований. Это открытие сродни открытию периодической таблицы Д. И. Менделеева.

Литература

1. Галиулин Р. В. Как устроены кристаллы // Квант.— 1983.— № 11.
2. Соболевский В. И. Замечательные минералы: Книга для учащихся.— М.: Просвещение, 1983.
3. Шаскольская М. П. Кристаллы.— М.: Наука, 1985.
4. Шаскольская М. П. Очерки о свойствах кристаллов.— М.: Наука, 1978.

ЗАНЯТИЕ 32

Обобщающее повторение

1. Какая фигура в пространстве называется многогранником? Приведите примеры многогранников
2. Какая фигура называется выпуклой? Приведите примеры выпуклых и невыпуклых фигур.
3. Какой многогранник называется выпуклым? Приведите примеры выпуклых и невыпуклых многогранников.
4. Сформулируйте свойства выпуклых многогранников, которые вы знаете.
5. Покажите, что в сечении выпуклого многогранника плоскостью получается выпуклая фигура.
6. Покажите, что пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой.
7. Сформулируйте теорему Эйлера.
8. Сформулируйте определение правильного многогранника. Перечислите правильные многогранники и объясните их названия.
9*. Какие многогранники называются топологически правильными? Сколько типов таких многогранников существует?
10. Какие многогранники называются полуправильными? Приведите примеры полуправильных многогранников.
11. Какие многогранники называются звездчатыми? Приведите примеры звездчатых многогранников.
12. Дайте определение поворота в пространстве вокруг оси.

13. Какие фигуры в пространстве называются фигурами вращения? Приведите примеры фигур вращения.
14*. Какова взаимосвязь между сечениями цилиндра и тригонометрическими функциями?
15*. Как впервые была установлена шарообразность Земли? В чем состоял метод Эратосфена измерения Земли?
16. Какой многогранник называется вписанным в сферу?
17. Покажите, что около любой треугольной пирамиды можно описать сферу.
18. Какой многогранник называется описанным около сферы?
19. Покажите, что в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.
20. Назовите все случаи взаимного расположения шара и плоскости. Какая плоскость называется касательной к шару?
21. Сформулируйте определение центрально-симметричных фигур в пространстве. Приведите примеры центрально-симметричных фигур.
22. Сформулируйте определение осевой симметрии. Приведите примеры фигур с осевой симметрией.
23. Какая фигура в пространстве называется симметричной относительно плоскости? Приведите примеры фигур с плоскостью симметрии.
24. Сформулируйте определение оси симметрии n-го порядка. Приведите примеры фигур с осями симметрии 3-го, 4-го, ..., n-го порядков.

ЗАНЯТИЕ 33

Объем пространственных фигур. Объем цилиндра

Проблема нахождения объемов пространственных фигур с древних времен привлекала к себе внимание ученых. Вычислением объемов простейших пространственных фигур занимались Демокрит (460—380 до н. э.), Евдокс (406—355 до н. э.), Архимед и др. В средние века нахождением объемов пространственных фигур занимались И. Кеплер, Б. Кавальери (1598—1647), П. Ферма (1601—1665) и др. Появление интегрального исчисления в конце XVII в. в работах И. Ньютона и Г. Лейбница (1646—1716) дало мощный метод вычисления объемов произвольных пространственных фигур. Вы познакомитесь с этим методом в курсе «Алгебра и начала анализа». Здесь же мы рассмотрим само понятие объема, его свойства и вычисление объемов основных пространственных фигур.

Объем — величина (аналогичная площади), сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно 1 мм, 1 см или 1 м соответственно. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Число V, показывающее, сколько раз единица измерения объема укладывается в данной фигуре, называется **объемом** этой фигуры. Это число может быть натуральным, рациональным или даже действительным.

Ясно, что объем фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после этого числа указывают единицу измерения объема. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур. А именно:

1. ***Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.***

2. ***Равные фигуры имеют равные объемы.***

3. ***Если фигура Φ составлена из двух фигур Φ_1 и Φ_2, то объем фигуры Φ равен сумме объемов фигур Φ_1 и Φ_2 т. е.***

$$V(\Phi)=V(\Phi_1)+V(\Phi_2).$$

Начнем вычисление объемов с вычисления объема прямого цилиндра.

Пусть Φ — прямой цилиндр, основанием которого служит фигура F площади S, и высота цилиндра равна h. Это означает, что единица измерения длины укладывается в высоте h раз, а единица измерения площади укладывается в основании S раз. Ясно, что в этом случае единица измерения объема укладывается в цилиндре $S\cdot h$ раз, т. е. формула **объема прямого цилиндра** имеет вид

$$V=S\cdot h,$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра (рис. 179).

В частности, **объем прямоугольного параллелепипеда** с ребрами a, b, c вычисляется по формуле

$$V=a\cdot b\cdot c.$$

Объем прямой призмы с площадью основания S и высотой h вычисляется по формуле

$$V=S\cdot h.$$

Объем прямого кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания — R, вычисляется по формуле

$$V=\pi R^2\cdot h.$$

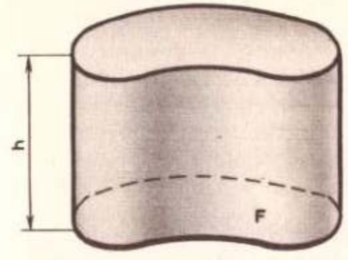


Рис. 179

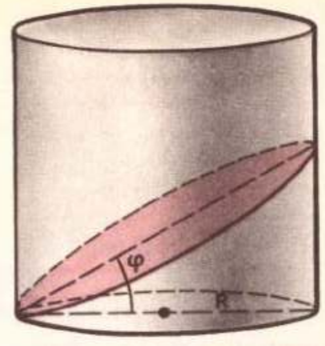


Рис. 180

ЗАДАЧИ

1°. Может ли объем фигуры в пространстве быть отрицательным числом? нулем?

2. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 3,4 м; 4,5 м; 2,1 м. Найдите объем.

3. Представляя куб с ребром единица, составленным из правильных четырехугольных пирамид с вершинами в центре куба, найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания единица и высотой $\frac{1}{2}$.

4. Используя свойства объема, покажите, что если фигура Φ_1 содержится в фигуре Φ, то имеет место неравенство

$$V(\Phi_1)\leqslant V(\Phi).$$

5. Найдите формулу объема правильной n-угольной призмы, высота которой равна h и сторона основания равна a.

6. Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию (рис. 180). Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.

7. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника со сторонами 5 см и 3 см вокруг неравных сторон. Как относятся объемы цилиндров?

8. Масса 25 м медной проволоки 100,7 г. Найдите диаметр проволоки, если плотность меди 8,9 г/см^3.

9. В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

ЗАНЯТИЕ 34

Принцип Кавальери

Среди различных методов нахождения объемов пространственных фигур, начиная от метода неделимых Демокрита, метода исчерпывания Архимеда и кончая методами интегрального исчисления, мы выбрали метод, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

Принцип Кавальери. ***Если при пересечении двух фигур в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры одинаковой площади, то объемы исходных пространственных фигур равны*** (рис. 181).

● Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2 составленными из тонких слоев одинаковой толщины, которые получаются в сечениях фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями. Считая слои прямыми цилиндрами, из равенства площадей их оснований и равенства высот получаем, что равны и объемы соответствующих слоев. Следовательно, равны и объемы фигур Φ_1 и Φ_2, составленных из этих слоев. ●

Применяя этот принцип, найдем объем наклонного цилиндра с основанием F площади S и высотой h. Для этого рассмотрим прямой цилиндр с таким же основанием и высотой. Расположим эти два цилиндра так, чтобы их основания находились на одной плоскости (рис. 182). Тогда сечения этих цилиндров плоскостями, параллельными этой плоскости, дадут фигуры, равные фигуре F, и, следовательно, они будут иметь равные площади. По принципу Кавальери отсюда следует равенство объемов цилиндров и, значит, для объема наклонного цилиндра имеет место формула

$$V=S\cdot h,$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра.

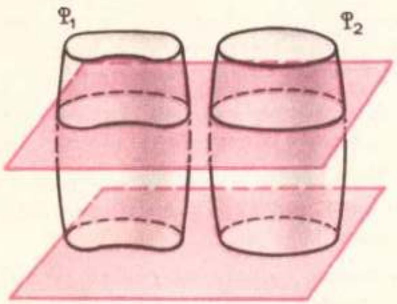


Рис. 181

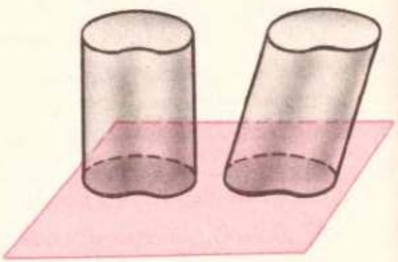


Рис. 182

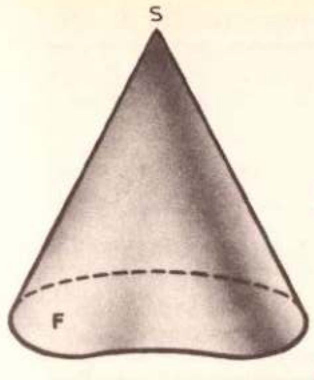


Рис. 183

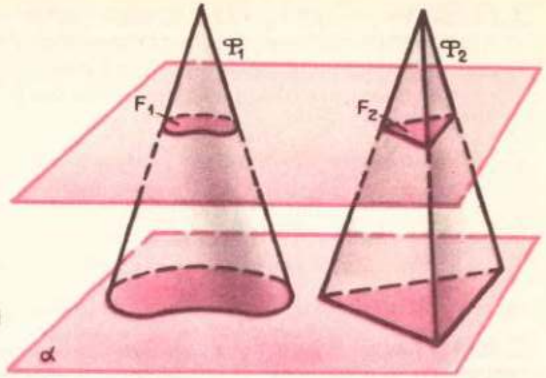


Рис. 184

Используя принцип Кавальери, покажем, что *если два конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то они имеют равные объемы.*

Напомним, что конусом в пространстве называется фигура, образованная отрезками, соединяющими точки некоторой плоской фигуры F, называемой основанием конуса, с точкой S, лежащей вне плоскости основания и называемой вершиной конуса (рис. 183).

● Пусть конусы Φ_1 и Φ_2 имеют высоты, равные h, а основания площади S расположены в одной плоскости α (рис. 184). Проведем плоскость, параллельную плоскости α, на расстоянии x от нее, $0\leqslant x\leqslant h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях конусов этой плоскостью, подобны основаниям и коэффициент подобия k равен $(h-x):h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами

$$S_1=k^2\cdot S,\quad S_2=k^2\cdot S$$

и, значит, равны. Из принципа Кавальери отсюда следует, что равны и объемы этих конусов. ●

ЗАДАЧИ

1. **Найдите формулу объема наклонной призмы, площадь основания которой равна S, а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом φ.**
2. **Найдите формулу объема наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая b наклонена к плоскости основания под углом φ.**

3. Пусть в сечениях пространственных фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями получаются фигуры F_1 и F_2, причем площади фигур F_2 в k раз больше площадей фигур F_1. Как связаны между собой объемы фигур Φ_1 и Φ_2? Обоснуйте свой вывод.

4. Используя результат задачи 3 предыдущего занятия, найдите объем пирамиды с основанием площади $\frac{1}{2}$ и высотой $\frac{1}{2}$.

ЗАНЯТИЕ 35

Объем конуса

Рассмотрим сначала случай треугольной пирамиды. Пусть $ABCA_1$ — треугольная пирамида. Достроим ее до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 185). Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1, разбивают эту призму на три пирамиды $ABCA_1$, CBB_1A_1 и $CB_1C_1A_1$ с вершинами в точке A_1. Пирамиды CBB_1A_1 и $CB_1C_1A_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1, так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме того, у этих пирамид общая вершина и, следовательно, общая высота. Значит, эти пирамиды имеют равные объемы. Рассмотрим теперь пирамиды $ABCA_1$ и $CB_1C_1A_1$ и примем во второй пирамиде за вершину точку C. Тогда эти пирамиды имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Значит, эти пирамиды также имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получаем **формулу объема** треугольной **пирамиды**

$$V=\frac{1}{3}S\cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота.

Покажем теперь, что **объем** произвольного **конуса** с площадью основания S и высотой h также вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}S\cdot h.$$

Для этого возьмем какую-нибудь треугольную пирамиду с основанием S и высотой h. Тогда по принципу Кавальери эта пирамида и конус имеют равные объемы и, значит, имеет место требуемая формула. В частности, эта формула справедлива для многоугольной пирамиды и кругового конуса.

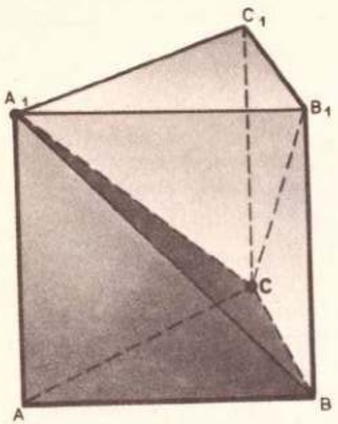


Рис. 185

ЗАДАЧИ

1. Напишите формулу объема правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.
2. Напишите формулу объема правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b.
3. Напишите формулу объема правильной n-угольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.
4. Напишите формулу объема кругового конуса с высотой h и радиусом основания R.
5. Напишите формулу объема прямого кругового конуса с радиусом основания R и образующей b.
6. Найдите формулу объема усеченного конуса с основаниями площади S_1, S_2 и высотой h.
7. Найдите объем тетраэдра с ребром, равным единице.
8. Найдите объем октаэдра с ребром, равным единице.
9*. Найдите объемы икосаэдра и додекаэдра с ребром, равным единице.

ЗАНЯТИЕ 36

Объем шара

Найдем формулу объема шара. Пусть дан полушар радиуса R, основание которого расположено на плоскости α. Возьмем прямой круговой цилиндр, основание которого — круг радиуса R, расположенный в плоскости α, и высота которого равна R (рис. 186). В цилиндр впишем круговой конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания цилиндра. Рассмотрим фигуру в пространстве, состоящую из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и покажем, что эта фигура и полушар имеют равные объемы.

Проведем плоскость, параллельную плоскости α, на расстоянии x от нее, $0\leqslant x\leqslant R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиуса $\sqrt{R^2-x^2}$ и площади $\pi(R^2-x^2)$. В сечении другой фигуры получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором

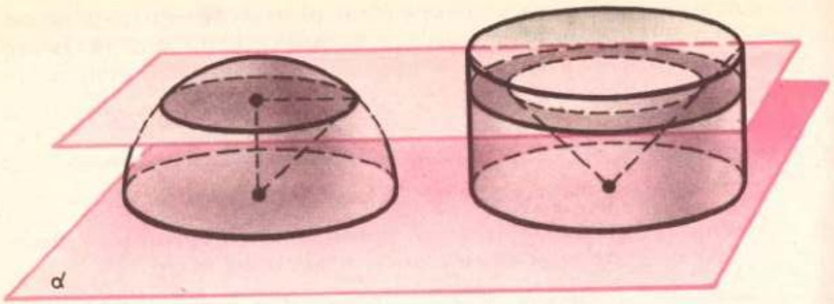


Рис. 186

равен x, а внешнего R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавельери следует, что полушар и построенная фигура имеют равные объемы. Вычислим этот объем. Он равен разности объемов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Таким образом, **объем шара** радиуса R вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ЗАДАЧИ

1. Найдите объем шара, описанного около куба с ребром единица.
2. Найдите объем шара, вписанного в прямой круговой цилиндр с радиусом основания единица и образующей, наклоненной к плоскости основания под углом 60°.
3. Найдите формулу объема шарового сегмента — части шара отсекаемой от него плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра шара. Радиус шара равен R.
4. На каком расстоянии от центра шара нужно провести плоскость, чтобы отсекаемый ею сегмент имел объем, равный одной трети объема шара? (Ответ дайте приближенно, используя микрокалькулятор.)
5. Найдите объем части шара радиуса R, заключенный между двумя параллельными плоскостями, проходящими на расстояниях x_1 и x_2 от центра шара
6. *Шаровым сектором* будем называть часть шара, составленную из шарового сегмента и конуса, основанием которого является основание сегмента, а вершиной — центр шара. Найдите формулу объема шарового сектора радиуса R и углом при вершине φ.
7. *Шаровым слоем* будем называть фигуру, заключенную между поверхностями двух шаров с общим центром. Найдите формулу для объема шарового слоя, заключенного между поверхностями шаров радиусов R_1 и R_2.

ЗАНЯТИЕ 37

Площадь поверхности

Площадь поверхности многогранника определяется как сумма площадей многоугольников, входящих в эту поверхность.

Площадь поверхности фигур вращения определяется сложнее.

Рассмотрим прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен R и образующая равна b. Площадь полной поверхности цилиндра определяется как сумма площадей оснований и боковой поверхности. Площадь основания равна πR^2. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник с длиной $2\pi R$ и шириной b (рис. 187). Поэтому площадь боковой поверхности равна $2\pi R \cdot b$, а **площадь S полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле**

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot b = 2\pi R(R + b),$$

где R — радиус оснований цилиндра, b — его образующая.

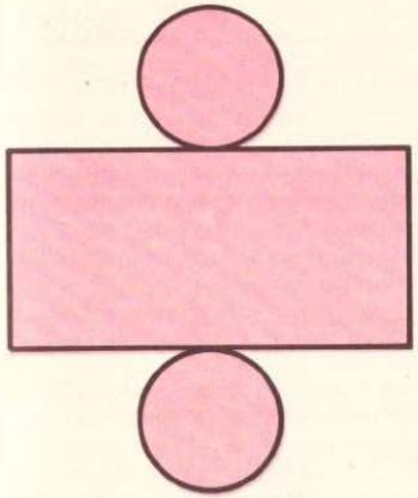


Рис. 187

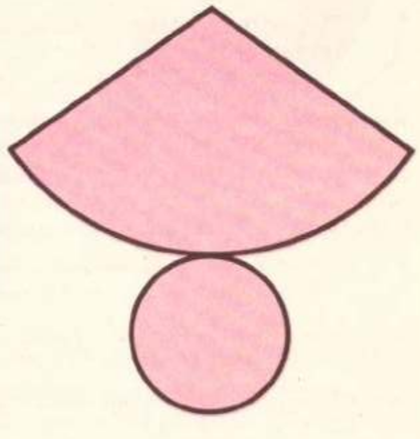


Рис. 188

Рассмотрим прямой круговой конус, радиус основания которого равен R и образующая равна b. Площадь полной поверхности конуса определяется как сумма площадей основания и боковой поверхности. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен образующей, а длина дуги — длине окружности основания конуса (рис. 188). Поэтому площадь боковой поверхности равна $\pi R \cdot b$, а **площадь S полной поверхности конуса вычисляется по формуле**

$$S=\pi R^2+\pi R\cdot b=\pi R(R+b),$$

где R — радиус основания конуса, b — его образующая.

Для нахождения площади поверхности шара уже нельзя, как мы это делали раньше для цилиндра и конуса, рассмотреть развертку, так как поверхность шара нельзя развернуть на плоскость. Поэтому воспользуемся другим методом нахождения площади поверхности шара.

Опишем около шара радиуса R какой-нибудь многогранник, проводя касательные плоскости к этому шару. Представим полученный многогранник, составленным из пирамид, вершины которых совпадают с центром шара, а основаниями являются грани многогранника (рис. 189). Ясно, что высоты этих пирамид равны радиусу шара. Поэтому объем многогранника вычисляется по формуле

$$V_M=\frac{1}{3}S_M\cdot R, \qquad (*)$$

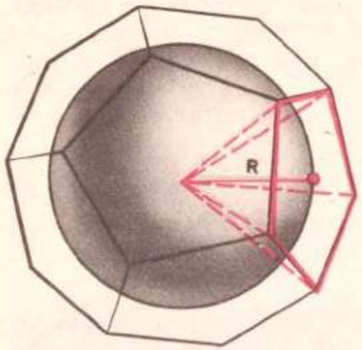


Рис. 189

где S_M — площадь поверхности многогранника.

Будем и дальше проводить касательные плоскости к шару, отсекая вершины многогранников. Поверхности получающихся при этом многогранников будут все больше и больше приближаться к поверхности шара. Учитывая, что при этом сохраняется формула (*), получаем, что для объема шара V и его площади поверхности S также будет выполняться формула

$$V=\frac{1}{3}S\cdot R.$$

Подставляя в нее формулу объема шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, получаем **формулу площади поверхности шара**

$$S=4\pi R^2.$$

ЗАДАЧИ

1°. Чему равна площадь поверхности куба с ребром единица?

2°. Чему равна площадь поверхности тетраэдра с ребром единица? октаэдра с ребром единица? икосаэдра с ребром единица?

3. Чему равна площадь поверхности додекаэдра с ребром единица?

4. Найдите площадь поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.

5. Найдите площадь поверхности правильной n-угольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b.

6. Найдите площадь поверхности усеченного прямого кругового конуса с основаниями радиусов R_1, R_2 и образующей b. Нарисуйте развертку боковой поверхности усеченного конуса.

7. Найдите площадь поверхности шарового сегмента, отсекаемого от шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра шара.

8. Найдите площадь поверхности части шара радиуса 5 см, заключенной между двумя плоскостями, проходящими на расстояниях 3 см и 4 см от центра шара.

ЗАНЯТИЕ 38

Прямоугольная система координат в пространстве

Напомним, что *координатной прямой* называется такая прямая, на которой выбраны точка O, называемая *началом координат*, и *единичный отрезок OE*, указывающий положительное направление координатной прямой (рис. 190).

Рис. 190

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно *осью абсцисс* и *осью ординат* (рис. 191).

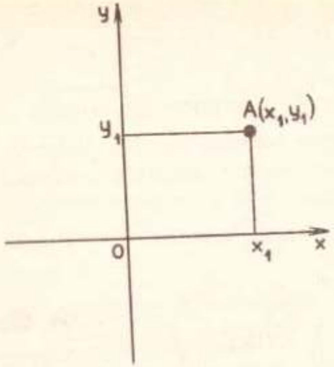


Рис. 191

Каждой точке на координатной прямой сопоставляется число, называемое *координатой* этой точки, а каждой точке на плоскости сопоставляется пара чисел (x, y), называемых координатами точки на плоскости относительно данной системы координат.

В планиметрии доказывалось, что расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Показывалось также, что окружность с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

а прямая — уравнением

$$ax + by + c = 0.$$

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве и докажем аналогичные свойства.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596—1650). Поэтому прямоугольную систему координат называют также декартовой системой координат, а сами

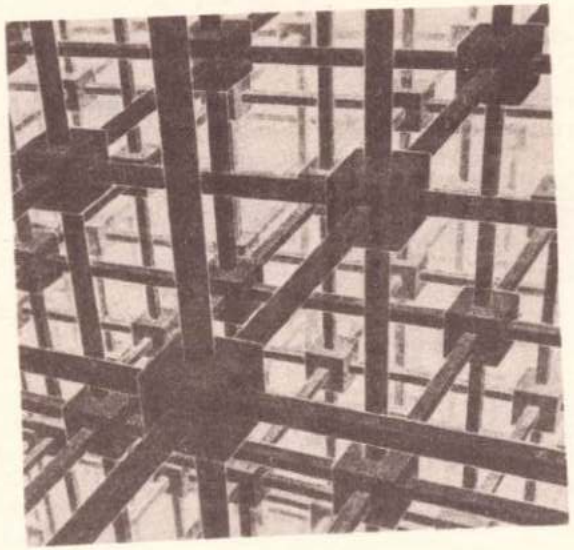


Рис. 192

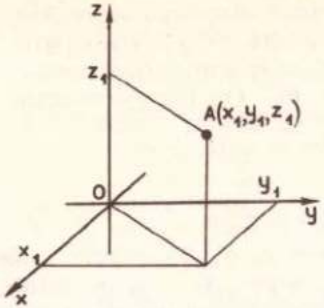


Рис. 193

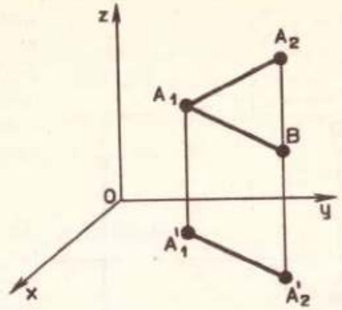


Рис. 194

координаты — декартовыми координатами. Введение прямоугольных координат на плоскости и в пространстве позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется методом координат. На рисунке 192 изображена работа М. Эшера «Пространство», отражающая идею введения прямоугольной системы координат в пространстве.

Определение. **Прямоугольной системой координат в пространстве** называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy, Oz и называются соответственно **осью абсцисс, осью ординат** и **осью аппликат** (рис. 193).

Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz.

Рассмотрим теперь вопрос о том, что такое координаты точки в пространстве.

Пусть A — произвольная точка пространства, в котором выбрана прямоугольная система координат. Через точку A проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox, и точку ее пересечения с осью Ox обозначим A_x. Тогда координата этой точки на оси Ox называется **абсциссой** точки A и обозначается x. Аналогично на осях Oy и Oz определяются точки A_y и A_z, координаты которых называются соответственно **ординатой** и **аппликатой** точки A и обозначаются y и z. Тройка чисел (x, y, z) называется **координатами** точки A в пространстве.

Пусть $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — точки в пространстве. Выразим расстояние между ними через их координаты. Для этого рассмотрим прямую A_1A_2 (рис. 194). Она не может быть параллельна одновременно всем осям координат. Предположим, например, что она не параллельна оси Oz и пусть A'_1, A'_2 —

ортогональные проекции точек A_1, A_2 на плоскость Oxy. Ясно, что эти проекции имеют на плоскости координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) соответственно. Расстояние между точками A_1', A_2' выражается формулой

$$A_1'A_2'=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Через точку A_1 проведем прямую, параллельную $A_1'A_2'$, и точку ее пересечения с прямой $A_2'A_2$ обозначим B. Тогда треугольник A_1A_2B — прямоугольный, $A_1B=A_1'A_2'$, $A_2B=|z_1-z_2|$. Следовательно, по теореме Пифагора имеем

$$A_1A_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

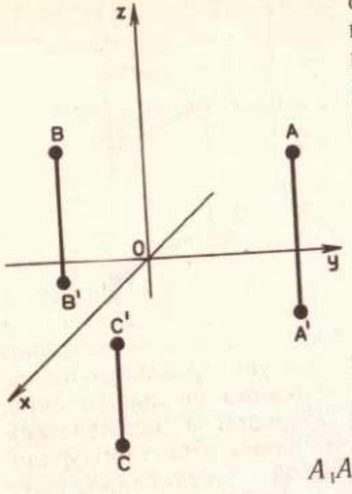


Рис. 195

Непосредственно из определения шара следует, что координаты точек шара с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R удовлетворяют неравенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2,$$

а координаты точек соответствующей сферы — равенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

ЗАДАЧИ

1. **Начертите прямоугольную систему координат и изобразите точки с координатами (1, 2, 3), (2, —1, 1), (—1, 3, 2).**

2. **Для точек A, B, C пространства указаны их проекции A', B', C' на плоскость Oxy (рис. 195). Постройте соответствующие точки A_x, A_y, A_z; B_x, B_y, B_z; C_x, C_y, C_z на осях координат.**

3. **Найдите расстояния между точками: а) $A_1(1, 2, 3)$ и $A_2(-1, 1, 1)$; б) $B_1(3, 4, 0)$ и $B_2(3, -1, 2)$.**

4°. **На каком расстоянии от плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz — находится точка $A(1, -2, 3)$?**

5°. **Укажите какие-нибудь точки в пространстве, одинаково удаленные от всех трех координатных плоскостей.**

6. **Напишите уравнение сферы:**
а) с центром в точке O (0, 0, 0) и радиусом 1;
б) с центром в точке (1, —2, 3) и радиусом 4.

7. **Покажите, что уравнение: а) $x^2-2x+y^2+z^2=3$; б) $x^2+y^2+z^2-6x+4y=11$ задает сферу в пространстве. Найдите радиус и координаты центра этой сферы.**

8. **Как расположена точка A(5, 1, 2) относительно сферы**
$$x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0?$$

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рене Декарт — один из выдающихся ученых XVII в. Поражает широта творческих интересов Декарта. Им получены глубокие результаты в философии, математике, физике, биологии, медицине и т. д. Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснения многим явлениям реального мира, вскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения — картезианства (Картезий — латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественно-научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определенным естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Но наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 г., когда Декарту был уже 41 год. По обычаям того времени она имела довольно длинное название: «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». В этом сочинении Декарт сформулировал «главные правила метода»:

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Рене Декарт

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И *последнее:* делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

«Геометрия» Декарта, являющаяся приложением к «Рассуждению о методе...», произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII в. В XVIII и XIX вв. на основе метода координат Декарта возникла многомерная, а затем и бесконечномерная геометрия. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

Литература

Матвиевская Г.П. Рене Декарт: Книга для учащихся.— М.: Просвещение, 1987.— (Из серии «Люди науки»).

ЗАНЯТИЕ 39

Векторы в пространстве

Понятие вектора является одним из основных в математике, объединяющим такие ее разделы, как геометрия, алгебра, математический анализ и др. Оно имеет большое прикладное значение, так как многие физические величины (сила, скорость и др.) характеризуются не только величиной, но и направлением, т. е. являются векторными величинами.

В планиметрии вы изучали векторы на плоскости. Здесь мы рассмотрим векторы в пространстве. Их определение и свойства аналогичны определению и свойствам векторов на плоскости.

Определение. **Вектором** в пространстве называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны начало и конец. Рассматривается также **нулевой вектор,** у которого начало совпадает с концом.

Вектор с началом в точке A_1 и концом в точке A_2 обозначается $\overrightarrow{A_1A_2}$ и изображается стрелкой. Будем также обозначать векторы малыми латинскими буквами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и т. д. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Длиной, или **модулем, вектора** называется длина соответствующего отрезка. Она обозначается $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ или $|\vec{a}|$. Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Два вектора считаются **равными,** если они имеют одинаковые длины и направление.

Так же как и на плоскости, для векторов в пространстве определяются операции сложения и умножения на число.

Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число t длина вектора изменяется в $|t|$ раз, а направление остается прежним, если $t>0$, и меняется на противоположное, если $t<0$. При умножении вектора на нуль получается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\cdot\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+(-1)\vec{b}$, который обозначается $\vec{a}-\vec{b}$.

Для операций сложения векторов и умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам этих операций для векторов на плоскости:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$,
3. $t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$,
4. $t(s\vec{a})=(ts)\vec{a}$,
5. $(t+s)\vec{a}=t\vec{a}+s\vec{a}$.

Доказательство этих свойств проводится непосредственной проверкой, аналогично тому, как это делалось для плоскости. Покажем, например, выполнимость свойства 2. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от общего начала A. Если эти векторы лежат в одной плоскости, то соответствующее равенство $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ следует из свойств векторов на плоскости. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не лежат в одной плоскости, то это равенство следует из рассмотрения параллелепипеда (рис. 196).

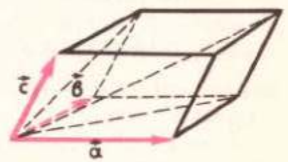


Рис. 196

ЗАДАЧИ

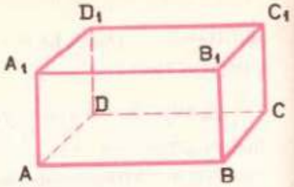


Рис. 197

1°. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 197) укажите векторы, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{A_1B}$.

2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{C_1C}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

3. Покажите выполнимость свойств 1, 3, 4, 5.

4°. Верно ли равенство $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$?

5°. Всегда ли длина суммы векторов равна сумме длин слагаемых?

6. Покажите, что имеет место неравенство $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

ЗАНЯТИЕ 40

Координаты вектора

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат. Определим понятие координат вектора в пространстве. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются **координатами вектора.**

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Отложим эти векторы от начала координат и назовем их **координатными векторами** (рис. 198).

Легко видеть, что произвольный вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z) в том и только в том случае, когда он представим в виде $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$. Покажем, что их сумма $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ будет иметь координаты $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$. Для этого разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам: $\vec{a}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Тогда для их суммы $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ имеет место равенство $\vec{a}_1+\vec{a}_2=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$ и, следовательно, тройка чисел $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1+\vec{a}_2$.

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются. Аналогично, при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

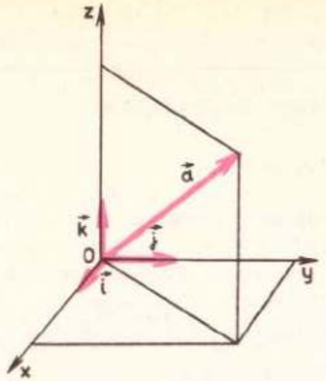


Рис. 198

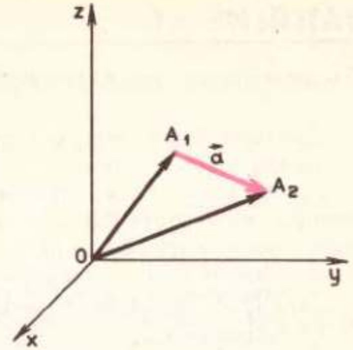


Рис. 199

Из этих свойств следует, в частности, что разность $\vec{a}_2-\vec{a}_1$ векторов $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ имеет координаты $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом точку $A_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис.199). Тогда вектор $\vec{a}$ можно представить как разность $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}$, и, следовательно, он имеет координаты $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

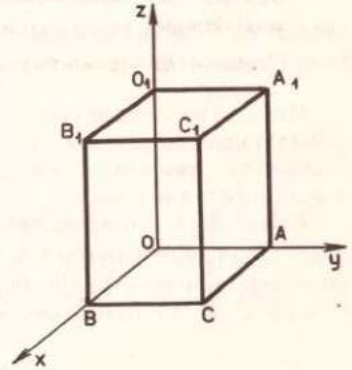


Рис. 200

ЗАДАЧИ

1°. На рисунке 200 изображен прямоугольный параллелепипед, у которого $OA=2$, $OB=3$, $OO_1=4$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$.

2°. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (−3, 5, 4), (2, 3, −1).

3. Выразите длину вектора $\vec{a}$ через его координаты (x, y, z).

4. Выразите длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2).

5. Даны векторы $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(0, 2, -1)$, $\vec{c}(-1, 0, 0)$. Найдите координаты векторов $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

ЗАНЯТИЕ 41

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов в пространстве определяется аналогично тому, как это делалось в планиметрии. А именно.

Определение. **Скалярным произведением** двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$. По определению

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|\cdot\cos\varphi.$$

Произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2.$$

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл: связывает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ. А именно имеет место формула

$$A=\vec{F}\cdot\vec{a}=|\vec{F}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не параллельны. Отложим их от начала координат и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно. Рассмотрим треугольник OA_1A_2 (см. рис. 199). По теореме косинусов имеем равенство

$$A_1A_2^2=OA_1^2+OA_2^2-2\cdot OA_1\cdot OA_2\cdot\cos\varphi,$$

и, следовательно, равенство $(\vec{a}_1-\vec{a}_2)^2=\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2-2\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$. Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами

$$\vec{a}_1^2=|\vec{a}_1|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2;$$

$$\vec{a}_2^2=|\vec{a}_2|^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2;$$

$$(\vec{a}_1-\vec{a}_2)^2=|\vec{a}_1-\vec{a}_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.$$

Получим $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Таким образом, имеет место формула

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

ЗАДАЧИ

1. **Самостоятельно рассмотрите случай, когда векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ параллельны, и покажите, что при этом также имеет место приведенная выше формула скалярного произведения.**

2°. **Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ с координатами (—1, 2, 3), (2, —1, 0) соответственно.**

3. **Используя формулу скалярного произведения, покажите, что для вектора $\vec{a}$ с координатами (x, y, z) имеют место равенства $x=\vec{a}\cdot\vec{i}$, $y=\vec{a}\cdot\vec{j}$, $z=\vec{a}\cdot\vec{k}$.**

4. **Используя формулу**

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|},$$

найдите угол между векторами $\vec{a}_1(2, 3, -1)$, $\vec{a}_2(1, -2, 4)$.

5. **Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите косинус угла между векторами: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.**

ЗАНЯТИЕ 42

Уравнение плоскости в пространстве

В курсе планиметрии показывалось, что прямая на плоскости задается уравнением $ax+by+c=0$, в котором a, b, c — действительные числа, причем a, b одновременно не равны нулю.

Покажем, что плоскость в пространстве задается уравнением $ax+by+cz+d=0$, где a, b, c, d — действительные числа, причем a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого **вектором нормали.**

Действительно, пусть точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости и $\vec{n}(a, b, c)$ — перпендикулярный этой плоскости вектор. Тогда произвольная точка $A(x, y, z)$ будет принадлежать этой плоскости в том и только в том случае, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. скалярное произведение $n\cdot\overrightarrow{A_0A}$ рав-

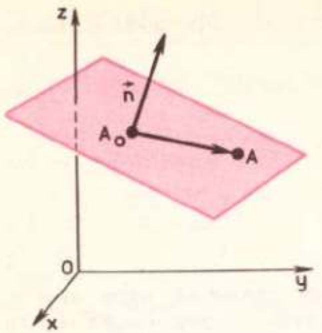


Рис. 201

но нулю (рис. 201). Расписывая скалярное произведение через координаты этих векторов, получим уравнение

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

которое и задает искомую плоскость. Раскрыв скобки и обозначив $-ax_0-by_0-cz_0=d$, получим требуемое уравнение плоскости

$$ax+by+cz+d=0.$$

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении плоскостей в пространстве.

Две плоскости *параллельны* или *совпадают*, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ одинаково или противоположно направлены, т. е. для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2=t\vec{n}_1$. Для плоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0;\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \qquad (*)$$

векторы нормали имеют координаты (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2). Поэтому такие плоскости параллельны или совпадают, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$, $c_2=tc_1$. При этом если $d_2=td_1$, то уравнения $(*)$ определяют одну и ту же плоскость. Если же $d_2\neq td_1$, то эти уравнения определяют параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны и не совпадают, то они *пересекаются* по прямой и угол φ между ними равен углу между нормалями $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$. Этот угол можно вычислить, используя формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняется равенство

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$$

ЗАДАЧИ

1°. **Какие уравнения имеют координатные плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz?**

2. **Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1, 2, 0)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1, 1)$.**

3. **Дана плоскость $x+2y-3z-1=0$. Найдите точки ее пересечения с осями координат.**

4. **Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).**

5. **Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой**

а) $x+y+z-1=0$, $x+y+z+1=0$;
б) $x+y+z-1=0$, $x+y-z-1=0$;
в) $-7x+y+2z=0$, $7x-y-2z=0$.

6. **Плоскости заданы уравнениями: $x+y+z+1=0$, $x+y-z-1=0$. Найдите угол между ними.**

7. **Приведите примеры уравнений, задающих перпендикулярные плоскости.**

ЗАНЯТИЕ 43

Аналитическое задание пространственных фигур

На предыдущих занятиях было показано, что *сфера* с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Шар, поверхностью которого служит эта сфера, задается неравенством

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2.$$

Плоскость в пространстве задается уравнением

$$ax+by+cz+d=0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других пространственных фигур и начнем с многогранников.

Заметим, что если плоскость задана уравнением $ax+by+cz+d=0$, то неравенства $ax+by+cz+d\geqslant0$, $ax+by+cz+d\leqslant0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает пространство. Для того чтобы определить, какому из двух полупространств принадлежит точка $A(x, y, z)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения плоскости и найти знак получившегося значения.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, что с помощью таких неравенств в пространстве можно задавать выпуклые многогранники.

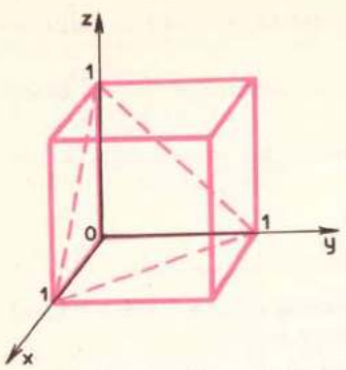


Рис. 202

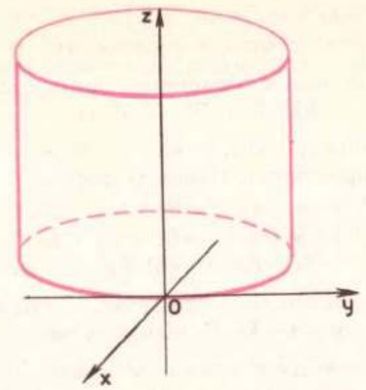


Рис. 203

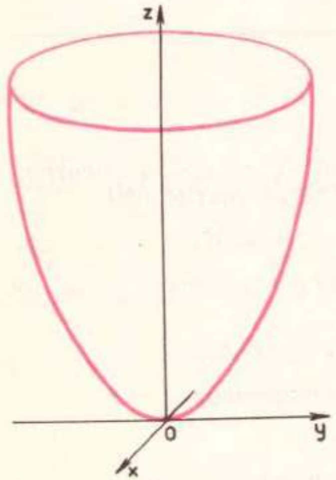


Рис. 204

Действительно, пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_nx+b_ny+c_nz+d_n=0. \end{cases}$$

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1\geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_nx+b_ny+c_nz+d_n\geqslant 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многогранник.

Например, система

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0\leqslant z\leqslant 1 \end{cases}$$

определяет *единичный куб* в пространстве (рис. 202). Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство $x+y+z-1\geqslant 0$, то соответствующий многогранник получится из куба отсечением пирамиды (см. рис. 202).

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие пространственные фигуры. Например, *прямой круговой цилиндр* с радиусом основания R и высотой h можно задать неравенствами

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant R^2, \\ 0\leqslant z\leqslant h \end{cases}$$ (рис. 203).

Параболоид вращения можно задать уравнением $z=a(x^2+y^2)$ (рис. 204).

В сечении этого параболоида плоскостью $y=c$ получается парабола $z=a(x^2+c^2)$, а в сечениях плоскостями $z=c$ получаются окружности $x^2+y^2=\frac{c}{a}$.

ЗАДАЧИ

1°. **Два полупространства задаются неравенствами $a_1x+b_1y+c_1z+d_1\geqslant 0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2\geqslant 0$. Как будет задаваться пересечение этих полупространств?**

2. **Нарисуйте многогранник, задаваемый неравенствами**

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 8, \\ 0\leqslant y\leqslant 8, \\ 0\leqslant z\leqslant 8, \\ x+y+z\geqslant 12. \end{cases}$$

3. **Найдите координаты вершин выпуклого многогранника, задаваемого системой неравенств**

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0, \\ x+y+z\leqslant 4, \\ x+y+z\geqslant 2. \end{cases}$$

Изобразите этот многогранник.

4°. **Какая фигура в пространстве задается неравенствами**

$$\begin{cases} x^2+z^2\leqslant R^2, \\ 0\leqslant y\leqslant h? \end{cases}$$

5. **Нарисуйте фигуру в пространстве, являющуюся пересечением двух цилиндров, задаваемых неравенствами**

$$\begin{cases} x^2+z^2\leqslant 1, \\ -1\leqslant y\leqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2+z^2\leqslant 1, \\ -1\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

6°. **Для параболоида вращения $z=a(x^2+y^2)$ укажите части пространства, удовлетворяющие неравенствам $z\geqslant a(x^2+y^2)$, $z\leqslant a(x^2+y^2)$ (см. рис. 204).**

7. **Напишите неравенства, определяющие прямой круговой конус с вершиной в точке $S(0,\ 0,\ h)$, основание которого — круг радиуса R, лежащий в плоскости Oxy.**

ЗАНЯТИЕ 44*

Многогранники в задачах оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются, так называемые, задачи оптимизации:

транспортная задача (задача составления оптимального способа перевозок грузов);

задача о диете (о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям);

задача составления оптимального плана производства,

задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на разные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Пусть на четыре завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах C_1 и C_2 в соответствии с данными, указанными в таблице 1.

Таблица 1

Наличие сырья, т		Потребность в сырье, т			
C_1	C_2	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Расстояние (в км) от складов до заводов указано в таблице 2.

Таблица 2

	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1	5	6	4	10
C_2	3	7	3	7

Нужно найти самый выгодный вариант перевозок, т. е. вариант, для которого общее число тонно-километров будет наименьшим.

Для решения этой задачи в первую очередь проанализируем условие и переведем его на язык математики, т. е. составим математическую модель.

Обозначим x, y, z — количество сырья, которое нужно перевезти со склада C_1 на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти $20-x-y-z$ тонн сырья, а со второго склада на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ нужно будет перевезти соответственно $8-x$, $10-y$, $12-z$, $x+y+z-5$ тонн сырья. Запишем эти данные в виде таблицы.

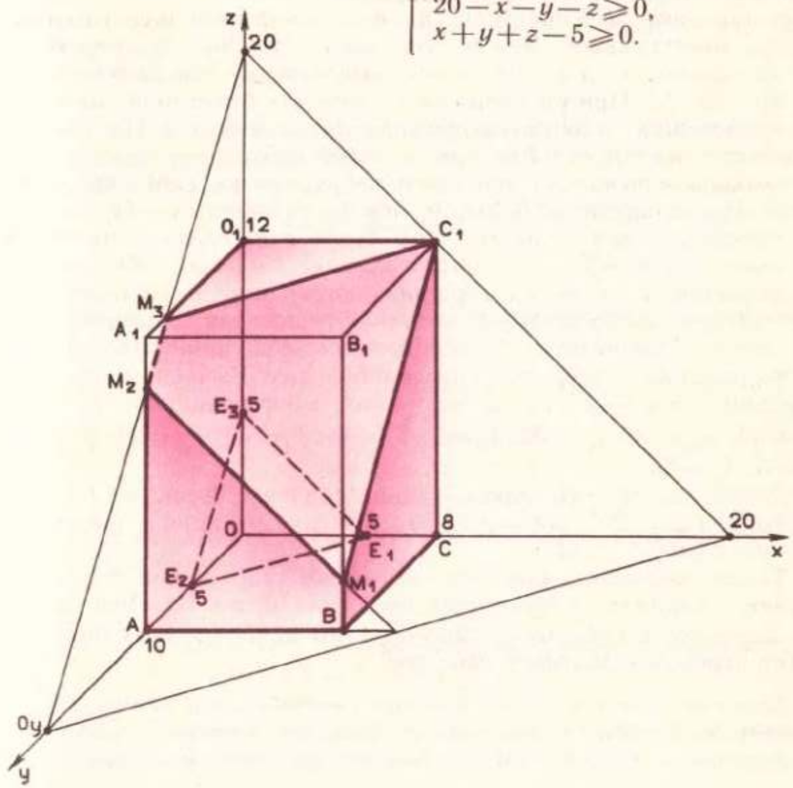
Таблица 3

	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1	x	y	z	$20-x-y-z$
C_2	$8-x$	$10-y$	$12-z$	$x+y+z-5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, имеем следующие неравенства

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0, \\ 8-x\geqslant 0,\ 10-y\geqslant 0,\ 12-z\geqslant 0, \\ 20-x-y-z\geqslant 0, \\ x+y+z-5\geqslant 0. \end{cases}$$

Рис. 205



Полученная система неравенств определяет многогранник $M_1M_2M_3C_1CBAE_2E_1E_3O_1$, изображенный на рисунке 205.

Найдем теперь общее число тонно-километров. Для этого расстояния от складов до заводов умножим на перевозимое количество сырья и полученные результаты сложим. Общее число тонно-километров будет равно $5x+6y+4z+10(20-x-y-z)+3(8-x)+7(10-y)+3(12-z)+7(x+y+z-5)=295-x-4y-2z$.

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F=295-x-4y-2z$ на рассмотренном выше многограннике. Заметим, что для нахождения наименьшего значения этой функции достаточно найти наименьшее значение функции $-x-4y-2z$ и затем прибавить к нему 295. В свою очередь для нахождения наименьшего значения функции $-x-4y-2z$ достаточно найти наибольшее значение функции $f=x+4y+2z$ и затем умножить его на минус единицу.

Найдем наибольшее значение функции $f=x+4y+2z$. Тогда $F_{min}=295-f_{max}$ на многограннике. Воспользуемся тем, что эта функция принимает постоянное значение, равное d, на плоскости, задаваемой уравнением $x+4y+2z=d$. При различных d эти плоскости параллельны друг другу и при изменении d от $-\infty$ до $+\infty$ заполняют все пространство. Возьмем d настолько большим, чтобы многогранник лежал по одну сторону от плоскости $x+4y+2z=d$ и для его точек выполнялось бы неравенство $x+4y+2z<d$. При уменьшении d плоскость будет приближаться к многограннику и при некотором $d=d_0$ коснется его. Причем это касание может произойти или в какой-нибудь вершине многогранника, или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани. Поскольку при d больших, чем d_0, плоскость $x+4y+2z=d$ не пересекает многогранник, то d_0 будет наибольшим значением функции $x+4y+2z$ на многограннике, и оно обязательно принимается в одной из вершин многогранника. Поэтому для нахождения наибольшего значения функции на многограннике достаточно вычислить значения этой функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значения функции $f=x+4y+2z$ в вершинах многогранника: $f_{M_1}=52$; $f_{M_2}=60$; $f_{M_3}=48$; $f_{C_1}=32$; $f_C=8$; $f_B=48$; $f_A=40$; $f_{E_2}=20$; $f_{E_1}=10$; $f_{E_3}=5$; $f_{O_1}=24$.

Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{min}=295-60=235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0,\ 10,\ 10)$.

Таким образом, наиболее выгодным вариантом перевозок является вариант, при котором $x=0$, $y=10$, $z=10$. Подставляя эти значения в таблицу 3, получим, что наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Заметим, что число независимых переменных в нашей задаче было равно трем и поэтому в процессе решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось

Таблица 4

	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1	0	10	10	0
C_2	8	0	2	15

двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трех и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется n-мерное пространство и n-мерные многогранники с очень большим n. При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трехмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств большей размерности, которые изучаются в специальном разделе математики, называемом многомерной геометрией.

ЗАДАЧИ

1. **Дана прямоугольная система координат. Что представляет собой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:**

а) $\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant a, \\ 0\leqslant y\leqslant b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant a, \\ 0\leqslant y\leqslant b, \\ 0\leqslant z\leqslant c? \end{cases}$

2. **Найдите множество точек пространства, определяемое следующей системой неравенств:**

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 10, \\ 0\leqslant y\leqslant 8, \\ 0\leqslant z\leqslant 6, \\ x+y+z=12, \\ x+4y+3z=40. \end{cases}$$

3. **Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой:**

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ -2-2x-y\geqslant 0, \\ 2-x+y\geqslant 0, \\ 5-x-y\geqslant 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F=y-x$.

Литература

1. Беляева Э. С., Монахов В. М. Экстремальные задачи: Пособие для учащихся VIII — X классов.— М.: Просвещение, 1977.

2. Болтянский В. Г. Элементарная геометрия: Книга для учителя.— М.: Просвещение, 1985.

3. Волков В. А. Элементы линейного программирования: Пособие для учителей средней школы.— М.: Просвещение, 1974.

ЗАНЯТИЕ 45

Полярные координаты

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее указывать не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Например, в повседневной жизни мы говорим: «Вы пройдете по этой улице около 100 м, свернете направо, пройдете еще 50 м и будете у цели». При астрономических наблюдениях также гораздо более удобными являются не декартовы координаты, а так называемые **полярные координаты** на плоскости и *сферические координаты* в пространстве (последние мы рассмотрим на следующем занятии).

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE. Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью. Полярными координатами** точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ), где r — расстояние от точки A до точки O, φ — угол между полярной осью и вектором $\overline{OA}$, считаемый в направлении против часовой стрелки (рис. 206).

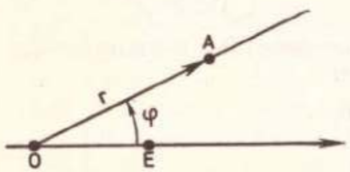


Рис. 206

Угол φ при этом можно задавать в градусах или радианах.

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости можно сопоставить полярные координаты (r, φ) (рис. 207). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

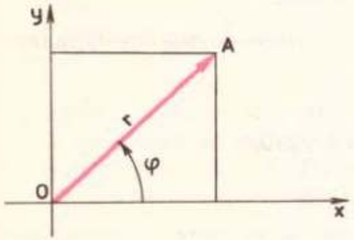


Рис. 207

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

и, наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости, особенно для задания различных спиралей. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

1. *Окружность* радиусом R и центром в точке O задается уравнением $r = R$ (рис. 208). Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на R. Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. Если при этом угол φ изменяется от нуля до $+\infty$, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ изменяется от нуля до $-\infty$, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

2. *Спираль Архимеда* — кривая, задаваемая уравнением $r = a\varphi$, где a — некоторое фиксированное число, φ — угол, измеряемый в радианах (рис. 209).

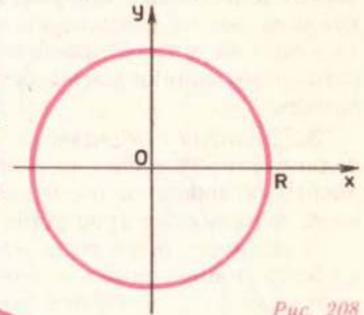


Рис. 208

Предположим, что $a > 0$, и построим график этой кривой. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что углу $\varphi = 0$ соответствует точка O на кривой. Поскольку радиус r должен

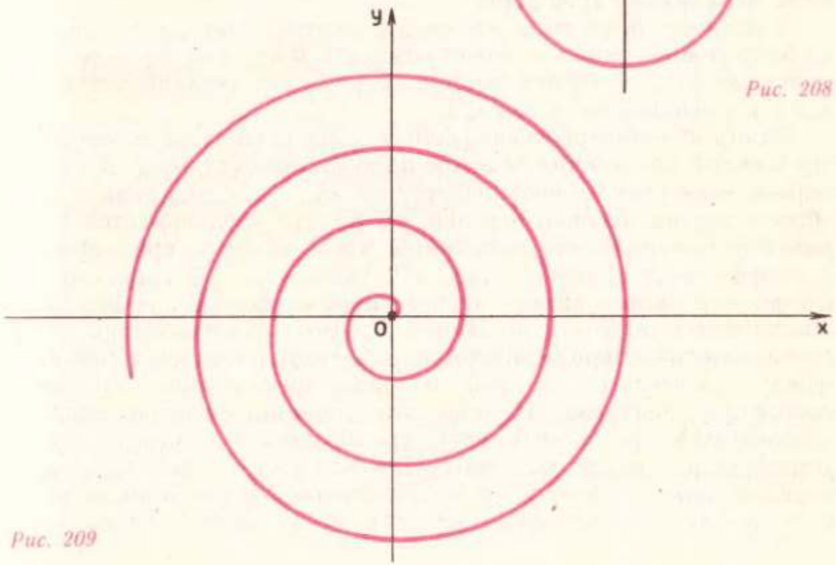


Рис. 209

быть неотрицательным числом, то отрицательным углам φ никаких точек на кривой $r=a\varphi$ не соответствует. Посмотрим, как изменяется радиус при изменении φ от нуля до $+\infty$. В этом случае радиус r будет возрастать и изменяться от нуля до $+\infty$. Например, при $\varphi=\frac{\pi}{2}$ радиус r будет равен $\frac{a\pi}{2}$; при $\varphi=\pi$ он будет равен $a\pi$, т. е. в два раза больше; при $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ он будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной линией найденные точки, получим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь человека, ее открывшего и изучившего.

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками. По спирали Архимеда идет, например, звуковая дорожка на грампластинке; туго свернутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку — имеет форму спирали Архимеда.

3. *Золотая спираль,* с которой мы знакомились раньше, задается уравнением в полярных координатах $r=a^{\varphi}$, где a — некоторое фиксированное положительное число, φ — угол, измеряемый в радианах (рис. 210).

В отличие от спирали Архимеда, золотая спираль бесконечна в обе стороны, так как φ может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. При этом если угол φ увеличивается, то радиус r увеличивается при $a>1$ и уменьшается при $a<1$.

Одним из геометрических свойств золотой спирали является то, что каждый следующий ее виток подобен предыдущему. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в $a^{2\pi}$ раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему и коэффициент подобия равен $a^{2\pi}$. Используя это свойство для построения одного витка золотой спирали, все остальные витки можно будет получить подобием. Другим геометрическим свойством золотой спирали является то, что в любой ее точке угол между касательной к ней и радиусом-вектором сохраняет постоянное значение. Именно это свойство золотой спирали используется при изготовлении вращающихся ножей и других устройств, рассмотренных ранее. Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света. Однако если

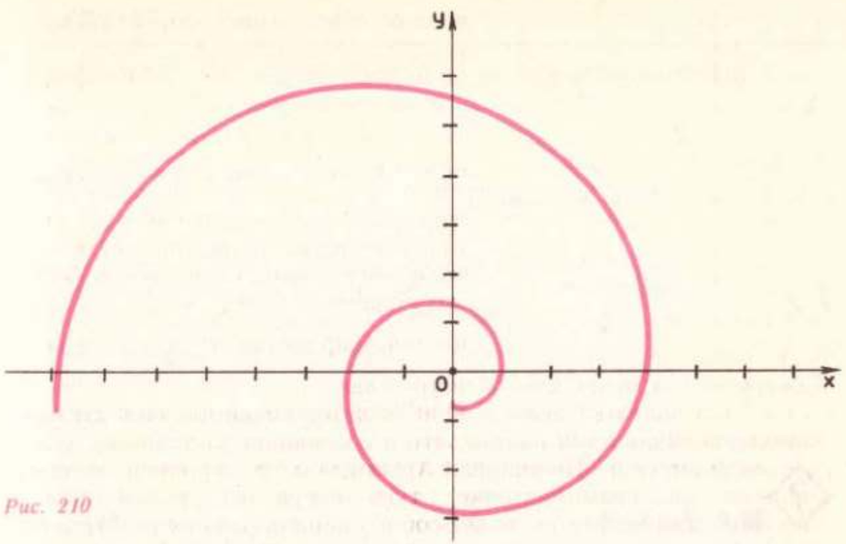


Рис. 210

вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полета и источником света, они двигаются по скручивающейся золотой спирали и попадают в пламя свечи.

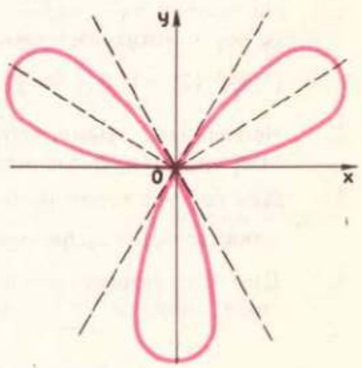


Рис. 211

4. *Трилистник* — кривая, задаваемая уравнением $r=\sin 3\varphi$ (рис. 211).

Для построения этой кривой сначала заметим, что поскольку радиус r должен быть неотрицателен, то должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi\geqslant 0$, решая которое находим область допустимых значений углов φ: $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $\frac{4\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{3}$. В силу периодичности функции $\sin 3\varphi$ (ее период равен $\frac{2\pi}{3}$) достаточно построить график для углов φ в промежутке $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}$, а в остальных двух промежутках использовать периодичность. Итак, пусть $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}$. Если угол φ изменяется от нуля до $\frac{\pi}{6}$, то $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до 1, и, следовательно,

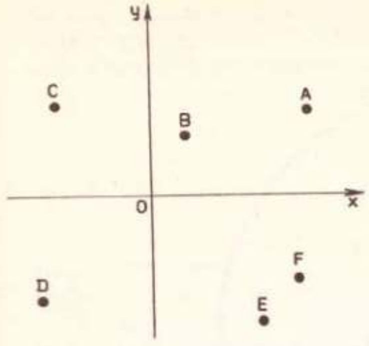


Рис. 212

радиус r изменяется от нуля до 1. Если угол изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$, то радиус изменяется от 1 до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от нуля до $\frac{\pi}{3}$ точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол φ изменяется в пределах от $\frac{2\pi}{3}$ до π и от $\frac{4\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

ЗАДАЧИ

1. **На плоскости с заданной на ней полярной осью изобразите точки с координатами:**
   $(1, 0)$, $(2, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(1, \frac{\pi}{4})$.
2. **Используя транспортир и линейку, найдите полярные координаты точек, изображенных на рисунке 212.**
3. **Для точки с заданными полярными координатами найдите ее декартовы координаты: а) $(1, \frac{\pi}{3})$; б) $(2, -\frac{\pi}{4})$.**
4. **Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты:**

   а) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; в) $(1, -\sqrt{3})$;

   б) $(-10, 0)$; г) $(-\sqrt{3}, 1)$.

5°. **Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?**

6. **Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r=-\varphi$.**
7. **Нарисуйте золотую спираль, заданную уравнением $r=a^{\varphi}$, для a, удовлетворяющего равенству $a^{\pi}=2$.**
8. **Нарисуйте пятилепестковую розу — кривую, задаваемую уравнением $r=\sin 5\varphi$.**
9. **Двухлепестковая роза задается уравнением $r=a\cdot\sin 2\varphi$. Найдите ее уравнение в декартовой системе координат.**

ЗАНЯТИЕ 46

Сферические координаты в пространстве

Рассмотрим прямоугольную систему координат и точку A в пространстве (рис. 213). Ортогональную проекцию точки A на плоскость Oxy обозначим A'. Длину вектора $\overrightarrow{OA}$ обозначим r. Угол наклона вектора $\overrightarrow{OA}$ к плоскости Oxy обозначим ψ, причем будем считать его изменяющимся от $-90°$ до $+90°$. Если точка A расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между вектором $\overrightarrow{OA'}$ и осью Ox обозначим φ. Тройка (r, ψ, φ) называется **сферическими координатами** точки A в пространстве.

Сферические координаты широко используются для определения положения тел в пространстве. Например, в навигации при определении места нахождения самолета, корабля и т. д., в астрономии при определении положения звезд и других небесных тел, в географии при определении положения объектов на поверхности Земли и т. д.

Декартовы координаты (x, y, z) точки A в пространстве можно выразить через ее сферические координаты по формулам

$$\begin{cases} x=r\cos\psi\cos\varphi, \\ y=r\cos\psi\sin\varphi, \\ z=r\sin\psi, \end{cases}$$

и, наоборот, если заданы декартовы координаты, то по ним можно найти сферические координаты по формулам

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \sin\psi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Рассмотрим поверхность Земли, которую будем считать сферой. Выберем начало координат в центре этой сферы. Ось Oz проведем через Северный полюс, и ось Ox выберем так, чтобы соответствующая плоскость Oxz проходила через обсерваторию английского города Гринвич.

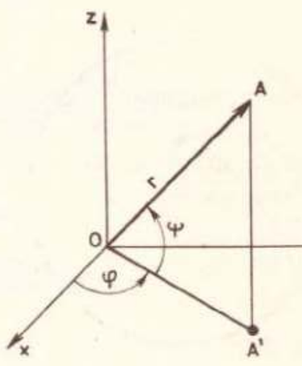


Рис. 213

Поскольку все точки A на сфере одинаково удалены от начала координат O, то положение точки A на сфере определяется двумя сферическими координатами (ψ, φ). При указании этих координат на поверхности Земли для положительных ψ добавляют слова «северной широты», а для отрицательных ψ берут абсолютную величину ψ и добавляют слова «южной широты». Аналогично для положительных φ от нуля до 180° добавляют слова «восточной долготы», а для отрицательных φ от нуля до —180° берут абсолютную величину φ и добавляют слова «западной долготы». Например, город Москва имеет следующие координаты: 55°45′ северной широты и 37°35′ восточной долготы.

Точки на поверхности Земли, имеющие одинаковый угол ψ, образуют окружность, которая называется параллелью. Точки, имеющие одинаковый угол φ, образуют полуокружность, называемую меридианом.

Рассмотрим вопрос о том, какой путь, соединяющий две точки на сфере, является кратчайшим. Если бы такой путь искался в пространстве, то им, очевидно, был бы отрезок, соединяющий эти точки. Однако отрезок не лежит на сфере и поэтому его нельзя взять в качестве искомого пути. Значит, нужно заменить этот отрезок таким путем на сфере, который по возможности меньше отличается от прямолинейного.

Пусть C — какая-нибудь точка на отрезке A_1A_2 (рис. 214). Ближайшей к ней точкой на сфере является точка A — пересечение прямой OC со сферой. Все такие прямые лежат в плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и O. Пересечением этой плоскости со сферой является окружность с центром в точке O. Такие окружности на сфере называются большими окружностями. Значит, искомым кратчайшим путем, соединяющим точки A_1 и A_2 на сфере, является дуга большой окружности, соединяющая точки A_1 и A_2. Такой путь называют **ортодромией**, что в переводе с греческого означает «прямой бег».

В частности, если точки A_1, A_2 расположены на противоположных меридианах, то кратчайшим путем на сфере, их соединяющим, будет дуга большой окружности, проходящая через Северный или Южный полюс, в зависимости от того, в каких

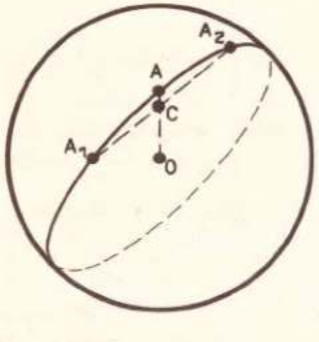


Рис. 214

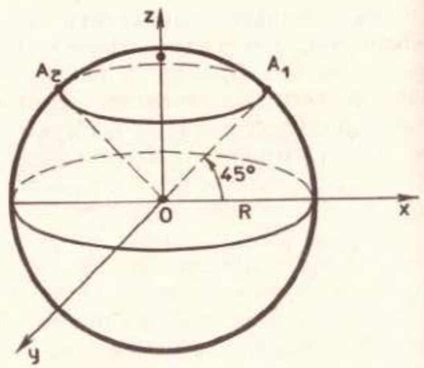


Рис. 215

полушариях — северном или южном лежат эти точки. Например, для точек $A_1(R,\ 45°,\ 0°)$, $A_2(R,\ 45°,\ 180°)$ угол A_1OA_2 равен 90°. Кратчайший путь, соединяющий эти точки, проходит через Северный полюс, и его длина равна $\frac{\pi R}{2}$. Если бы мы двигались по параллели, соединяющей эти точки, то длина пути составила бы половину длины окружности радиуса $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ и была бы равна $\frac{\pi R\sqrt{2}}{2}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше длины кратчайшего пути (рис. 215).

Хотя ортодромия и является кратчайшим путем на поверхности Земли, тем не менее самолеты, корабли и т. д. в основном двигаются по другим маршрутам. Это связано с тем, что ортодромия, отличная от дуги меридиана или экватора, образует с меридианами разные углы, а наиболее простым маршрутом движения является кривая, образующая равные углы с различными меридианами. Эта кривая называется **локсодромия**, что в переводе с греческого означает «косой бег». Движение по локсодромии называется также движением с постоянным курсом. Для того чтобы держать постоянный курс, используется компас, указывающий направление меридианов и направление движения. Двигаясь же по ортодромии, приходится постоянно менять курс, что возможно только с использованием ЭВМ.

Конечно, при движении с постоянным курсом путь удлиняется. Однако если начало и конец пути расположены сравнительно близко друг к другу, то такое удлинение незначительно. Оно начинает сказываться при значительном удалении друг от друга начала и конца пути. В этом случае весь путь можно разбить на меньшие участки, движение по которым осуществлять с постоянным курсом, а при переходе с одного участка на другой курс менять.

? ЗАДАЧИ

1°. **Приведите примеры разных сферических координат, определяющих одну и ту же точку пространства.**

2. **Найдите декартовы координаты точки в пространстве, заданной сферическими координатами: а) (1, 45°, 120°); б) (2, —30°, —90°); в) (1, 90°, 60°).**

3. **Найдите сферические координаты точки в пространстве, заданной декартовыми координатами: а) (1, 1, 1); б) (—1, 0, 1); в) (0, 0, 2).**

4. **Укажите на глобусе точку, имеющую координаты: а) 30° южной широты и 45° восточной долготы; б) 90° северной широты и 35° западной долготы.**

5. **Укажите координаты: а) Санкт-Петербурга; б) Вашингтона; в) Токио.**

6. **Найдите длину кратчайшего пути между Москвой и Вашингтоном.**

7. **Проведите на глобусе локсодромию, образующую с меридианами углы: а) 30°; б) 45°; в) 60°.**
Покажите, что при продолжении полученной локсодромии в обе стороны, она начинается и заканчивается в полюсах.

ЗАНЯТИЕ 47

Обобщающее повторение

1. Что называется объемом пространственной фигуры?
2. Сформулируйте свойства объема.
3. В чем заключается принцип Кавальери?
4. Чему равен объем цилиндра?
5. Как найти объем треугольной пирамиды?
6. Чему равен объем конуса?
7. Как найти и чему равен объем шара?
8. Чему равна площадь поверхности прямого кругового цилиндра?
9. Чему равна площадь поверхности прямого кругового конуса?
10. Как найти и чему равна площадь поверхности шара?
11. Что называется прямоугольной системой координат в пространстве?
12. Как определяются координаты точки в пространстве?
13. Напишите формулу расстояния между точками в пространстве с заданными координатами.
14. Сформулируйте определение вектора в пространстве. Что называется длиной вектора? Какие векторы называются равными?
15. Как определяется сложение векторов и умножение вектора на число?
16. Сформулируйте свойства сложения векторов и умножения вектора на число.
17. Как определяются координаты вектора в пространстве?

18. Какими формулами выражаются координаты суммы векторов и произведение вектора на число?
19. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов.
20. Что называется скалярным квадратом вектора?
21. Каков физический смысл скалярного произведения?
22. Как выражается скалярное произведение векторов через их координаты?
23. Как определить угол между векторами с заданными координатами?
24. Напишите уравнение плоскости в пространстве.
25. Что такое вектор нормали и как он определяется по уравнению плоскости?
26. При каких значениях коэффициентов в уравнениях плоскостей эти плоскости будут: а) параллельны; б) совпадать; в) перпендикулярны?
27. Как по уравнениям плоскостей можно определить угол между ними?
28. Напишите уравнение сферы.
29. С помощью какого неравенства задается шар?
30. Как с помощью неравенств задается многогранник?
31. С помощью каких неравенств задается прямой круговой цилиндр?
32. С помощью какого уравнения задается параболоид вращения?
33. Что такое полярные координаты на плоскости?
34. Какова взаимосвязь между декартовыми и полярными координатами на плоскости?
35. Что такое спираль Архимеда?
36. Каким уравнением задается золотая спираль?
37. Что такое сферические координаты в пространстве?
38. Какова взаимосвязь между декартовыми и сферическими координатами в пространстве?
39. Какая кривая на сфере является кратчайшим путем между двумя точками? Что такое ортодромия и локсодромия?

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ