И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

УРОКИ ГЕОМЕТРИИ

7 КЛАСС

2013

Пособие содержит подробные конспекты уроков по геометрии для 7-ых классов общеобразовательных учреждений. Оно соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту второго поколения, Примерной программе основного общего образования. Помимо теоретического материала в пособие включены математические диктанты, индивидуальные задания по карточкам, устные упражнения, самостоятельные и контрольные работы, материал для проведения занимательных моментов уроков.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии содержится учебный материал для проведения уроков по геометрии в 7 классе. Оно рассчитано на учебник геометрии Смирновой И.М., Смирнова В.А. для 7-9 классов общеобразовательных учреждений (М.: Мнемозина). Вместе с тем, оно может быть использовано при обучении по любому другому учебнику геометрии, входящему в Федеральный перечень учебной литературы.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) *в направлении личностного развития*:

– формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

– развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

– формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

– воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

– формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

– развитие интереса к математике;

– развитие математических способностей;

2) *в метапредметном направлении*:

– развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

– формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) *в предметном направлении*:

– овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

– создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

Содержание пособия разбито на отдельные параграфы. В первом предлагается три варианта программы изучения учебного материала: без учета дополнительного материала, отмеченного в учебнике звездочкой (2 часа в неделю); с учетом дополнительного материала (2 часа в неделю); для классов с углубленным изучением математики (3 часа в неделю).

Второй параграф посвящен тематическому планированию, которое в соответствии с программой также представлено в трёх вариантах. Здесь указано содержание каждой темы и ее значение для всего курса геометрии.

Далее идут подробные конспекты уроков по основным темам курса геометрии 7-го класса (без дополнительного материала). В ряде случаев дается избыточный объем содержания. Это делается специально, чтобы учитель мог по собственному усмотрению, вкусу выбрать нужный материал. В пособие, помимо вопросов теории, включены математические диктанты, вопросы, карточки с индивидуальными заданиями, задачи для самостоятельной работы, устные упражнения, контрольные работы, приводятся решения и ответы к задачам. Конспектам посвящен третий параграф пособия.

Дополнительный учебный материал предназначен для воспитания и развития учащихся, для индивидуализации и дифференциации обучения, организации проектов, написания рефератов, формирования исследовательской деятельности учащихся.

В четвертом параграфе пособия даются конспекты уроков по дополнительным пунктам учебника.

В пособии предлагается материал для проведения индивидуальной работы со школьниками, которые живо интересуются современной наукой и научно-популярным материалом, а также для проведения занимательных моментов уроков (это соответственно параграфы пять и семь).

В заключении пособия приведен авторский список литературы, который использовался при разработке данных методических рекомендаций.

§ 1. ПРОГРАММА ИЗУЧЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

7 класс

Вариант I программы – 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант II программы составлен с учётом дополнительного материала, 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант III программы составлен для классов с углублённым изучением математики, 3 часа в неделю, всего 102 часа за год.

Параграф учебника	Содержание	Количество часов		
		I	II	III
	Вводная беседа	1	1	2
1	Основные геометрические фигуры	2	2	3
2	Отрезок и луч	3	2	3
3	Измерение длин отрезков	2	2	3
4	Полуплоскость и угол	4	2	4
5	Измерение величин углов	4	3	4
6	Ломаные и многоугольники	3	3	3
	Контрольная работа № 1	1	1	2
7	Треугольники	2	2	3
8	Первый признак равенства треугольников	3	2	3
9	Второй признак равенства треугольников	3	2	3
10	Равнобедренные треугольники	3	2	3
11	Третий признак равенства треугольников	3	2	3
	Контрольная работа № 2	1	1	2
12	Соотношения между сторонами и углами треугольника	3	2	3
13	Соотношения между сторонами треугольника	3	2	3
14	Прямоугольные треугольники	2	2	3
15	Перпендикуляр и наклонная	2	2	3
	Контрольная работа № 3	1	1	2
16	Окружность и круг	2	2	3
17	Взаимное расположение прямой и окружности	3	3	3
18	Взаимное расположение двух окружностей	3	3	3
	Контрольная работа № 4	1	1	2
19	Геометрические места точек	3	3	4
20	Задачи на построение	3	3	4
	Контрольная работа № 5	1	1	2
21*	Парабола	-	2	3

22*	Эллипс	-	2	3
23*	Гипербола	-	2	3
24*	Графы	-	2	3
25*	Теорема Эйлера	-	2	3
26*	Проблема четырёх красок	-	2	3
	Контрольная работа № 6	-	1	2
	Итоговое повторение	6	3	6

§ 2. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
7 класс
Вариант I (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
1. Начала геометрии (20 ч)	
История возникновения и развития геометрии. Основные геометрические фигуры и их свойства. Взаимное расположение точек на прямой. Отрезок и луч. Равенство отрезков. Операции сложения и вычитания отрезков, умножения и деления отрезка на натуральное число. Измерение длины отрезка. Исторические сведения об измерении длин. Полуплоскость и угол. Виды углов: прямой угол, острые и тупые углы, развёрнутый угол, смежные и вертикальные углы. Равенство углов. Биссектриса угла. Операции сложения и вычитания углов, умножения и деления угла на натуральное число. Теорема о равенстве вертикальных углов. Перпендикулярные прямые. Измерение величин углов. Исторические сведения об измерении углов. Ломаные. Виды ломаных. Длина ломаной. Многоугольники. Элементы многоугольника. Периметр многоугольника. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. Правильные многоугольники.	Приводить исторические сведения о возникновении и развитии геометрии. Изображать точки и прямые на плоскости. Формулировать определения и иллюстрировать понятия: отрезка, равенства отрезков, длины отрезка. Производить операции сложения и вычитания отрезков, умножения и деления отрезка на натуральное число. Изверять длину отрезка с помощью линейки. Решать задачи на нахождение длины отрезка. Формулировать определения и иллюстрировать понятия: луча, угла, равенства углов. Различать виды углов. Производить операции сложения и вычитания углов, умножения и деления угла на натуральное число. Измерять величину угла с помощью транспортира. Решать задачи на нахождение величины угла. Формулировать определения и иллюстрировать понятия ломаной и многоугольника. Распознавать и приводить примеры ломаных и многоугольников. Решать задачи на

	нахождение длины ломаной и периметра многоугольника.
2. Треугольники (26 ч)	
Треугольники. Виды треугольников: остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равнобедренные, равносторонние. Медиана, биссектриса и высота треугольника. Равенство треугольников. Первый и второй признаки равенства треугольников. Равнобедренные треугольники и их свойства. Признак равнобедренного треугольника. Третий признак равенства треугольников. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Соотношения между сторонами треугольника. Прямоугольные треугольники. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Перпендикуляр и наклонная и их свойства.	Формулировать определения: треугольника, равенства треугольников, медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Различать виды треугольников. Формулировать признаки равенства треугольников, применять их при решении задач. Устанавливать соотношения между сторонами и углами треугольника, применять их при решении задач. Формулировать определения перпендикуляра и наклонной. Использовать соотношение между ними при решении задач.
3. Окружность и геометрические места точек (16 ч)	
Понятия окружности и круга. Элементы окружности и круга: центр, радиус, диаметр, хорда. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и секущая к окружности. Взаимное расположение двух окружностей. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры геометрических мест точек на плоскости. Построения с помощью циркуля и линейки. Примеры задач на построение.	Формулировать определения и иллюстрировать понятия окружности, круга и их элементов. Изображать, распознавать и описывать взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей. Приводить примеры геометрических мест точек. Решать задачи на нахождение геометрических мест точек. Решать задачи на построение с с помощью циркуля и линейки.
Итоговое повторение (6 ч)	

Вариант II (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
1. Начала геометрии (16 ч)	
История возникновения и развития геометрии. Основные геометрические фигуры и их свойства. Взаимное расположение точек на прямой. Отрезок и луч. Равенство отрезков. Операции сложения и вычитания отрезков, умножения и деления отрезка на натуральное число. Измерение длины отрезка. Исторические сведения об измерении длин. Полуплоскость и угол. Виды углов: прямой угол, острые и тупые углы, развернутый угол, смежные и вертикальные углы. Равенство углов. Биссектриса угла. Операции сложения и вычитания углов, умножения и деления угла на натуральное число. Теорема о равенстве вертикальных углов. Перпендикулярные прямые. Измерение величин углов. Исторические сведения об измерении углов. Ломаные. Виды ломаных. Длина ломаной. Многоугольники. Элементы многоугольника. Периметр многоугольника. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. Правильные многоугольники.	Приводить исторические сведения о возникновении и развитии геометрии. Изображать точки и прямые на плоскости. Формулировать определения и иллюстрировать понятия: отрезка, равенства отрезков, длины отрезка. Производить операции сложения и вычитания отрезков, умножения и деления отрезка на натуральное число. Изверять длину отрезка с помощью линейки. Решать задачи на нахождение длины отрезка. Формулировать определения и иллюстрировать понятия: луча, угла, равенства углов. Различать виды углов. Производить операции сложения и вычитания углов, умножения и деления угла на натуральное число. Измерять величину угла с помощью транспортира. Решать задачи на нахождение величины угла. Формулировать определения и иллюстрировать понятия ломаной и многоугольника. Распознавать и приводить примеры ломаных и многоугольников. Решать задачи на нахождение длины ломаной и периметра многоугольника.

2. Треугольники (20 ч)	
Треугольники. Виды треугольников: остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равнобедренные, равносторонние. Медиана, биссектриса и высота треугольника. Равенство треугольников. Первый и второй признаки равенства треугольников. Равнобедренные треугольники и их свойства. Признак равнобедренного треугольника. Третий признак равенства треугольников. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Соотношения между сторонами треугольника. Прямоугольные треугольники. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Перпендикуляр и наклонная и их свойства.	Формулировать определения: треугольника, равенства треугольников, медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Различать виды треугольников. Формулировать признаки равенства треугольников, применять их при решении задач. Устанавливать соотношения между сторонами и углами треугольника, применять их при решении задач. Формулировать определения перпендикуляра и наклонной. Использовать соотношение между ними при решении задач.
3. Окружность и геометрические места точек (16 ч)	
Понятия окружности и круга. Элементы окружности и круга: центр, радиус, диаметр, хорда. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и секущая к окружности. Взаимное расположение двух окружностей. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры геометрических мест точек на плоскости. Построения с помощью циркуля и линейки. Примеры задач на построение.	Формулировать определения и иллюстрировать понятия окружности, круга и их элементов. Изображать, распознавать и описывать взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей. Приводить примеры геометрических мест точек. Решать задачи на нахождение геометрических мест точек. Решать задачи на построение с помощью циркуля и линейки.
4*. Кривые и графы (13 ч)	
Парабола и её свойства. Касательная к параболе.	Формулировать определения параболы, эллипса и гиперболы.

Построение параболы и касательных к ней. Эллипс и его свойства. Касательная к эллипсу. Построение эллипса и касательных к нему. Гипербола и её свойства. Касательная к гиперболе. Построение гиперболы и касательных к ней. Графы и их элементы: вершины, рёбра. Задачи, приводящие к понятию графа. Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах. Уникурсальные графы и их свойства. Теорема Эйлера о числе вершин, рёбер и граней плоского графа. Задача о трёх домиках и трёх колодцах. Проблема четырёх красок.	Решать задачи на построение касательных и нахождение элементов параболы, эллипса и гиперболы. Выполнять проекты на построение кривых, как геометрических мест точек. Формулировать определение и иллюстрировать понятие графа и его элементов. Решать задачи на установление уникурсальности графов. Формулировать теорему Эйлера о числе вершин, рёбер и граней плоского графа и применять её при решении задач. Решать задачи на раскрашивание карт. Приводить исторические сведения о Л. Эйлере. Выполнять проекты по темам, связанным с графами и их применением.
Итоговое повторение (3 ч)	

Вариант III (3 ч в неделю, всего 102 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
1. Начала геометрии (24 ч)	
История возникновения и развития геометрии. Основные геометрические фигуры и их свойства. Взаимное расположение точек на прямой. Отрезок и луч. Равенство отрезков. Операции сложения и вычитания отрезков, умножения и деления отрезка на натуральное число. Измерение длины отрезка. Исторические сведения об измерении длин. Полуплоскость и угол. Виды углов: прямой угол, острые и тупые углы, развернутый угол, смежные и вертикальные углы. Равенство углов. Биссектриса угла. Операции сложения и вычитания углов, умножения и деления угла на натуральное число. Теорема о равенстве вертикальных углов. Перпендикулярные прямые. Измерение величин углов. Исторические сведения об измерении углов. Ломаные. Виды ломаных. Длина ломаной. Многоугольники. Элементы многоугольника. Периметр многоугольника. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. Правильные многоугольники.	Приводить исторические сведения о возникновении и развитии геометрии. Формулировать аксиомы о взаимном расположении точек и прямых на плоскости. Формулировать определения и иллюстрировать понятия: отрезка, равенства отрезков, длины отрезка. Производить операции сложения и вычитания отрезков, умножения и деления отрезка на натуральное число. Изверять длину отрезка с помощью линейки. Решать задачи на нахождение длины отрезка. Формулировать определения и иллюстрировать понятия: луча, угла, равенства углов. Различать виды углов. Производить операции сложения и вычитания углов, умножения и деления угла на натуральное число. Измерять величину угла с помощью транспортира. Решать задачи на нахождение величин углов. Формулировать определения и иллюстрировать понятия ломаной и многоугольника. Распознавать и приводить примеры ломаных и многоугольников. Решать задачи на

	нахождение длины ломаной и периметра многоугольника. Решать задачи комбинаторного характера на взаимное расположение точек и прямых на плоскости. Решать задачи с практическим содержанием.
2. Треугольники (31 ч)	
Треугольники. Виды треугольников: остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равнобедренные, равносторонние. Медиана, биссектриса и высота треугольника. Равенство треугольников. Первый и второй признаки равенства треугольников. Равнобедренные треугольники и их свойства. Признак равнобедренного треугольника. Третий признак равенства треугольников. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Соотношения между сторонами треугольника. Прямоугольные треугольники. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Перпендикуляр и наклонная и их свойства.	Формулировать определения: треугольника, равенства треугольников, медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Различать виды треугольников. Формулировать признаки равенства треугольников, применять их при решении задач. Доказывать соотношения между сторонами и углами треугольника, применять их при решении задач. Формулировать определения перпендикуляра и наклонной. Использовать соотношение между ними при решении задач. Решать задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. Решать задачи с практическим содержанием.
3. Окружность и геометрические места точек (21 ч)	
Понятия окружности и круга. Элементы окружности и круга: центр, радиус, диаметр, хорда. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и секущая к окружности. Взаимное расположение двух окружностей. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры геометрических	Формулировать определения и иллюстрировать понятия окружности, круга и их элементов. Изображать, распознавать и описывать взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей. Приводить примеры геометрических мест точек.

мест точек на плоскости. Построения с помощью циркуля и линейки. Примеры задач на построение.	Решать задачи на нахождение геометрических мест точек. Решать задачи на построение с с помощью циркуля и линейки.
4*. Кривые и графы (20 ч)	
Парабола и её свойства. Касательная к параболе. Построение параболы и касательных к ней. Эллипс и его свойства. Касательная к эллипсу. Построение эллипса и касательных к нему. Гипербола и её свойства. Касательная к гиперболе. Построение гиперболы и касательных к ней. Графы и их элементы: вершины, рёбра. Задачи, приводящие к понятию графа. Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах. Уникурсальные графы и их свойства. Теорема Эйлера о числе вершин, рёбер и граней плоского графа. Задача о трёх домиках и трёх колодцах. Проблема четырёх красок.	Формулировать определения параболы, эллипса и гиперболы. Решать задачи на построение касательных и нахождение элементов параболы, эллипса и гиперболы. Выполнять проекты на построение кривых, как геометрических мест точек. Формулировать определение и иллюстрировать понятие графа и его элементов. Решать задачи на установление уникурсальности графов. Формулировать теорему Эйлера о числе вершин, рёбер и граней плоского графа и применять её при решении задач. Решать задачи на раскрашивание карт. Приводить исторические сведения о Л. Эйлере. Выполнять проекты по темам, связанным с графами и их применением.
Итоговое повторение (6 ч)	

§ 3. КОСПЕКТЫ УРОКОВ ДЛЯ 7-го КЛАССА

Вводная беседа
Урок 1

Целью этого урока является знакомство учащихся с историей возникновения и развития геометрии, ее основными понятиями. Учащиеся должны знать, какие разделы геометрии называются планиметрией и стереометрией, откуда произошли эти термины, зачем нужно изучать геометрию.

I. Представление термина «геометрия»

Геометрия в переводе с греческого языка означает «землемерие» («гео» – земля, «метрео» – измеряю). Действительно, она возникла в глубокой древности из практических потребностей людей.

II. Историческая справка

В глубокой древности, за несколько тысячелетий до нашей эры в Египте ежегодно при разливе Нила затоплялись плодородные земли. После спада воды необходимо было восстанавливать границы участков, их форму и размеры. Таким образом, для выполнения этих работ людям необходимо было проводить прямые, измерять расстояния, вычислять площади.

Кроме этого, поскольку развивалась торговля, ремесла, кораблевождение, нужно было уметь вычислять емкости сосудов, объемы различных тел, нужны были астрономические сведения и т.п.

До наших дней сохранилось одно из чудес света – древние египетские пирамиды. Одна из самых известных и больших – пирамида Хеопса (XXVIII век до н. э.). Ее высота достигает 146,5 м, а в основании – квадрат, сторона которого равна 233 м. Это сооружение, сотворенное человеком, считалось самым высоким на Земле вплоть до XIX века.

Люди измеряли, вычисляли, строили и при этом размышляли над отдельными возникающими геометрическими проблемами. Так постепенно, отвлекаясь от реальных объектов, учились мыслить абстрактно, создавать различные образы в своем воображении.

Геометрия как теоретическая наука возникла в Древней Греции. Это период приблизительно с VIII века до нашей эры по III век нашей эры. Именно поэтому многие геометрические термины имеют греческое происхождение.

Начиная с VII века до н.э., в Древней Греции создаются так называемые философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Все большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI-V вв. до н.э.), названная так в честь своего основателя Пифагора. Учащимся уже известно это имя, в курсе планиметрии они изучали знаменитую теорему Пифагора (которую уместно здесь вспомнить). Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма (рис. 1).

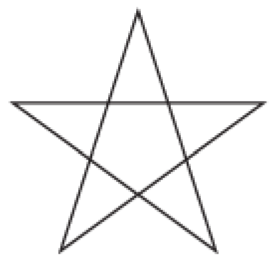


Рис. 1

В переводе на язык математики пентаграмма - правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник, который можно получить из выпуклого правильного пятиугольника путем проведения его диагоналей.

Вопрос: Как еще можно получить пентаграмму из правильного пятиугольника?

Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов. Вот, что мы находим у Гете в "Фаусте":

Мефистофель: Нет, трудновато выйти мне теперь,
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

Фауст: Не пентаграмма ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Мефистофель: Изволили ее вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей, - и я свободно мог вскочить.

Для своих философских теорий пифагорейцы использовали правильные многогранники, формы которых придавали элементам первооснов бытия, а именно: огонь – тетраэдр; земля – гексаэдр (куб); воздух – октаэдр; вода – икосаэдр. Демонстрируем модели всех правильных многогранников (рис. 2, а-г). Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение, в них зашифровано число граней. ("эдра" – грань.) Видя модель каждого представленного многогранника, учащиеся сами смогут сделать перевод: "тетра" - четыре; "гекса" - шесть; "окта" - восемь; "икоса" - двадцать.

Обращаем внимание на пятый правильный многогранник - додекаэдр (рис. 2, д). "Додека" - двенадцать. Форму додекаэдра, по мнению древних, имела вся Вселенная.

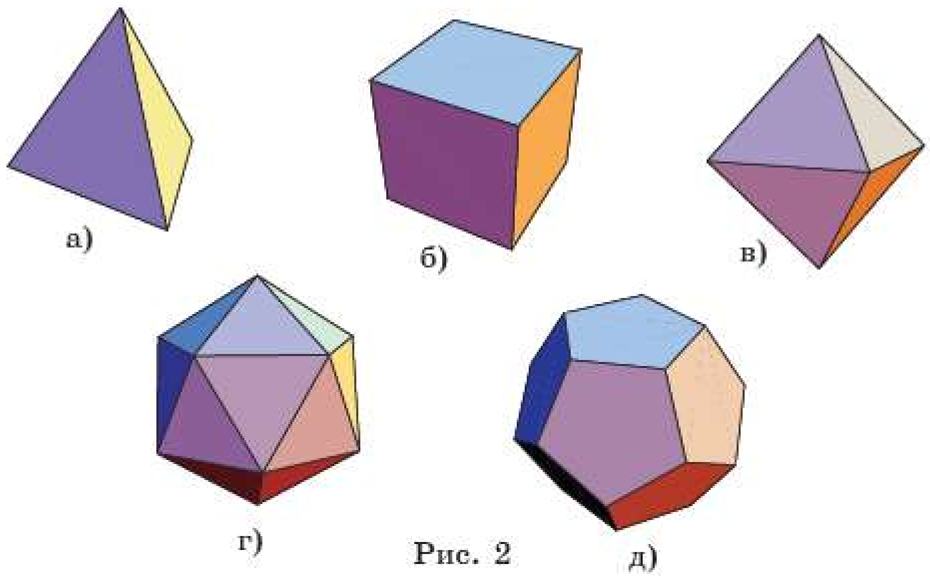


Рис. 2

Более поздняя философская школа – Александрийская – интересна тем, что дала миру знаменитого ученого Евклида, который жил около 300 г. до н.э. К сожалению, о жизни его мало известно. В одном из своих сочинений математик Папп (III в. н. э.) изображает его как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм. Насколько серьезно и строго он относился к изучению математики, можно судить по следующему известному рассказу: “Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его "Начала". Евклид на это ответил: "В геометрии нет царского пути".

Именно "Начала" прославили Евклида. В них впервые было представлено стройное аксиоматическое строение геометрии. На протяжении около двух тысячелетий этот труд оставался основой изучения систематического курса геометрии.

В последние столетия в геометрии появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволившие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Возникли и развивались новые направления геометрических исследований: геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология и др. Геометрические методы широко используются в других науках: теории относительности, квантовой механике, кристаллографии и др.

III. Зачем нужно изучать геометрию?

Геометрия – наука, которая изучает формы, размеры, взаимное расположение объектов.

Геометрия состоит из двух разделов: планиметрии и стереометрии.

Планиметрия – средневековый термин, первая часть которого – "плани" – происходит от латинского слова "плоскость", а вторая – "метрия" – от греческого "мерить", т.е. буквально планиметрия означает «плоскомерие». В планиметрии изучаются плоские фигуры, т. е. расположенные в одной плоскости.

Демонстрируем несколько моделей плоских фигур, например, треугольник, четырехугольник, шестиугольник, невыпуклый многоугольник, круг и др.

Термин ***стереометрия*** можно перевести как теломерие (от греч. стерео – тело). В стереометрии изучаются неплоские фигуры, то есть не лежащие в одной плоскости. Чаще их называют пространственными.

Демонстрируем модели неплоских фигур, например, пирамиду, призму, звездчатый многогранник, цилиндр, конус, шар и др.

Геометрия как ни один другой предмет нужна каждому человеку, поскольку именно она дает необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения различных фигур, что позволяет человеку правильно ориентироваться в окружающем мире. С другой стороны, геометрия дает метод научного познания, способствует развитию мышления, формирует навыки дедуктивных рассуждений. Помимо этого, изучение геометрии вырабатывает необходимые практические навыки в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, величин углов, площадей, объемов и др.).

Кроме сказанного, геометрия обладает интересным содержанием, имеет богатую историю, яркие приложения, она занимательна, изучает красивые объекты. Все это постепенно будет раскрываться и представляться учащимся по мере изучения ее курса.

IV. Вопросы

1) Что изучает геометрия?
2) Из каких разделов состоит геометрия?
3) Как переводятся термины: геометрия, планиметрия, стереометрия?
4) Какие фигуры являются плоскими, неплоскими? Приведите примеры.
5) Как возникла геометрия?
6) Какие размеры имела пирамида Хеопса?
7) Какой исторический период называется Древней Грецией?
8) Назовите известных ученых Древней Греции.

9) Охарактеризуйте многоугольник, который называется пентаграммой.

10) Какие разделы математики, других наук связаны с геометрией?

V. Задание на дом

1. Знать материал вводной беседы (введение учебника).

2. Привести несколько примеров плоских и неплоских фигур.

3. Построить пентаграмму с помощью правильного пятиугольника (рассмотреть два способа).

Для выполнения этого задания даются картонные трафареты правильного пятиугольника.

Решение. 1-ый способ. Продолжить стороны правильного пятиугольника до взаимного пересечения.

2-ой способ. Провести все диагонали правильного пятиугольника.

п. 1. Основные геометрические фигуры (уроки 2, 3)

Цель – познакомить учащихся с основными геометрическими фигурами: точкой, прямой, плоскостью. Объяснить школьникам, почему именно они взяты в качестве основных, моделями каких реальных объектов окружающего нас мира они являются. Семиклассники должны научиться изображать простейшие геометрические ситуации, выполнять соответствующие схематические чертежи, делать краткие записи с помощью математической символики. На этих уроках вводятся понятия аксиомы, теоремы, доказательства. Формируются понятия пересекающихся и параллельных прямых на плоскости.

Урок 2

I. Математический диктант

Как известно, математические диктанты являются одной из форм письменной работы. Они весьма продуктивны, активизируют деятельность учащихся, индивидуализируют ее, развивают слуховую память, внимание. Это хорошее мобилизирующее начало урока. В методику проведения математического диктанта (назовем МД) входят следующие вопросы:

1) Цель проведения МД на данном уроке.

2) Содержание МД.

3) Место МД на уроке, его продолжительность.

4) Перечень знаний, умений и навыков учащихся, необходимых для выполнения МД.

5) Способ проведения.

6) Способ проверки.

7) Оценка работы учащихся.

Математический диктант имеет свои специфические особенности. Прежде всего задания воспринимаются учащимися на слух, поэтому они должны воспроизводиться четко, громко. Существует практика записи содержания диктантов по вариантам на два голоса (мужского и женского). Включаемые в диктант задания должны быть ясными и краткими, ребята пишут только ответ (как правило, продолжают начатую фразу). Время проведения диктанта не должно превышать десяти минут. Удобно математический диктант проводить на отдельных листочках с копировальной бумагой. В этом случае ученики основной вариант сдают учителю, а по копиям проверяют свою работу сразу после его окончания. (Ответы проецируются на доску с помощью кодоскопа или проектора.) Нужно четко договориться с учащимися, как будет оцениваться математический диктант.

Вариант 1

1. Термин «геометрия» переводится ...
2. Практическая геометрия возникла …
3. Пифагорейская философская школа существовала …
4. Планиметрия изучает …
5. Назовите неплоскую фигуру. Она неплоская, потому что …

Вариант 2

1. Геометрия состоит из следующих основных разделов …
2. Теоретическая геометрия возникла …
3. Первая книга по геометрии называется … . Ее автор …
4. Стереометрия изучает …
5. Назовите плоскую фигуру. Она плоская, потому что …

II. Проверка математического диктанта

После окончания математического диктанта учащиеся сдают первые экземпляры работы, а копии оставляют себе для проверки, которую организуем с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Объяснение нового материала можно построить в виде беседы с учащимися, предложив им следующие вопросы:

- Какие фигуры являются самыми простыми?

- Что идеализируют точки, прямые, плоскости из окружающей нас действительности?

После обсуждения ответов на вопросы делаем вывод, что основными понятиями геометрии являются точка, прямая и плоскость, которые идеализируют объекты реального пространства.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Древнегреческий ученый Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге "Начала" определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т.п.

- Как изобразить в тетради или на доске точку, прямую, плоскость?

Точки обозначаются заглавными латинскими буквами (рис. 3, а), например, точки A, B, C; прямые – одной прописной латинской буквой или двумя заглавными латинскими буквами (рис. 3, б), например, прямые a, b, c, AB, CD, EF. Плоскости удобнее изображать фигурой, показанной на рисунке

3, в. Плоскости обозначаются греческими буквами, например, плоскости α, β, γ.

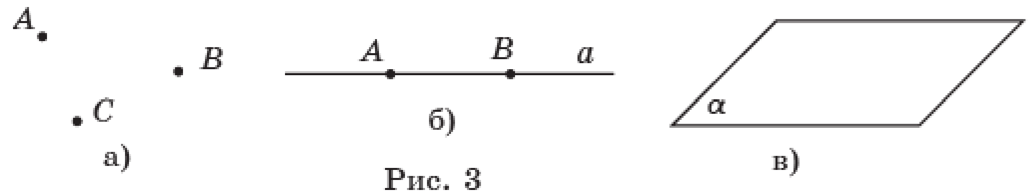


Рис. 3

Замечание. Хорошо, если в классе будут специально приготовлены и вывешены латинский и греческий алфавиты.

С учащимися удобно начать заполнять таблицу 1 – "Математическая символика". Поскольку эта таблица носит динамический характер, т. е. заполняется не сразу, а по мере изучения курса, лучше поместить ее в конце рабочей тетради или в отдельной специальной тетради.

Таблица 1

Запись	Чтение
A; B; C …	Точка A; точка B; точка C…
a; b; c … AB; CD …	Прямая a; прямая b; прямая c… Прямая AB, CD …
α; β; γ …	Плоскость α; плоскость β; плоскость γ; …
………………..	………………………………

Для прямой, проходящей через данные точки, можно ввести специальное обозначение, а именно, (AB), (CD), (EF).

Основные геометрические понятия не определяются, но перечисляются их основные свойства, которые называются аксиомами. ***Аксиома*** - красивое греческое слово, которое в переводе означает "утверждение, достойное признания", т. е. бесспорное, очевидное, не нуждающееся в доказательстве.

Древние ученые считали, что аксиомы заложены в разуме человека с самого рождения, они не могут даже мыслиться невыполнимыми.

Аксиомы можно считать первоначальными правилами геометрии, как в любой игре (например, в шахматах, шашках).

Аксиомы будем вводить не сразу, а постепенно, по мере надобности.

Методика введения аксиом может включать в себя следующие этапы:

1) Разъяснение учителем содержания аксиомы, его иллюстрация.

2) Формулировка аксиомы.

3) Выполнение схематического чертежа.

4) Краткая запись с помощью математической символики.

Первая аксиома относится к понятию ***принадлежности***.

Обсуждаем с учащимися вопрос о том, как точки и прямые могут располагаться друг относительно друга. Предлагаем следующие упражнения.

1) Изобразим прямую a и на ней отметим точку A (рис. 4).

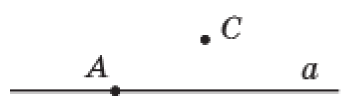


Рис. 4

Эту геометрическую ситуацию можно охарактеризовать следующим образом: «Точка A принадлежит прямой a». На этом же рисунке изобразим точку C, которая не принадлежит прямой a.

То, что точка A принадлежит прямой a, обозначается $A \in a$; то, что точка C не принадлежит прямой a, обозначается $C \notin a$.

Эти обозначения заносим в таблицу 1.

Таблица 1 (продолжение)

Запись	Чтение
$A \in a$	Точка A принадлежит прямой a
$C \notin a$	Точка C не принадлежит прямой a
……………	………………………………………

2) Возьмем точку *A* и проведем через нее прямую *a*. Сколько прямых можно провести через одну точку?

3) Теперь возьмем две точки *A* и *B*. Можно ли через них провести прямую? Если можно, то сколько?

После выполнения упражнений формулируем аксиому 1 (A_1).

Через любые две точки проходит единственная прямая.

Обращаем внимание учащихся на то, что аксиома 1 состоит из двух частей. В первой утверждается, что прямая существует, во второй – что такая прямая единственная.

IV. Закрепление нового материала

1. Изобразите точку *M*, принадлежащую прямой *a*, и точки *E*, *F*, ей не принадлежащие. Сделайте соответствующие записи.

2. По рисунку 5 запишите точки, принадлежащие и не принадлежащие прямым *a* и *b*.

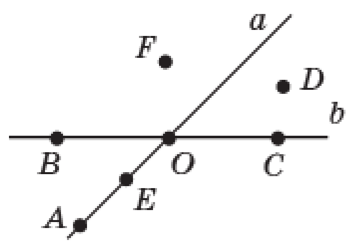
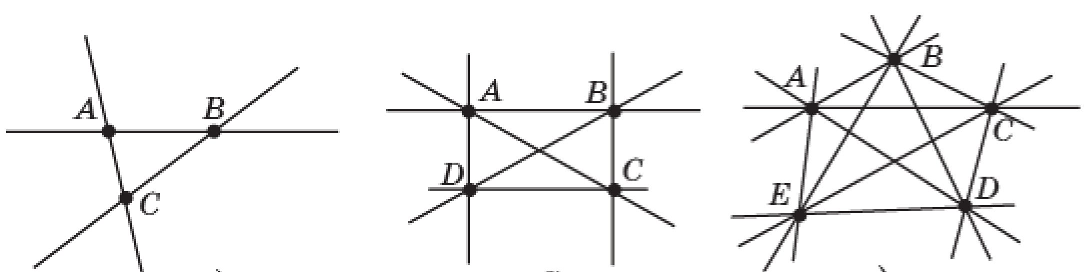


Рис. 5

3. Сколько прямых можно провести через различные пары из: а) трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Решение. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что: а) через различные пары из трех точек проходит три прямые (рис. 6, а); через различные пары из черырех точек проходит шесть прямых (рис. 6, б); через различные пары из пяти точек проходит десять прямых (рис. 6, в).



а) б) в)

Рис. 6

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 1 учебника).

2. Решить задачи.

1) Проведите прямую b и отметьте точки A, B, C, ей принадлежащие и точки E, F, G, ей не принадлежащие. Сделайте соответствующие записи.

2) Через две данные точки проведите две линии. Что можно о них сказать? Будут ли они обе прямыми?

Ответ. Нет, по аксиоме A_1.

3) Изобразите три точки, принадлежащие одной прямой и четвертую точку, не принадлежащую этой прямой. Сколько всего прямых проходит через различные пары из этих точек?

Ответ. Четыре прямые.

4)* Сколько прямых можно провести через различные пары из n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Замечание. Задания, помеченные звездочкой (*), не являются обязательными.

Решение. Обозначим точки $A_1, \ldots, A_n$. Рассмотрим точку A_1 и найдем количество прямых, проходящих через нее и какую-нибудь из оставшихся точек. Так как оставшихся точек $n - 1$, то и количество таких прямых будет $n - 1$. Аналогично, через точки, $A_2, \ldots, A_n$ проходит $n - 1$ прямая. Поскольку всего точек n, то количество таким образом подсчитанных прямых будет равно $n(n - 1)$. Однако полученная формула не дает правильного ответа. Например, подставляя в формулу $n = 3$, получаем, что через различные пары из трех точек проходит 6 прямых, а мы знаем, что таких прямых 3. Возникает проблемная ситуация. Требуется ответить на вопрос: "Почему найденная формула дает неверный ответ?" В результате обсуждения приходим к выводу о том, что при подсчете прямых мы каждую прямую считали дважды: один раз как прямую, проходящую через одну точку, а второй раз, как прямую, проходящую через другую точку. Поэтому выражение $n(n - 1)$, на самом деле, дает удвоенное число прямых и правильным ответом является $\frac{n(n-1)}{2}$.

Урок 3

I. Проверка домашнего задания

За специально освобожденные первые парты приглашаются несколько учащихся (двое, четверо или шестеро) для опроса по теории.

Задание 1

1) Назовите основные понятия геометрии. Почему они вводятся?

2) Сформулируйте аксиому $А_1$. Сделайте соответствующий рисунок и запись.

3) Что идеализирует плоскость? Приведите примеры.

4) Изобразите и опишите с помощью математических символов следующую геометрическую ситуацию на плоскости: "Точка *A* принадлежит прямой *a*. Точка *B* не принадлежит прямой *a*".

Задание 2

1) Как переводится термин "аксиома"? Зачем нужны аксиомы?

2) Сформулируйте аксиому $А_1$. Сделайте соответствующий рисунок и запись.

3) Что идеализирует прямая в пространстве? Приведите примеры.

4) Изобразите и опишите с помощью символов следующую геометрическую ситуацию на плоскости: "Прямая *a* проходит через точки *O* и *A*. Прямая *b* проходит через точки *B* и *O*. Прямой *c* принадлежит точка *O*".

Несколько учащихся (4-6) на своих местах письменно выполняют индивидуальные задания по карточкам. При этом разрешается пользоваться тетрадями. Задания могут оцениваться отметкой или знаками "+", "-" и т. п.

Карточка

1) Назовите основные геометрические фигуры.

2) Сколько прямых можно провести через две точки? Ответ обоснуйте.

2) Пусть точки *A*, *B*, *C* принадлежат одной прямой и точки *B*, *C*, *D* принадлежат одной прямой. Что можно сказать о всех точках *A*, *B*, *C*, *D*?

Задание для класса

1. Отметьте точку *O*, через нее проведите прямые *a* и *b*. Сколько прямых можно провести через точку *O*? Отметьте точку *A*, не принадлежащую прямой *a*, точку *B*, не принадлежащую прямой *b* и точку *C*, не принадлежащую прямым *a* и *b*. Рассмотрите различные случаи.

2. Сколько кривых можно провести через две точки? Ответ обоснуйте.

3*. Через две данные точки проведены две различные линии. Могут ли они обе быть прямыми? Почему?

К доске вызываем трех учащихся (назовем их $У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашней работы) (см. этап V урока 2).

После рассмотрения данных задач вместе с классом разбираем решение домашней задачи 4* предыдущего урока.

II. Новый материал

Ученикам предлагаются следующие вопросы

- Могут ли две прямые иметь одну общую точку?

- Могут ли две прямые не иметь общих точек?

После обсуждения ответов на данные вопросы определяем понятия пересекающихся и параллельных прямых и оформляем схему:

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Две прямые

Имеют одну общую точку (пересекаются)	Не имеют общих точек (параллельны)

Если две прямые имеют одну общую точку, то говорят, что прямые ***пересекаются*** в этой точке (рис. 7, а).

Если две прямые не имеют общих точек, то говорят, что прямые ***параллельны*** (рис. 7, б).

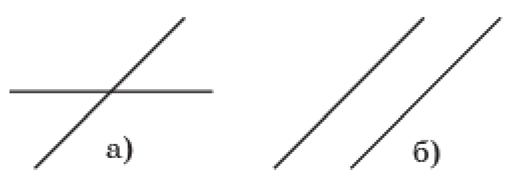


Рис. 7

Обсуждаем с учащимися, какие объекты из окружающей действительности могут служить моделью параллельных прямых. Например, рельсы на прямолинейном участке пути, края стола, доски, линии пересечения стены с полом и потолком, линейки в тетради и т.п.

Представляем математический знак параллельности «||», который ввел в 1631 году английский математик Вильям Оутред (1575-1660).

III. Закрепление нового материала

1. (Устно.) Сколько точек пересечения имеют две пересекающиеся прямые?

2. Изобразите: прямую m; точку M, принадлежащую прямой m. Через точку M проведите прямую n; отметьте точку N, принадлежащую прямой n, и точки H и P, не принадлежащие данным прямым. Проведите прямую l, параллельную прямой n.

Замечание. До изучения темы «Задачи на построение» (п. 20 учебника) построения выполняем с помощью линейки с делениями, транспортира, циркуля, чертежного угольника. Например, для построения параллельных прямых можно использовать параллельность краев линейки.

3. Сколько прямых изображено на рисунке 8? Сколько у них точек попарных пересечений? Изобразите данную геометрическую ситуацию.

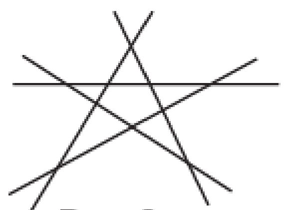


Рис. 8

IV. Занимательный момент

На своих уроках часто последние 5-7 минут мы посвящаем занимательному материалу, не обязательно связанному с изучением текущей темы. Это материал для развития мышления учащихся, их сообразительности, находчивости, смекалки, инициативы и других очень важных личностных качеств, необходимых в жизни каждому человеку.

Упражнения

1) Изобразите четыре прямые и четыре точки так, чтобы на каждой прямой было ровно две точки.

Ответ: См. рисунок 9.

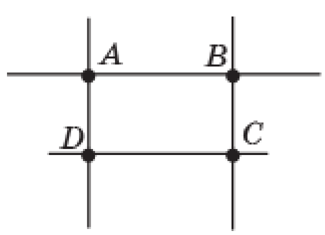


Рис. 9

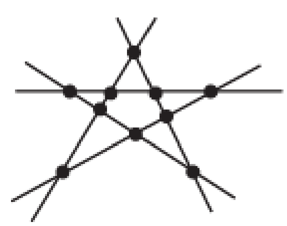


Рис. 10

2) Изобразите пять прямых и десять точек так, чтобы на каждой прямой было ровно четыре точки.

Ответ: См. рисунок 10.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 1 учебника).

2. Решить задачи.

1) Проведите три прямые, не пересекающиеся в одной точке, каждые две из которых пересекаются.

Ответ. Прямые образуют при пересечении треугольник.

2) Пусть прямые a, b, c пересекаются в одной точке и прямые b, c, d пересекаются в одной точке. Что можно сказать о всех прямых a, b, c, d?

Ответ. Прямые пересекаются в одной точке.

3) Найдите наибольшее число прямых, которые можно провести через различные пары из: а) 3 точек; б) 4 точек; в) 5 точек.

Ответ. а) 3; б) 6; в) 10.

4)* Даны три прямые. На каждой прямой – две точки. Сколько всего точек? Рассмотрите различные случаи.

Ответ. 3, 4, 5 или 6.

5)* Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

Ответ. $\frac{n(n-1)}{2}$.

п. 2. Отрезок и луч
(уроки 4, 5, 6)

Цель – рассмотреть случаи взаимного расположения точек на прямой; сформировать понятия отрезка и луча, или полупрямой; представить соответствующие обозначения; ввести операцию откладывания данного отрезка на данном луче от его вершины.

Урок 4

I. Устная работа

Устная работа заняла достойное место в преподавании математики в начальных и младших, 5-6, классах, значительно меньше внимания ей уделяется в 7-9 классах, и практически полностью она игнорируется в старших классах. Вместе с тем некоторые дидактические функции устной работы, среди которых: подготовка учащихся к работе на уроке, в частности, к восприятию нового материала; систематическое повторение пройденного; развитие учащихся, - остаются не менее актуальными и для старшеклассников. Кроме этого, устная работа активизирует учебную деятельность учащихся. Это связано как с содержанием, так и с формой проведения. Содержание устной работы включает в себя упражнения четырех типов:

1. Упражнения на закрепление и отработку текущего материала.
2. Упражнения на повторение.
3. Упражнения с элементами творчества. Это может быть, например, задача с новой для учащихся пространственной ситуацией или элементами подготовки к восприятию нового материала.
4. Упражнения развивающего, занимательного характера.

При планировании устной работы необходимо иметь в виду, что ее продолжительность не должна превышать 10 минут (оптимально 7-8 минут). Начинать устную работу желательно с легкого задания, чтобы не подавить инициативу ребят, постепенно повышая трудность задач и вводя элементы творчества. Устная работа – это хорошее активное мобилизующее, настраивающее на работу начало урока. Для стимулирования активности и инициативы учащихся, возможности себя проявить мы ввели следующую систему оценок во время устной работы: за каждый ответ учащийся получает "+", "-" или "$\pm$", "$\mp$". Если учащийся (может быть за несколько уроков) набрал пять представленных знаков, например, все "+", то он получает оценку - "5", за четыре "+" и один "-" - оценку "4" и т.д., учитываются все возможные комбинации сочетания четырех знаков. Личный опыт работы показывает, что такая система оценок с успехом принимается учащимися и нравится им. Причины этого заключаются в том, что она позволяет, довольно гибко реагировать на ответы, ребята могут проявить себя, добиться хорошей оценки.

Устная работа представляет широкие возможности для формирования и развития диалоговой культуры учащихся.

Упражнения

1) Назовите основные фигуры на плоскости.

2) Как обозначаются точки, прямые?

3) Как переводится слово «аксиома»?

4) Как называются прямые: а) имеющие одну общую точку; б) не имеющие ни одной общей точки?

5) Сколько прямых можно провести через одну точку? Почему?

6) Сколько прямых можно провести через две точки? Почему?

7) Даны прямая и принадлежащая ей точка. Сколько прямых, пересекающих данную прямую, можно провести через данную точку?

8) Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Сколько прямых, пересекающихся с данной прямой, можно провести через данную точку?

II. Новый материал

Ученикам предлагаем изобразить прямую *a* и принадлежащую ей точку *O*.

Вопрос

- На сколько частей разбивает точка *O* прямую *a*?

Для характеристики этих частей возьмем несколько точек, принадлежащих каждой из них (рис. 11).

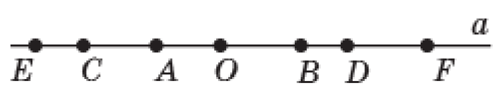


Рис. 11

Точки, принадлежащие одной части, лежат по одну сторону от точки *O*, а точки, принадлежащие разным частям – по разные стороны.

Формулируем и записываем соответствующую аксиому (A_2).

Каждая точка на прямой разбивает эту прямую на две части так, что точки из разных частей лежат по разные стороны от данной точки, а точки из одной части лежат по одну сторону от данной точки.

В случае, если точки *A* и *B* лежат по разные стороны от точки *O*, говорят также, что точка *O* лежит между точками *A* и *B*.

Задание. Рассмотрите на прямой *EF* (рис. 11) две точки *C*, *D* и назовите по рисунку точки, лежащие между ними. Как назвать часть прямой, состоящую из точек *C*, *D* и всех точек, лежащих между ними?

После обсуждения ответа даем определение отрезка.

Часть прямой, состоящая из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними, называется ***отрезком***. При этом сами данные точки называются ***концами отрезка***.

Отрезок обозначается указанием его концов. Например, AB, C_1D_1 и т. д. Там, где это не вызывает недоразумений, будем обозначать отрезки строчными латинскими буквами. Например, a, b, c и т.д. Можно ввести обозначение отрезка с помощью квадратных скобок, а именно, отрезок CD записывается как $[CD]$.

Обратимся опять к рисунку 11. Возьмем точку O и выделим часть прямой, которая состоит из всех точек, лежащих по одну сторону от данной точки. Например, точки A, C, E. Даем определение луча, или полупрямой.

Лучом, или ***полупрямой***, называется часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих от нее по одну сторону. При этом сама данная точка называется ***началом***, или ***вершиной***, ***луча***.

Для обозначения лучей используются пары прописных латинских букв, например, AB, первая из которых обозначает начало луча, а вторая - какую-нибудь точку, принадлежащую лучу. Там, где это не вызывает недоразумений, будем обозначать лучи малыми латинскими буквами. Например, a, b, c и т.д.

Можно ввести обозначение луча с помощью скобок. Например, луч OA записывается как $[OA)$. Квадратная скобка ставится у начала луча.

III. Закрепление нового материала

1. По рисунку 11 запишите: а) между какими точками лежит точка D; б) какие точки лежат по одну сторону от точки A.

2. По рисунку 11 запишите все отрезки, одним из концов которого является точка C.

3. По рисунку 11 запишите возможные названия луча: а) OA; б) OF.

4*. Сколько лучей, расположенных на прямой a, имеют в качестве вершин точки, отмеченные на рисунке 11?

Ответ. 14 лучей.

IV. Задание на дом

1. Разобрать теорию (п. 2 учебника, до операции откладывания данного отрезка), знать определения и обозначения отрезка и луча.

2. Решить задачи.

1) Изобразите на прямой a точки K, L, M, N таким образом, чтобы: а) точка L лежала между точками K и N и точка M лежала между точками K и L; б) точка N лежала между точками K и M и точка M лежала между точками N и L.

2) На прямой отмечено 4 точки. Сколько при этом получилось: а) отрезков; б) лучей?

Ответ. а) 6 отрезков; б) 8 лучей.

3) Назовите и изобразите случаи взаимного расположения двух лучей на прямой.

Ответ. Не имеют общих точек; имеют общую вершину; имеют общий отрезок; один содержится в другом.

4)* На прямой отмечено: а) 5 точек; б) 6 точек; в) n точек. Сколько при этом получилось лучей?

Ответ. а) 10; б) 12; в) $2n$.

5)* На прямой отмечено: а) 5 точек; б) 6 точек; в) n точек. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?

Ответ. а) 10; б) 15; в) $\frac{n(n-1)}{2}$.

Урок 5

I. Устная работа

1) Какая геометрическая фигура называется отрезком?

2) Принадлежат ли отрезку его концы?

3) Отрезок AB и отрезок BA это один и тот же отрезок?

4) Какая геометрическая фигура называется лучом?

5) Принадлежит ли лучу его начало?

6) Луч OC и луч CO это один и тот же луч?

7) На прямой отмечены две точки E и F. Сколько образовалось: а) отрезков; б) лучей?

Ответ. а) 1; б) 4.

8) Сколько через одну точку можно провести: а) прямых; б) отрезков; в) лучей?

Ответ. а), б), в) Бесконечно много.

II. Новый материал

Одной из основных операций, которую можно производить с отрезками, является операция ***откладывания данного отрезка*** на данном луче от его вершины. Получающийся при этом отрезок называется ***равным*** исходному отрезку.

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

На любом луче от его начала можно отложить только один отрезок, равный данному.

Равенство отрезков AB и A_1B_1 записывается в виде $AB = A_1B_1$. Оно означает, что если один из этих отрезков, например AB, отложить на луче A_1B_1 от точки A_1, то отрезок AB при этом совместится с отрезком A_1B_1 (рис. 12, а).

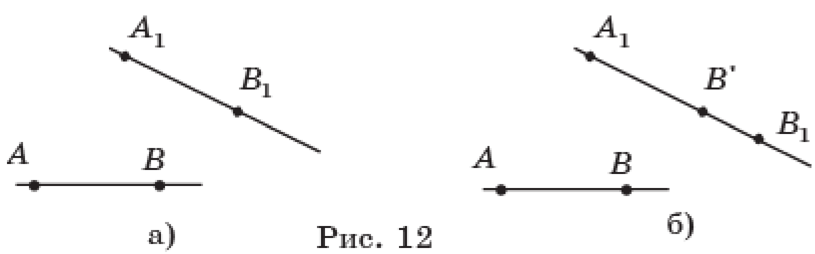


Рис. 12

Если при откладывании отрезка AB на луче A_1B_1 от точки A_1 точка B переходит в точку B', лежащую между точками A_1 и B_1, то говорят, что отрезок AB ***меньше*** отрезка A_1B_1 и обозначают $AB < A_1B_1$. Говорят также, что отрезок A_1B_1 ***больше*** отрезка AB и обозначают $A_1B_1 > AB$ (рис. 12, б).

Если на отрезке AB между точками A и B взять какую-либо точку C, то образуется два новых отрезка AC и CB. Отрезок AB называется ***суммой*** отрезков AC и CB и обозначается $AB = AC + CB$ (рис. 13). Каждый из отрезков AC и CB называется ***разностью*** отрезка AB и другого отрезка, обозначается $AC = AB - CB$, $CB = AB - AC$.

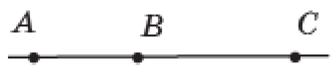


Рис. 13

Чтобы сложить два произвольных отрезка AB и CD, продолжим отрезок AB за точку B и на этом продолжении отложим отрезок BE, равный CD (рис. 14). Отрезок AE даст сумму отрезков AB и CD, $AE = AB + CD$.

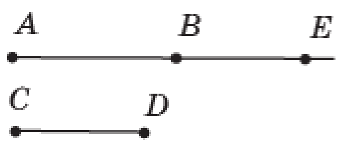


Рис. 14

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего отрезка меньшего.

Используя операцию сложения отрезка с самим собой, можно определить операцию ***умножения*** отрезка на натуральное число. А именно, положим для отрезка AB:

$2AB = AB + AB$, $3AB = 2AB + AB$, ..., $nAB = (n\text{-}1)AB + AB$, ...

Определим также операцию ***деления*** отрезка на натуральное число, или, что то же самое, операцию деления отрезка на n равных частей, считая $AB : n$ отрезком, при умножении которого на n получается исходный отрезок AB, т.е. $n(AB : n) = AB$.

В частности, если $n = 2$, то отрезок разделится на две равные части. Точка, делящая отрезок на две равные части, называется его ***серединой***.

III. Закрепление нового материала

1. На данной прямой l от данной точки L отложите данный отрезок EF. Сколько решений имеет задача?

Ответ. Два решения.

2. Даны отрезки MN и KL. Известно, что $MN > KL$. Постройте их сумму и разность.

3. Для данного отрезка GH постройте отрезок $3GH$.

4*. Докажите, что для сложения отрезков справедлив переместительный закон сложения, т.е. $a+b=b+a$.

Решение. Отложим на луче AX последовательно отрезки $AB = a$ и $BC = b$ (рис. 15). Тогда $a + b = AC$. Теперь на луче CY отложим последовательно отрезки $BC = b$ и $AB = a$ (рис. 15). В этом случае получим, что $b + a = AC$. Таким образом, $a+b=b+a$.

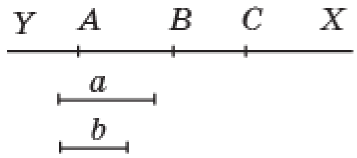


Рис. 15

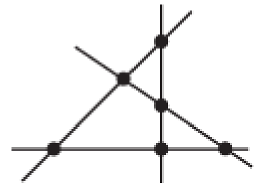


Рис. 16

IV. Занимательный момент

Задача. Можно ли на плоскости расположить 4 отрезка так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

Ответ. Да, можно. Решение представлено на рисунке 16.

Задача 5* из необязательной части домашнего задания (см. этап IV урока 4).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 2 учебника).

2. Решить задачи.

1) Даны два отрезка EF и GH, причем $GH<EF$. Постройте: а) $EF+GH$; б) EF-GH.

2) Для данного отрезка MN постройте: а) $4MN$; б) MN:3.

3) Точки X, Y, Z принадлежат одной прямой c, $XY>ZY$. Как могут располагаться относительно друг друга данные точки? Изобразите возможные случаи.

Ответ. а) Точка Z лежит между точками X и Y; б) точка Y лежит между точками X и Z.

4)* Докажите, что если для отрезков b и c выполняется неравенство $b < c$, то для отрезка a будет выполняться неравенство $a + b < a + c$.

Решение. Неравенство $b < c$ означает, что если отрезки b и c отложить на луче OX, то для полученных отрезков $OB = b$ и $OC = c$ точка B будет лежать между точками O и C (рис. 17). Отложим на луче OY отрезок $OA = a$ как показано на рисунке 17. Тогда $AB = a + b$ и $AC = a + c$. Так как B лежит между точками A и C, то выполняется неравенство $a + b < a + c$.

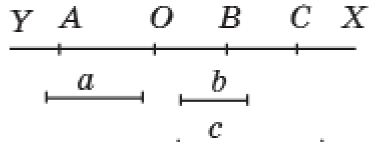


Рис. 17

5)* Даны 4 прямые, которые попарно пересекаются и никакие 3 из них не имеют общей точки. Изобразите данную ситуацию. Сколько отрезков образуется при этом?

Решение показано на рисунке 16. Всего 12 отрезков.

Урок 6

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаются учащиеся для опроса по теории.

Задание 1

1. Дайте определение отрезка.
2. Приведите обозначение луча.
3. Изобразите на прямой m точки C, D, E, F таким образом, чтобы: а) точка D лежала между точками E и F и точка F лежала между точками D и C; б) точка C лежала между точками D и F и точка E лежала между точками D и C.

Задание 2

1. Дайте определение луча.
2. Приведите обозначение отрезка.
3. Запишите все лучи, которые образуются при пересечении прямых MN и XY в точке H.

Несколько учащихся получают индивидуальные задания на карточках для работы на местах.

Карточка

1) Изобразите прямую b и принадлежащие ей точки O, P, Q, H. Запишите: а) точки, которые лежат по одну сторону от точки P; б) образовавшиеся отрезки.

2) Сколько лучей можно провести из одной точки?

Ответ. Бесконечно много.

3) Сколько точек попарных пересечений могут иметь 3 отрезка? Изобразите соответствующие случаи.

Ответ. Ни одной; 1; 2; 3.

Задание для класса

1. Изобразите на прямой n точки так, чтобы: а) точка A лежала между точками E и F; б) точка K не лежала между точками G и H; в) точка D не лежала между точками B и C.

2. На прямой k изобразите три точки K, L, M и запишите все получившиеся: а) отрезки; б) лучи.

3*. Сколько прямых можно провести через различные пары из 4 точек? Изобразите все случаи.

Ответ. 1; 4; 6.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение домашней задачи 3 (см. этап V урока 5).

II. Устная работа

1) Сколько имеется отрезков, расположенных на данной прямой, с концами в данных точках (рис. 18, а, б)?

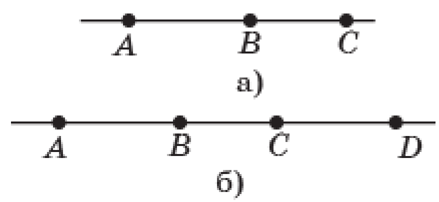


Рис. 18

Ответ. а) 3; б) 6.

2) Выразите отрезок: а) AC; б) BC через другие отрезки на рисунке 18.

Ответ. а) Рисунок 18,а: $AC=AB+BC$; рисунок 18,б: $AC=AB+BC$, $AC=AD-CD$; б) рисунок 18, а: $BC=AC-AB$; рисунок 18, б: $BC=AC-AB$, $BC=BD-CD$, $BC=AD-AB-CD$.

3) Отрезок AB равен отрезку CD (рис. 18, б). Есть ли на рисунке другие равные отрезки?

Ответ. Да, $AC=BD$.

4) Сколько имеется лучей, расположенных на данной прямой, с вершинами в данных точках (рис. 18, а, б)?

Ответ. а) 6; б) 8.

Давно и хорошо известна польза, которую приносят задачи на готовых чертежах. Такая работа важна на первых уроках систематического курса геометрии. Она обеспечивает постепенное преодоление трудностей, связанных с выполнением чертежа, умением выделить условие, заключение, сделать соответствующую запись. Такие задачи формируют правильные геометрические представления, способствуют развитию геометрической зоркости учащихся, прививают умения найти, выделить, преобразовать на чертеже нужную геометрическую фигуру, понять предлагаемую геометрическую ситуацию. Начинаем с легких заданий, постепенно будем их усложнять.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Изобразите прямую a и принадлежащие ей точки A, B, C таким образом, чтобы C лежала между A и B. Сколько отрезков изображено на рисунке?

2. Точки E, F, G принадлежат одной прямой, $EF<FG$. Как могут располагаться данные точки относительно друг друга?

3. Изобразите отрезок XY и отрезок $3XY$.

4*. На прямой взято n точек A_1, A_2, …, A_n. Сколько получилось лучей?

Вариант 2

1. Изобразите на прямой b точки D, E, F таким образом, чтобы D лежала между E и F. Сколько лучей изображено на рисунке?

2. Точки M, N, O принадлежат одной прямой. Известно, что $ON>OM$. Как могут располагаться данные точки относительно друг друга?

3. Изобразите отрезок UV и отрезок $4UV$.

4*. На прямой взято n точек B_1, B_2, …, B_n. Сколько получилось отрезков?

Ответы

Вариант 1. 1. 3. 4*. $2n$.

Вариант 2. 1. 6. 4*. $\frac{n(n-1)}{2}$.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа.

V. Занимательный момент

Учащимся предлагаем сравнить отрезки AB и CD, изображенные на рисунке 19.

Ответ. Отрезки равны.

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 2 учебника).

2. Решить задачи.

1) Изобразите точки O, P, Q, R, S, T, принадлежащие одной прямой так, чтобы лучи OP, OQ имели одну общую точку, и точка P лежала между точками T и O, точка R лежала между точками O и P, точка O не лежала между точками S и Q, точка Q не лежала между точками R и S.

2) На прямой b взяты четыре точки K, L, M, N такие, что точка M лежит между точками K и L и точка K лежит между точками N и M. Запишите совпадающие лучи. Сколько несовпадающих лучей образовалось?

Ответ. Совпадают лучи: а) LM, LK, LN; б) MK, MN; в) NK, NM, NL; г) KM, KL. 8 несовпадающих лучей.

3) На сколько частей делят прямую: а) одна точка; б) две точки; в) три точки; г)* n точек?

Ответ. а) 2; б) 3; в) 4; г)* n+1.

4)* Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) 3 прямые; б) 4 прямые; в) 5 прямых; г) n прямых?

Ответ. а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$.

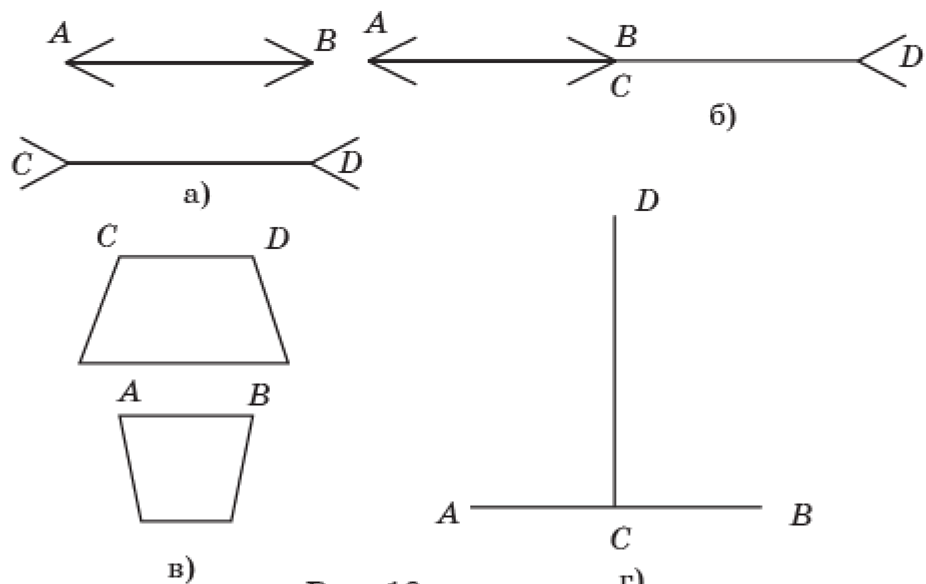


Рис. 19

п. 3. Измерение длин отрезков (уроки 7, 8)

Цель – сформировать понятия длины отрезка, расстояния между точками, познакомить учащихся с историей возникновения и развития измерения длин отрезков.

Урок 7

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Из трех точек на прямой только …
2. Отрезком называется …
3. Луч обозначается …
4. Отрезок AB является суммой отрезков AC и CB и обозначается …
5. Если два отрезка равны третьему, то …
6. Умножить отрезок AB на натуральное число n, значит, …

Вариант 2

1. Каждая точка на прямой разбивает эту прямую на …
2. Лучом называется …
3. Отрезок обозначается …
4. Отрезок AC является разностью отрезков AB и CB и обозначается …
5. На любом луче от его начала можно отложить …
6. Разделить отрезок AB на натуральное число n значит, …

II. Проверка математического диктанта

После окончания математического диктанта учащиеся сдают первые экземпляры работы, а копии оставляют себе для проверки, которую удобно организовать с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Проведем лабораторную работу.

1. Возьмем отрезок OE (10 клеток) и назовем его единичным.

2. Теперь возьмем отрезок AB (20 клеток). Сколько раз единичный отрезок OE укладывается в отрезке AB?

Ответ. 2 раза.

Далее возьмем отрезок CD (30 клеток). Сколько раз единичный отрезок OE укладывается в отрезке CD?

Ответ. 3 раза.

Полученные числа 2 и 3 являются соответственно длинами отрезков AB и CD. Можно ввести специальное обозначение для длины отрезка, а именно, $|AB|=2$, $|CD|=3$.

3. Возьмем отрезок MN (11 клеток). Попытаемся определить его длину. Единичный отрезок OE укладывается в данном отрезке один раз и еще остается одна клетка, которая в данном случае равна $\frac{1}{10}$ единичного отрезка. Следовательно, $|MN|=1,1$.

4. Определим длину отрезка GH (23 клетки) и KL (5 клеток).

Ответ. $|GH|=2,3$; $|KL|=0,5$.

Делаем вывод.

Измерение длины отрезка основано на сравнении его с отрезком, длина которого принимается за единицу (единичный отрезок).

Длина отрезка – это положительное число, показывающее сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в этом отрезке.

Длину отрезка AB называют также ***расстоянием*** между точками A и B. Иногда, под расстоянием между точками A и B будем понимать сам отрезок AB.

Длину отрезка AB будем обозначать так же, как и сам отрезок, AB.

5. Вопросы

- Возьмем два равных отрезка AB и A_1B_1. Что можно сказать об их длинах?

- Дан отрезок AC, который является суммой отрезков AB и BC. Что можно сказать о длине суммы этих отрезков?

После обсуждения ответов на данные вопросы делаем важные выводы.

Длина отрезка удовлетворяет следующим свойствам:

Свойство 1. Длины равных отрезков равны.

Свойство 2. Длина суммы отрезков равна сумме их длин.

Для измерения длин отрезков применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является линейка с делениями на ней, обозначающими сантиметры и их десятые части – миллиметры.

IV. Закрепление нового материала

1. Если единичный отрезок OE равен 1 см, чему равна длина отрезка PH при условии: а) $PH = 2OE$; б) $PH = 2,5OE$; в) $PH = 0,75OE$?

2. Даны три точки, A, B, C, принадлежащие одной прямой. Точка B лежит между точками A и C. Найдите длину отрезка: а) AC, если $|AB|=3$ см, $|BC|=1,1$ см; б) BC, если $|AB|=5,68$ см и $|AC|=10$ см; в) AB, если $|AC|=24,8$ см и $|BC|=9,13$ см.

Ответ. а) 4,1 см; б) 4,32 см; в) 15,67 см.

3. На отрезке MN длиной 15 м отмечена точка K. Найдите длины отрезков MK и NK, если отрезок MK на 3 м длиннее отрезка NK.

Ответ. 6 м, 9 м.

4*. Отрезки AB и AC лежат на одной прямой. Точка O – середина отрезка AB, точка P – середина отрезка AC, лежащая между B и C. Докажите, что BC=2OP.

Решение. $BC=BP+PC=BP+AP=BP+BP+2OB= 2(BP+OB)=2OP$.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 3 учебника).

2. Решить задачи.

1) Точки K, L, M принадлежат одной прямой, $|KM|$=5 см, $|LM|$=12 см. Как расположены точки относительно друг друга? Найдите $|KL|$.

Ответ. а) Точка M лежит между точками K и L, $|KL|$=17 см; б) точка M не лежит между точками K и L, $|KL|$=7 см.

2) На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC.

Ответ. 5 м, 10 м.

3) От точки A, взятой на некоторой прямой, отложены на ней в одном направлении два отрезка AB и AC, причем AB = 60 мм, AC = 100 мм. Найдите: а) длину отрезка BC; б) расстояние от точки A до середины отрезка BC; в) расстояние между серединами отрезков AB и AC.

Ответ. а) 40 мм; б) 80 мм; в) 20 мм.

4)* На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма длин которых равна 28 см; конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго - серединой третьего. Найдите длины этих отрезков.

Решение представлено на рисунке 20, где AB, AC, AD – данные отрезки, причем AC=2AB, AD=2AC=4AB. Таким образом, AB=4 см, AC=8 см, AD=16 см.

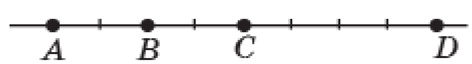


Рис. 20

5)* Отрезки AB и AC лежат на одной прямой. Точка O – середина отрезка AB, точка P – середина отрезка AC и точка C лежит между точками P и O. Докажите, что BC=2OP.

Решение. $BC=CO+OB=CO+AO=CO+CO+2PC=2(CO+PC)=2OP$.

3*. Индивидуальное задание. Исторический экскурс об единицах измерения длины (см. рубрику «Исторические сведения» из п. 3 учебника).

Урок 8

I. Проверка домашнего задания

Для опроса по теории приглашаем 6 учащихся за первые парты.

Задания 1, 3, 5

1. Что такое длина отрезка?
2. В каком случае длина отрезка выражается: а) натуральным числом; б) десятичной дробью с одной цифрой после запятой?
3. Что означает, что длина отрезка выражается дробью $\frac{p}{q}$?

Задания 2, 4, 6

1. Что делают для измерения длины отрезка?
2. Что называется расстоянием между точками A и B?
3. Каким свойствам удовлетворяет длина отрезка?

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих на местах.

Карточка

1) Точка H лежит на прямой между точками P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если HP=3 см и QH=1,5 см. Ответ поясните.

Ответ. 4,5 см.

2) Даны отрезки a, b, c, причем a = 6 см, b = 3 см и c = 2 см. Постройте отрезок a+(b-c).

3) Известно, что длины отрезков удовлетворяют следующим равенствам: AB=BC, CD=BC. Сделайте вывод о длинах отрезков AB и CD.

Ответ. Равны.

Задание для класса

1. На прямой отложены отрезки MN=8 см и NO=3 см. Найдите длину отрезка MO, если: а) точка N лежит между точками M и O; б) точка O лежит между точками M и N.

Ответ. а) 11 см; б) 5 см.

2. Даны отрезки a=6 см, b=3 см и c=2 см. Постройте отрезок a-(b+c).

3. Известно, что отрезки AB и CD имеют равные длины и лежат на одной прямой. Верно ли, что отрезки AC и BD имеют равные длины? Почему?

Ответ. Да.

4*. Могут ли точки K, L и M принадлежать одной прямой, если длина большего отрезка KL меньше суммы длин двух других отрезков KM и LM? Почему?

Ответ. Нет.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$ и $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3) из домашнего задания (см. этап V урока 7).

Дополнительные вопросы для учеников, работающих у доски (такие вопросы могут задавать и учащиеся класса)

- Что называется длиной отрезка?
- Как определить расстояние между двумя точками?
- Каким основным свойствам удовлетворяет длина отрезка?

II. Устная работа

1) На сколько отрезков можно разделить отрезок длиной 1 см?

Ответ. На любое число отрезков.

2) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причем известно, что AO в два раза больше CO и OB в два раза больше OD. Сравните длины отрезков AB и CD.

Ответ. $AB = 2CD$.

3) Города M, K, N расположены на одной прямой дороге. Расстояние между городами M и K равно 100 км, а между K и N равно 50 км. Определите наименьшее и наибольшее возможные расстояния между городами M и N.

Ответ. 50 км; 150 км.

4) На прямой отложены отрезки $AB = 10$ см, $BC = 5$ см. Найдите AC, если: а) точка B лежит между точками A и C; б) точка C лежит между точками A и B?

Ответ. а) 15 см; б) 5 см.

5) Точки D, E и F принадлежат одной прямой и $DE = 4{,}8$ см, DF=8,3 см, $EF = 3{,}5$ см. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

Ответ. Точка E лежит между точками D и F.

III. Занимательный момент

1) Домашнее индивидуальное задание (см. задание 3* из этапа V урока 7).

2) Решение домашних задач из необязательной части (там же см. задания 4* и 5*).

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 3 учебника).

2. Решить задачи.

1) На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если длины отрезков AC и BC относятся как 2:3.

Ответ. 6 м, 9 м.

2) На прямой последовательно отложены три отрезка: AB, BC и CD так, что AB = 3 см, BC = 5 см, CD = 4 см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

Ответ. 8,5 см.

3) На рисунке 21, а изображена сумма двух отрезков, а на рисунке 21, б изображена их разность. Найдите длины этих отрезков.

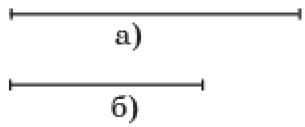


Рис. 21

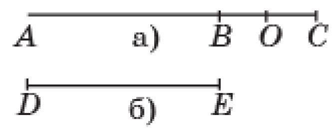


Рис. 22

Решение. На рисунке 22, а $AC= a+b$, на рисунке 22, б $DE=a-b,$ где a и b - длины данных отрезков. Тогда, $BC=2b$, O – середина отрезка BC. Таким образом, $AO=a$ и $CO=b$.

4)* Могут ли: а) 3 прямые попарно пересекаться в 3 точках; б) 5 прямых попарно пересекаться в 5 точках; в) n прямых попарно пересекаться в n точках?

Ответ. а), б), в) Да (рис. 23).

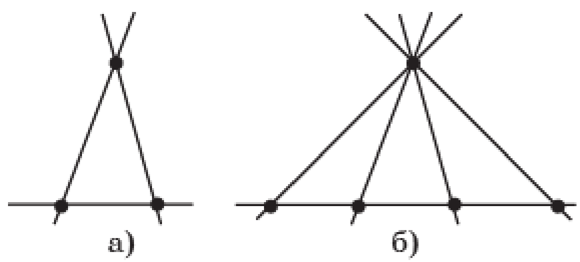


Рис. 23

5)* По одну сторону улицы стоят четыре дома D_1, D_2, D_3, D_4 (рис. 24). В каком месте улицы нужно установить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

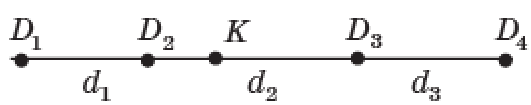


Рис. 24

Решение. Обозначим расстояния между соседними домами соответственно $D_1D_2 = d_1$, $D_2D_3 = d_2$, $D_3D_4 = d_3$. Если киоск K расположен между вторым и третьим домом, то сумма расстояний от него до всех домов равна $d_1 + 2d_2 + d_3$. Аналогичный подсчет показывает, что если киоск расположен между первым и вторым домом или третьим и четвертым домом, то сумма расстояний от него до всех домов будет больше этой величины. Поэтому киоск нужно установить в любом месте улицы между вторым и третьим домом.

п. 4. Полуплоскость и угол
(уроки 9, 10, 11, 12)

Цель – рассмотреть основные свойства взаимного расположения точек на плоскости относительно прямой; сформировать понятия полуплоскости, угла, его элементов; ознакомить с видами углов; ввести операции откладывания данного угла, сложения, вычитания углов; доказать первую теорему курса о вертикальных углах; ввести определение перпендикулярных прямых.

Урок 9

I. Устная работа

1) Могут ли точки N, O, P принадлежать одной прямой, если:

а) $NO = 3$ см, $OP = 4$ см, $NP = 1$ см;

б) $NO = 4$ см; $OP = 2$ см, $NP = 3$ см?

Ответ. а) Да; б) нет.

2) На отрезке XY длиной 36 см взята точка O. Найдите длины отрезков XO и YO, если:

а) XO на 14 см короче YO;

б) XO в 3 раза длиннее YO.

Ответ. а) 11 см, 25 см; б) 27 см, 9 см.

3) На сколько частей делит плоскость, лежащая на ней прямая?

Ответ. На две.

4) Известно, что плоскость разделена линией на две части. Верно ли утверждение о том, что эта линия – прямая?

Ответ. Нет.

5) На сколько частей делят плоскость две пересекающиеся прямые?

Ответ. На четыре.

II. Новый материал

Возьмем прямую a (рис. 25). Выше, в устной задаче 3, мы выяснили, что прямая разбивает плоскость на две части. Возьмем четыре точки A, B, C, D, не принадлежащие данной прямой, причем A, B принадлежат одной части плоскости, а C, D - другой. Рассмотрим пары отрезков AB, CD и AC, BD.

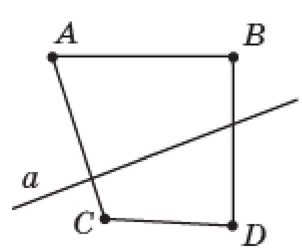


Рис. 25

Вопрос: Что общего у отрезков каждой пары и почему они объединены в такие пары?

После обсуждения данной геометрической ситуации делаем вывод о взаимном расположении точек на плоскости относительно данной прямой. Формулируем следующую аксиому.

Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части. При этом, если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

Даем определение полуплоскости.

Часть плоскости, состоящая из точек данной прямой и точек, лежащих по одну сторону от этой прямой, называется ***полуплоскостью***.

Вопрос по рисунку 25.

- Как расположены отрезки AD и BC по отношению к прямой a? Ответ поясните.

Теперь проведем два луча OA, OB (рис. 26) и выясним, на сколько частей они разбивают плоскость. Даем определение угла.

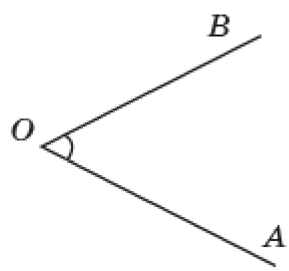


Рис. 26

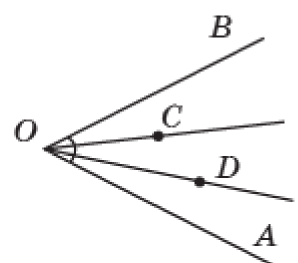


Рис. 27

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется ***углом***. Общая вершина называется ***вершиной угла***, а сами лучи - ***сторонами угла***.

Угол обозначается или одной буквой, указывающей его вершину, или тремя буквами средняя из которых указывает вершину угла, а крайние – какие-нибудь точки на сторонах угла. Например, $\angle O$, $\angle AOB$. Иногда угол обозначается цифрой, например, $\angle 1$, $\angle 2$ и т.д. Обратим внимание учащихся, что на чертеже угол может быть отмечен дугой (рис. 26).

Точки угла, не принадлежащие его сторонам, называются ***внутренними***. Лучи, исходящие из вершины данного угла и проходящие через внутренние точки угла, называются ***внутренними***.

Задание. На рисунке 27 укажите внутренние точки и внутренние лучи угла AOB.

Угол называется ***развернутым***, если его стороны вместе составляют прямую (рис. 28, а). В противном случае угол называется ***неразвернутым***.

Неразвернутый угол может быть меньше развернутого, т.е. являться частью развернутого угла (рис. 28, б), или быть больше развернутого, т.е. содержать развернутый угол (рис. 28, в). Как правило, если не оговорено противное, мы будем рассматривать углы, меньшие развернутых.

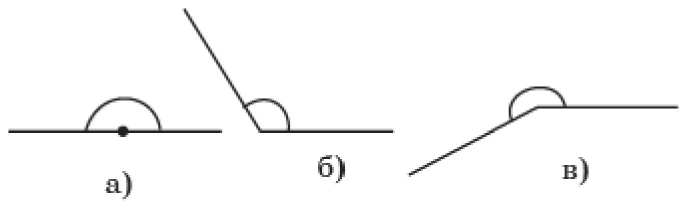


Рис. 28

Два угла называются ***смежными***, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую (рис. 29).

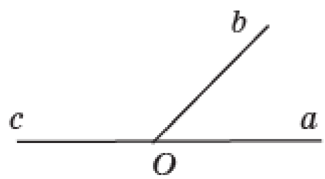


Рис. 29

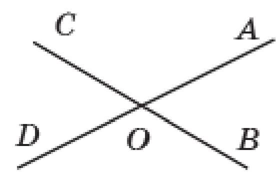


Рис. 30

Два угла называются ***вертикальными***, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла (рис. 30).

Вопрос. Какой предмет домашнего обихода дает нам представление о вертикальных углах?

Задание. На рисунке 31 укажите углы: а) развернутые; б) меньшие развернутых; в) большие развернутых; смежные; г) вертикальные.

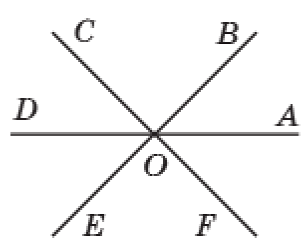


Рис. 31

Одной из основных операций, которую можно производить с углами, является операция ***откладывания данного угла*** в ту или другую сторону от данного луча (рис. 32). Получающийся при этом угол называется ***равным*** исходному углу.

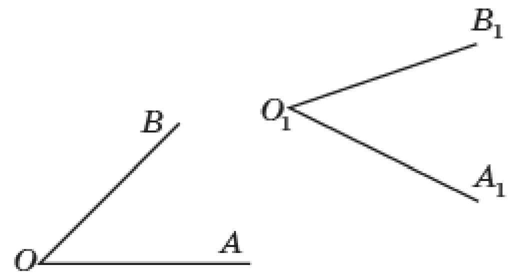


Рис. 32

В качестве аксиом принимаются следующие свойства.

От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить только один угол, равный данному.

Все развернутые углы равны.

Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например AOB, отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1, то угол AOB при этом совместится с углом $A_1O_1B_1$.

Если при откладывании угла AOB от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч OB', лежащий внутри угла $A_1O_1B_1$, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$ и обозначают $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ (рис. 33). Говорят также, что угол $A_1O_1B_1$ больше угла AOB и обозначают $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$.

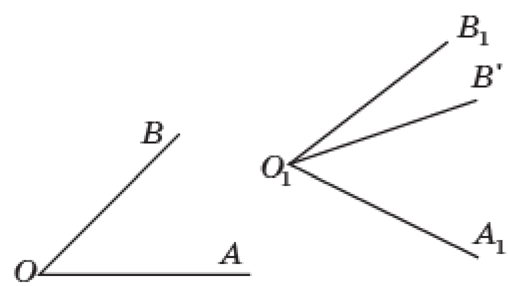


Рис. 33

III. Закрепление нового материала

1. Изобразите прямую b и не принадлежащие ей точки K, L, M, N, O, P, если известно, что отрезки KL, NP пересекают данную прямую, а отрезки KN, MP, MO не пересекают ее.

Ответ. Точки K и N, находятся в одной полуплоскости относительно прямой b, а точки L, M, O, P – в другой.

2. Даны прямая и три точки A, B, C, не принадлежащие этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок BC?

Решение. Из того, что отрезок AB пересекает прямую следует, что точки A и B лежат по разные стороны от этой прямой. Из того, что отрезок AC не пересекает прямую следует, что точки A и C лежат по одну сторону от прямой. Таким образом, точки B и C лежат по разные стороны от прямой и, следовательно, отрезок BC пересекает прямую (рис. 34).

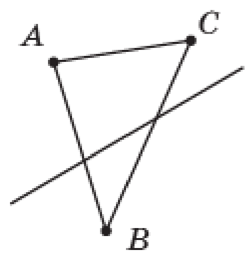


Рис. 34

3. Изобразите развернутый угол EHF и его внутренние лучи HG, HI, HJ. Сколько углов образовалось вместе с данным? Какой среди них наибольший? Почему?

Ответ. 10 углов; наибольший $\angle EHF$.

4*. Внутри угла проведено 5 лучей. Сколько при этом образуется углов (вместе с данным).

Ответ. 21 угол.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 4 учебника).

2. Решить задачи.

1) Изобразите прямую k и точки A, B, C, D, E, F, если известно, что отрезок AB пересекает прямую k, отрезок CF ее не пересекает, точки A и F принадлежат одной полуплоскости относительно прямой k, а точки C и D – разным, отрезок EF пересекает прямую k в точке E.

Ответ. Точки A, C, F, принадлежат одной полуплоскости, а точки B, D - другой относительно прямой k, $E \in k$.

2) Даны прямая и четыре точки A, B, C, D, не принадлежащие этой прямой. Пересекает ли эту прямую отрезок AD, если: а) отрезки AB, BC и CD пересекают прямую; б) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает; в) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; г) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; д) отрезки AB, BC и CD не пересекают прямую; е) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую? Изобразите данные ситуации.

Ответ. а), г), е) Да; б), в), д) нет.

3) Дан угол. Постройте для него смежный и вертикальный углы.

4) На сколько частей разбивают плоскость: а) две пересекающиеся прямые; б) три попарно пересекающиеся прямые; в) четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке.

Ответ. а) 4; б) 7; в) 11.

5)* На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке.

Решение. Две пересекающиеся прямые a_1, a_2 разбивают плоскость на четыре части. Возьмем третью прямую a_3, пересекающую прямые a_1, a_2 в точках A_1, A_2 (рис. 35).

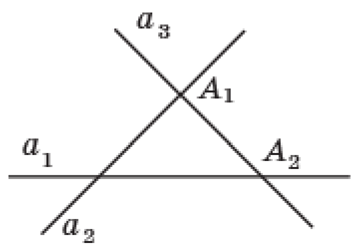


Рис. 35

Эти точки делят прямую a_3 на три части, каждая из которых разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Таким образом, вместо трех частей плоскости становится шесть и всего получаем семь частей. Аналогично, при добавлении n-ой прямой к уже имеющимся $n - 1$ прямой мы получим n дополнительных частей и, следовательно, общее число частей плоскости для n прямых будет равно $4 + 3 + \ldots + n$. Воспользуемся формулой $1+ 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда искомое число частей плоскости равно $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

6)* Внутри угла проведено: а) 2 луча; б) 4 луча; в) n лучей, каждый из которых имеет начало в вершине угла. Сколько при этом образуется углов (вместе с данным)?

Решение. а) 6; б) 15; в) проведено n внутренних лучей и два луча – стороны данного угла. Таким образом, всего n+2 луча. Каждый луч образует n+1 угол с другими лучами. Замечая, что при таком подсчете, каждый угол участвует дважды, получаем общее количество углов, равное $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Урок 10

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Полуплоскостью называется …
2. Луч называется внутренним лучом угла, если …
3. Угол AOB называется развернутым, если …
4. Угол EFG больше угла KLM. Это обозначается следующим образом: …
5. Равенство углов CDE и $C_1D_1E_1$ означает, что …

Вариант 2

1. Углом называется …
2. Точка угла называется внутренней, если …
3. Угол COD называется неразвернутым, если …
4. Угол NOP меньше угла QRS. Это обозначается следующим образом: …
5. Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ означает, что …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Внутри угла AOB проведем луч OC. Получим два новых угла AOC и COB (рис. 36).

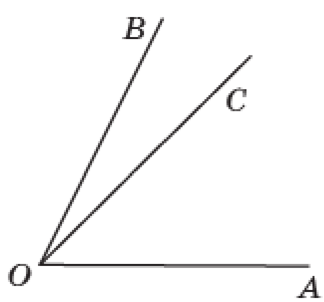


Рис. 36

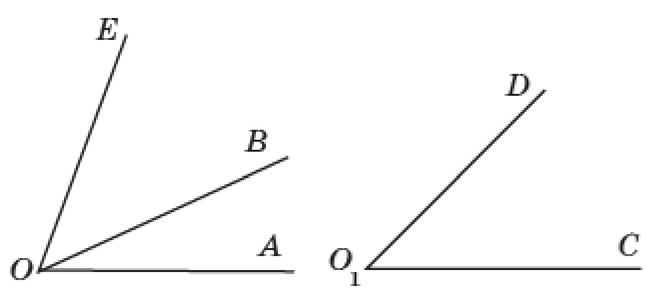


Рис. 37

Угол AOB называется ***суммой*** углов AOC и COB и обозначается $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$. Каждый из углов AOC и COB называется ***разностью*** угла AOB и другого угла, обозначается $\angle AOC = \angle AOB - \angle COB$, $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC$.

Чтобы сложить два угла, например, AOB и CO_1D (рис. 37), отложим угол CO_1D от луча OB так, чтобы точки A и D находились по разные стороны от прямой OB. Обозначим OE луч, в который перейдет луч O_1D. Тогда угол AOE даст сумму углов AOB и CO_1D, $\angle AOE = \angle AOB + \angle CO_1D$.

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего угла меньшего.

Задания

1) Даны два угла AOB и CO_1D, причем $\angle AOB > \angle CO_1D$. Постройте разность $\angle AOB - \angle CO_1D$.

Решение. Отложим угол CO_1D от луча OB так, чтобы точки A и D находились по одну сторону от прямой OB. Обозначим OE луч, в который перейдет луч O_1D. Тогда угол EOA даст разность углов AOB и CO_1D, $\angle EOA = \angle AOB - \angle CO_1D$.

2) Какому углу равна сумма смежных углов?

Ответ. Развернутому углу.

3) Как вы думаете, равны ли вертикальные углы?

Ответ. Да.

Сделали предположение о важном свойстве вертикальных углов – их равенстве. Это предположение требует обоснования. Обсуждение ответа на последний вопрос подводит учащихся к важному моменту систематического курса геометрии – доказательству первой ***теоремы***. Знакомим с красивым словом “теорема” (theorema), которое произошло от латинского слова “theoreo” – рассматриваю, обдумываю.

Методика работы с теоремами может включать в себя следующие этапы:

1) Подготовительная работа, итогом которой является высказывание некоторого утверждения.

2) Формулировка теоремы.

3) Выделение условия и заключения теоремы, запись рубрик «Дано», «Доказать».

4) Выполнение схематического чертежа.

5) Обсуждение основных моментов доказательства.

6) Запись доказательства с помощью математической символики.

Очень важно, чтобы учащиеся осознали, что теорема – это высказывание, правильность которого устанавливается с помощью рассуждения – ***доказательства***.

Итак, формулируем рассматриваемую теорему.

Теорема. Вертикальные углы равны.

Вопросы:

- Где условие теоремы?

- Где ее заключение?

Записываем.

Дано: $\angle AOC$ и $\angle BOD$ – вертикальные углы (рис. 38).

Доказать: $\angle AOC = \angle BOD$.

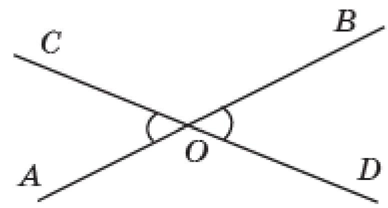


Рис. 38

Доказательство. 1) Стороны OB и OD угла BOD дополняют до прямых стороны соответственно OA и OC угла AOC. Тогда углы AOC и COB составляют в сумме развернутый угол.

2) Углы BOD и COB также составляют в сумме развернутый угол.

3) Поскольку все развернутые углы равны, то имеем равенство $\angle AOC + \angle COB = \angle BOD + \angle COB$.

4) Вычитая из обеих частей этого равенства $\angle COB$, получаем требуемое равенство $\angle AOC = \angle BOD$.

Последний пункт можно закончить словами «что и требовалось доказать, или ч. т. д.» - от латинского «*quod erat demonstrandum*».

IV. Закрепление нового материала

1. На рисунке 39 $\angle OBC = \angle OCB$. Докажите, что $\angle ABO = \angle DCO$.

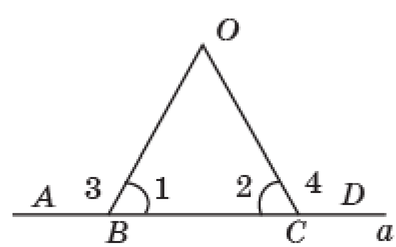


Рис. 39

При решении этой задачи замечаем, что равные углы на рисунке можно обозначить одинаково (например, на рисунке 39 равные углы обозначены одной дугой) и для удобства называть углы 1, 2, 3, 4 и т.д. Подчеркнем, что уже с первых уроков важно обращать внимание ребят на правильное выделение условия и заключения задачи и постепенно приучать их к аккуратному оформлению своих рассуждений. В данной задаче нужно сделать следующие записи.

Дано: $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$, $D \in a$, $O \notin a$, $\angle OBC = \angle OCB$ (или по рисунку 39 $\angle 1 = \angle 2$).

Доказать: $\angle ABO = \angle DCO$ (или по рисунку 39 $\angle 3 = \angle 4$).

Решение. 1) $\angle ABC$ и $\angle BCD$ – развернутые (по определению развернутого угла). Следовательно, $\angle ABC = \angle BCD$. 2) $\angle ABC = \angle 1 + \angle 3$ и $\angle BCD = \angle 2 + \angle 4$, но $\angle 1 = \angle 2$ (по условию). 3) $\angle 3 = \angle ABC - \angle 1$ и $\angle 4 = \angle BCD - \angle 2$. Значит, $\angle 3 = \angle 4$, что и требовалось доказать (ч.т.д.).

Замечание. Далее при оформлении решений задач будем опускать рубрики “Дано” и “Доказать” (или “Найти”, “Построить”, "Вычислить" и т.п.).

2*. Докажите, что для операции сложения углов справедливо переместительное свойство.

Решение. Пусть $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$ (рис. 40). Но угол AOC можно получить как сумму углов BOC и AOB, откладывая угол AOB от луча OB. Следовательно, $\angle AOC = \angle BOC + \angle AOB$ и, значит, $\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle AOB$, т.е. справедливо переместительное свойство.

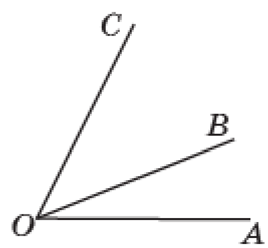


Рис. 40

V. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 4 учебника).

2. Решить задачи.

1) При помощи линейки постройте угол, равный данному углу.

Решение. Нужно продолжить стороны данного угла за вершину и получить вертикальный угол.

2) Три прямые пересекаются в одной точке (рис. 41). Определите, какой угол получится при сложении углов 1, 2 и 3.

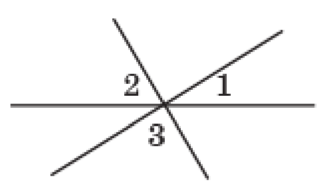


Рис. 41

Ответ. Развернутый угол.

3) Докажите, что если два угла равны, то равны и смежные с ними углы.

Решение. Пусть $\angle 1 = \angle 2$. Требуется доказать равенство смежных с ними углов 3 и 4. Так как все развернутые углы равны, то имеем равенство $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Вычитая из обеих частей этого равенства равные углы 1 и 2, получим требуемое равенство $\angle 3 = \angle 4$.

4)* Докажите, что если $\angle B < \angle C$, то $\angle A + \angle B < \angle A + \angle C$.

Решение. От луча OX в одну сторону отложим $\angle XOY = \angle A$, а в другую сторону $\angle XOZ = \angle B$ и $\angle XOT = \angle C$ (рис. 42).

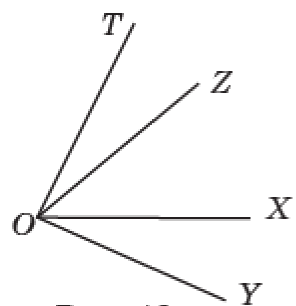


Рис. 42

Так как по условию $\angle B < \angle C$, то луч OZ будет внутренним лучом угла XOT и, значит, внутренним лучом угла YOT. По определению сложения углов имеем $\angle YOZ = \angle A + \angle B$, $\angle YOT = \angle A + \angle C$. Следовательно, $\angle A + \angle B < \angle A + \angle C$, ч. т. д.

3. Принести чертежный угольник.

Урок 11

I. Устная работа

1) Даны прямая и три точки *A, B* и *C*, не принадлежащие этой прямой. Известно, что отрезок *AB* пересекает данную прямую, а отрезок *AC* нет. Пересекает ли прямую отрезок *BC*?

Ответ. Да.

2) Даны прямая и не принадлежащие ей пять точек, причем три из них находятся в одной полуплоскости относительно этой прямой, а две другие – в другой. Каждые две точки соединены отрезком. Сколько отрезков пересечет прямую?

Ответ. 6 отрезков.

3) Сколько имеется углов, смежных данному?

Ответ. Два.

4) Сколько имеется углов, вертикальных данному?

Ответ. Один.

5) На отрезке *EF* длиной 24 см взята точка *O*. Найдите длины отрезков *EO* и *FO*, если:

а) *EO* на 4 см длиннее *FO*;

б) *EO* в 5 раз короче *FO*.

Ответ. а) 14 см, 10 см; б) 4 см, 20 см.

6. Каким свойством обладают вертикальные углы?

Ответ. Равны.

II. Новый материал

Используя операцию сложения угла с самим собой, можно определить операцию умножения угла на натуральное число и деления угла на *n* равных частей. Для угла *AOB* углом $\angle AOB{:}n$ считается такой угол, при умножении которого на *n* получается исходный угол *AOB*, т.е. $n(\angle AOB : n) = \angle AOB$.

Биссектрисой угла называется внутренний луч, делящий этот угол на два равных угла (рис. 43).

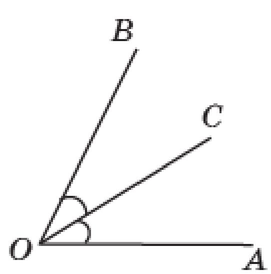


Рис. 43

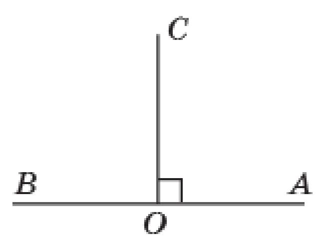


Рис. 44

Рассмотрим развернутый угол *AOB* (рис. 44) и проведем его биссектрису *OC*. Углы *AOC* и *BOC* будут равны. Каждый из этих углов называется прямым. Прямые углы можно строить с помощью чертежного угольника. Это показано на рисунке 45.

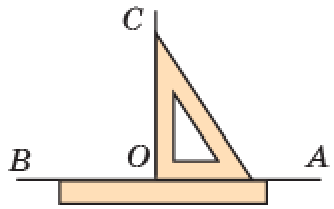


Рис. 45

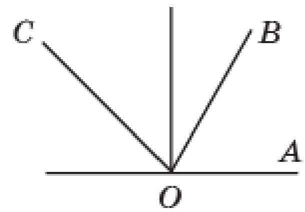


Рис. 46

Угол, равный своему смежному углу, называется ***прямым***.

Угол, меньший прямого угла, называется ***острым***. Угол, больший прямого угла, но меньший развернутого, называется ***тупым***.

На рисунке 46 изображены острый угол *AOB* и тупой угол *AOC*.

Обратимся к рисунку 47, а.

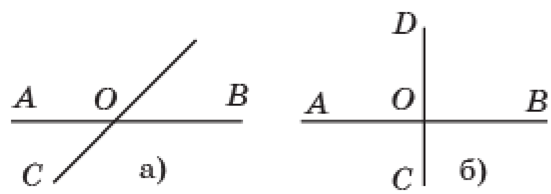


Рис. 47

Вопросы

- Какая геометрическая ситуация на нем изображена?

- Сколько углов образовалось при пересечении двух прямых?

После обсуждения ответов даем определение.

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами, на которые делятся данные прямые точкой их пересечения.

- Какой угол образуют прямые, изображенные на рисунке 47, б?

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если они образуют прямые углы.

Перпендикулярность прямых a и b обозначается $a \perp b$. Этот математический знак ввел в 1634 году французский математик Пьер Эригон.

Будем также называть два луча, два отрезка или прямую и отрезок перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

III. Закрепление нового материала

1. Назовите и запишите углы, изображенные на рисунке 48: а) острые; б) прямые; в) тупые.

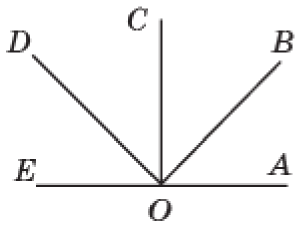


Рис. 48

Ответ. а) Углы *AOB*, *BOC*, *COD*, *EOD*; б) углы *AOC*, *BOD*, *EOC*; в) *AOD*, *BOE*.

2. Один из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, тупой. Каковы три другие угла?

Ответ. Два острых и один тупой.

3. Найдите угол между биссектрисами вертикальных углов.

Ответ. Развернутый угол.

4*. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

Ответ. Прямой угол.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 4 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте два вертикальных угла так, чтобы их сумма была равна сумме их смежных углов.

Ответ. Два прямых угла.

2) На рисунке 49 $CO \perp AB$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle AOD = \angle BOE$. Дайте два способа решения.

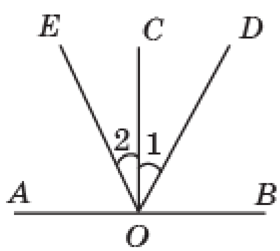


Рис. 49

Решение.

1-ый способ. $\angle AOD = \angle AOE + \angle EOD = \angle BOD + \angle EOD = \angle BOE$. Заметим, что $\angle AOE = \angle BOD$, так как $\angle AOE = \angle AOC - \angle EOC$ и $\angle BOD = \angle BOC - \angle DOC$, где $\angle AOC = \angle BOC$ (прямые углы по условию) и $\angle EOC = \angle DOC$ (по условию).

2-ой способ. $\angle AOD = \angle AOC + \angle 1 = \angle BOC + \angle 2 = \angle BOE$.

3) Проведите следующую лабораторную работу. Вырежьте из плотной бумаги несколько углов, среди них развернутый угол, и покажите: а) сумму двух углов; б) разность двух углов; в) биссектрисы углов, в том числе развернутого угла; г) возьмите один из углов и найдите его четверть.

4)* Назовите время, когда часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол.

Ответ. 3 часа, 9 часов.

5)* Назовите время, когда часовая и минутная стрелки часов образуют развернутый угол.

Ответ. В 6 часов.

Урок 12

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаются четверо учащихся для опроса по теории.

Задание 1

1. Назовите основные математические предложения.
2. Дайте определение смежных углов.
3. Дайте определение вертикальных углов.

Задание 2

1. Назовите основные части теоремы.
2. Дайте определения прямого угла, острого угла, тупого угла.

Задание 3

1. Сформулируйте теорему о вертикальных углах.
2. Запишите условие и заключение теоремы о вертикальных углах.
3. Докажите теорему о вертикальных углах.

Задание 4

1. Дайте определение перпендикулярных прямых.
2. Что называется условием и заключением теоремы?
3. Дайте определение биссектрисы угла.

Несколько человек получают индивидуальные задания на карточках для работы на своих местах.

Карточка

1) Из точки на данной прямой проведены два луча по разные стороны от нее. Найдите сумму получившихся четырех углов.

Ответ. Сумма равна двум развернутым углам.

2) Найдите количество пар вертикальных углов, которые получаются при пересечении: а) 3 прямых в одной точке; б)* 4 прямых в одной точке.

Ответ. а) 6; б) 12.

Задание для класса

1. Сколько раз за сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

Ответ. 48.

2. Развернутый угол *AOB* разделен на три равные части лучами *OC* и *OD*. Как с помощью чертежного угольника провести биссектрису угла *COD*?

Ответ. Нужно провести луч $OE \perp AB$.

3*. Через точку проведено: а) 5 прямых; б) 6 прямых; в) n прямых. Найдите число пар образованных ими вертикальных углов.

Ответ. а) 20; б) 30; в) $n(n-1)$.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – решает вместе с классом задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно решает классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 2 из домашней работы (см. этап IV урока 11).

II. Устная работа

1) Что можно сказать об углах, смежных равным углам?

Ответ. Равны.

2) Могут ли два смежных угла быть одновременно: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми?

Ответ. а), в) Нет; б) да.

3) Может ли один из смежных углов быть прямым, а другой – острым?

Ответ. Нет.

4) Как с помощью одной линейки начертить хотя бы один угол, равный данному углу?

Ответ. Продолжить стороны данного угла за его вершину.

5) Как перегибанием прямоугольного листа бумаги получить прямой угол?

Ответ. Прямоугольный лист бумаги нужно перегнуть дважды, совмещая противоположные края.

6) Какой угол составляют между собой направления на: а) запад - север; б) юг - север; в) северо-запад – юго-восток?

Ответ. а) Прямой угол; б), в) развернутый угол.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Известно, что три точки C, D и E не принадлежат одной прямой. Точка F не принадлежит прямой CD. Пересекает ли отрезок EF прямую CD? Рассмотрите возможные случаи.

2. Внутри прямого угла проведено 3 луча. Сколько углов при этом образовалось?

3. Дан угол. Постройте для него вертикальный угол. Сколько таких углов можно построить?

4. Сколько пар смежных углов образуют три пересекающиеся в одной точке прямые?

5*. Через точку проведено n прямых. Найдите число пар образовавшихся вертикальных углов.

Вариант 2

1. Отрезок KL лежит на прямой a. Отрезки KM и LN не лежат на прямой a. Пересечет ли отрезок MN прямую a? Рассмотрите возможные случаи.

2. Внутри прямого угла проведено 4 луча. Сколько углов при этом образовалось?

3. При помощи линейки постройте угол, равный данному и имеющий с ним общую вершину. Сколько таких углов можно построить?

4. Сколько пар смежных углов образуют две пересекающиеся прямые?

5*. См. задачу 5* из варианта 1.

Ответы

Вариант 1. 2. 10 углов. 3. Один. 4. 12 пар. 5*. $n(n-1)$.

Вариант 2. 2. 15 углов. 3. Один. 4. 4 пары. 5*. $n(n-1)$.

IV. Проверка самостоятельной работы

Первые экземпляры работ сдаются, проверяем по копиям. Проверку удобно организовать с помощью кодоскопа.

V. Занимательный момент

Решение задач 4*, 5* из необязательной части домашнего задания урока 11.

VI. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 4 учебника).

2. Решить задачи

1) Даны развернутый угол XYZ, его биссектриса YA и два его внутренних луча, лежащие по разные стороны от биссектрисы. Изобразите данную геометрическую ситуацию. Сколько всего получилось углов? Запишите острые, прямые, тупые углы.

Ответ. Всего 10 углов.

2) Укажите какое-нибудь время дня, когда минутная и часовая стрелки образуют: а) острый угол; б) тупой угол.

Ответ. Например: а) 2 часа; б) 5 часов 50 минут.

3) Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

4)* Для каждой ли пары углов определена сумма?

Ответ. Нет. Например, сумма неопределена для двух углов, больших развернутого.

3. Принести транспортир.

п. 5. Измерение величин углов (уроки 13, 14, 15)

Цель – сформировать понятие величины угла; угла в 1°; ввести основные свойства градусной величины угла; познакомить учащихся с историей возникновения и развития проблемы измерения величин углов.

Урок 13

I. Устная работа

1) Что называется длиной отрезка?

2) Какой отрезок называется единичным?

3) Как измеряется длина отрезка?

4) Верно ли утверждение:

а) если сумма двух углов равна двум прямым углам, то углы смежные;

б) если углы смежные, то их сумма равна двум прямым углам;

в) если углы равны, то они вертикальные;

г) если углы вертикальные, то они равны?

Ответ. а), в) Нет; б), г) да.

5) Один из смежных углов тупой. Определите вид другого угла.

Ответ. Острый.

6) Один из смежных углов в 3 раза больше другого. Какую часть прямого угла составляет меньший из них?

Ответ. $\frac{1}{2}$.

II. Новый материал

При измерении величин углов поступают так же, как при измерении длины отрезков. Сначала выбирают угол, который принимается за единицу измерения. Единичным углом выбирают угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. Найдем такой угол на транспортире. Величина такого угла равна одному градусу, обозначается 1°.

Вопросы:

- Сколько градусов составляет развернутый угол?
- Сколько градусов составляет прямой угол?

Теперь пусть дан угол *AOB*. Для нахождения его величины от луча *OA* последовательно откладывают единичный угол и находят число *n*, показывающее сколько раз он укладывается в данном угле. Если при этом луч последнего единичного угла совпадет с лучом *OB*, то процесс измерения считается законченным и полученное число градусов *n* будет величиной угла *AOB*, обозначается $\angle AOB = n°$. Если же луч OC последнего единичного угла лежит между лучами *OA* и *OB*, то единичный угол разбивают на 60 равных частей. Величину одной такой части называют одной минутой и обозначают

1'. Затем последовательно откладывают от луча OC угол, равный одной минуте, и находят число m, показывающее сколько раз этот угол целиком укладывается в угле COB. Если при этом луч последнего угла совпадет с лучом OB, то процесс измерения считается законченным и величина $n°m'$, показывающая сколько раз в данном угле укладываются угол в 1° и угол в 1', будет величиной данного угла. Если же последний луч лежит между лучами OC и OB, то угол в одну минуту делят на 60 равных частей (величину одной такой части считают равной одной секунде и обозначают 1") и повторяют процедуру измерения.

Таким образом, градусная величина угла показывает, сколько раз угол в один градус и его части укладываются в этом угле.

Градусная величина угла удовлетворяет следующим свойствам:

Свойство 1. Градусные величины равных углов равны.

Свойство 2. Градусная величина суммы углов равна сумме их градусных величин.

Градусную величину угла обычно обозначают также как и сам угол. Например, запись $\angle AOB = 30°$ означает, что величина угла AOB равна 30°. Говорят также, что угол AOB равен 30°.

Непосредственно из определений следует, что прямой угол равен 90°.

Для измерения величин углов применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является известный вам транспортир.

III. Закрепление нового материала

1. Постройте с помощью транспортира углы 30°, 60°, 110°, 150°.

2. В каких пределах может изменяться величина: а) острого угла; б) тупого угла?

Ответ. Острый угол меньше 90°, а тупой угол больше 90°, но меньше 180°.

3. Найдите один из смежных углов, если другой равен: а) 35°; б) 23°30'; в) 114°15'.

Ответ. а) 145°; б) 156°30'; в) 65°45'.

4*. Какой угол образуют между собой стрелки часов, когда показывают 1 час?

Ответ. 30°.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 5 учебника).

2. Решить задачи.

1) Некоторый угол равен 38°. Чему равен: а) вертикальный с ним угол; б) смежный с ним угол?

Ответ. а) 38°; б) 142°.

2) Какую часть прямого угла составляют углы, равные: а) 45°; б) 30°; в) 10°; г) 18°; д) 72°; е) 150°.

Ответ. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{4}{5}$; е) $1\frac{2}{3}$.

3) Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.

Ответ. 60°; 120°.

4)* На сколько градусов повернется часовая стрелка за 30 секунд?

Ответ. 0°15'.

3*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «История возникновения и развития проблемы измерения углов» (см. материал из рубрики «Исторические сведения» п. 5 учебника).

Урок 14

I. Математический диктант

Проводится на отдельных листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Единичный угол – это …

2. Для измерения величины данного угла *AOB* последовательно откладывают от …

3. Если единичный угол целиком укладывается в данном угле *n* раз с остатком, то …

4. Градусная величина суммы двух углов равна …

5. Угол *HPQ* острый. Это означает, что его градусная величина …

Вариант 2

1. Один градус равен …

2. Если единичный угол целиком укладывается в данном угле *AOB* *n* раз без остатка, то …

3. Единичный угол разбивается на 60 равных частей в случае, если …

4. Градусные величины равных углов …

5. Угол *RST* тупой. Это означает, что его градусная величина …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Решение задач

1. Луч *OC* лежит внутри угла *AOB*, равного 60°. Найдите углы *AOC* и *BOC*, если: а) угол *AOC* на 30° больше угла *BOC*; б) градусные меры углов *AOC* и *BOC* относятся как 2:3.

Ответ. а) 45°, 15°; б) 24°, 36°.

2. Найдите смежные углы, если: а) один из них на 30° больше другого; б) их разность равна 40°.

Ответ. а) 75° и 105°; б) 110° и 70°.

3. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?

Ответ. 30°, 150°, 150°.

4*. На сколько градусов повернется минутная стрелка за: а) 20 минут; б) 10 минут?

Ответ. а) 120°; б) 60°.

IV. Индивидуальное задание

Сообщение на тему "История возникновения и развития проблемы измерения углов". (Задание 3* из этапа IV урока 13.)

V. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 5 учебника).

2. Решить задачи.

1) Начертите на глаз углы 30°, 45°, 60°, 90°, 135° и проверьте с помощью транспортира.

2) Луч *OC* лежит внутри угла *AOB*, равного 60°. Найдите углы *AOC* и *BOC*, если угол *AOC* в два раза больше угла *BOC*.

Ответ. 40°, 20°.

3) Найдите смежные углы, если: а) один из них в три раза меньше другого; б) они равны.

Ответ. а) 45°, 135°; б) 90°, 90°.

4) Найдите смежные углы, если их градусные величины относятся как: а) 2:3; б) 11:25.

Ответ. а) 72°, 108°; б) 55°, 125°.

5)* Какой угол образуют часовая и минутная стрелки, когда часы показывают 2 часа 15 мин?

Ответ. 22°30'.

Урок 15

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаются четверо учащихся для опроса по теории.

Задание 1

1. Дайте определения угла и его элементов.
2. Дайте определение смежных углов.
3. Дайте определение единичного угла.
4. Дайте определения острого и тупого углов.

Задание 2

1. Дайте определения внутренней точки и внутреннего луча угла.
2. Дайте определения прямого угла, перпендикулярных прямых.
3. Какие углы называются равными?
4. Сформулируйте основные свойства – аксиомы равенства углов.

Задание 3

1. Дайте определение вертикальных углов.
2. Сформулируйте и докажите теорему о вертикальных углах.

Задание 4

1. Как измеряются углы?
2. Дайте определения суммы и разности углов.
3. Сформулируйте свойства градусной величины углов.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на местах.

Карточка

1) Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, равен 121°. Найдите другие углы.

Ответ. 121°, 59°, 59°.

2) Найдите смежные углы, если разность между ними равна 30°.

Ответ. 75°, 105°.

3)* На сколько градусов повернется часовая стрелка за 3 часа?

Ответ. 90°.

Задание для класса

1. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

Ответ. Два угла по 36° и два угла по 144°.

2. Даны три прямые, пересекающиеся в одной точке (рис. 50). Докажите, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ и найдите $\angle 3$, если $\angle 1+\angle 2=120°$.

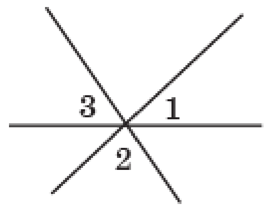


Рис. 50

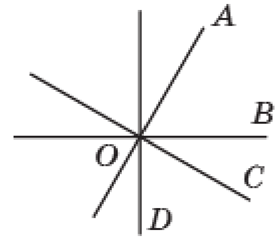


Рис. 51

Ответ. $\angle 3=60°$.

3. На рисунке 51 изображен $\angle AOB=60°$. Найдите угол между прямыми OC и OD, если $(OC)\perp(OA)$ и $(OD)\perp(OB)$.

Ответ. 60°.

4*. На какой угол повернется минутная стрелка часов в течение одной секунды?

Ответ. 6'.

К доске приглашаются четверо учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$).

$У_1$ – решает вместе с классом задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$, $У_4$ – воспроизводят решения домашних задач 3 и 4 (см. этап V урока 14).

Дополнительные вопросы

- Какие углы называются смежными?
- Какие углы называются вертикальными?
- Какие углы называются острыми, тупыми?
- Что принимается за единицу измерения величины угла?

II. Устная работа

1) Дан угол в 43°. Как при помощи одной линейки построить угол в 137°?

Ответ. Построить смежный угол.

2) Может ли сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, быть равной 150°?

Ответ. Да.

3) Разность двух смежных углов равна 90°. Найдите величину этих углов.

Ответ. 45°, 135°.

4) По рисунку 52 докажите, что $\angle NKO=\angle NKP$.

5) Почему нельзя обосновывать геометрические утверждения общего характера измерением с помощью соответствующих приборов?

6) На рисунке 53 $OA \perp OC$, $OB \perp OD$. Найдите равные углы.

Ответ. $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle AOB = \angle COD$.

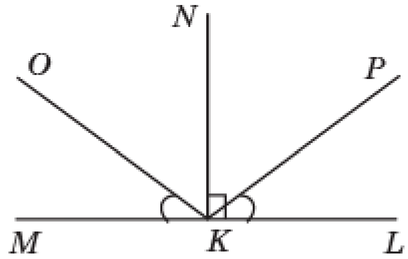


Рис. 52

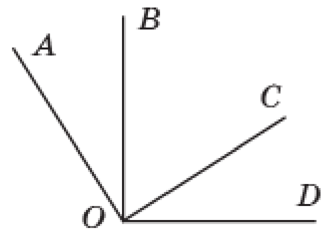


Рис. 53

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Верно ли утверждение: «Если сумма двух углов равна 180°, то они являются смежными»? Почему?

2. Найдите каждый из двух смежных углов, если один из них в четыре раза больше другого.

3. Развернутый угол разделен на три равные части. Найдите угол между биссектрисой средней части и прямой, образованной сторонами развернутого угла.

Вариант 2

1. Верно ли утверждение: «Если два угла равны, то они являются вертикальными»? Почему?

2. Найдите каждый из двух смежных углов, если один из них в три раза меньше другого.

3. Развернутый угол разделен на три равные части. Докажите, что биссектриса средней части перпендикулярна прямой, образованной сторонами развернутого угла

Ответы. Вариант 1. 1. Нет. 2. 36°, 144°. 3. 90°.

Вариант 2. 1. Нет. 2. 45°, 135°.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа.

V. Занимательный момент

Решение задачи 5* из необязательной части домашнего задания (см. этап V урока 14).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 5 учебника).

2. Решить задачи.

1) Отношение величин смежных углов равно 0,6. Найдите каждый угол.

Ответ. 67°30', 112°30'.

2) При пересечении двух прямых получаются две пары вертикальных углов. Сумма углов одной из этих пар составляет $\frac{2}{3}$ суммы углов другой пары. Найдите все данные углы.

Ответ. Два по 72° и два по 108°.

3) Прямой угол разделен на три равные части. Найдите угол между биссектрисами крайних углов.

Ответ. 60°.

4)* Докажите, что на компасе биссектриса угла между *С* (севером) и *В* (востоком) и биссектриса между *Ю* (югом) и *З* (западом) лежат на одной прямой.

Решение. Соответствующие биссектрисы образуют развернутый угол.

п. 6. Ломаные и многоугольники
(уроки 16, 17, 18)

Цель – сформировать понятия ломаной, ее элементов, длины ломаной, определить виды ломаных; ввести понятия многоугольника, его элементов, выпуклого многоугольника.

Урок 16

I. Устная работа

1) Как перегибанием прямоугольного листа бумаги получить прямой угол?

Ответ. Прямоугольный лист бумаги нужно перегнуть дважды, совмещая противоположные края.

2) Разность двух смежных углов равна 50°. Найдите эти углы.

Ответ. 65° и 115°.

3) Один из смежных углов увеличился на 20°. На сколько градусов изменилась разность смежных углов?

Ответ. На 40°.

4) Сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306°. Найдите эти углы.

Ответ. 54°, 54°, 126°, 126°.

5) Может ли сумма трех углов из четырех, образованных при пересечении двух прямых, быть равной: а) 150°; б) 180°; в) 240°?

Ответ. а), б) Нет; в) да.

6) Какой угол составляют между собой направления на: а) запад - север; б) юг - север; в) юг – северо-восток; г) северо-запад – юго-восток?

Ответ. а) 90°; б) 180°; в) 135°; г) 180°.

II. Новый материал

Рассмотрим рисунки 54, а, б, в. На каждом из них изображены три отрезка, но в каждом случае они расположены по-разному. В первом они имеют один общий конец, во втором не имеют общих точек, в третьем расположены таким образом, что конец первого отрезка является началом второго, конец второго – началом третьего отрезка.

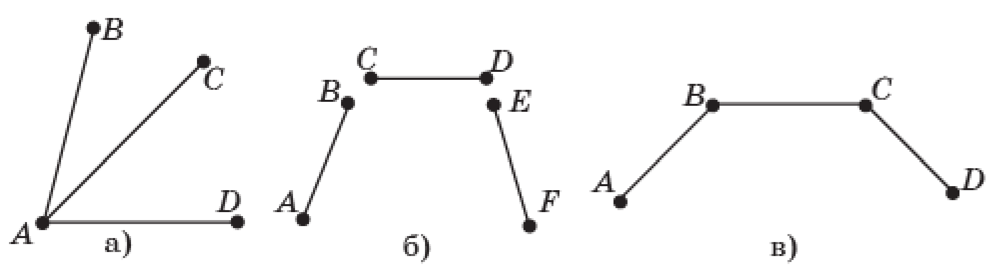


Рис. 54

Фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго – началом третьего и т.д., называется ***ломаной линией*** или просто ***ломаной***. Отрезки называются ***сторонами ломаной***, а их концы – ***вершинами ломаной***.

Ломаная обозначается последовательным указанием ее вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2\ldots A_n$.

Вопрос

- Как вы думаете, что называется длиной ломаной?

Ответ. ***Длиной ломаной*** называется сумма длин ее сторон.

Теперь обратимся к рисункам 55, а-г. В случае а) стороны ломаной не имеют точек самопересечения, в случае б) стороны A_1A_2 и A_3A_4 пересекаются.

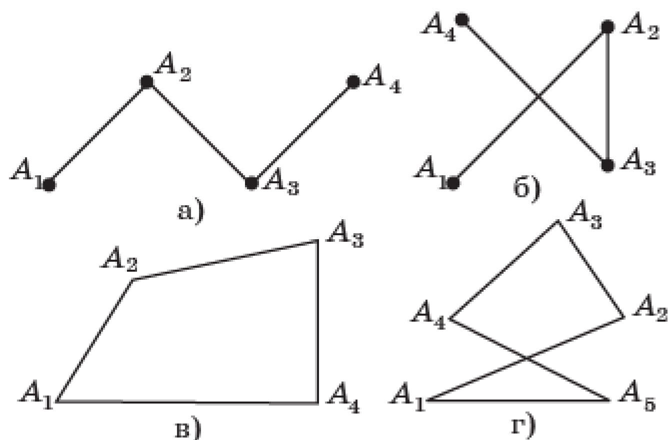


Рис. 55

Ломаная называется ***простой***, если она не имеет точек самопересечения.

Ломаная называется ***замкнутой***, если начало ее первого отрезка совпадает с концом последнего. Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют простой.

Вопросы

- На рисунке 55 назовите: а) простые ломаные; б) непростые ломаные.

- Чем отличаются ломаные на рисунках 55, а, в и 55, б, г?

- На сколько частей разбивают плоскость простые замкнутые ломаные на рисунке 56, а-г? (Ответ. На две части.)

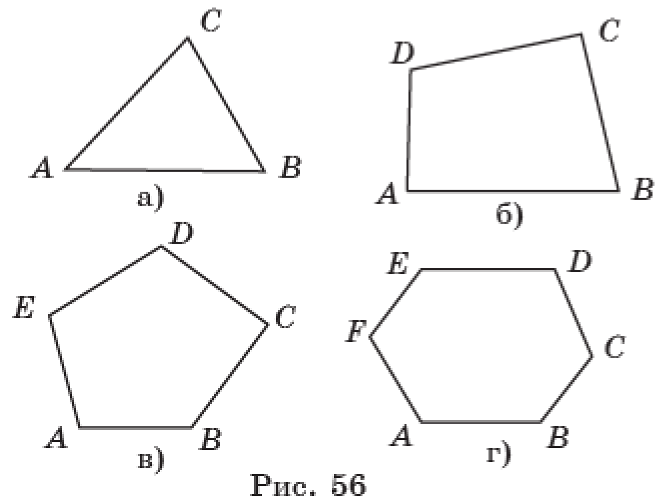


Рис. 56

- Как назвать фигуру, состоящую из простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью плоскости?

Многоугольником называется фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью плоскости. Вершины ломаной называются ***вершинами многоугольника***, стороны ломаной - ***сторонами многоугольника***, а углы, образованные соседними сторонами - ***углами многоугольника***. Точки многоугольника, не принадлежащие его сторонам, называются ***внутренними***.

Вопросы

- Как называется длина ломаной, ограничивающей многоугольник?

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

- Чем отличаются многоугольники, изображенные на рисунке 56?

Многоугольники подразделяются на ***треугольники*** – многоугольники с тремя углами, ***четырехугольники*** – многоугольники с четырьмя углами и т.д. (рис. 56). Многоугольник, у которого *n* углов называется ***n-угольником***.

III. Закрепление нового материала

1. Изобразите ломаную: а) простую незамкнутую; б) непростую замкнутую; в) простую замкнутую; г) непростую незамкнутую.

2. Определите число сторон простой ломаной, если она имеет: а) 5 вершин; б) 22 вершины.

Ответ. Замкнутая: а) 5; б) 22. Незамкнутая: а) 4; б) 21.

3. Простая ломаная имеет: а) 7 сторон; б) 36 сторон. Найдите количество её вершин.

Ответ. Замкнутая: а) 7; б) 36. Незамкнутая: а) 8; б) 37.

4. Какая имеется зависимость между числом вершин и сторон многоугольника?

Ответ. Число вершин равно числу сторон.

5*. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, у которой 4 стороны?

Ответ. 1.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из необязательной части домашней работы (см. этап VI урока 15).

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 6 учебника).

2. Решить задачи.

1) Изобразите ломаную: а) простую незамкнутую 6-стороннюю; б) непростую замкнутую 5-стороннюю.

2) Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у нее сторон?

Ответ. Замкнутая – 10 сторон; незамкнутая – 9 сторон.

3) Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у нее вершин?

Ответ. 20 вершин.

4)* Нарисуйте замкнутую 6-стороннюю ломаную, пересекающую каждую свою сторону ровно один раз.

Решение показано на рисунке 57.

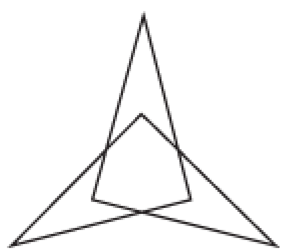


Рис. 57

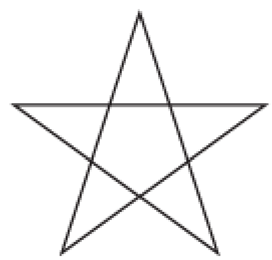


Рис. 58

5)* Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из 5 сторон?

Решение. Рассмотрим какую-нибудь сторону ломаной. Ей может принадлежать не больше 2 точек самопересечения. Следовательно, общее число точек самопересечения не может превосходить $\frac{5\cdot 2}{2}=5$ (точек). Примером 5-сторонней ломаной с 5 точками самопересечения является многоугольник, изображенный на рисунке 58.

Урок 17

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Ломаной называется …
2. Ломаная называется простой, если …
3. Ломаная называется незамкнутой, если …
4. Простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на …
5. Периметром многоугольника называется …
6. Десятиугольником называется …

Вариант 2

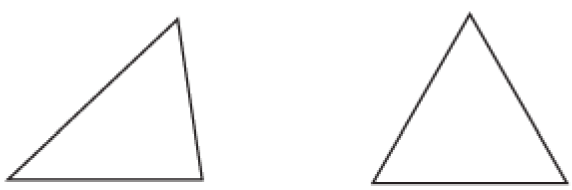
1. Ломаной линией называется …
2. Ломаная называется замкнутой, если …
3. Ломаная называется непростой, если …
4. Многоугольником называется фигура, образованная …
5. Длиной ломаной называется …
6. Восьмиугольником называется …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

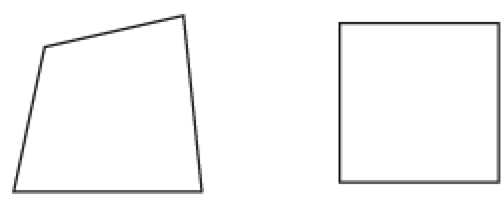
III. Новый материал

Сравним между собой треугольники, четырехугольники, пятиугольники, шестиугольники, изображенные соответственно на рисунках 59–62.



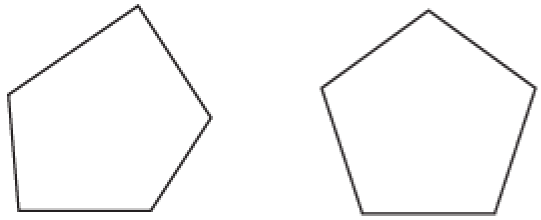
а) б)

Рис. 59



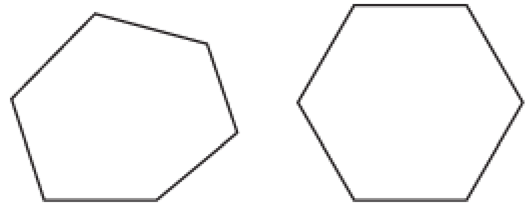
а) б)

Рис. 60



а) б)

Рис. 61



а) б)

Рис. 62

В случаях б) на всех рисунках изображены многоугольники, имеющие равные стороны и равные углы. Такие многоугольники называются правильными.

Многоугольник называется ***правильным***, если у него все стороны равны и все углы равны.

На рисунках 59, б – 62, б изображены соответственно правильные треугольник, четырехугольник (квадрат), пятиугольник и шестиугольник.

Теперь обратимся к рисунку 63.

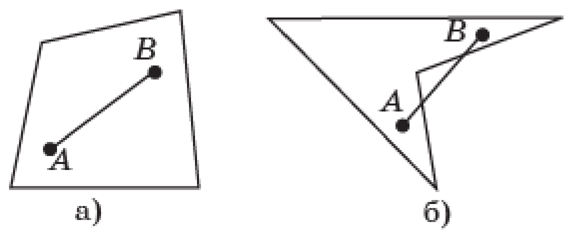


Рис. 63

Вопрос

- Каким свойством отличаются четырехугольники, изображенные на нем?

После обсуждения ответа на данный вопрос даем определение.

Многоугольник называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунках 63, а, б изображены соответственно выпуклый и невыпуклый четырехугольники.

Обратимся к рисунку 64. Здесь в каждом представленном многоугольнике проведены отрезки, соединяющие несоседние вершины. Они называются диагоналями многоугольников.

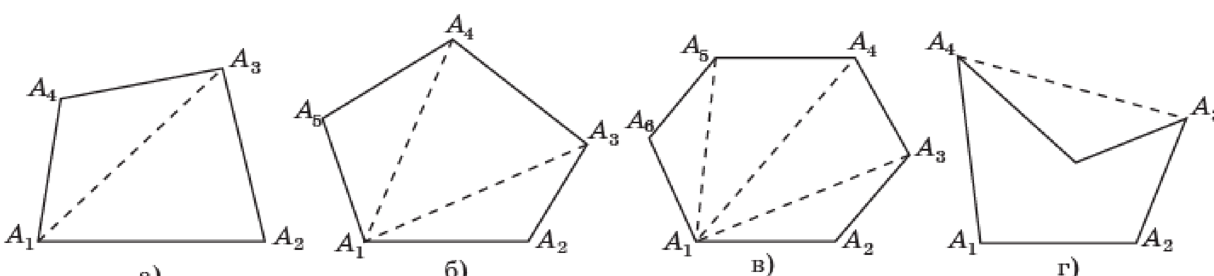


Рис. 64

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины.

Видим, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 64, г, диагональ A_3A_4).

Иногда многоугольником называется замкнутая ломаная, у которой возможны точки самопересечения (рис. 65, а). К числу таких многоугольников относятся правильные звездчатые многоугольники, у которых все стороны и все углы равны (рис. 65, а, б, в).

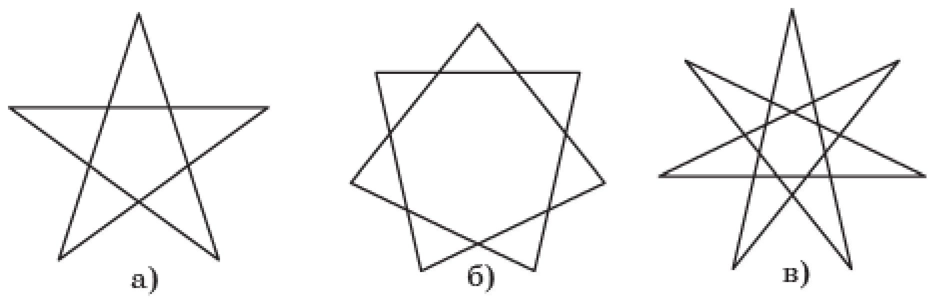


Рис. 65

IV. Закрепление нового материала

1. На рисунке 66 найдите: а) многоугольники; б) правильные многоугольники; в) выпуклые многоугольники; г) невыпуклые многоугольники.

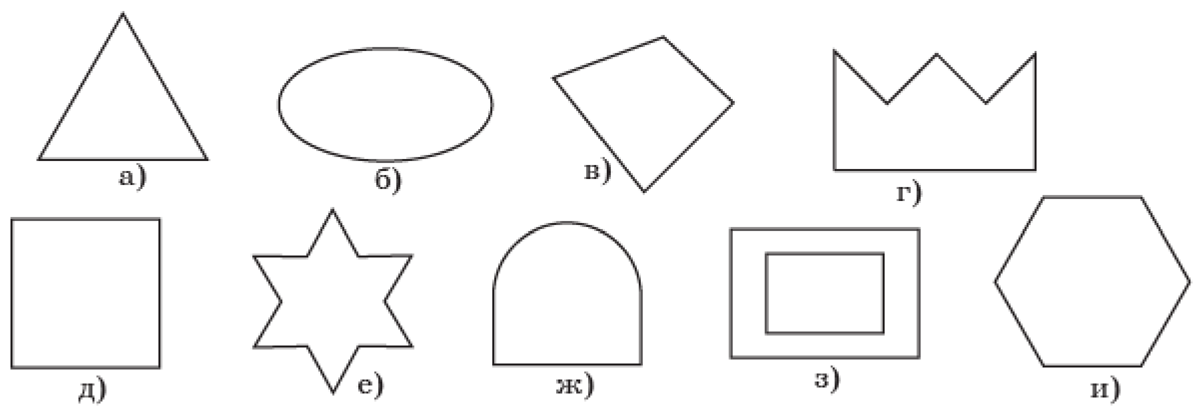


Рис. 66

Ответ. а) Рисунки а), в) г), д), е), и); б) рисунки а), д), и); в) рисунки а), в), д), и); г) рисунки г), е).

2. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: а) треугольника; б) четырехугольника; в) пятиугольника?

Ответ. а) 0; б) 1; в) 2.

3. На сколько треугольников делится выпуклый: а) четырехугольник; б) пятиугольник своими диагоналями, проведенными из одной вершины?

Ответ. а) 2; б) 3.

4*. Может ли многоугольник иметь ровно 10 диагоналей?

Ответ. Нет.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 6 учебника).

2. Решить задачи.

1) Могут ли четыре точки на плоскости быть вершинами разных четырехугольников: а) выпуклых; б) невыпуклых?

Ответ. а) Нет; б) да, решение показано на рисунке 67.

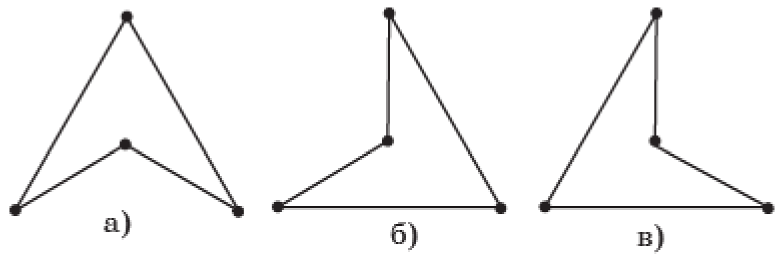


Рис. 67

2) Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: а) 6-угольника; б) 7-угольника; в) 8-угольника; в)* n-угольника?

Ответ. а) 3; б) 4; в) 5; г) n-3.

3) Сколько диагоналей имеет: а) 3-угольник; б) 4-угольник; в) 5-угольник; г) 6-угольник; д)* n-угольник?

Ответ. а) 0; б) 2; в) 5; г) 9; д) $\frac{n(n-3)}{2}$.

4)* Может ли прямая, не проходящая через вершины многоугольника, пересекать его стороны в нечетном числе точек?

Решение. Нет. Прямая разбивает плоскость на две области. Назовем одну из них верхней, а другую – нижней. Совершим обход ломаной, выйдя из некоторой ее точки, принадлежащей верхней области, и вернувшись в ту же точку (рис. 68).

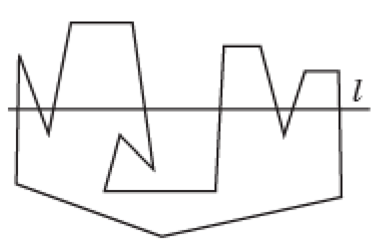


Рис. 68

При этом мы переходим из верхней полуплоскости в нижнюю и обратно, только проходя через одну из точек пересечения прямой с ломаной. Так как мы вернемся в ту же точку верхней полуплоскости, из которой начали обход, то для каждого перехода из верхней полуплоскости в нижнюю имеется переход из нижней полуплоскости в верхнюю, т.е. число переходов четно. Следовательно, число точек пересечения прямой и ломаной четно.

5)* Может ли прямая иметь нечетное число общих точек с замкнутой ломаной?

Ответ. Да, если прямая проходит через нечетное число вершин этой ломаной (рис. 69).

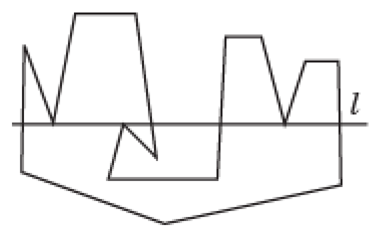


Рис. 69

Урок 18

I. Проверка домашнего задания

Четверых учащихся приглашаем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 3

1. Дайте определения ломаной, ее элементов, длины ломаной.
2. Дайте определения простой и непростой ломаных.
3. Дайте определение правильного многоугольника.

Задания 2, 4

1. Дайте определения многоугольника, его элементов, периметра.
2. Дайте определения выпуклого и невыпуклого многоугольников.
3. Дайте определения замкнутой и незамкнутой ломаных.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Изобразите непростую замкнутую ломаную.

2) Найдите число треугольников, на которые разбивается выпуклый шестиугольник диагоналями, проведенными из одной его вершины.

Ответ. 4

3) Существует ли многоугольник, число диагоналей которого равно числу его сторон?

Ответ. Да, 5-угольник.

Задание для класса

1. Изобразите невыпуклый: а) 5-угольник; б) 6-угольник.

2. Найдите число треугольников, на которые разбивается выпуклый семиугольник диагоналями, проведенными из одной его вершины.

Ответ. 5.

3. Найдите число диагоналей семиугольника.

Ответ. 14.

4*. Найдите число треугольников, на которые разбивается выпуклый n-угольник диагоналями, проведенными из одной его вершины.

Ответ. n-2.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – решает классную задачу 2.

$У_2$ – решает классную задачу 3.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3) из домашней работы (см. этап V урока 17).

Дополнительные вопросы

- Дайте определение ломаной.
- Дайте определение многоугольника.
- Дайте определение правильного многоугольника.

II. Устная работа

1) Колесо имеет восемь спиц. Чему равен угол между соседними спицами?

Ответ. 1) 45°.

2) Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах, показывающих: а) 6 ч; б) 5 ч?

Ответ. а) 180°; б) 150°.

3) Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две части?

Ответ. Нет (рис. 65).

4) Какая зависимость между числом вершин, сторон и углов многоугольника?

Ответ. Многоугольник имеет равное количество вершин, сторон и углов.

5) Может ли выпуклый многоугольник иметь 6 диагоналей?

Ответ. Нет, у пятиугольника 5 диагоналей, а у шестиугольника уже 9 диагоналей.

6) Выпуклый многоугольник имеет 14 диагоналей. Сколько у него сторон?

Ответ. 7.

III. Подготовка к контрольной работе

1. На отрезке AB длиной 48 см дана точка C, которая делит его на две части, одна из которых, AC, в 7 раз короче другой. Найдите длины каждой части.

Ответ. 6 см, 42 см.

2. При пересечении двух прямых один из образовавшихся углов равен 37°. Найдите остальные углы.

Ответ. 37°, 143°, 143°.

3. На сколько треугольников делится выпуклый семиугольник диагоналями, проведенными из одной его вершины?

Ответ. 5.

4. Сколько диагоналей у выпуклого восьмиугольника?

Ответ. 20.

IV. Занимательный момент

Решение задач 4*, 5* из необязательных частей домашних заданий уроков 16 и 17.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 1 - п. 6 учебника).

2. Решить задачи.

1) Изобразите несколько ломаных: а) простых; б) незамкнутых; в) незамкнутых простых.

2) Изобразите выпуклый шестиугольник и невыпуклый пятиугольник.

3) Существует ли многоугольник, число диагоналей которого: а) больше; б) меньше; в) равно числу его сторон?

Ответ. а) Да, например, у шестиугольника 9 диагоналей; б) да, у четырехугольника 2 диагонали; в) да, у пятиугольника 5 диагоналей.

4) Сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых равна 296°. Найдите эти углы.

Ответ. 64°, 64°, 116°, 116°.

5)* Может ли прямая пересекать все стороны: а) треугольника; б) выпуклого n-угольника?

Ответ. а), б) Нет.

Урок 19

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. На отрезке CD длиной 24 см отмечена точка H. Известно, что отрезок CH в три раза длиннее отрезка DH. Найдите длины отрезков CH и DH.

2. Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 60°. Определите все углы, образованные при пересечении данных прямых.

3. Найдите число сторон выпуклого многоугольника, у которого 9 диагоналей.

4*. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого n-угольника.

Вариант 2

1. На отрезке EF взята точка L. Найдите длины отрезков EL и FL, если отрезок EL на 6 см короче отрезка FL и длина отрезка EF равна 36 см.

2. Сумма трех углов, которые образуются при пересечении двух прямых, равна 300°. Определите все углы, образованные при пересечении данных прямых.

3. Найдите число сторон выпуклого многоугольника, у которого 14 диагоналей.

4*. На сколько треугольников разбивается выпуклый n-угольник диагоналями, проведенными из одной его вершины?

п. 7. Треугольники
(уроки 20, 21)

Цель – сформировать понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника, определить понятие равенства треугольников, познакомить учащихся с основным свойством равенства треугольников.

Урок 20

I. Анализ контрольной работы № 1

II. Устная работа

1) Какая геометрическая фигура называется многоугольником?

2) Какой многоугольник называется треугольником?

3) Сколько у треугольника вершин, сторон, углов?

4) Может ли треугольник быть невыпуклым?

5) Как определяется периметр треугольника?

6) Периметр треугольника равен 25 см. Известно, что у него две стороны равны, а третья в два раза короче каждой из этих сторон. Найдите стороны треугольника.

Ответ. 10 см, 10 см, 5 см.

III. Новый материал

Изобразим треугольник *ABC* (рис. 70) и разделим сторону *BC* пополам (с помощью линейки), получим точку *M* такую, что *BM*=*CM*. Соединим точку *A* с точкой *M*. Отрезок *AM* называется медианой треугольника.

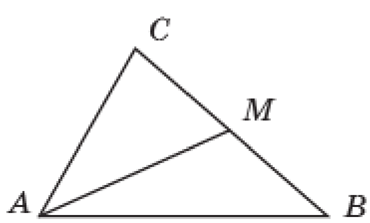


Рис. 70

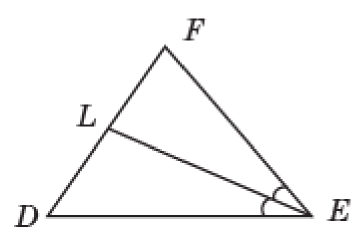


Рис. 71

Предлагаем учащимся сформулировать определение медианы треугольника.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Вопросы

- Сколько у треугольника медиан?

- Может ли медиана проходить вне треугольника?

Ответ. Нет, не может.

Изобразим треугольник *DEF* (рис. 71). С помощью транспортира проведем биссектрису угла *E*. Пусть *L* – точка ее пересечения со стороной *DF*. Отрезок *EL* называется биссектрисой треугольника.

Предлагаем учащимся сформулировать определение биссектрисы треугольника.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны.

Вопросы

- Сколько у треугольника биссектрис?

- Может ли биссектриса треугольника проходить вне треугольника?

Ответ. Нет, не может.

- В чем отличие биссектрисы треугольника от биссектрисы угла?

Ответ. Биссектриса треугольника – это отрезок, а биссектриса угла – это луч.

Изобразим треугольник *MKL* (рис. 72). С помощью угольника проведем отрезок $KH \perp ML$, где $H \in ML$. Такой отрезок называется высотой треугольника.

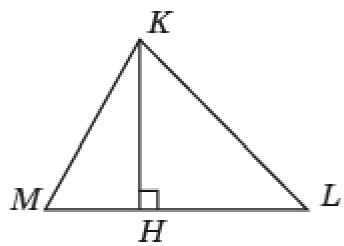


Рис. 72

Предлагаем учащимся сформулировать определение высоты треугольника.

Высотой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны или ее продолжения и перпендикулярный этой стороне.

Вопросы

- Сколько высот у треугольника?

- Может ли высота треугольника проходить вне треугольника?

Ответ. Да, может (рис. 73).

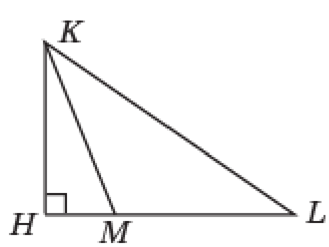


Рис. 73

IV. Закрепление нового материала

1. Нарисуйте треугольник с тупым углом и проведите из вершины тупого угла медиану, биссектрису и высоту.

2. Может ли совпадать со стороной треугольника его: а) медиана; б) биссектриса; в) высота?

Ответ. а), б) Нет; в) может (рис. 74, $\angle C = 90°$).

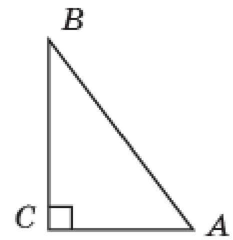


Рис. 74

3. Сторона AB треугольника ABC равна 17 см. Сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

Ответ. 75 см.

4*. Докажите, что если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает и одну из других его сторон.

Решение. Пусть прямая l пересекает сторону AB треугольника ABC в точке E (рис. 75). Тогда точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно l. Третья вершина C треугольника лежит или с A, или с B в одной полуплоскости, например, с A. Значит, прямая l пересекает отрезок BC и не пересекает отрезок AC (рис. 75, а). Если C лежит в одной полуплоскости с B, то l пересекает AC и не пересекает BC (рис. 75, б).

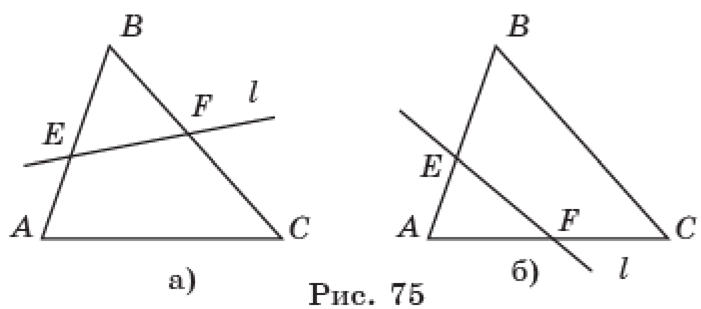


Рис. 75

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 7 учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте треугольник, у которого все углы острые. Проведите из какой-нибудь его вершины медиану, биссектрису и высоту. Сделайте соответствующие записи.

2) Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

Ответ. 12,7 см и 17,3 см.

3) Периметр треугольника равен 54 см. Найдите его стороны, если они относятся как 2:3:4.

Ответ. 12 см, 18 см, 24 см.

4)* Дан треугольник ABC. На стороне AC взята точка B_1, а на стороне BC – точка A_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются.

Решение. Проведем прямую BB_1. Рассмотрим луч BB_1, поскольку он является внутренним лучом угла ABC, отрезки BA и BC, за исключением точки B, лежат в разных полуплоскостях относительно BB_1, в том числе и точки A и A_1. Значит, отрезок AA_1 пересекает отрезок BB_1.

5)* Докажите, что у выпуклого многоугольника нет углов, больших развернутого.

Решение. Пусть у многоугольника $ABCDEF\ldots$ угол C больше развернутого, т.е. $\angle BCD > 180^\circ$. Тогда его дополнение до полного угла будет меньше 180°, и диагональ BD не будет содержаться в многоугольнике. Следовательно, многоугольник не будет выпуклым.

Урок 21

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Треугольником называется …
2. Медианой треугольника называется …
3. Биссектрисой треугольника называется …
4. Количество высот треугольника равно …
5. Высота треугольника совпадает с его стороной, если …

Вариант 2

1. Периметром треугольника называется …
2. Высотой треугольника называется …
3. Биссектрисой угла называется …
4. Количество медиан треугольника равно …
5. Высота треугольника проходит вне треугольника, если …

II. Проверка математического диактанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 76). Известно, что $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$. Делаем запись. Кроме этого, известно также, что равны их углы между соответствующими сторонами. Как понимать в данном случае слова «соответствующие стороны»? Это означает "равные стороны".

Делаем запись: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

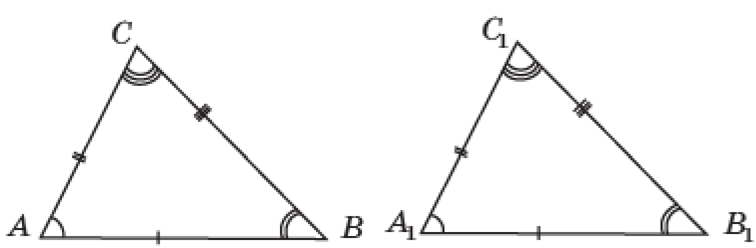


Рис. 76

Вопрос

- Как вы думаете, будут ли равны данные треугольники?

Два треугольника называются ***равными***, если стороны одного соответственно равны сторонам другого и углы, заключенные между соответственно равными сторонами, равны.

Таким образом, если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства: $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$; $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, то эти треугольники равны и их равенство обозначают $\Delta\ ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

Формулируем основное свойство – аксиому равенства треугольников.

Каковы бы ни были треугольник и луч на плоскости, существует треугольник, равный данному, у которого первая вершина совпадает с вершиной луча, вторая - лежит на луче, а третья расположена в заданной полуплоскости относительно луча.

Другими словами, это свойство означает, что в заданной полуплоскости относительно заданного луча можно отложить треугольник, равный данному, у которого одна вершина совпадает с вершиной луча, а дугая - принадлежит лучу (рис. 77).

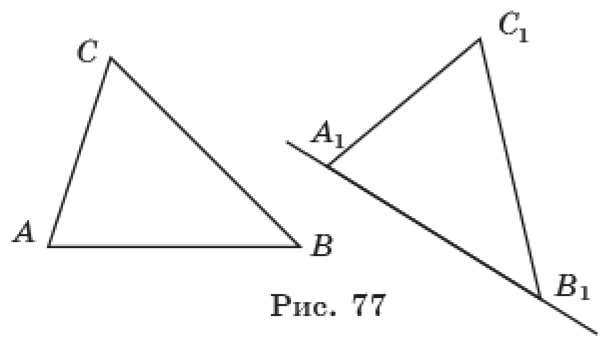


Рис. 77

IV. Закрепление нового материала

1. Даны равные треугольники ABC и MKL. Какие стороны и углы треугольников равны? Сделайте соответствующие записи.

При решении данной задачи следует обратить внимание учащихся на удобную последовательность записи вершин треугольников, а именно, запись $\Delta ABC=\Delta MKL$ означает, что $AB=MK$, $AC=ML$, $BC=KL$; $\angle A=\angle M$, $\angle B=\angle K$, $\angle C=\angle L$.

2. Треугольники ABC и EFG равны. Известно, что AB = 5 см, BC = 6 см, AC = 7 см. Найдите стороны треугольника EFG.

Ответ. EF=5 см, FG= 6 см, EG= 7 см.

3. Треугольники ABC и EFG равны. Известно, что $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. Найдите углы треугольника EFG.

Ответ. $\angle E$=40°, $\angle F$=60°, $\angle G$=80°.

4*. Может ли у многоугольника быть 15 диагоналей?

Ответ. Нет.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 7 учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте треугольник с прямым углом и проведите из вершины прямого угла медиану, биссектрису и высоту.

2) Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что AB=5 см, QR=6 см, XZ=7 см. Найдите остальные стороны каждого треугольника.

Ответ. $BC=YZ$= 6 см, $AC=PR$=7 см, $PQ=XY$=5 см.

3) У треугольника равны две стороны и каждая из них составляет $\frac{2}{7}$ его периметра. Третья сторона равна 21 см. Найдите периметр данного треугольника.

Ответ. $21=\frac{3}{7}P$, где P – периметр треугольника. Таким образом, P=49 см.

4)* На какое наибольшее число частей разбивают плоскость два треугольника?

Ответ. На 8 частей (рис. 78).

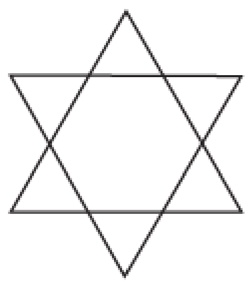


Рис. 78

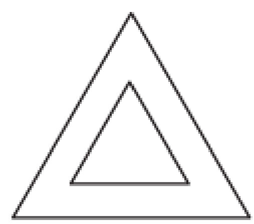


Рис. 79

5)* Приведите пример, когда общей частью (пересечением) двух треугольников является треугольник.

Ответ. См. рисунок 79.

3. Принести транспортир.

п. 8. Первый признак равенства треугольников (уроки 22, 23, 24)

Цель – сформулировать и доказать теорему – первый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними), научиться применять ее при решении задач.

Урок 22

I. Устная работа

1) Назовите все треугольники, изображенные на рисунке 80.

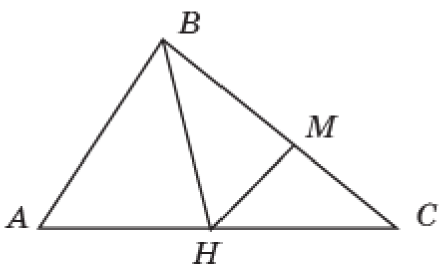


Рис. 80

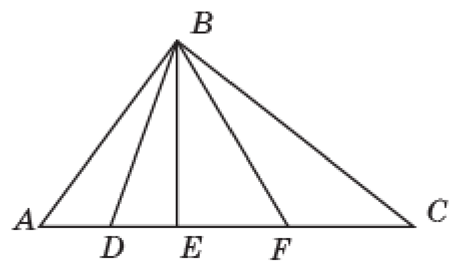


Рис. 81

2) Сколько треугольников изображено на рисунке 81?

Ответ. 10.

3) Можно ли для всех треугольников, изображенных на рисунке 81, провести общую высоту?

Ответ. Да, из вершины B.

4) Где расположена точка пересечения высот прямоугольного треугольника?

Ответ. В вершине прямого угла.

5) В чем заключается основное свойство - аксиома равенства треугольников?

6) и 7) Задачи соответственно 2) и 3) из домашней работы (см. этап V урока 21).

II. Новый материал

Начнем с лабораторной работы. Построим с помощью транспортира $\angle A=40°$ (рис. 82). На его сторонах отложим отрезки $AB=6$ см и $AC=4$ см. Теперь построим $\angle A_1=40°$ (рис. 83) и на его соответствующих сторонах отложим отрезки $A_1B_1=6$ см и $A_1C_1=4$ см. Соединим точки B и C, B_1 и C_1. Мы получили треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны по две соответствующие стороны и углы между ними. Будут ли равны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$?

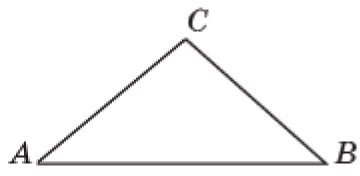


Рис. 82

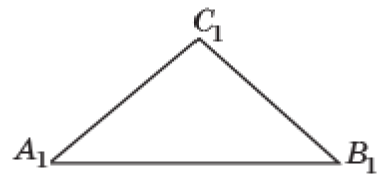


Рис. 83

Для ответа на данный вопрос нужно проверить, что $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B$, $\angle C=\angle C_1$. Проверим это опытным путем с помощью линейки и транспортира. Делаем предположение о равенстве треугольников.

Таким образом, убеждаемся, что для установления равенства треугольников оказывается необязательно проверять равенство всех пар сторон и углов, а достаточно проверить равенство только некоторых из них. Соответствующие теоремы называются признаками равенства треугольников.

Теорема. (Первый признак равенства треугольников.) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 84);

$AB= A_1B_1$, $AC=A_1C_1$;

$\angle A=\angle A_1$.

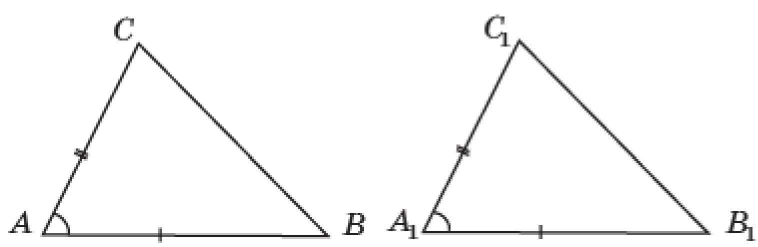


Рис. 84

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 в полуплоскости, определяемой вершиной C_1. При этом вершина A совместится с вершиной A_1. В силу равенства сторон AB и A_1B_1 вершина B совместится с вершиной B_1. В силу равенства углов A и A_1 сторона AC пойдет по стороне A_1C_1, и в силу равенства этих сторон вершина C совместится с вершиной C_1. Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A_1B_1C_1$. Следовательно, эти треугольники равны.

III. Закрепление нового материала

Задачи по готовым чертежам.

1. Точка O – середина отрезков KL и MN (рис. 85). Докажите, что $\Delta KOM = \Delta LON$.

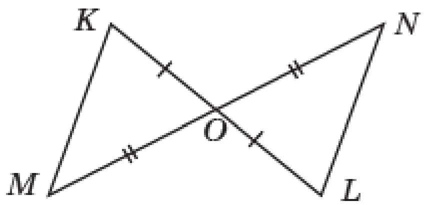


Рис. 85

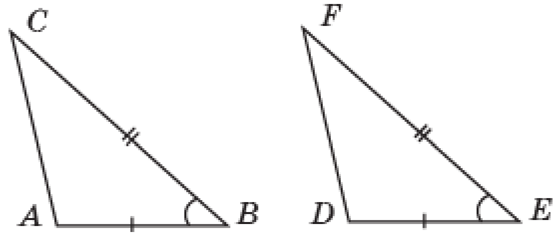


Рис. 86

2. В треугольниках ABC и DEF (рис. 86) $AB=DE$, $BC=EF$, $\angle B=\angle E$. Докажите, что $AC=DF$.

3. В треугольниках HPO и SPO (рис. 87) $HP = SP$ и $\angle HPO=\angle SPO$. Докажите, что $\Delta HPO=\Delta SPO$.

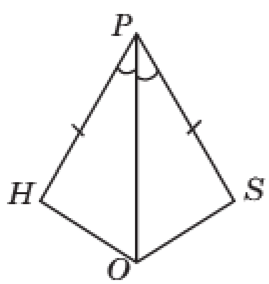


Рис. 87

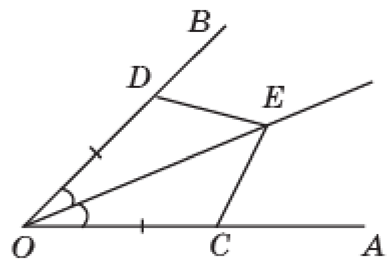


Рис. 88

4*. Докажите, что в правильном четырехугольнике диагонали равны.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 8 учебника).

2. Решить задачи.

1) Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причем $OB = OC$. Докажите равенство треугольников AOC и DOB.

2) На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD (рис. 88). Произвольная точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D. Докажите, что $EC= ED$.

3) На рисунке 89 $AO=OB$ и $DO=OC$. Докажите равенство отрезков AD и BC.

4)* Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 90), выбирают какую-нибудь точку C, для которой можно измерить расстояния AC и BC, и откладывают отрезки $CD=AC$ и $CE=BC$. Тогда расстояние между точками E и D будет равно искомому расстоянию. Объясните, почему.

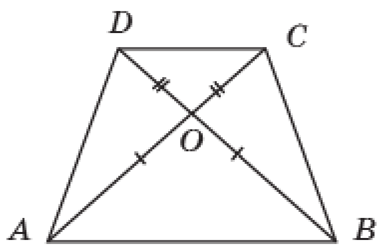


Рис. 89

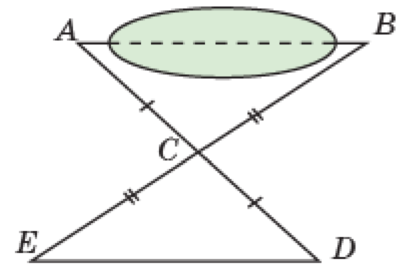


Рис. 90

5)* На какое наибольшее число частей разбивают плоскость три треугольника?

Ответ. На 20 частей (рис. 91).

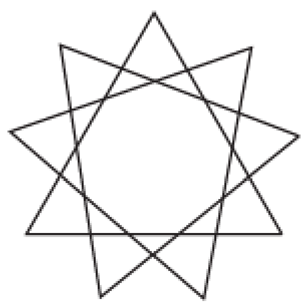


Рис. 91

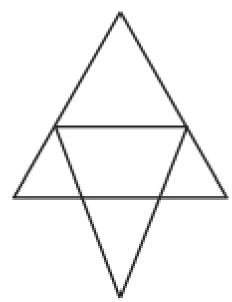


Рис. 92

6)* Приведите пример, когда общей частью (пересечением) двух треугольников является четырехугольник.

Ответ. См. рисунок 92.

Урок 23

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Два треугольника называются равными, если …
2. Пусть треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ равны по первому признаку. Тогда у них $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и …
3. Два правильных треугольника равны, если …
4. При доказательстве первого признака равенства треугольников используется аксиома …
5. Медианой треугольника называется …

Вариант 2

1. К элементам треугольника относятся …
2. Пусть треугольники COD и $C_1O_1D_1$ равны по первому признаку. Тогда у них $CO = C_1O_1$, $\angle O = \angle O_1$ и …
3. Первый признак равенства треугольников заключается в том, что …
4. Свойство равенства треугольников, которое принимается за аксиому, заключается в том, что …
5. Высотой треугольника называется …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Решение задач

1. Через точку O, середину отрезка AB, проведена прямая, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что каждая точка C этой прямой одинаково удалена от точек A и B.

2. На стороне AB треугольника ABC взята точка D, а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1. Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

3. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

4*. По рисунку 93 докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный.

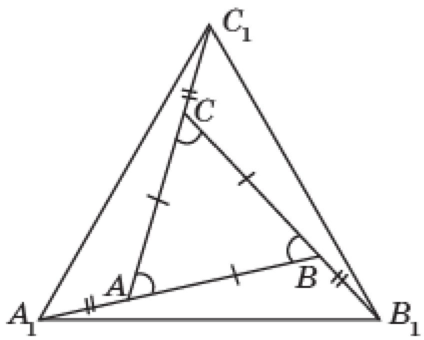


Рис. 93

IV. Занимательный момент

Решение задач 4*, 5*, 6* из необязательной части домашнего задания урока 22.

V. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 8 учебника).

2. Решить задачи.

1) Медиана AD треугольника ABC продолжена за основание BC на отрезок DE, равный отрезку AD, и точка E соединена с точкой C. Найдите величину угла ACE, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

Ответ. $\angle ACE = 96°$.

2) На рисунке 94 $AC=BC$, $CD=CE$, $\angle ACB=\angle DCE$. Найдите на этом рисунке равные треугольники.

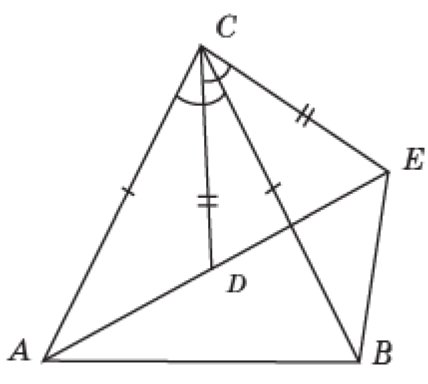


Рис. 94

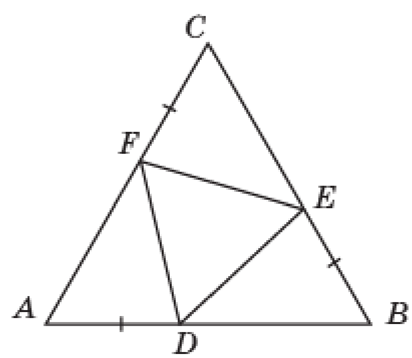


Рис. 95

Ответ. Треугольники ADC и BEC.

3) На сторонах правильного треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF (рис. 95). Точки D, E и F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF правильный.

4)* Приведите пример, когда общей частью (пересечением) двух треугольников является шестиугольник.

Ответ. См. рисунок 96.

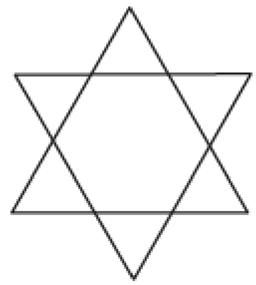


Рис. 96

Урок 24

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаем шестерых учащихся для опроса по теории.

Задания 1, 3, 5

1. Дайте определение треугольника.
2. Сформулируйте теорему «Первый признак равенства треугольников».
3. Запишите условие и заключение этой теоремы.

Задания 2, 4, 6

Докажите теорему «Первый признак равенства треугольников».

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих на местах.

Карточка

1) $\Delta CDE=\Delta XYZ$. Запишите равенство соответствующих элементов.
2) Будут ли треугольники, изображенные на рисунке 97, равны? Почему?
3) Найдите на рисунке 98 пары равных треугольников и запишите их.

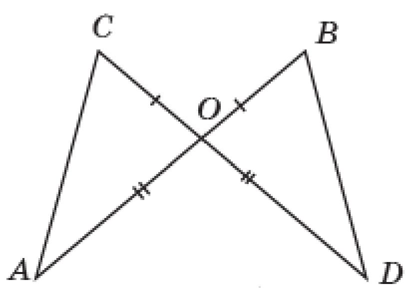


Рис. 97

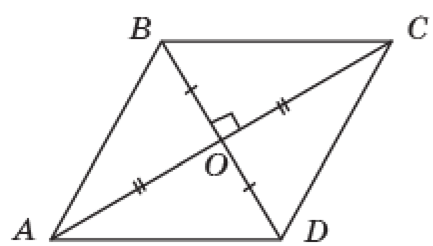


Рис. 98

Задание для класса

1. Дан треугольник KLM (рис. 99): $KL=ML$, $KE=MF$, LN – медиана треугольник KLM. Докажите, что LN – медиана треугольника ELF.

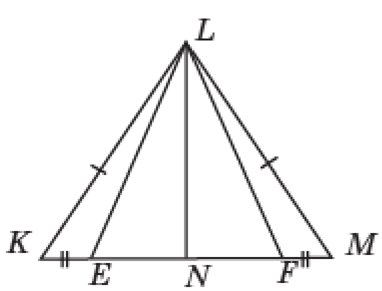


Рис. 99

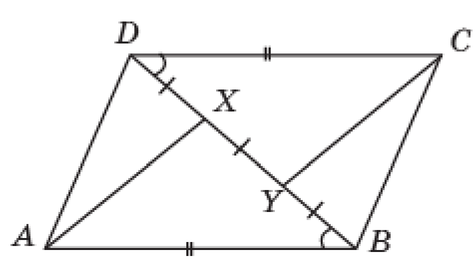


Рис. 100

2. Дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 100). Диагональ BD точками X и Y разделена на три равные части, $AB = CD$, $\angle CDB = \angle ABD$. Докажите равенство отрезков AX и CY.

3*. Сколько треугольников изображено на рисунке 101?

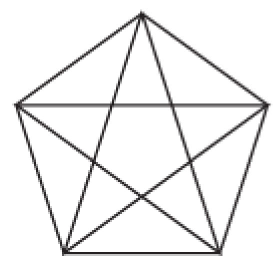


Рис. 101

Ответ. 35.

К доске приглашаем четверых учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

$У_3$, $У_4$ – воспроизводят решения задач 2) и 3) из домашнего задания (см. этап V урока 23).

Дополнительные вопросы

- Сформулируйте первый признак равенства треугольников.
- Дайте определение медианы треугольника.
- Дайте определение биссектрисы треугольника.
- Дайте определение высоты треугольника.

II. Устная работа

1) Равны ли треугольники ABC и EDF (рис. 102), если $AB=ED$, $AC=FE$ и $\angle A = \angle E$?

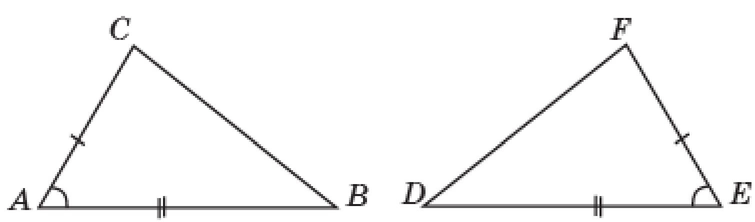


Рис. 102

Ответ. Да.

2) На рисунке 103 $AD=DC$, $\angle 1 = \angle 2$. Равны ли треугольники ABD и CBD?

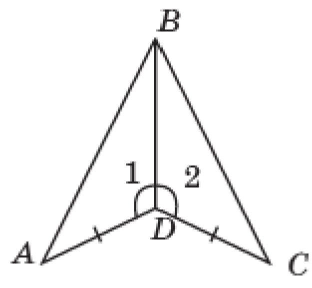


Рис. 103

Ответ. Да.

3) Задача 3* из этапа I данного урока.

Последняя задача взята из популярной книги по занимательной математике «Математическая смекалка» Бориса Анастасьевича Кордемского (1907-1999). Представляем учащимся книгу, к которой не раз еще обратимся на наших уроках геометрии.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Для двух треугольников известно, что $FG=OP$, $\angle F=\angle O$ и $EF=HO$. Будут ли они равны? Если да, запишите соответствующее равенство.

2. Будут ли треугольники, изображенные на рисунке 104, равны? Почему?

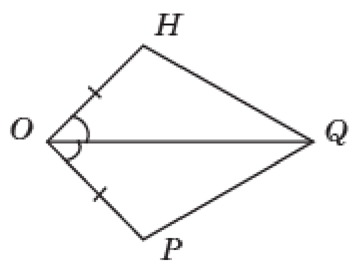


Рис. 104

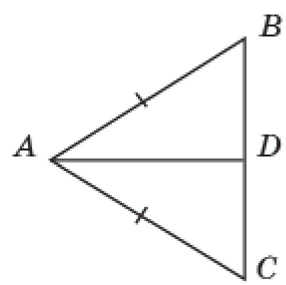


Рис. 105

3. В треугольнике ABC (рис. 105) AD – биссектриса угла A, $AB=AC$. Будут ли какие-нибудь треугольники равны? Найдите углы ADB и ADC.

Вариант 2

1. Даны два треугольника и известно, что $KM=NP$, $LM=HP$ и $\angle M=\angle P$. Запишите названия этих треугольников. Будут ли они равны? Почему?

2. Будут ли треугольники, изображенные на рисунке 106, равны, если $AB=CD$ и $AS=SD$? Почему?

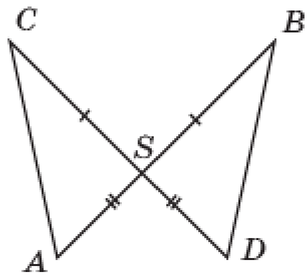


Рис. 106

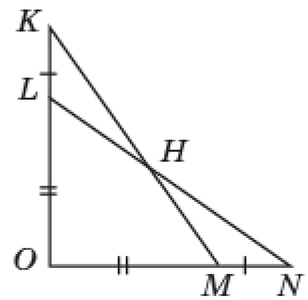


Рис. 107

3. На рисунке 107 $KL=NM$, $LO=MO$. Докажите, что $\angle K=\angle N$.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 8 учебника)

2. Решить задачи.

1) В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $\angle BAC=\angle ACD$. Докажите, что $BC=DA$.

2) В треугольниках MNK и OPR $MN\perp NK$, $OP\perp PR$, $OP=MN$, $KN=PR$. Докажите, что $KM=RO$.

3) Составьте и решите задачу по рисунку 108.

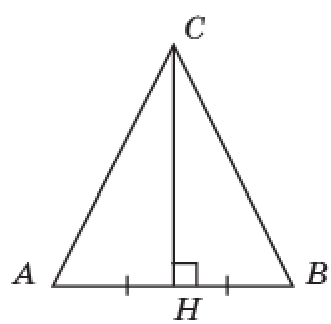


Рис. 108

4)* Имеется шаблон угла в 100°. Как с его помощью построить угол в: а) 20°; б) 40°?

Решение. Построить угол: а) $100°\cdot 2-180°=20°$; б) $100°\cdot 4-180°\cdot 2=40°$.

5)* Постройте два невыпуклых многоугольника, пересечением которых являются три выпуклых четырехугольника.

Ответ. См. рисунок 109.

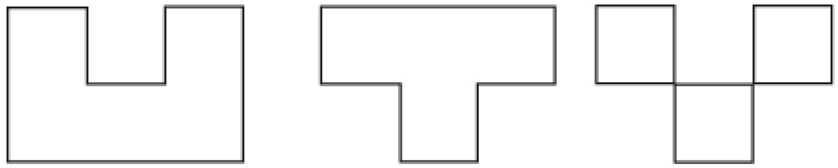


Рис. 109

3. Принести транспортир.

п. 9. Второй признак равенства треугольников (уроки 25, 26, 27)

Цель – сформулировать и доказать теорему о втором признаке равенства треугольников (по стороне и двум прилежащим к ней углам), научиться применять ее при решении задач.

Урок 25

I. Устная работа

1) Какие два треугольника называются равными?

2) Обязательно ли сравнивать все пары сторон и углов двух треугольников, чтобы убедиться в их равенстве?

3) В чем заключается первый признак равенства треугольников?

Задачи 4), 5), 6) даются на готовых чертежах – это задачи 1), 2), 3) из домашнего задания (см. этап V урока 24).

II. Новый материал

Проведем лабораторную работу. Построим отрезок AB=5 см (рис. 110, а), затем $\angle A$=45∘и $\angle B$=60∘. Точку пересечения их сторон назовем C.

Далее построим другой отрезок A_1B_1=5 см (рис. 110, б) и $\angle A_1$=45∘, $\angle B_1$=60∘, C_1 – точка пересечения сторон углов.

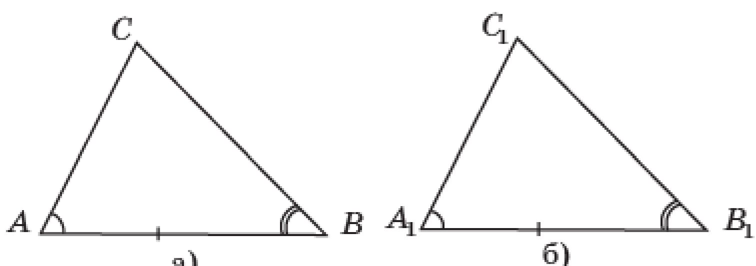


Рис. 110

Получили два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. У них равны стороны AB и A_1B_1 и прилежащие к ним углы, т.е. $AB=A_1B_1$ и $\angle A=\angle A$, $\angle B=\angle B_1$.

Вопрос

- Равны ли данные треугольники?

Для ответа на данный вопрос нужно проверить, что $AC=A_1C_1$ (или $BC=B_1C_1$), тогда, на основании первого признака равенства треугольников, $\Delta ABC=\Delta A_1\ B_1C_1$.

Проверив опытным путем равенство указанных сторон, делаем предположение о том, что построенные треугольники равны.

Теорема. (Второй признак равенства треугольников). Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ два треугольника, у которых $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ (рис. 110). Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 в полуплоскости, определяемой вершиной C_1. При этом вершина A совместится с вершиной A_1. В силу равенства сторон AB и A_1B_1 вершина B совместится с вершиной B_1. В силу равенства углов A и A_1 сторона AC пойдет по стороне A_1C_1, и в силу равенства углов B и B_1 сторона BC пойдет по стороне B_1C_1. Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A_1B_1C_1$. Следовательно, эти треугольники равны.

III. Закрепление нового материала

1. На рисунке 111 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Будут ли треугольники CDA и ABC равны?

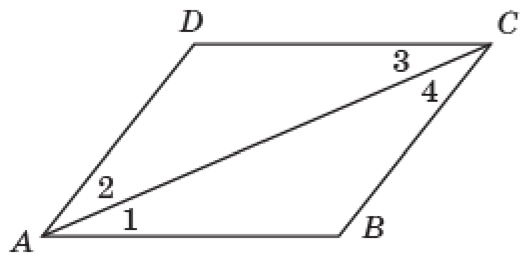


Рис. 111

Решение. Да. Треугольники CDA и ABC равны по второму признаку равенства треугольников (AC – общая сторона и $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ по условию).

2. Отрезки BC и AD пересекаются в точке O. $BO=OC$, $\angle ABO=\angle DCO$. Докажите равенство треугольников ABO и DCO.

3. На рисунке 112 $\angle DBC=\angle DAC$, $BO=AO$. Докажите, что $\angle C=\angle D$ и $AC=BD$.

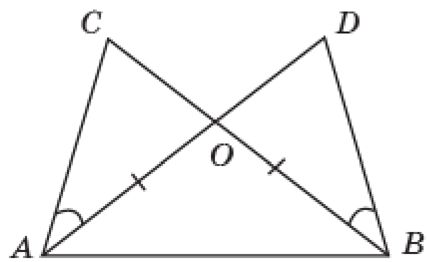


Рис. 112

Решение. Треугольники AOC и BOD равны по второму признаку равенства треугольников ($AO=BO$, $\angle OAC=\angle OBD$, $\angle AOC=\angle BOD$). Следовательно, $\angle C=\angle D$ и $AC=BD$.

4*. Через данную внутри угла точку проведите прямую, отсекающую от сторон данного угла равные отрезки.

Решение. Пусть даны угол *AOB* и точка *M* внутри него (рис. 113). Проведем биссектрису *OC* данного угла и $MH \perp OC$, где $H \in OC$. Найдем точки $K = OA \cap MH$ и $L = OB \cap MH$. *KL* – искомая прямая. Действительно, $OK = OL$, что следует из равенства треугольников *OHK* и *OHL* (по второму признаку равенства треугольников).

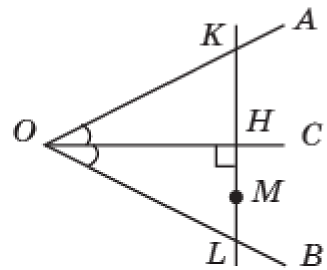


Рис. 113

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 9 учебника).

2. Повторить первый признак равенства треугольников (п. 8 учебника).

3. Решить задачи.

1) В треугольнике *ABC* высота *BH* является и биссектрисой. Будут ли треугольники *ABH* и *CBH* равны?

Ответ. Да.

2) Отрезки *AB* и *CD* пересекаются в точке *O* (рис. 114). $OB = OC$ и $\angle B = \angle C$. Докажите равенство треугольников *AOC* и *DOB*.

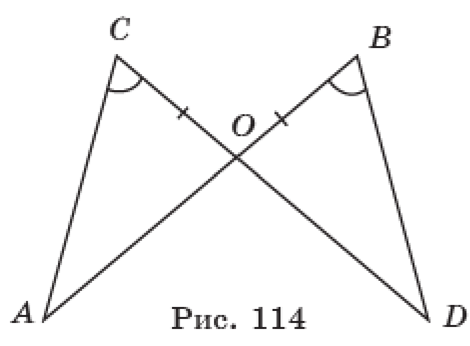


Рис. 114

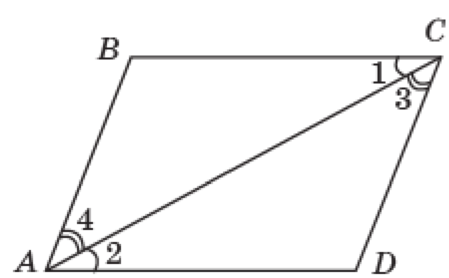


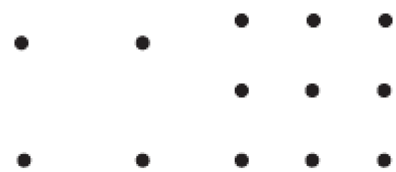
Рис. 115

3) На рисунке 115 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что треугольники *ABC* и *CDA* равны. Найдите *AB* и *BC*, если *AD* = 19 см, *CD* = 11 см.

Ответ. 11 см, 19 см.

4)* Задача 4* из этапа III данного урока.

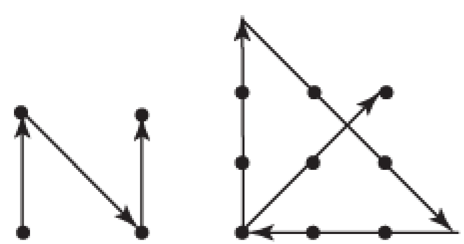
5)* Постройте произвольную: а) 3-стороннюю ломаную; б) 4-стороннюю ломаную, проходящую через все точки, указанные соответственно на рисунках 116, а и 116, б. На рисунке 116, а точки размещены в вершинах квадрата, на рисунке 116, б - в вершинах квадрата, в серединах его сторон и в точке пересечения диагоналей.



а) б)

Рис. 116

Решение см. на рисунке 117. Обратите внимание на то, что в случае б) надо догадаться выйти за пределы квадрата, в этом элемент неожиданности, нестандартности решения.



а) б)

Рис. 117

Урок 26

I. Проверка домашнего задания

Шестеро учащихся приглашаются за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 3, 5

Сформулируйте и докажите первый признак равенства треугольников.

Задания 2, 4, 6

Сформулируйте и докажите второй признак равенства треугольников.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) На рисунке 118 дана фигура, у которой $AD=CF$, $\angle BAC=\angle EDF$, $\angle 1=\angle 2$. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны.

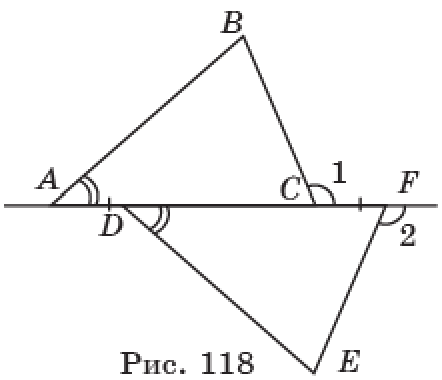


Рис. 118

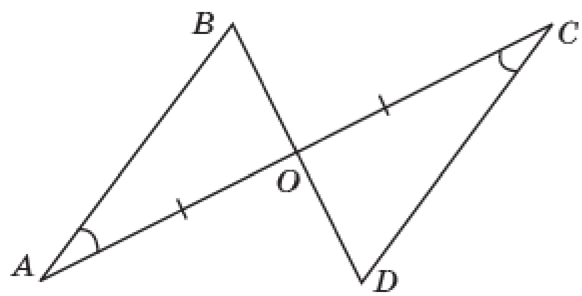


Рис. 119

2) Отрезки AC и BD пересекаются в точке O (рис. 119). $AO=OC$ и $\angle A=\angle C$. Докажите равенство треугольников AOB и COD.

Задание для класса

1. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC лежит на биссектрисах углов A и C. Докажите, что треугольники ABC и ADC равны.

2. Лучи AD и BC пересекаются в точке O (рис. 120). $\angle 1 = \angle 2$, $OC = OD$. Докажите, что $\angle A = \angle B$.

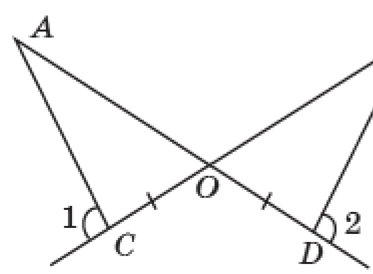


Рис. 120

3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (рис. 121). Отрезки CD и C_1D_1 образуют со сторонами соответственно CB и C_1B_1 равные углы. Докажите, что $AD=A_1D_1$.

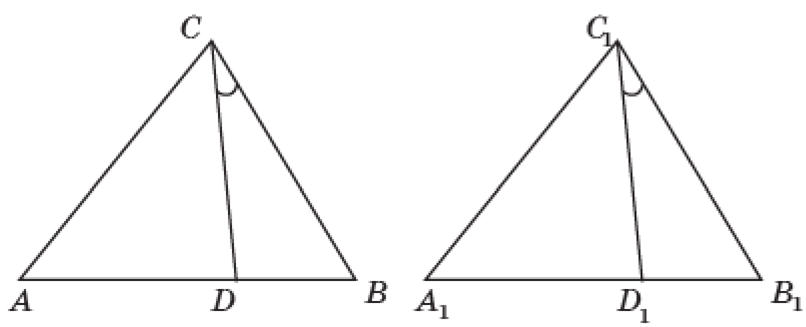


Рис. 121

4*. Соедините 16 точек (рис. 122, а) произвольной 6-сторонней ломаной.

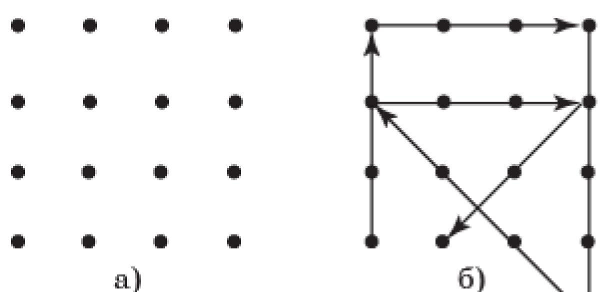


Рис. 122

Решение см. на рисунке 122, б.

К доске вызываем четырех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$).

$У_1$, $У_2$ – начинают решать классные задачи 2 и 3.

$У_3$, $У_4$ – показывают решения задач 2 и 3 из домашнего задания (см. этап IV урока 25)

Дополнительные вопросы

- Что называется ломаной?
- Что называется многоугольником?

- В чем заключается первый признак равенства треугольников?
- В чем заключается второй признак равенства треугольников?

II. Устная работа

1) По готовым чертежам составьте и решите задачи (рис. 123).

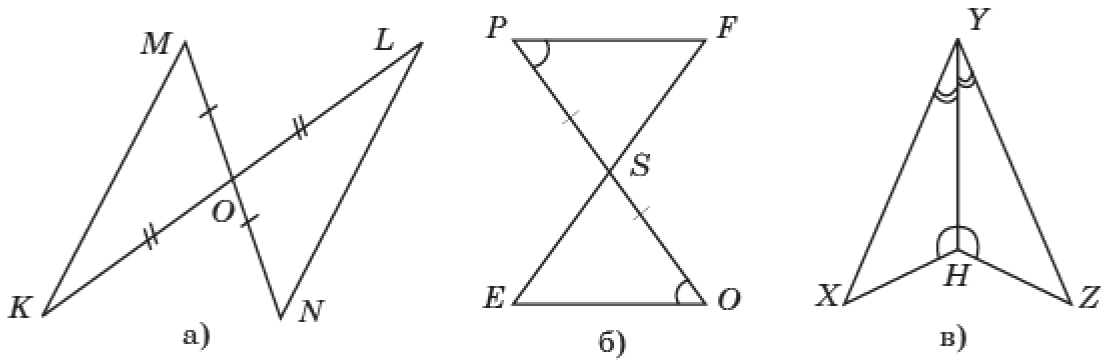


Рис. 123

2) Один из смежных углов в 5 раз меньше другого. Найдите эти углы.

Ответ. 30°, 150°.

3) Может ли сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, быть равной: а) 60°; б) 100°; в) 180°; г) 300°? Если да, найдите их.

Ответ. а), б), в) Нет; г) да, 60°, 60°, 120°, 120°.

III. Занимательный момент

Решения задачи 4*; 4* и 5* из необязательных частей домашних заданий уроков соответственно 23 и 24.

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 8 и п. 9 учебника).

2. Решить задачи.

1) На рисунке 124 $\angle DAB=\angle CBA$, $\angle CAB=\angle DBA$, CA=13 см. Найдите DB.

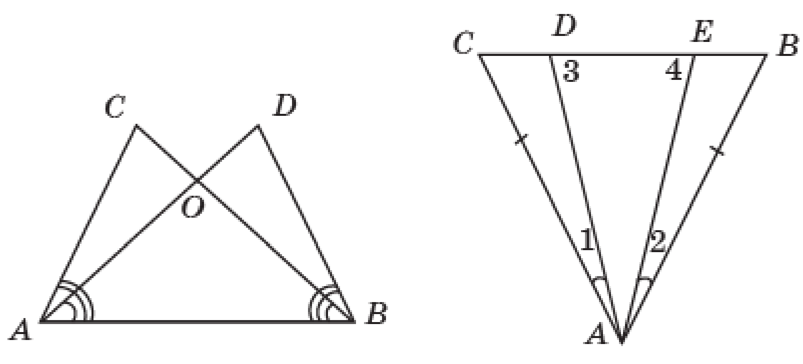


Рис. 124 Рис. 125

Ответ. 13 см.

2) В треугольнике ABC $AB=AC$ и $\angle 1=\angle 2$ (рис. 125). Докажите, что $\angle 3=\angle 4$.

3) В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 126) $\angle DAB = \angle CBA$ и диагонали AC и BD образуют со стороной AB равные углы. Докажите, что $AC = BD$.

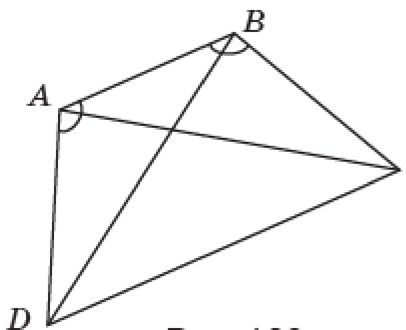
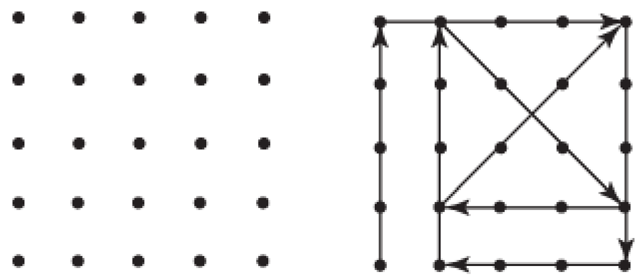


Рис. 126



а) б)

Рис. 127

4)* Соедините 25 точек (рис. 127, а) произвольной 8–сторонней ломаной.

Решение показано на рисунке 127, б.

Урок 27

I. Устная работа

1) Сколько у треугольника: а) медиан; б) биссектрис; в) высот?

2) Может ли проходить вне треугольника его: а) медиана; б) биссектриса; в) высота?

Ответ. а), б) Нет; в) да.

3) Одна из сторон треугольника равна 12 см, его периметр равен 72 см. Найдите две другие его стороны, если их разность равна 10 см.

Ответ. 25 см, 35 см.

4), 5), 6) Задачи по готовым чертежам – задачи 1, 2, 3 из домашнего задания (см. этап IV урока 26).

II. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. В треугольниках ABC и KLM известно, что $AB=KL$, $\angle A=\angle K$, $\angle B=\angle L$. Докажите, что $BC=LM$.

2. На рисунке 128 $EO=FO$, $\angle E=\angle F$. Какие еще отрезки и углы равны?

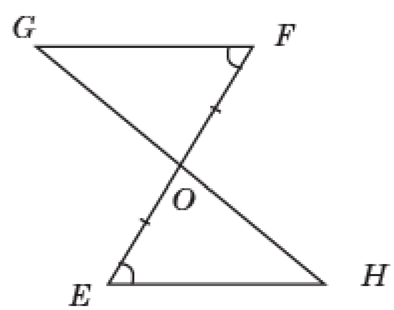


Рис. 128

3. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы равных углов равны.

4*. Опишите построение треугольника ABC, если AC=4 см, BC=6 см и $\angle A = 70^{\circ}$.

Вариант 2

1. В треугольниках EFG и MNO известно, что $FG=NO$, $\angle F=\angle N$, $\angle G=\angle O$. Докажите, что $EG=MO$.

2. Известно, что $A_1A\perp AB$, $B_1B\perp AB$, $AO=BO$ (рис. 129). Какие еще отрезки и углы равны?

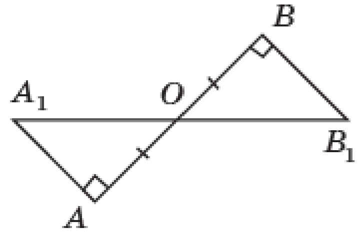


Рис. 129

3. Докажите, что прямая, пересекающая стороны угла и перпендикулярная его биссектрисе, отсекает на сторонах этого угла равные отрезки.

4*. Задача 4* из первого варианта.

III. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа.

IV. Занимательный момент

Решение задач 4*, 5* из необязательной части домашнего задания урока 25 и задачи 4* из необязательной части домашнего задания урока 26.

V. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 8 и п. 9 учебника).

2. Решить задачи.

1) Точки M и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой HP, причем $MH \perp HP$ и $NP \perp HP$. Известно также, что $\angle MPH = \angle NHP$. Докажите равенство углов HMP и PNH.

2) Задача по готовому чертежу (рис. 130). Нужно доказать, что $\Delta COK = \Delta DOL$ и $\Delta EOL = \Delta FOK$.

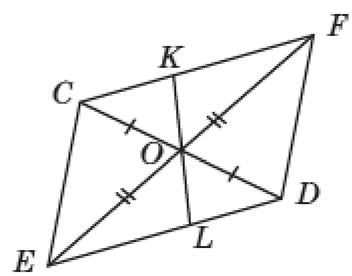


Рис. 130

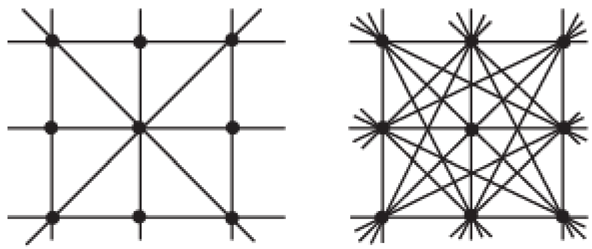
3) В треугольнике ABC проведена высота BH и $\angle ABH = \angle CBH$. Докажите, что $\Delta AMH = \Delta CMH$, где M – произвольная точка отрезка BH.

4)* На биссектрисе AE угла BAC взята точка D и соединена отрезками с точками B и C. Докажите, что если углы BDE и CDE равны, то треугольники ABD и ACD тоже равны.

5)* Определите, сколько всего рядов образуют 9 точек, изображенных на рисунке 116, б из: а) 3 точек; б) 2 точек.

Замечание. Рядом назовем такое расположение точек, когда они принадлежат одной прямой. В задаче требуется найти число прямых, которые можно провести через: а) 3 указанные точки; б) 2 указанные точки.

Ответ. а) 8 (рис. 131, а); б) 12 (рис. 131, б).



а) б)

Рис. 131

п. 10. Равнобедренные треугольники
(уроки 28, 29, 30)

Цель – сформировать понятия равнобедренного треугольника и равностороннего треугольника; рассмотреть свойства равнобедренного треугольника; доказать теорему – признак равнобедренного треугольника; научиться использовать их при решении задач.

Урок 28

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Биссектрисой треугольника называется …
2. Первый признак равенства треугольников заключается в следующем: …
3. Пусть треугольники EFG и NOP равны по второму признаку, у них $EF = NO$, $\angle F = \angle O$ и …
4. В треугольнике можно провести … медиан.
5. При доказательстве второго признака равенства треугольников используется аксиома …

Вариант 2

1. Медианой треугольника называется …
2. Второй признак равенства треугольников заключается в следующем: …
3. Пусть треугольники KLM и QRS равны по второму признаку. Тогда у них $LM = RS$, $\angle M = \angle S$ и …
4. В треугольнике можно провести … биссектрисы.
5. При доказательстве первого признака равенства треугольников используется аксиома …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Рассмотрим треугольники, изображенные на рисунках 132, а, б, в. Треугольник ABC имеет все разные стороны, поэтому он называется разносторонним; а вот у треугольника DEF две стороны равны, $DE=DF$, он называется равнобедренным; треугольник KLM имеет все равные стороны и называется равносторонним.

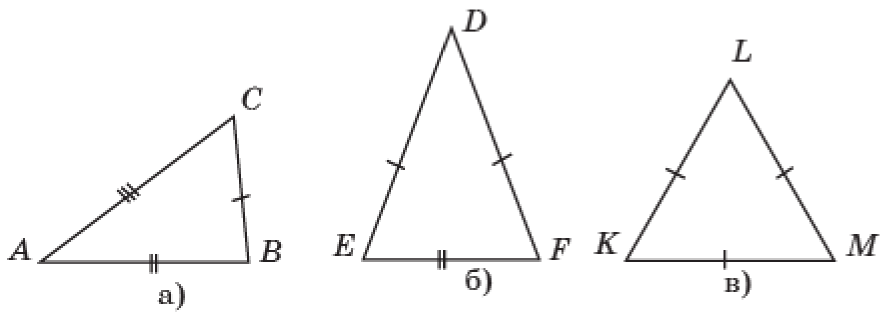


Рис. 132

Таким образом, в зависимости от соотношений между сторонами, треугольники подразделяются на следующие виды: а) разносторонннние; б) равнобедренные; в) равносторонние.

Треугольник называется ***разносторонним***, если у него стороны попарно не равны.

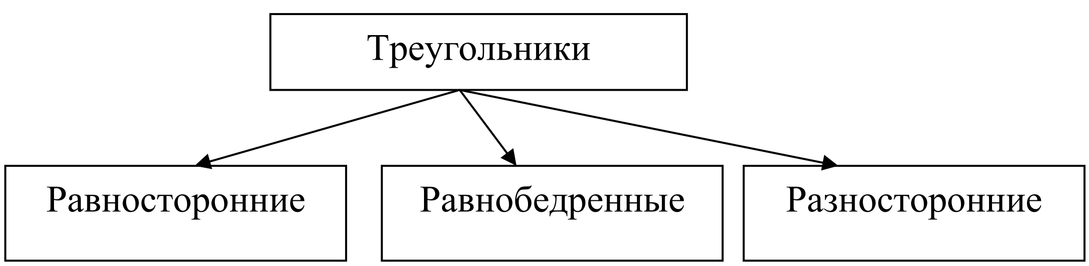
Треугольник называется ***равнобедренным***, если у него две стороны равны.

Эти равные стороны называются ***боковыми сторонами***, а третья сторона – ***основанием***.

На рисунке 132, б DE и DF – боковые стороны равнобедренного треугольника DEF, EF – его основание.

Треугольник называется ***равносторонним***, если у него все стороны равны.

Виды треугольников



Вопрос

- Будет ли равносторонний треугольник равнобедренным?

Ответ. Да, равносторонний треугольник является частным случаем равнобедренного треугольника.

Рассмотрим важное свойство равнобедренного треугольника.

Задание. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, CD – его биссектриса. Сделайте чертеж, найдите равные треугольники, выпишите их соответствующие элементы.

Решение. 1) $\Delta ADC=\Delta BDC$ (рис. 133) по первому признаку равенства треугольников: $AC=BC$ (по условию), $\angle ACD=\angle BCD$ (по условию) и сторона CD у них общая.

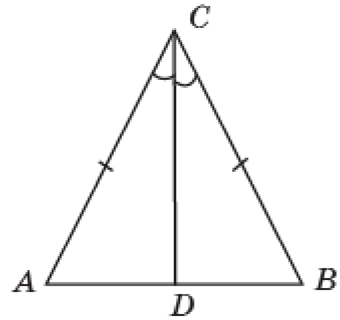


Рис. 133

2) Из равенства треугольников следует равенство соответствующих элементов, а именно: $AD=BD$, т.е. CD является медианой треугольника ABC; $\angle ADC=\angle BDC$, т. е. CD является высотой треугольника ABC; $\angle A=\angle B$, т. е. углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Теперь формулируем и записываем доказательство соответствующих теорем.

Теорема. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.

Доказательство. Пусть ABC – равнобедренный треугольник, $AC=BC$, CD – биссектриса (рис. 133). Тогда треугольник ACD равен треугольнику BCD по первому признаку равенства треугольников ($AC=BC$, CD – общая сторона, $\angle ACD=\angle BCD$). Следовательно, имеют место равенства: $AD=BD$, $\angle ADC=\angle BDC$. Первое из этих равенств означает, что CD является медианой данного треугольника, второе – что CD является его высотой.

Таким образом, в равнобедренном треугольнике ABC один и тот же отрезок CD одновременно является биссектрисой, медианой и высотой, а также – перпендикуляром к основанию, проходящим через его середину.

Так как каждое из этих свойств вполне определяет положение отрезка CD, то наличие одного из них влечет за собой все остальные. Например, высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является одновременно биссектрисой угла при вершине, медианой, проведенной к основанию, и перпендикуляром к основанию, проходящим через его середину.

Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC=BC$). Проведем биссектрису CD. Треугольники ADC и BDC равны по первому признаку равенства треугольников ($AC=BC$, CD – общая сторона, $\angle ACD=\angle BCD$). Следовательно, $\angle A = \angle B$.

Из этой теоремы следует, что у равностороннего треугольника все углы равны и, значит, равносторонний треугольник является правильным.

IV. Закрепление нового материала

1. В треугольнике ABC CH является одновременно высотой и биссектрисой. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если основание меньше боковой стороны на 3 м.

Ответ. 3,2 см; 6,2 см; 6,2 см.

3. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

4*. От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB. Докажите равенство треугольников ABB_1 и BAA_1.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 10 учебника).

2. Решить задачи.

1) Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если основание больше боковой стороны на 3 м.

Ответ. 7,2 см; 4,2 см; 4,2 см.

2) Длины двух сторон равнобедренного треугольника относятся как 3:8. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 38 см.

Ответ. 6 см; 16 см; 16 см.

3) От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB. Докажите равенство треугольников CAB_1 и CBA_1

4)* В треугольнике ABC все углы острые. Вершина C находится вне чертежа (рис. 134, а). Найдите основание H высоты CH, опущенной на сторону AB.

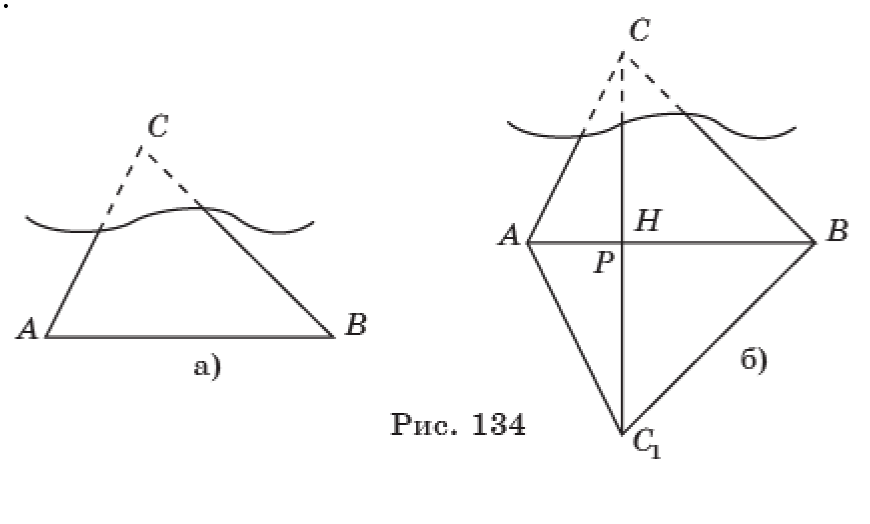


Рис. 134

Решение. Поскольку все углы данного треугольника острые, точка H является внутренней точкой отрезка AB. Отложим углы A и B данного треугольника от соответствующих лучей на прямой AB в другую полуплоскость по отношению к вершине C (рис. 134, б). Тогда получившийся треугольник ABC_1 равен треугольнику ABC (по второму признаку равенства треугольников, т.е. по стороне и двум прилежащим к ней углам). В треугольнике ABC_1 проведем высоту C_1P и докажем, что точка P совпадает с точкой H. Это следует из равенства треугольников ACH и AC_1P, значит, $AH=AP$, т.е. P совпадает с H.

5)* Расположите 6 точек в 3 ряда по 3 точки в каждом из них. Предложите несколько решений.

Решение показано на рисунке 135.

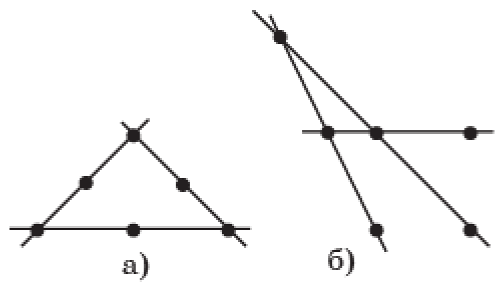


Рис. 135

Урок 29

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаем четверых учащихся для опроса по теории.

Задание 1

1. Дайте определение треугольника.
2. Сформулируйте и докажите теорему – первый признак равенства треугольников.

Задание 2

1. Дайте определение разностороннего треугольника.
2. Сформулируйте и докажите теорему – второй признак равенства треугольников.

Задание 3

1. Дайте определение равностороннего треугольника.
2. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника.

Задание 4

1. Дайте определение равнобедренного треугольника.
2. Сформулируйте и докажите теорему об углах равнобедренного треугольника.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на местах.

Карточка

1) Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC$. Докажите равенство его медиан AM и CN.

2) Периметр равнобедренного треугольника равен 36 см. Основание равно 6 см. Найдите боковую сторону данного треугольника.

Ответ. 15 см.

Задание для класса

1. В треугольнике EFG (рис. 136) $EF=FG$, $EK=LG$. Определите вид треугольников EFG и KFL.

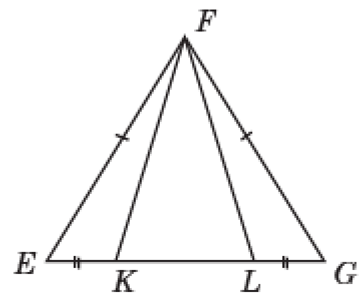


Рис. 136

2. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* проведена медиана *BD*. Найдите ее длину, если периметр треугольника *ABC* равен 50 м, а треугольника *ABD* - 40 м.

Ответ. 15 м.

3. Опишите построение с помощью угольника и линейки равнобедренного треугольника *ABC*, если его основание *AB*=6 см и высота *CH*=7 см.

Начинаем пропедевтическую работу по решению задач на построение, постепенно знакомим учащихся с основными этапами решения таких задач: 1. Анализ. 2. Построение. 3. Доказательство. 4. Исследование.

Конечно, при решении первых задач не обязательно строго рассматривать все этапы, можно ограничиться первыми двумя.

Решение. 1) Предположим, что такой треугольник построен (рис. 137, а). Из свойств равнобедренного треугольника следует, что у него высота *CH* является медианой, т.е. *AH*=*BH*. Отсюда ясно построение.

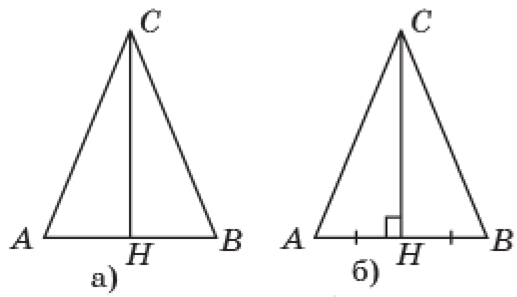


Рис. 137

2) Строим отрезок *AB*=6 см (рис. 137, б) и находим его середину – точку *H*. Проводим через *H* луч, перпендикулярный *AB*, и откладываем на нем *HC*=7 см. *ABC* – искомый треугольник.

3) Действительно, *ΔABC* – равнобедренный, так как у него *AC*=*BC*. Это следует из равенства треугольников *AHC* и *BHC* по первому признаку равенства треугольников.

4) Можно было построить два таких треугольника, отложив луч с началом в точке H в разные полуплоскости относительно прямой AB (рис. 138).

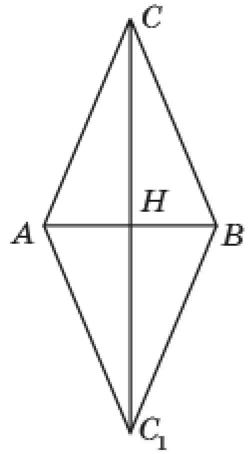


Рис. 138

4*. Докажите, что равносторонний треугольник является правильным. Сформулируйте обратное утверждение. Будет ли оно верным?

Решение. Легко показать, что у равностороннего треугольника все углы равны (это вытекает из теоремы о свойствах углов равнобедренного треугольника), т.е. он является правильным. Обратное утверждение: «Если треугольник правильный, то он является равносторонним». Утверждение верное, так как у правильного треугольника все стороны равны.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 2 из домашнего задания (см. этап V урока 28).

Дополнительные вопросы

- Какой треугольник называется равнобедренным?
- Как называются стороны равнобедренного треугольника?
- Какой треугольник называется правильным?

II. Устная работа

1) Будет ли равносторонний треугольник равнобедренным?

Ответ. Да. При ответе на этот вопрос еще раз подчеркиваем, что равносторонний треугольник является частным случаем равнобедренного треугольника. Можно наглядно это показать с помощью диаграммы (рис. 139).

Рис. 139

Такой способ изображения множеств с помощью кругов был основательно развит выдающимся швейцарским математиком Леонардом Эйлером (1707-1783). Особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях известного английского логика Джона Венна (1843-1923). Поэтому такие схемы получили название «диаграммы Эйлера-Венна».

2) Сформулируйте утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи. Верно ли оно?

Ответ. Нет, не верно.

3) Возможно ли, чтобы в треугольниках ABC и MNK были справедливы неравенства $AB \neq MN$, $BC \neq NK$, $CA \neq KM$, а треугольники все же были равны?

Ответ. Да, возможно.

4) На рисунке 140 укажите равнобедренные треугольники. Почему они являются равнобедренными?

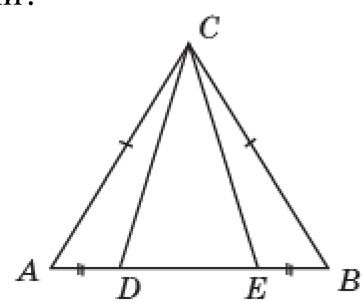


Рис. 140

Ответ. Треугольники ABC и DEC (из условия следует, что $CA=CB$ и из равенства треугольников ACD и BCE следует, что $CD=CE$).

5) Перечислите свойства равнобедренного треугольника.

6) Как вы понимаете, какое утверждение называется признаком?

7) Какие признаки вы знаете?

III. Новый материал

Вспомним свойство углов равнобедренного треугольника: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Попытаемся сформулировать обратное утверждение, т. е., грубо говоря, поменяем условие и заключение местами. Получим утверждение: «Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный».

Вопрос

- Верно ли это утверждение?

Для ответа на этот вопрос выполним сначала практическое задание. Построим отрезок AB=6 см и отложим в одной полуплоскости относительно прямой AB $\angle A=\angle B$=45∘ (рис. 141).

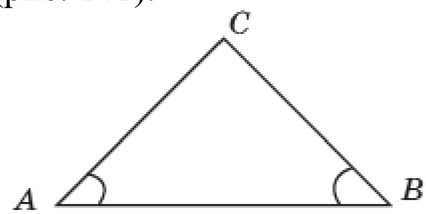


Рис. 141

Точку, в которой пересекаются соответствующие стороны углов, назовем C. Измерим стороны AC и BC треугольника ABC.

После выполнения этой работы делаем предположение о равенстве соответствующих сторон треугольника и доказываем теорему.

Теорема. (Признак равнобедренного треугольника.) Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол A равен углу B (рис. 141). Воспользуемся вторым признаком равенства треугольников, примененным к треугольнику ABC и треугольнику BAC, т.е. к тому же самому треугольнику, вершины в котором записаны в другом порядке. Имеем, сторона AB равна стороне BA, $\angle A=\angle B$, $\angle B=\angle A$. Следовательно, $AC=BC$, т.е. треугольник ABC - равнобедренный.

IV. Закрепление нового материала

1. В треугольнике KLM $\angle K=\angle L$ и KM=24 см. Какую еще сторону можно определить? Чему она равна?

Ответ. LM=24 см.

2. На рисунке 142 $\angle 3=\angle 7$=47∘. Определите вид треугольника XYZ и найдите все обозначенные на рисунке углы.

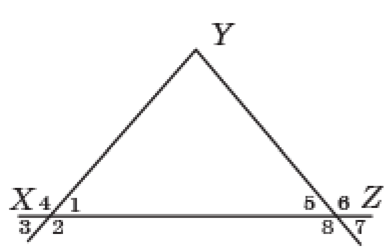


Рис. 142

Ответ. XYZ – равнобедренный треугольник (по признаку равнобедренного треугольника: $\angle 1=\angle 3=\angle 7=\angle 5$); $\angle 1=\angle 3=\angle 7=\angle 5=47^\circ$; $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=133^\circ$.

3. На основании равнобедренного треугольника, периметр которого равен 36 см, построен равносторонний треугольник с периметром 30 см. Найдите стороны обоих треугольников. Сколькими способами можно построить равносторонний треугольник в данном случае?

Ответ. 10 см, 13 см, 13 см; 10 см, 10 см, 10 см. Двумя способами.

4*. Восстановите равнобедренный треугольник ABC по трем его данным точкам M, H, C (рис. 143, а), если M принадлежит боковой стороне; H – середина основания; C – вершина, лежащая против основания треугольника.

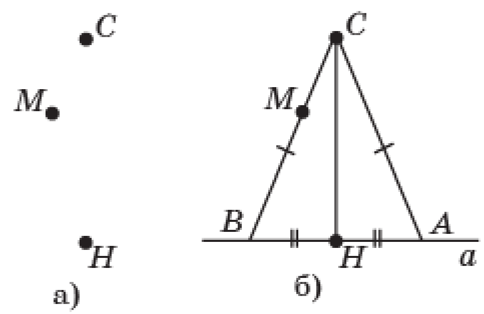


Рис. 143

Решение. 1) Проведем отрезок CH (рис. 143, б).

2) Проведем луч CM.

3) Проведем прямую $a \perp CH$ и $H \in a$.

4) $a \cap CM = B$.

5) На прямой HB от точки H откладываем $HA=BH$.

6) ΔABC – искомый. Действительно, из равенства треугольников AHC и BHC (по первому признаку равенства треугольников) следует, что $AC=BC$, т.е. треугольник ABC – равнобедренный и у него $M \in BC$, где BC – боковая сторона треугольника, $HA=HB$, AB – его основание.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 10 учебника).

2. Решить задачи.

1) От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB. Докажите равенство треугольников ABB_1 и BAA_1.

2) Докажите, что если у треугольника все углы равны, то он равносторонний.

3) Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

4)* Восстановите равнобедренный треугольник ABC по трем его данным точкам K, O и A (рис. 144, а), если K принадлежит боковой стороне AC; O – середина основания и A – вершина основания треугольника.

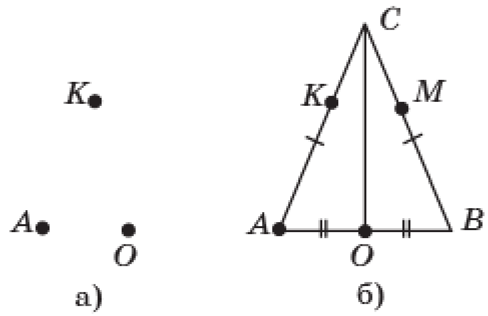


Рис. 144

Решение. 1) Проведем отрезок AO (рис. 144, б).

2) На продолжении отрезка AO откладываем $OB=AO$.

3) Проведем отрезок AK.

4) Откладываем $\angle OBM=\angle KAO$ (точка M лежит в одной полуплоскости с точкой K относительно прямой AB).

5) Находим точку C, где $C=AK\cap BM$.

6) ΔABC – искомый. Действительно, так как $\angle A=\angle B$, треугольник равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника) и у него $K\in AC$, где AC – боковая сторона, и $AO=OB$, где AB – основание.

5)* Расположите 16 точек в 10 рядов по 4 точки в каждом ряду.

Решение показано на рисунке 145.

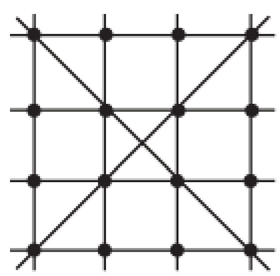


Рис. 145

Урок 30

I. Проверка домашнего задания

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$) для опроса по теории.

$У_1$ – теорема о биссектрисе равнобедренного треугольника.

$У_2$ – теорема об углах равнобедренного треугольника.

$У_3$ – теорема – признак равнобедренного треугольника.

Пока ученики у доски готовят ответы, классу предлагаются следующие задания.

1. На рисунке 146 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

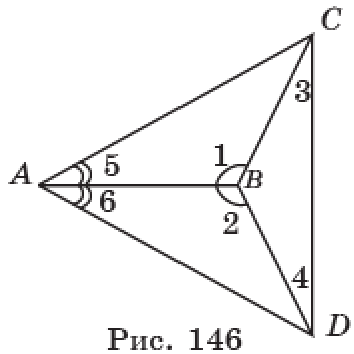


Рис. 146

2*. Докажите, что у равнобедренного треугольника медианы, проведенные к боковым сторонам, равны; биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны.

Дополнительные вопросы

- Чем отличаются биссектрисы угла и треугольника?

- Как сформулировать второй признак равенства треугольников для равнобедренного треугольника?

- Как сформулировать признак равностороннего треугольника?

II. Устная работа

1) Периметр равнобедренного треугольника равен 2 м, а основание - 0,4 м. Найдите боковую сторону.

Ответ. 0,8 м.

2) Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона - 2 м. Найдите основание.

Ответ. 3,5 м.

3), 4), 5) – задачи по готовым чертежам – задачи 1, 2, 3 из домашнего задания (см. этап V урока 29).

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Дан равнобедренный треугольник CEF, в котором $CE=CF$. Докажите равенство его биссектрис EL и FK.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен 42 см, боковая сторона составляет $\frac{2}{7}$ периметра. Найдите основание данного треугольника.

3. В треугольнике ABC (рис. 147) $AC=BC$, $\angle ACD=\angle BCE$. Определите вид треугольников ABC и DEC.

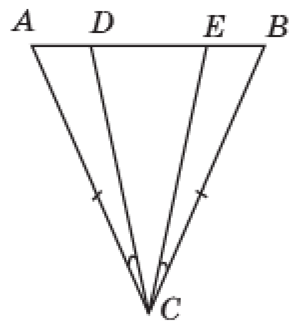


Рис. 147

4*. Докажите, что если в треугольнике высота является медианой, то он равнобедренный. Будет ли это утверждение признаком равнобедренного треугольника?

Вариант 2

1. Дан равнобедренный треугольник KLM, в котором $KL=ML$. Докажите равенство его высот KH и MO.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен 32 см, боковая сторона больше основания на 4 см. Найдите стороны данного треугольника.

3. В треугольнике EFG (рис. 148) $EP=FQ$ и $\angle GPQ=\angle GQP$. Определите вид треугольников EFG и GPQ.

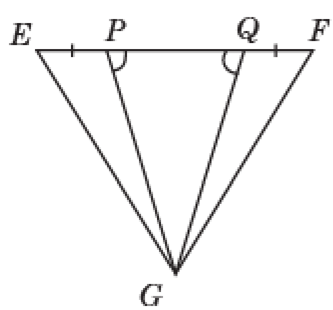


Рис. 148

4*. Докажите, что если в треугольнике высота является биссектрисой, то он равнобедренный. Будет ли это утверждение признаком равнобедренного треугольника?

Ответы. Вариант 1. 2. 18 см. 3. Равнобедренные. 4*. Да.

Вариант 2. 2. 8 см, 12 см, 12 см. 4*. Да.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа.

V. Занимательный момент

Решение задач 5* из необязательных частей домашних заданий уроков 27, 28, 29.

VI. Задание на дом

1. Повторить первый и второй признаки равенства треугольников (п. 8 и п. 9 учебника), свойства равнобедренного треугольника (п. 10 учебника).

2. Решить задачи.

1) Треугольники *ACD* и *BCD* равны. Их вершины *A* и *B* лежат по разные стороны от прямой *CD*. Докажите, что треугольники *ABC* и *ABD* равнобедренные.

2) Точки *A*, *B*, *C*, *D* принадлежат одной прямой, причем отрезки *AB* и *CD* имеют общую середину. Докажите, что если треугольник *ABE* равнобедренный с основанием *AB*, то треугольник *CDE* тоже равнобедренный с основанием *CD*.

3) Отрезки равной длины *AB* и *CD* пересекаются в точке *O* так, что *AO* = *OD*. Докажите равенство треугольников *ABC* и *DCB*.

4)* Докажите, что если медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, совпадают, то треугольник равнобедренный.

Решение. Пусть в треугольнике *ABC* (рис. 149) *CO* – медиана и биссектриса.

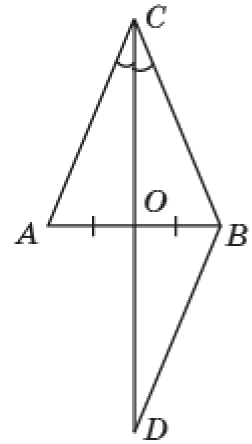


Рис. 149

Продолжим CO и отложим $OD=CO$. Соединим точки B и D. $\Delta AOC=\Delta BOD$ (по первому признаку равенства треугольников). В равных треугольниках равны соответствующие элементы, значит, $\angle ACO=\angle BDO$, но $\angle ACO=\angle BCO$. Следовательно, $\angle BDO=\angle BCO$, и треугольник BCD – равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), $BD=BC$. $BD=AC$ (соответствующие стороны равных треугольников AOC и BOD). Таким образом, $AC=BC$ и треугольник ABC – равнобедренный (по определению).

В решении предложенной задачи был использован ***метод дополнительных построений***. Он бывает очень полезен при решении многих геометрических задач. С другой стороны, при формировании у школьников умения выполнять дополнительные построения возникает ряд трудностей, которые объясняются тем, что в такой деятельности присутствует элемент неожиданности, догадки, настоящего творчества. Но бояться такой эвристической деятельности не нужно, наоборот, необходимо специально предлагать задачи, решаемые с помощью дополнительных построений для накопления соответствующего опыта.

5)* Расположите 9 точек в 10 рядов таким образом, чтобы в каждом ряду было по 3 точки.

Решение показано на рисунке 150.

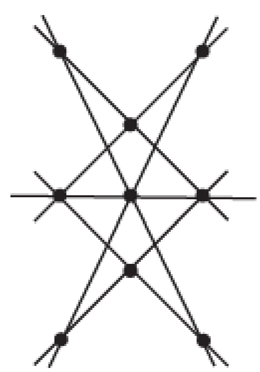


Рис. 150

п. 11. Третий признак равенства треугольников (уроки 31, 32, 33)

Цель – сформулировать и доказать теорему – третий признак равенства треугольников (по трем сторонам), научиться применять ее для решения задач, дать представление о свойстве жесткости треугольника.

Урок 31

I. Устная работа

По рисунку 151 назовите пары равных треугольников. Дайте соответствующие пояснения.

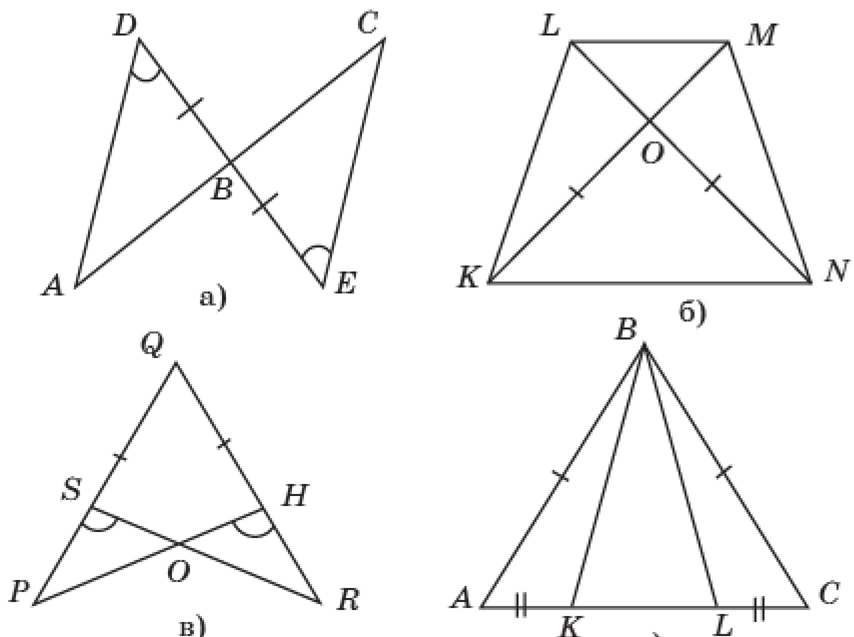


Рис. 151

II. Новый материал

Рассмотрим два равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, $AB=A_1B_1$. Следовательно, все стороны треугольников равны.

Вопросы

- Будут ли данные треугольники равны?

- Можно ли распространить эту идею на разносторонние треугольники, например, на треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых и известно, что $AB = A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$?

После обсуждения ответов переходим к доказательству теоремы.

Теорема. (Третий признак равенства треугольников.) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два треугольника, у которых $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ (рис. 152).

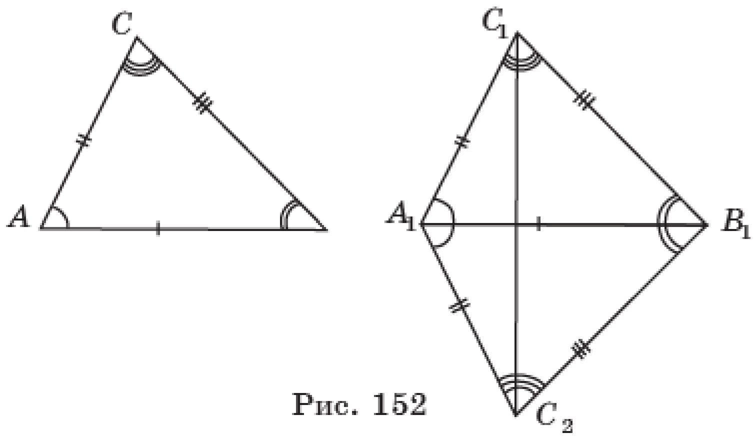


Рис. 152

Докажем, что эти треугольники равны. Для этого отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла бы в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1. Тогда треугольник $A_1B_1C_2$ будет равен треугольнику ABC. При этом луч C_1C_2 может лежать внутри угла $A_1C_1B_1$, совпадать с одной из его сторон или лежать вне этого угла. Рассмотрим первый из этих случаев (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ - равнобедренный и, значит, $\angle A_1C_1C_2=\angle A_1C_2C_1$. Аналогично из равенства сторон B_1C_1 и B_1C_2 следует, что треугольник $C_1B_1C_2$ - равнобедренный и, значит, $\angle B_1C_1C_2 = \angle B_1C_2C_1$. Складывая равные углы, получаем, что угол C_1 равен углу C_2. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$, $A_1B_1C_2$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Заметим, что если стороны треугольника имеют постоянную длину, то его углы не могут изменяться (третий признак равенства треугольников). Следовательно, треугольник сохраняет свою форму. Свойство треугольника сохранять свою форму называется **жесткостью** треугольника. Например, если взять шарнирные модели треугольника и четырехугольника, то, сохраняя длину их сторон, форму треугольника не удастся изменить, а у четырехугольника легко изменить величину углов (рис. 153).

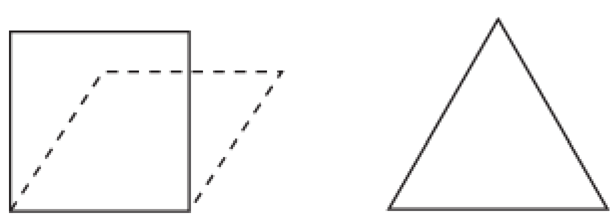


Рис. 153

Свойство жесткости треугольника широко применяется на практике. В различных строительных конструкциях часто отдельные элементы имеют форму треугольников, например, в нефтяных вышках, в подъемных кранах и т. п. В переносных лестницах, когда створки раздвигают, укрепляют специальный стержень (на рисунке 154 отрезок *OR*). Тогда лестница будет устойчива, так как из-за жесткости треугольника *OPR* угол *OPR* не будет изменяться.

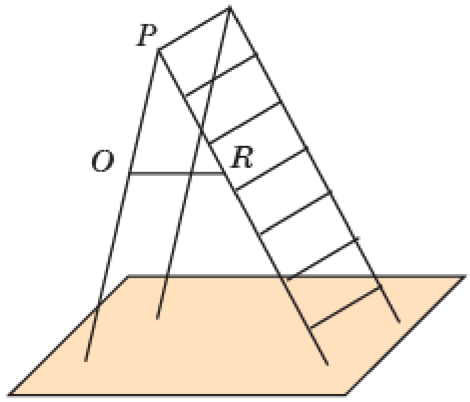


Рис. 154

III. Закрепление нового материала

1. По рисунку 155 докажите, что $\angle BAD = \angle DCB$.

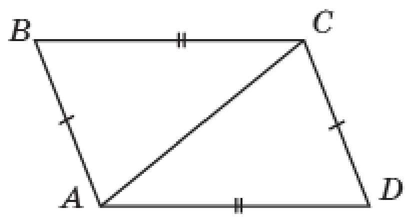


Рис. 155

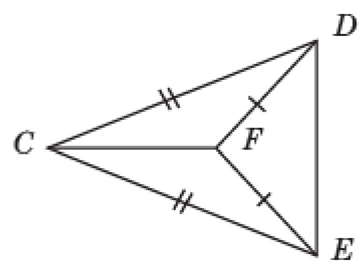


Рис. 156

2. По рисунку 156 докажите, что $\angle CDF = \angle CEF$. Представьте два способа решения.

Хорошо известно, что решение задач несколькими способами активизирует учебную познавательную деятельность. Задачи, допускающие несколько решений, дают богатые возможности для развития и воспитания школьников. Такая работа может быть организована в двух направлениях. Во-первых, специально в условии оговаривать, как сделано в предложенной задаче, что нужно представить несколько решений. Во-вторых, если в классе при решении некоторой задачи ребятами будет высказано несколько идей, этим моментом не следует пренебрегать и направлять их мысль на один путь. При этом можно сразу обсудить достоинства каждого предложения и выбрать наиболее рациональный, а можно разрешить каждому учащемуся идти своим понравившимся ему путем. Затем сравнить различные решения и при выборе наилучшего из них руководствоваться принципами наибольшей простоты, наглядности, краткости, оригинальности, неожиданности, математической красоты и т.п. Конечно, работа с такими задачами требует больше внимания и самое главное времени, которого всегда не хватает.

3. В треугольниках ABC и EFG равны стороны AB и EF, BC и FG, а также медианы CD и GH, проведенные соответственно к сторонам AB и EF. Докажите, что треугольники равны.

Решение. Треугольники BCD и FGH равны по третьему признаку равенства треугольников ($BC=FG$, $CD=GH$ по условию, $BD=FH$, как половины равных сторон). Следовательно, $\angle B=\angle F$ и, значит, треугольники ABC и EFG равны по первому признаку равенства треугольников ($BC = FG$, $AB=EF$, $\angle B =\angle F$).

4*. Докажите, что если две стороны и медиана, проведенная к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

Решение. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BM=B_1M_1$, где BM и B_1M_1 соответствующие медианы, т. е. $AM=CM$, $A_1M_1=C_1M_1$. Имеем: $\Delta ABM=\Delta A_1B_1M_1$ (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle A=\angle A_1$. Тогда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по первому признаку равенства треугольников).

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 11 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что у равных треугольников медианы, проведенные из соответственных вершин, равны.

2) На рисунке 157 $AD=CF$, $AB=EF$, $BC=DE$. Докажите, что $\angle 1=\angle 2$.

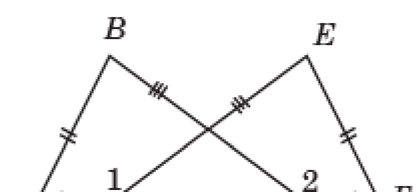


Рис. 157

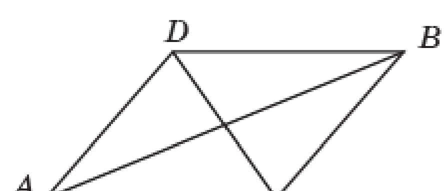


Рис. 158

3) Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 158). Докажите, что прямая CD делит отрезок AB пополам.

4)* Докажите, что если две стороны и медиана, проведенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

Решение. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 159, а, б) $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $AM=A_1M_1$, где AM и A_1M_1 соответствующие медианы, т.е. $BM=CM$, $B_1M_1=C_1M_1$.

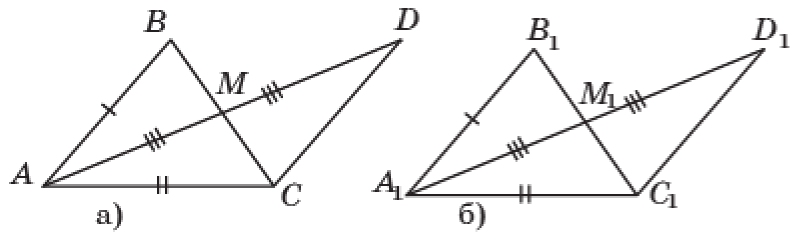


Рис. 159

Продолжим AM и A_1M_1 и отложим $MD=AM$, $M_1D_1=A_1M_1$. Имеем: $\Delta AMB=\Delta DMC$ (по первому признаку равенства треугольников). Аналогично $\Delta A_1M_1B_1=\Delta D_1M_1C_1$ (по первому признаку равенства треугольников). Значит, $AB=CD$ и $A_1B_1=C_1D_1$, но $AB=A_1B_1$, т.е. $CD=C_1D_1$. $\Delta ACD=\Delta A_1C_1D_1$ (по третьему признаку равенства треугольников). Значит, $CM=C_1M_1$, как соответствующие медианы в равных треугольниках. Следовательно, $BC=B_1C_1$. Итак, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по третьему признаку равенства треугольников).

5)* Из 3 одинаковых палочек, например, спичек, скрепляя их пластилином, легко сложить равносторонний треугольник. Теперь попробуйте из 6 спичек сложить четыре равносторонних треугольника.

Решение показано на рисунке 160.

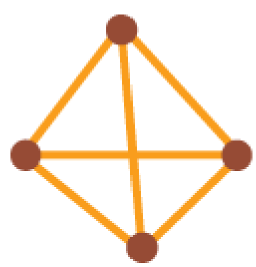


Рис. 160

Обратим внимание учащихся на нестандартное решение, при котором пришлось выйти из плоскости в пространство, получили тетраэдр, поверхность которого состоит из четырех равносторонних треугольников.

Включение элементов стереометрии в систематический курс планиметрии весьма полезно, так как выполняет ряд очень важных дидактических функций. Во-первых, развивает пространственные представления ребят, их пространственное воображение. Во-вторых, подготавливает учащихся к изучению систематического курса стереометрии, т.е. выполняет пропедевтическую работу. Это наглядная стереометрия, при которой ученики продолжают знакомиться с основными пространственными фигурами, их элементами и свойствами, учатся читать стереометрические чертежи, изображать простейшие пространственные ситуации, представлять взаимное расположение геометрических фигур и т.п.

Урок 32

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Пусть треугольники ACE и BDF равны по третьему признаку. Тогда $AC=BD$, $CE=DF$ и …

2. Пусть треугольник GHI равен треугольнику KLM по первому признаку. Тогда $HI=LM$, $\angle I=\angle M$ и …

3. Доказывая равенство двух треугольников по второму признаку, нужно найти …

4. Для доказательства равенства двух равнобедренных треугольников по третьему признаку нужно проверить …

5. При доказательстве третьего признака равенства треугольников используется …

Вариант 2

1. Пусть треугольники ABC и DEF равны по второму признаку. Тогда $AC=DF$, $\angle A=\angle D$ и …

2. Пусть треугольник LMN равен треугольнику OPQ по третьему признаку. Тогда $MN=PQ$, $LM=OP$ и …

3. Доказывая равенство двух треугольников по первому признаку, нужно найти …

4. Для доказательства равенства двух равносторонних треугольников по третьему признаку нужно указать …

5. При доказательстве третьего признака равенства треугольников используется …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Решение задач

1. Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 158) Докажите, что треугольники CBD и DAC равны.

2. На рисунке 161 $AB=CD$, $AD=BC$, BE - биссектриса угла ABC, а DF - биссектриса угла ADC. Докажите, что $\angle ABE=\angle ADF$.

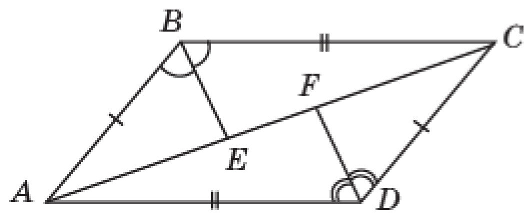


Рис. 161

3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ биссектрисы AD и A_1D_1 равны; $AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$. Докажите, что $\Delta\ ABC=\Delta\ A_1B_1C_1$.

4*. Докажите, что если у выпуклых четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны и диагонали: $AC=A_1C_1$, то равны и соответствующие углы.

К доске приглашаем трех учащихся (У$_1$, У$_2$, У$_3$).

У$_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

У$_2$ - начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

У$_3$ - воспроизводит решение задачи 3) из домашнего задания (см. этап IV урока 31).

Дополнительные вопросы

- Какой треугольник называется равнобедренным?
- Назовите свойства равнобедренного треугольника.
- В чем заключается признак равнобедренного треугольника?

IV. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательной части домашних заданий уроков 30 и 31.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 11 учебника).

2. Решить задачи.

1) Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой (рис. 162).

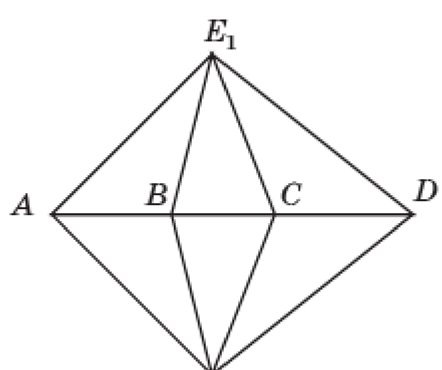


Рис. 162

Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны.

2) На рисунке 161 $AB=CD$, $AD=BC$, BE - биссектриса угла ABC, а DF - биссектриса угла ADC. Докажите, что $\Delta\ ABE=\Delta CDF$.

3) В треугольниках EFG и $E_1F_1G_1$, биссектрисы FL и F_1L_1 углов F и F_1 соответственно равны; $\angle F=\angle F_1$ и $\angle ELF=\angle GLF$. Будут ли исходные треугольники равны? Почему?

Ответ. Не обязательно, ΔEFG – равнобедренный, так как у него FL является одновременно биссектрисой и высотой, а $\Delta E_1F_1G_1$ может быть неравнобедренным и при этом $\angle F=\angle F_1$, $FL=F_1L_1$.

4)* В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны соответственно медианы AM, A_1M_1 и углы, на которые каждая медиана разбивает соответствующий угол треугольника. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Решение. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 163) $AM=A_1M_1$, где M, M_1 – середины соответственно BC и B_1C_1; $\angle BAM=\angle B_1A_1M_1=\angle 1$ и $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1=\angle 2$. Докажем, что $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$. Для этого продолжим AM и A_1M_1 и отложим соответственно $MD=AM$ и $M_1D_1= A_1M_1$.

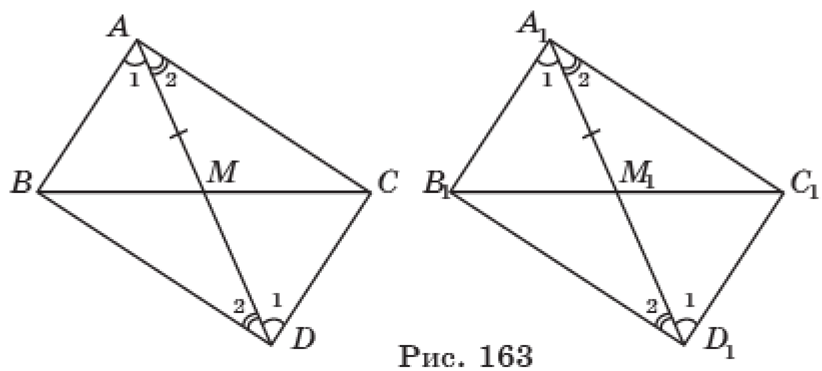


Рис. 163

$\Delta ABM=\Delta DCM$ (по первому признаку равенства треугольников); $\Delta A_1B_1M_1=\Delta D_1C_1M_1$ (по первому признаку равенства треугольников). Значит, $\angle CDM=\angle BAM=\angle 1$ и $\angle C_1D_1M_1=\angle B_1A_1M_1=\angle 1$. Следовательно, $\angle CDM=\angle C_1D_1M_1=\angle 1$.

$\Delta ACD=\Delta A_1C_1D_1$ (по второму признаку равенства треугольников). Значит, $AC=A_1C_1$.

Аналогично можно доказать, что $AB=A_1B_1$.

Таким образом, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по первому признаку равенства треугольников).

5)* Из 9 спичек сложите 7 равносторонних треугольников.

Решение показано на рисунке 164. Спички составляют многогранник, который называется бипирамидой (двойной пирамидой).

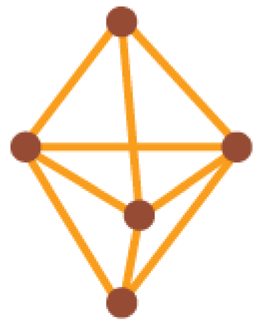


Рис. 164

Урок 33

I. Устная работа

1) Среди изображенных на рисунке 165 треугольников укажите пары равных треугольников.

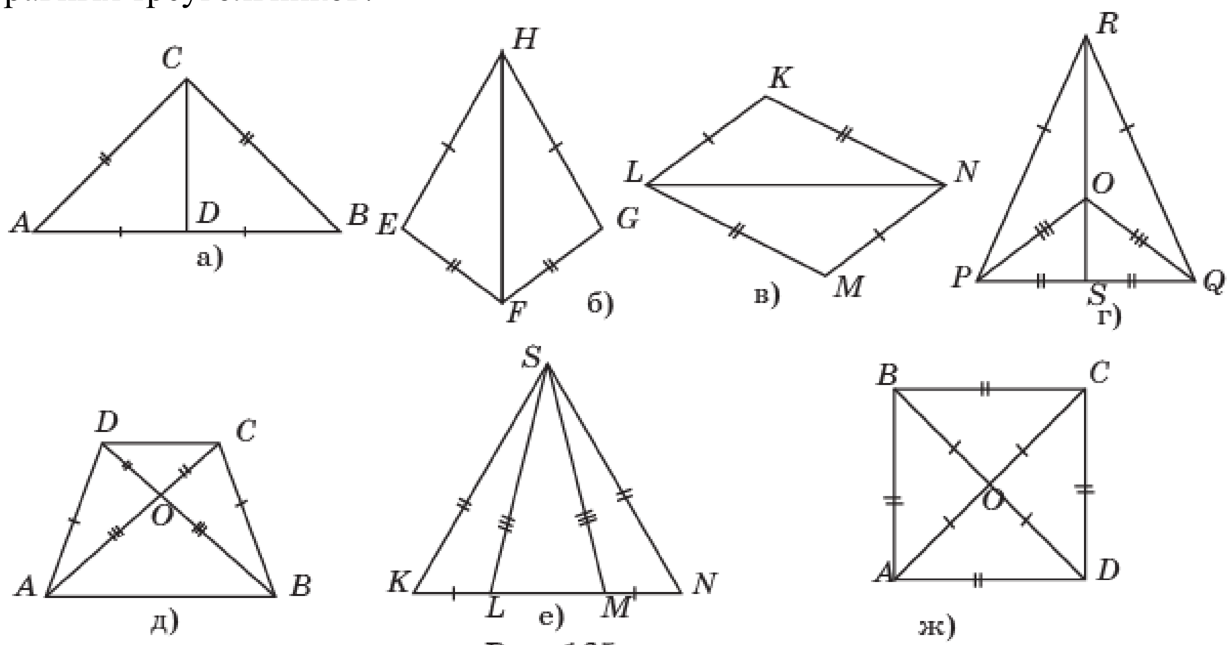


Рис. 165

2) Верно ли утверждение, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то эти треугольники равны? Почему?

3) На рисунке 166 $AB=DC$ и $BC=AD$. Докажите, что угол B равен углу D.

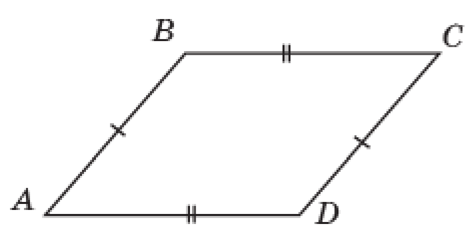


Рис. 166

4) В чем состоит свойство жесткости треугольника? Где и как оно применяется?

5) Обладает ли четырехугольник свойством жесткости?

6) Как превратить четырехугольник в жесткую фигуру?

Ответ. Провести диагональ четырехугольника.

II. Подготовка к контрольной работе

1. На рисунке 167 $PO=PH$, $OS=HR$. Докажите, что треугольник PRS равнобедренный.

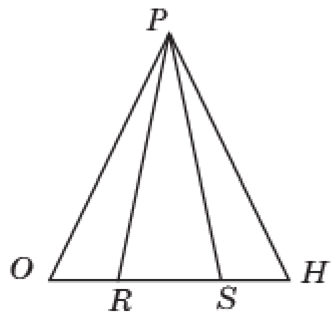


Рис. 167

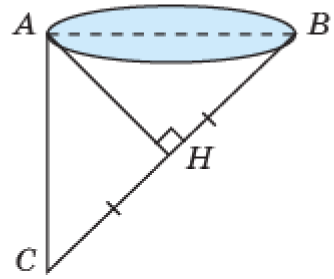


Рис. 168

2. Дан треугольник ABC, AN и CM – биссектрисы, $AN=CM$, $AM=CN$. Определите вид треугольника ABC.

Ответ. Равнобедренный.

3. Для измерения длины озера на местности выполнили построение, показанное на рисунке 168, где $AH \perp BC$ и $BH=CH$. Как же определить длину озера? Какой отрезок измерить?

Решение. Нужно измерить, например, с помощью рулетки AC, так как $AB=AC$ ($\Delta AHB=\Delta AHC$ по первому признаку равенства треугольников).

4. Как данный на местности угол можно разделить пополам, не пользуясь никаким угломером?

Решение. Назовем вершину данного угла O. Отложим на его сторонах равные отрезки OA, OB и соединим A с B. Полученный треугольник AOB будет равнобедренным. Разделим AB пополам и его середину назовем H, т.е. $AH=BH$. Тогда луч OH будет искомой биссектрисой угла AOB.

5*. На сторонах угла AOB (рис. 169) отложены отрезки $OC=OD$, $CA=DB$, H – точка пересечения отрезков AD и BC. Докажите, что OH – биссектриса данного угла.

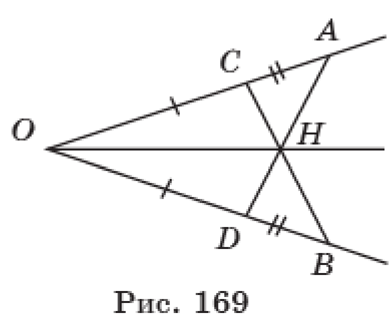


Рис. 169

Решение. а) $\Delta AOD=\Delta BOC$ (по первому признаку равенства треугольников). Отсюда следует, что $\angle OAD=\angle OBC$ и $\angle ADO=\angle BCO$. Значит, $\angle ADB=180°-\angle ADO=180°-\angle BCO=\angle BCA$; б) $\Delta ACH=\Delta BDH$ (по второму признаку равенства треугольников). Отсюда $CH=DH$; в) $\Delta COH=\Delta DOH$ (по третьему признаку равенства треугольников). Отсюда $\angle COH=\angle DOH$. Таким образом, OH – биссектриса угла AOB.

III. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательной части домашнего задания (см. этап V урока 32).

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 8 - п. 11 учебника).

2. Решить задачи.

1) На рисунке 170 $AB=CB$, $AE=CD$. Докажите, что $BE=BD$ и $\angle 1=\angle 2$.

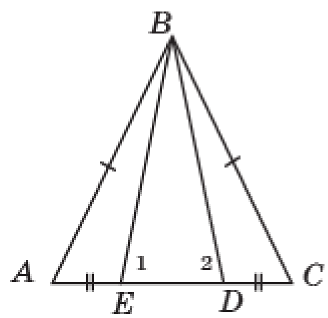


Рис. 170

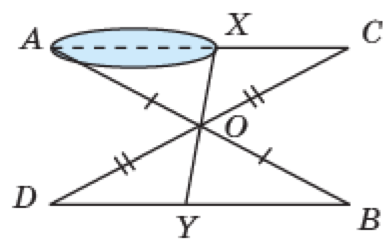


Рис. 171

2) Для измерения длины озера на местности выполнили построение, показанное на рисунке 171. Как была определена длина озера? Какой отрезок измерили?

Решение. Нужно измерить BY. $\Delta AOC=\Delta BOD$ (по первому признаку равенства треугольников). Отсюда следует, что $AC=BD$ и $\angle CAO=\angle DBO$. $\Delta AOX=\Delta BOY$ (по второму признаку равенства треугольников), значит, $AX=BY$.

3) Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы равных углов равны.

4)* Докажите, что если у выпуклых четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны и $\angle A=\angle A_1$, то $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\angle D=\angle D_1$. Верно ли это для произвольных четырехугольников?

Решение. $\Delta ABD=\Delta A_1B_1D_1$ (по первому признаку равенства треугольников), значит, $\angle ABD=\angle A_1B_1D_1=\angle 1$ и $\angle BDA=\angle B_1D_1A_1=\angle 2$ (рис. 172).

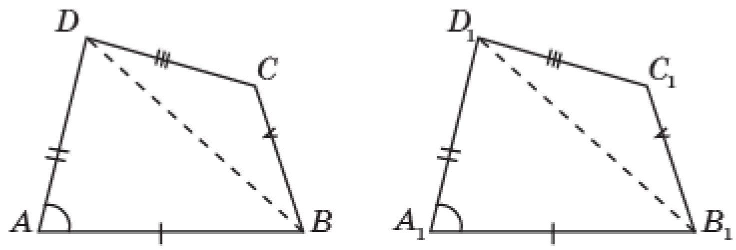


Рис. 172

$\Delta BCD=\Delta B_1C_1D_1$ (по третьему признаку равенства треугольников), откуда $\angle C=\angle C_1$. Следовательно, $\angle CBD=\angle C_1B_1D_1=\angle 3$, $\angle CDB = \angle C_1D_1B_1 = \angle 4$. Таким образом, $\angle B=\angle 1+\angle 3=\angle B_1$, $\angle D=\angle 2+\angle 4=\angle D_1$. Для невыпуклых четырехугольников это не верно (рис. 173).

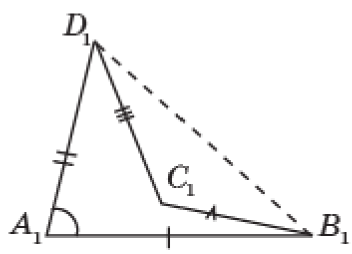
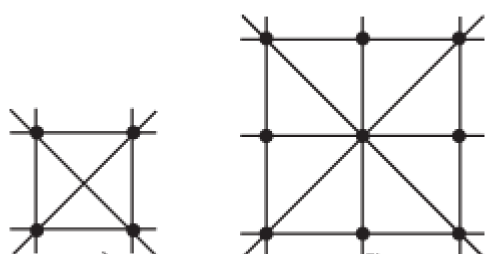


Рис. 173

5)* Расположите: а) 4 точки в 6 рядов по 2 точки в каждом из них; б) 9 точек в 8 рядов по 3 точки в каждом из них.

Решение показано соответственно на рисунках 174, а, б.



а) б)

Рис. 174

Урок 34
Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB=CD$, $BC=AD$. Докажите, что $\angle A=\angle C$ и $\angle B=\angle D$.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен 58 см. Основание на 14 см меньше боковой стороны. Найдите стороны данного треугольника.

3. От вершины M равнобедренного треугольника KLM ($MK=ML$) отложены равные отрезки: MN на стороне MK и MH на стороне ML. Докажите, что $\angle MKH=\angle MLN$.

4*. У четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны: $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CD=C_1D_1$, $AD=A_1D_1$. Будут ли равны данные четырехугольники? Почему?

Вариант 2

1. Докажите, что в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

2. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 96 см, и основание относится к боковой стороне как 2:3.

3. Дан равнобедренный треугольник EFG. От вершины G отложены на боковых сторонах GE и GF соответственно равные отрезки GM и GN. Докажите, что $\angle NEF=\angle MFE$.

4*. У четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $\angle B=\angle B_1$, $\angle D=\angle D_1$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CD=C_1D_1$ и $AD=A_1D_1$. Верно ли утверждение о том, что данные четырехугольники равны? Есть ли в задаче лишние условия?

п. 12. Соотношения между сторонами и углами треугольника (уроки 35, 36, 37)

Цель – сформировать понятие внешнего угла треугольника, знать его свойство, доказать теорему о соотношении сторон и углов треугольника, уметь применять ее при решении задач.

Урок 35

I. Анализ контрольной работы № 2

II. Устная работа

1) Какое наибольшее число прямых можно провести через различные пары из : а) 2 точек; б) 3 точек; в) 4 точек?

Ответ. а) 1; б) 3; в) 6 .

2) На прямой отмечены: а) 2 точки; б) 3 точки; в) 4 точки. Сколько получилось лучей в каждом случае?

Ответ. а) 4; б) 6; в) 8.

3) Что общего между вертикальными и смежными углами?

Ответ. Углы имеют общую вершину, и одна сторона одного угла является продолжением стороны другого угла.

4) Какой угол образуют биссектрисы двух смежных углов?

Ответ. 90°.

5) Какой угол образуют биссектрисы вертикальных углов?

Ответ. 180°.

6) Разность двух смежных углов равна 40°. Найдите эти углы.

Ответ. 70° и 110°.

III. Новый материал

Изобразим произвольный треугольник *ABC* (рис. 175). Продолжим сторону *AC* и рассмотрим углы *ACB* и *BCD*.

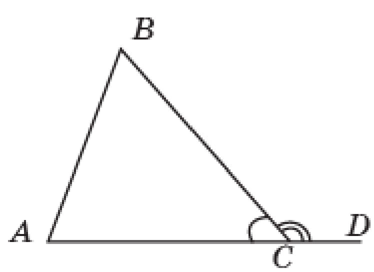


Рис. 175

Вопросы

- Как расположены выделенные углы по отношению к данному треугольнику?

- Как их можно назвать?

- Чему равна их сумма?

При ответе на поставленные воспросы выясняем, что $\angle ACB$ – внутренний угол треугольника, а $\angle BCD$ – его внешний угол.

Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника называется ***внешним углом*** этого треугольника.

- Сколько внешних углов можно построить: а) при вершине С; б) при любой вершине треугольника? Что можно сказать об их величине?

Ответ. При каждой вершине треугольника, продолжая его стороны, можно построить по два внешних угла. Эти углы равны, как вертикальные.

Изобразим теперь треугольник *EFG* и построим все его внешние углы.

- Сколько всего внешних углов имеет треугольник?

Ответ. Шесть.

Измерим (с помощью транспортира) внешний угол *BCD* треугольника *ABC* (рис. 175) и сравним его с углами *A* и *B* треугольника, несмежными с ним.

На основании проведенной практической работы делаем предположение о том, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, несмежного с ним. Далее доказываем соответствующую теорему.

Теорема. Внешний угол произвольного треугольника больше каждого его внутреннего угла, несмежного с ним.

Доказательство. Пусть *ABC* – произвольный треугольник. Рассмотрим, например, внешний угол *BCD* и докажем, что он больше внутреннего угла *ABC* (рис. 176).

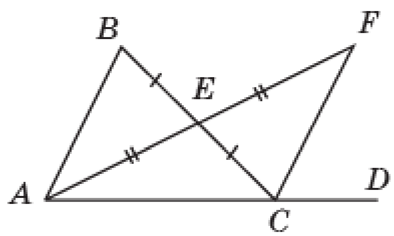


Рис. 176

Для этого через вершину *A* и середину *E* стороны *BC* проведем прямую и отложим на ней отрезок *EF*, равный *AE*. Треугольники *ABE* и *FCE* равны по первому признаку равенства треугольников ($BE=CE$, $AE=FE$, $\angle AEB=\angle FEC$). Следовательно, $\angle ABC=\angle BCF$. Но вершина *F* лежит внутри угла *BCD*. Поэтому угол *BCF* составляет только часть угла *BCD*. Значит, $\angle BCD > \angle ABC$.

Аналогично можно доказать, что $\angle BCD > \angle BAC$ (проведите доказательство самостоятельно).

IV. Закрепление нового материала

1. Докажите, что на рисунке 177 $\angle BCD > \angle ABM$.

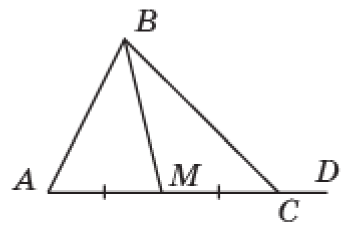


Рис. 177

Решение. $\angle BCD = \angle BMC$, так как $\angle BCD$ внешний угол треугольника BCM, а $\angle BMC$ внутренний, несмежный с ним. $\angle BMC > \angle ABM$, поскольку $\angle BMC$ внешний угол треугольника ABM, $\angle AMB$ внутренний угол, несмежный с ним. Таким образом, $\angle BCD > \angle BMC > \angle ABM$ или $\angle BCD > \angle ABM$.

2. Докажите следствия из рассмотренной теоремы.

Следствие 1. В треугольнике может быть только один тупой угол.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол C тупой, тогда смежный с ним внешний угол будет острым. По доказанной теореме он больше внутренних углов A и B треугольника. Следовательно, углы A и B острые.

Следствие 2. В треугольнике может быть только один прямой угол.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

3. Могут ли в треугольнике градусные величины двух углов быть равны 130° и 60°?

Решение. Нет, так как внешний угол к углу треугольника в 130° равен 50°, и он должен быть больше всех остальных углов треугольника.

4*. Могут ли два внешних угла треугольника (при двух его вершинах) быть острыми?

Ответ. Нет, так как в противном случае треугольник имел бы два внутренних тупых угла.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 12 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

2) Точка D, взятая внутри треугольника ABC, соединена с вершинами A и C. Докажите, что угол ADC больше угла ABC.

Решение. Для доказательства проведем AD (рис. 178) и найдем точку $E = AD \cap BC$. Тогда $\angle ADC > \angle AEC$ ($\angle ADC$ – внешний угол треугольника CDE);

$\angle AEC > \angle ABC$ ($\angle AEC$ – внешний угол треугольника ABE). Следовательно, $\angle ADC > \angle ABC$.

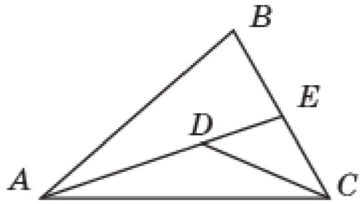


Рис. 178

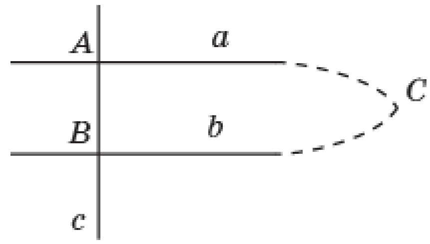


Рис. 179

3) Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

Решение. Пусть прямые a и b перпендикулярны прямой c (рис. 179) и A, B – их точки пересечения с прямой c. Если бы прямые a и b пересекались в точке C, то внешний угол при вершине A треугольника ABC был бы равен $90°$ и равен внутреннему углу B, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Значит, прямые a и b не пересекаются, т.е. параллельны.

4)* В треугольнике KLM (рис. 180) проведен отрезок LN под углом LNA, который равен углу K данного треугольника, где $N \in KM$. Найдите длину отрезка LN, если периметр треугольника KLN равен 48 см, а периметр треугольника KLM на 12 см больше периметра треугольника LMN.

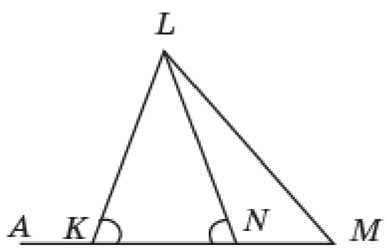


Рис. 180

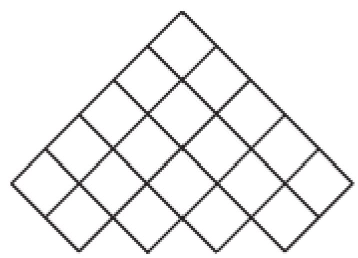


Рис. 181

Решение. Треугольник KLN - равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), значит, $KL=LN$. $P_{KLM}=12+P_{LMN}$ (P – периметр соответствующего треугольника). Отсюда $KM=12+MN$. С другой стороны, $KM=KN+MN$, значит, $KN=12$ см. $P_{KLN}=KL+LN+KN= 2LN+12=48$, откуда $LN=18$ см.

5)* Сколько на рисунке 181 квадратов?

Ответ. 32.

6)* Из каких фигур, изображенных на рисунке 182, можно сложить куб?

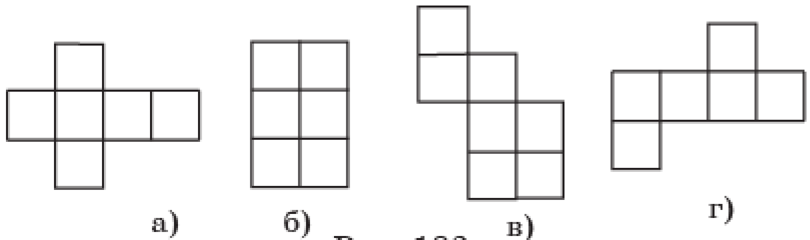


Рис. 182

Ответ. Из фигур а) и г).

Урок 36

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Равнобедренным треугольником называется …
2. Внутренним углом треугольника называется …
3. Всего у треугольника имеется … внешних углов.
4. Внешний угол треугольника …, несмежного с ним.
5. В треугольнике может быть … прямых углов.

Вариант 2

1. Равносторонним треугольником называется …
2. Внешним углом треугольника называется …
3. При каждой вершине треугольника можно построить … внешних углов.
4. Внутренний угол треугольника меньше …
5. В треугольнике может быть … тупых углов.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Устная работа

1) Могут ли в треугольнике градусные величины двух углов быть равны 150° и 30°?

Ответ. Нет, так как внешний угол к углу треугольника в 150° равен 30°, и он должен быть больше всех остальных углов треугольника.

2) Может ли внешний угол треугольника быть больше: а) одного внутреннего угла; б) двух внутренних углов этого треугольника? Приведите примеры.

Ответ. а) Нет; б) да.

3) Могут ли в треугольнике быть: а) два прямых угла; б) два тупых угла?

Ответ. а) Нет; б) нет.

4) Известно, что один из внешних углов треугольника острый. Какими являются его остальные внешние углы?

Ответ. Тупыми.

5) Может ли внешний угол при основании равнобедренного треугольника быть: а) прямым; б) острым; в) тупым?

Ответ. а), б) Нет; в) да.

IV. Новый материал

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, AB - основание. Тогда $\angle A=\angle B$, как углы при основании. Таким образом, в треугольнике против равных сторон лежат и равные углы.

Теперь изобразим разносторонний треугольник ABC, у которого $AB>AC$ (рис. 183).

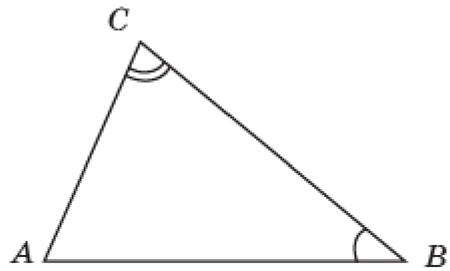


Рис. 183

Вопросы

- Какие углы лежат против соответственно сторон AB и AC?

Измерим углы C и B.

- Какой из них больше?

Делаем предположение о том, что в треугольнике против большей стороны лежит и больший угол.

Теорема. (Соотношение между сторонами и углами треугольника.) В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. Докажем, что угол C больше угла B. Для этого отложим на луче AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 184).

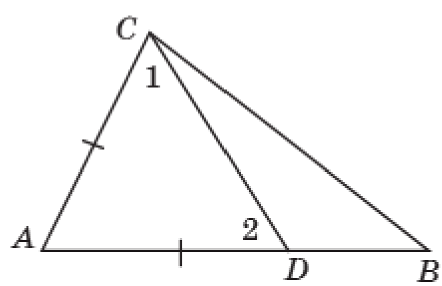


Рис. 184

Треугольник ACD - равнобедренный. Следовательно, $\angle 1=\angle 2$. Угол 1 составляет часть угла C. Поэтому $\angle 1<\angle C$. С другой стороны, угол 2 является внешним углом треугольника BCD. Поэтому $\angle 2>\angle B$. Следовательно, имеем $\angle C >\angle 1=\angle 2 > \angle B$, т.е. $\angle C > \angle B$.

Следствие. В произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол C больше угла B (рис. 183). Стороны AB и AC не могут быть равны, так как в этом случае треугольник ABC был бы равнобедренным и, следовательно, угол C равнялся бы углу B. Сторона AB не может быть меньше стороны AC, так как в этом случае, по доказанному, угол C был бы меньше угла B. Остается только, что сторона AB больше стороны AC.

V. Закрепление нового материала

1. Известно, что в треугольнике ABC $BC>AC>AB$. Какой из углов больше: а) B или A; б) C или A; в) B или C?

Ответ. а) $\angle A>\angle B$; б) $\angle A>\angle C$; в) $\angle B>\angle C$.

2. В треугольнике ABC сторона AB наибольшая: а) какие углы этого треугольника острые; б) каким может быть угол C?

Ответ. а) $\angle A$, $\angle B$; б) острым, прямым или тупым.

3. Докажите, что в равнобедренном треугольнике ABC отрезок, соединяющий любую точку D основания AB, отличную от A и B, с вершиной C, меньше боковой стороны.

Решение. Один из углов ADC или BDC больше или равен прямому углу. Пусть, например, это угол ADC (рис. 185). Тогда он больше угла A и, следовательно, сторона AC больше CD.

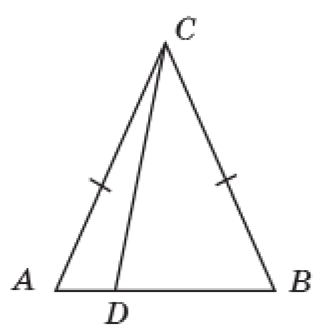


Рис. 185

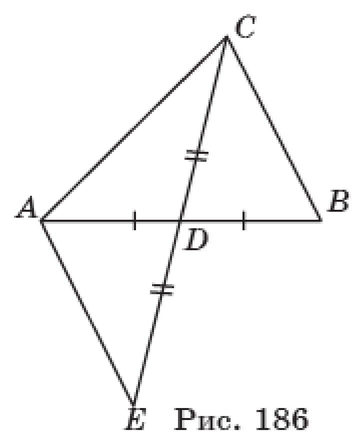


Рис. 186

4*. Пусть в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC>BC$. Докажите, что для медианы CD выполняется неравенство $\angle ACD<\angle BCD$.

Решение. Продолжим медиану CD на отрезок DE, равный CD, и соединим точки A и E (рис. 186). Треугольник ADE равен треугольнику BDC (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, угол E равен углу BCD, и $AE=BC<AC$. Поскольку в произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то $\angle E>\angle ACD$ и, следовательно, $\angle ACD<\angle BCD$.

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 12 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что если один из углов треугольника прямой, то два другие острые.

2) Стороны треугольника *EFG* равны 1,2 см; 2,5 см и 1,8 см, а углы удовлетворяют условию $\angle E > \angle F > \angle G$. Запишите длины сторон данного треугольника.

Ответ. FG=2,5 см; EG=1,8 см; EF=1,2 см.

3) Используя соотношение между сторонами и углами треугольника, докажите признак равнобедренного треугольника: "Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный".

Решение. Пусть в треугольнике *ABC* $\angle A = \angle B$. Докажем, что $AC = BC$. Если бы $AC > BC$, то $\angle B > \angle A$ (по теореме о соотношении между сторонами и углами треугольника), что противоречит условию задачи. Если бы $AC < BC$, то $\angle B < \angle A$, что также противоречит условию. Следовательно, остается третья возможность, а именно, $AC = BC$, и треугольник *ABC* – равнобедренный (по определению).

4)* Пусть в треугольнике *ABC* выполняется неравенство $AC > BC$. Докажите, что для биссектрисы *CD* выполняется неравенство $AD > BD$.

Решение. Отложим на стороне *AC* отрезок *CE*, равный *CB*, и соединим точки *D* и *E* (рис. 187).

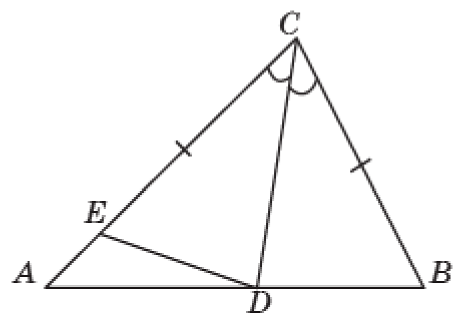


Рис. 187

Треугольники *BDC* и *EDC* равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle DEC = \angle DBC$, $DE = DB$. Угол *AED* равен внешнему углу треугольника *ABC* при вершине *B*, который больше внутреннего угла *A*. Таким образом, в треугольнике *ADE* угол *AED* больше угла *A*. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то $AD > ED = BD$.

5)* (Задача Б.А. Кордемского.) К чаю был куплен торт (рис. 188, а). По трем прямым линиям его разрезали на 7 частей. На каждой части при этом оказалось по розочке. Как разрезали торт?

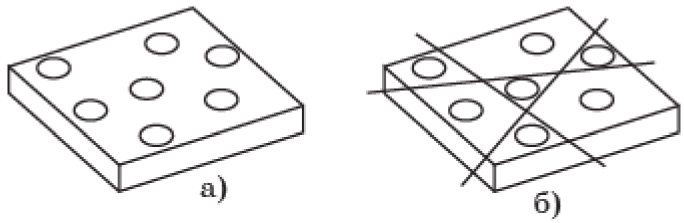


Рис. 188

Решение показано на рисунке 188, б.

Урок 37

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаем четырех учащихся для опроса по теории.

Задания 1, 3

1. Дайте определение внешнего угла треугольника.
2. Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.

Задания 2, 4

1. Дайте определение внутреннего угла треугольника.
2. Сформулируйте и докажите теорему – соотношение между сторонами и углами треугольника.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Могут ли в треугольнике градусные величины двух углов быть равны: а) 50° и 40°; б) 90° и 120°? Ответ поясните.

2) Углы треугольника равны 70°, 70° и 40°. Определите вид данного треугольника и найдите его внешние углы.

3) В треугольнике ABC известны стороны, а именно: AB=8 см, BC=15 см и AC=12 см. Найдите наибольший и наименьший углы данного треугольника.

Ответы. 1) а) Да; б) нет.

2) Равнобедренный, 110°, 110° и 140°.

3) Соответственно $\angle A$ и $\angle C$.

Задание для класса

1. Для углов треугольника KLM выполняются неравенства $\angle K>\angle L>\angle M$. Сравните его стороны.

Ответ. $LM>KM>KL$.

2. Каждый угол треугольника равен 60°. Определите вид треугольника. Ответ поясните.

Ответ. Равносторонний.

3. Докажите, что среднему по величине углу треугольника противолежит средняя по величине сторона.

4*. Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

Замечание. Учащиеся должны понимать, что «не меньше» означает «больше или равно».

Решение. Пусть в треугольнике *ABC* проведены высота *CH* и медиана *CM*. Если треугольник *ABC* равнобедренный и $AC=BC$, то $CH=CM$. Теперь рассмотрим случай, когда *CH* и *CM* не совпадают (рис. 189).

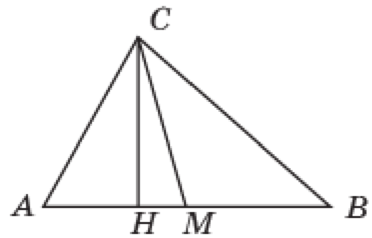


Рис. 189

В треугольнике *CHM* $\angle CHM=90°$. Поскольку в прямоугольном треугольнике два других угла острые, имеем $CM>CH$ (следствие теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника).

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашней работы (см. этап VI урока 36).

Дополнительные вопросы

- Какой угол называется внешним углом треугольника?

- Каким свойством обладает внешний угол треугольника?

- В чем заключается теорема – соотношение между сторонами и углами треугольника?

II. Устная работа

1) Какая сторона треугольника лежит против: а) прямого угла; б) тупого угла?

Ответ. а), б) Наибольшая сторона треугольника.

2) Сравните стороны треугольника *ABC*, если: а) $\angle A>\angle B>\angle C$; б) $\angle A>\angle B=\angle C$.

Ответ. а) $BC>AC>AB$; б) $BC>AB=AC$.

3) Могут ли в треугольнике градусные величины двух углов быть равны 100° и 90°?

Ответ. Нет, не могут.

4) Если один из внешних углов треугольника острый, то какими являются его остальные внешние углы?

Ответ. Тупыми.

5), 6) – задачи 1) и 2) из домашнего задания (см. этап VI урока 36).

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. В треугольнике два внешних угла при различных вершинах равны между собой. Каков вид этого треугольника? Ответ поясните.

2. На рисунке 190 $\angle 1 > \angle 2$. Сравните стороны *CD* и *ED*.

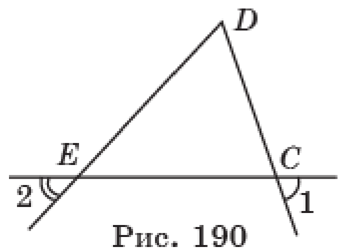


Рис. 190

3. Может ли в треугольнике быть два тупых угла? Почему?

4*. Может ли медиана треугольника быть меньше его высоты, проведенной из той же вершины?

(См. решение задачи 4* этапа I данного урока 37).

Вариант 2

1. В треугольнике *ABC* внешний угол при вершине *A* острый, а при вершине *C* тупой. Что можно сказать о внутренних углах этого треугольника?

2. На рисунке 191 $\angle 1 < \angle 2$. Сравните стороны *GH* и *GF*.

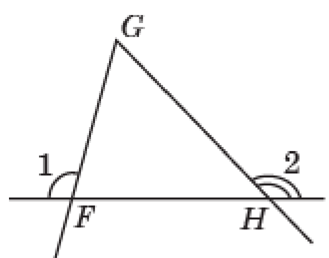


Рис. 191

3. Может ли в прямоугольном треугольнике быть тупой угол? Почему?

4*. Задача 4* из первого варианта.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа.

V. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательных частей домашних заданий уроков 35, 36 и задача 6* урока 36 (этап V).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 12 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что если один из углов треугольника тупой, то два другие острые.

Решение. Внешний угол треугольника, смежный данному тупому углу, будет острым. По теореме о внешнем угле треугольника этот острый угол должен быть больше каждого угла треугольника, несмежного с ним. Следовательно, каждый их этих двух углов меньше острого угла, т. е. является тоже острым углом.

2) Докажите, что угол, лежащий против наименьшей из сторон треугольника, всегда острый.

Решение. Этот угол не может быть тупым или прямым, тогда против него должна лежать наибольшая сторона треугольника. Следовательно, против наименьшей стороны всегда лежит острый угол треугольника.

3) Докажите, что медиана треугольника, проведенная к одной из двух его сторон, которые образуют тупой угол, больше другой из этих сторон и меньше третьей стороны треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол C - тупой, AM – медиана (рис. 192). Докажем, что $AM>AC$ и $AM<AB$ (или $AC<AM<AB$). Первое неравенство следует из треугольника ACM, где AM – его наибольшая сторона, так как лежит против тупого угла, значит, $AM>AC$. Второе неравенство следует из треугольника AMB, где угол AMB - тупой, так как угол AMC, смежный с ним, острый. Следовательно, AB – наибольшая сторона треугольника, т.е. $AB>AM$ или $AM<AB$.

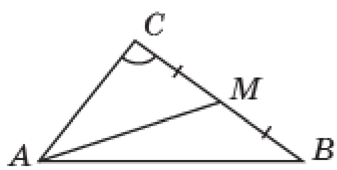


Рис. 192

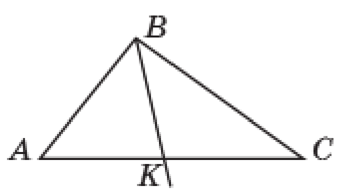


Рис. 193

4)* Можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника? Дайте ответ, используя теорему о внешнем угле треугольника и теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.

Решение. Допустим треугольник ABC (рис. 193) разрезали по прямой BK на два равных треугольника. Рассмотрим угол AKB треугольника AKB. Он является внешним по отношению к треугольнику CKB, и по теореме о внешнем угле треугольника $\angle AKB>\angle BCK$ и $\angle AKB>\angle CBK$. Следовательно, $\angle AKB=\angle CKB=90^{\circ}$ (по предположению $\Delta AKB=\Delta CKB$). Значит, наибольшие стороны в этих треугольниках AB и CB, т.е. $AB=CB$, и данный треугольник является равнобедренным. Вывод: разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

5)* Разрежьте: а) равносторонний треугольник; б) равнобедренный треугольник на два равных треугольника. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. Надо разрезать треугольник по высоте, опущенной на: а) любую сторону; б) основание. Количество способов: а) 3; б) 1.

п. 13. Соотношения между сторонами треугольника (уроки 38, 39, 40)

Цель – познакомить учащихся с одним из основных соотношений между сторонами треугольника – неравенством треугольника; доказать соответствующую теорему; научиться применять ее для решения задач.

Урок 38

I. Устная работа

1) Какой угол называется внешним углом треугольника?

2) Сколько внешних углов имеется при каждой вершине треугольника?

3) Сформулируйте теорему о внешнем угле треугольника.

4) Сформулируйте теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.

5) Какой вид имеет треугольник, если известно, что: а) два его угла равны между собой; б) три его угла равны между собой?

6) Задача по рисунку 194: $EF=FG$, $\angle 1=\angle 2$. Определите вид изображенных треугольников.

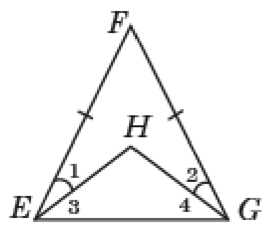


Рис. 194

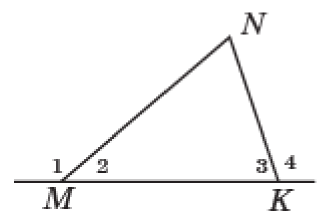


Рис. 195

Ответ. ΔEFG - равнобедренный (по определению), ΔEHG - равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника, у него $\angle 3=\angle E-\angle 1=\angle G-\angle 2=\angle 4$).

7) Задача по рисунку 195: $\angle 1>\angle 4$. Каким соотношением связаны стороны MN и KN треугольника KMN?

Ответ. Поскольку $\angle 1>\angle 4$, $\angle 2<\angle 3$, значит, $KN<MN$ или $MN>KN$ (по следствию из теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника).

II. Новый материал

Изобразим произвольный треугольник ABC и измерим его стороны. Убедимся в том, что каждая его сторона меньше суммы двух других его сторон, т. е. $AC<AB+BC$, $AB<AC+BC$ и $BC<AB+AC$. Докажем соответствующую теорему.

Теорема. (Неравенство треугольника.) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Доказательство. Рассмотрим треугольник *ABC*. Отложим на продолжении стороны *AB* отрезок *BD*, равный стороне *BC* (рис. 196).

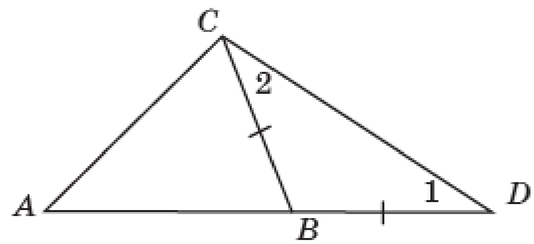


Рис. 196

Треугольник *BDC* - равнобедренный. Поэтому $\angle 1=\angle 2$. Угол 2 составляет часть угла *ACD*. Следовательно, $\angle 2<\angle ACD$. Таким образом, в треугольнике *ACD* угол *C* больше угла *D*. Воспользуемся тем, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Получим неравенство $AD>AC$. Но $AD=AB+BD=AB+BC$. Следовательно, имеем неравенство $AB+BC>AC$, или $AC < AB + BC$, означающее, что сторона *AC* треугольника меньше суммы двух других сторон.

Следствие. Если выполняется равенство $AC+CB=AB$, то точка *C* лежит на отрезке *AB* между точками *A* и *B*.

Доказательство. Действительно, если точка *C* не принадлежит прямой *AB*, то будет выполняться неравенство $AC+CB>AB$. Если точка *C* принадлежит прямой *AB* и находится вне отрезка *AB*, то также будет выполняться это неравенство. Остается одна возможность - точка *C* лежит на отрезке *AB* между точками *A* и *B*.

III. Закрепление нового материала

1. Существует ли треугольник со сторонами: а) 4 см, 11 см, 12 см; б) 1,25 см; 2,7 см; 4,1 см; в) 3 дм, 8 дм, 1 м; г) 1,5 см; 2,5 см; 4 м?

Ответ. а) Да; б) нет; в) да; г) нет.

2. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 15 см, а другая 7 см. Найдите его периметр.

Решение. Сторона, равная 15 см, не может быть основанием равнобедренного треугольника, так как в этом случае не выполнялось бы неравенство треугольника ($7 + 7 < 15$). Поэтому сторона, равная 15 см, является боковой стороной, и, следовательно, периметр данного треугольника равен $7+15+15=37$ (см).

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см. Одна из сторон больше другой в два раза. Найдите длины сторон этого треугольника.

Ответ. 4 см, 8 см, 8 см.

4*. Для точек A, B, C, D одной прямой выполняется равенство $AB+CD=BC+AD$. Как расположены эти точки?

Ответ. См. рисунок 197, $AC=CB=BD$.

Рис. 197

IV. Занимательный момент

Решения задач 4* и 5* из необязательной части домашнего задания (см. этап VI урока 37).

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 13 учебника).

2. Решить задачи.

1) В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая – 10 см. Какая из них является основанием треугольника?

Ответ. 10 см.

2) В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 12 см, а другая – 5 см. Найдите периметр данного треугольника.

Ответ. 29 см.

3) Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины периметра.

Решение. Для стороны AC треугольника ABC выполняется неравенство $AC<AB+BC$, значит, $AC+AC<AB+BC+AC$ или $AC<\frac{AB+BC+AC}{2}$. Аналогичным образом доказываются соответствующие неравенства для сторон AB и BC треугольника ABC.

4)* Докажите, что диагонали четырехугольника меньше его полупериметра.

Решение. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 198).

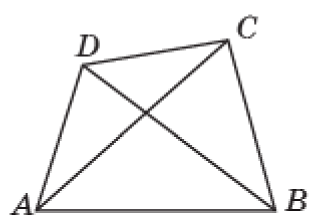


Рис. 198

Проведем его диагонали AC и BD. По теореме о неравенстве треугольника имеем: $AC<AB+BC$, $AC<AD+CD$, $BD<AB+AD$, $BD<BC+CD$. Таким образом, $AC+AC=2AC<AB+BC+CD+AD=P$, где P – периметр данного четырехугольника, и $BD+BD=2BD<P$. Следовательно, $AC<\frac{P}{2}$ и $BD<\frac{P}{2}$.

Урок 39

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. В треугольнике против большей стороны …
2. Для сторон треугольника MNK выполняются следующие неравенства: …
3. Если выполняется равенство $XY+YZ=XZ$, то …
4. Треугольник со сторонами 5 см, 3 см и 1 см …

Вариант 2

1. В треугольнике против большего угла …
2. Для сторон треугольника EFG выполняются следующие неравенства: …
3. Если выполняется неравенство $XY+YZ>XZ$, то точка Y …
4. Треугольник со сторонами 5 см, 2 см и 3 см …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Изобразим простую незамкнутую ломаную, например, 4-стороннюю ломаную $ABCDE$ (рис. 199).

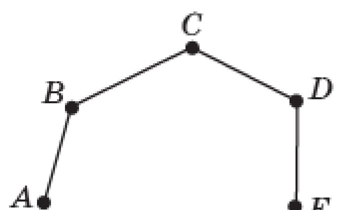


Рис. 199

Соединим концы ломаной отрезком AE и сравним длину AE с длиной ломаной, т. е. с суммой длин ее сторон, а именно: $AB+BC+CD+DE$. Получим $AE<AB+BC+CD+DE$. Теперь возьмем ломаную $ABCDE$, все стороны которой лежат на одной прямой. Ясно, что в этом случае $AE=AB+BC+CD+DE$. Делаем предположение о том, что длина отрезка, соединяющего концы ломаной, меньше или равна, т. е. не превосходит, длины самой ломаной и доказываем соответствующую теорему.

Теорема. Длина отрезка, соединяющего концы ломаной, не превосходит длины самой ломаной.

Доказательство. Рассмотрим ломаную *ABCDE* (рис. 200).

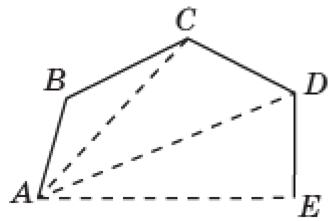


Рис. 200

Заменим соседние стороны *AB* и *BC* на отрезок *AC*. При этом длина ломаной уменьшится или, по крайней мере, не увеличится. Будем и дальше заменять соседние стороны ломаной на отрезки, пока не дойдем до отрезка, соединяющего начало и конец ломаной. При этом каждый раз длина ломаной не будет увеличиваться. Значит, длина отрезка, соединяющего концы ломаной, не превосходит длины всей ломаной.

IV. Закрепление нового материала

1. Каким соотношением связана длина каждой стороны многоугольника с длиной других его сторон?

Ответ. Длина каждой стороны выпуклого многоугольника меньше суммы длин других его сторон.

2. Могут ли у четырехугольника стороны равняться 10 см, 15 см, 20 см и 25 см?

Ответ. Да, могут.

3. Расстояние от дома до автобусной остановки равно 0,5 км, а от остановки до школы равно 2 км. Может ли расстояние от дома до школы быть равным: а) 5 км; б) 3 км; в) 2,5 км; г) 1,5 км? Найдите возможные наибольшее и наименьшее расстояния от дома до школы.

Ответ. а), б) Нет; в) г) да. Наибольшее расстояние равно 2,5 км, наименьшее 1,5 км.

4*. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше его половины.

Решение. В задаче 3* из необязательной части домашнего задания (см. этап V урока 38) было доказано, что каждая диагональ выпуклого четырехугольника меньше его полупериметра. Таким образом, сумма диагоналей меньше его периметра.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 13 учебника). Повторить теорию п. 12 учебника.

2. Решить задачи.

1) Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.

2) Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов острый. Найдите стороны треугольника.

Ответ. 11 см, 7 см, 7 см.

3) Докажите, что если для точек A, B и C выполняется равенство $AC-AB=BC$, то они принадлежат одной прямой.

4)* В каких пределах может изменяться периметр треугольника, если две его стороны равны a и b?

Решение. Пусть P – периметр данного треугольника, тогда $P>a+b$ и $P=a+b+c$, где c – третья сторона треугольника. По теореме о неравенстве треугольника $c<a+b$, значит, $P<2(a+b)$. Окончательно получаем $a+b<P<2(a+b)$.

Урок 40

I. Проверка домашнего задания

Восьмерых учащихся приглашаем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 3

Сформулируйте и докажите теорему – неравенство треугольника.

Задания 2, 4

Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.

Задания 5, 7

Сформулируйте и докажите теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника

Задания 6, 8

Сформулируйте и докажите теорему о длине ломаной.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Могут ли в треугольнике длины сторон быть равными: а) 5 см; 1,2 см; 3,8 см; б) 3,1 см; 6,8 см; 10 см?

2) Могут ли в треугольнике углы равняться: а) 95° и 100°; б) 30° и 60°?

3) Найдите периметр равнобедренного треугольника, если две его стороны равны 1 см и 5 см.

Ответы. 1) а), б) Нет.

2) а) Нет; б) да.

3) 11 см.

Задание для класса

1. Могут ли стороны треугольника относиться как 1:2:3?

Ответ. Нет, не выполняется неравенство треугольника.

2. Две стороны равнобедренного треугольника равны 2 см и 6 см. Найдите основание и боковые стороны треугольника.

Ответ. Основание – 2 см, боковая сторона – 6 см.

3. Может ли одна сторона треугольника быть в два раза больше другой стороны и во столько же раз меньше третьей?

Ответ. Нет, не выполняется неравенство треугольника.

4*. Верно ли, что если для точек A, B, C, D выполняется равенство $AB+CD=BC+AD$, то они принадлежат одной прямой?

Ответ. Нет.

Приглашаем к доске трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – решает классную задачу 2.

$У_2$ – решает классную задачу 3.

$У_3$ – показывает решение задачи 1) из домашней работы (см. этап V урока 39).

Дополнительные вопросы

- Сколько острых углов может быть у треугольника?
- Сколько прямых углов может быть у треугольника?
- Сколько тупых углов может быть у треугольника?

II. Устная работа

1) Можно ли построить треугольник со сторонами: а) 13 см, 2 см, 8 см; б) 1 м, 1м, 0,5 м?

Ответ. а) Нет; б) да.

2) Могут ли стороны треугольника относиться как: а) 1:3:5; б) 2:3:6; в) 1:2:2?

Ответ. а), б) Нет; в) да.

3) В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая - 10 см. Какая из них является основанием?

Ответ. 10 см.

4) Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 6 см и 3 см; б) 8 см и 2 см.

Ответ. а) 6 см; б) 8 см.

5) Существуют ли на плоскости точки A, B, C, D, для которых выполняется неравенство $AB+BC+CD < AD$?

Ответ. Нет.

6) Какая сторона треугольника лежит против: а) прямого угла; б) тупого угла?

Ответ. а), б) Наибольшая сторона треугольника.

7) Может ли против острого угла треугольника лежать его наибольшая сторона?

Ответ. Да, может в остроугольном треугольнике.

III. Занимательный момент

Решение задач 4* из необязательных частей домашних заданий уроков 38 и 39.

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 12 и п. 13 учебника).

2. Решить задачи.

1) Одна сторона треугольника короче другой на 1 см и длиннее третьей на 3 см. Может ли его периметр равняться 19 см?

Ответ. Да, стороны равны 4 см, 7 см, 8 см.

2) В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, другая – 0,8 м. Найдите третью сторону, зная, что ее длина выражается целым числом метров.

Ответ. 2 м.

3) На рисунке 201 изображены стержни, соединенные шарнирами, которые могут свободно двигаться. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния, на которые можно раздвинуть концы *A* и *B*. Сделайте соответствующие рисунки.

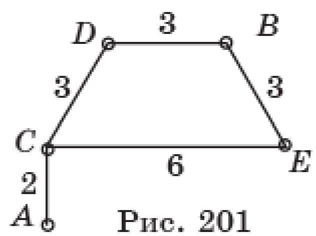


Рис. 201

Ответ. Наибольшее 8, наименьшее 1.

4)* Четыре населенных пункта расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. В каком месте следует построить пекарню, чтобы сумма расстояний от нее до всех четырех данных пунктов была наименьшей.

Ответ. В точке пересечения диагоналей четырехугольника.

п. 14. Прямоугольные треугольники
(уроки 41, 42)

Цель – познакомить учащихся с классификацией треугольников в зависимости от величины их углов; сформировать понятия остроугольного, прямоугольного, тупоугольного треугольников; рассмотреть и доказать признаки равенства прямоугольных треугольников; научиться применять их в решении задач.

Урок 41

I. Устная работа

1) Известно, что в треугольнике ABC $BC > AC > AB$. Какой из углов больше: а) B или A; б) C или A; в) B или C?

Ответ. а), б) Угол A; в) угол B.

2) Сравните стороны треугольника ABC, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B$, $\angle B = \angle C$.

Ответ. а) $BC > AC > AB$; б) $BC > AB = AC$.

3) Сравните углы треугольника ABC, если: а) AB = 4 см, BC=5см, AC=6 см; б) AB=BC=7 см, AC=10 см.

Ответ. а) $\angle B > \angle A > \angle C$; б) $\angle B > \angle A = \angle C$.

4) В треугольнике ABC сторона AB наибольшая. Какие углы этого треугольника острые? Каким может быть угол C?

Ответ. Острые углы: $\angle A$ и $\angle B$; $\angle C$ может быть острым, прямым или тупым.

5) Известно, что один из внешних углов треугольника острый. Какими являются его остальные внешние углы?

Ответ. Тупыми.

6) Сколько треугольников изображено на рисунке 202?

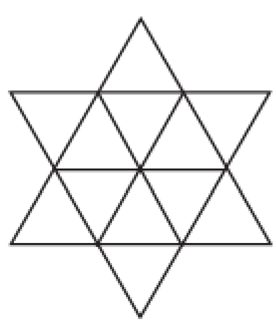


Рис. 202

Ответ. 20.

II. Новый материал

Вопрос

- Сколько в треугольнике может быть внутренних углов: а) острых; б) тупых; в) прямых?

После обсуждения ответа на этот вопрос даем соответствующие определения.

Треугольник называется ***остроугольным***, если у него все углы острые.

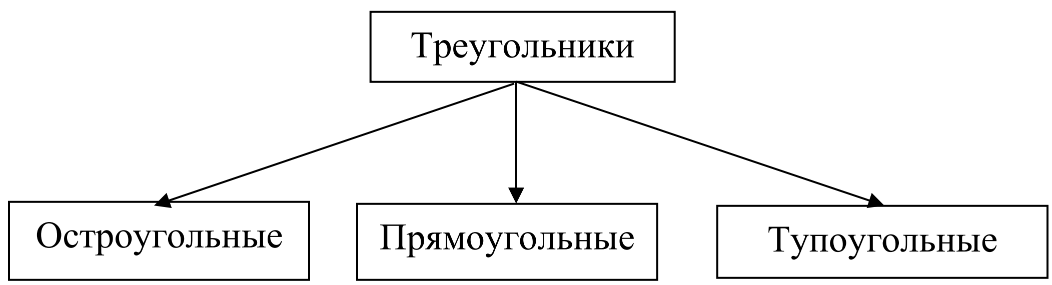
Треугольник называется ***тупоугольным***, если у него есть тупой угол.

Треугольник называется ***прямоугольным***, если у него есть прямой угол.

Задание. Изобразите остроугольный и тупоугольный треугольники.

Теперь даем классификацию треугольников в зависимости от величины их углов, наглядно представляем в виде схемы.

Виды треугольников



Вопрос

- Как называются стороны равнобедренного треугольника?

Изобразим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется ***гипотенузой***, две другие стороны называются ***катетами***.

На рисунках в тетрадях у школьников AB – гипотенуза, AC и BC – катеты прямоугольного треугольника ABC.

Вопрос

- Что больше катет или гипотенуза прямоугольного треугольника?

Ответ. Так как против большего угла в треугольнике лежит большая сторона, то гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катетов.

Рассмотрим признаки равенства треугольников и применим их к прямоугольным треугольникам.

Теорема. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Прямоугольные треугольники будут равны по двум сторонам и углу между ними, т. е. по первому признаку равенства треугольников.

Теорема. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Прямоугольные треугольники будут равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, т. е. по второму признаку равенства треугольников.

III. Закрепление нового материала

1. Сколько треугольников изображено на рисунке 203? Сколько из них: а) остроугольных; б) тупоугольных; в) прямоугольных? Выпишите их.

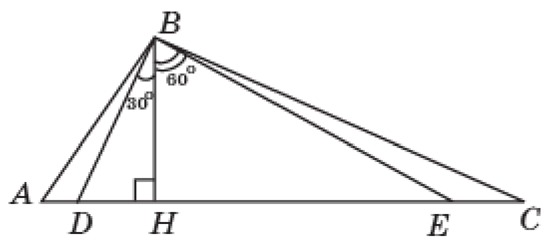


Рис. 203

Ответ. Всего 10 треугольников, из них: а) 0; б) 5; в) 5.

2. Постройте прямоугольный треугольник по его катетам, равным 3 см и 5 см. Всегда ли можно построить прямоугольный треугольник по его катетам?

Решение. Угольником строим прямой угол C и на его сторонах откладываем отрезки CA=3 см и CB=5 см. Соединяем отрезком точки A и B. Треугольник ABC – искомый. Действительно, он прямоугольный, $\angle C=90^\circ$, и его катеты равны 3 см и 5 см. Прямоугольный треугольник можно построить по любым его катетам.

3. На высоте равнобедренного треугольника, опущенной на его основание, взята произвольная точка. Докажите, что она одинаково удалена от вершин основания.

4*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) проведена медиана BD. Какой из углов больше ABD или CBD?

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle C=90^\circ$, $CD=AD$ (рис. 204). Назовем углы: $\angle CBD=\angle 1$, $\angle ABD=\angle 2$, $\angle CDB=\angle 3$, $\angle ADB=\angle 4$, $\angle A=\angle 5$. Углы 1, 2, 3 и 5 – острые, $\angle 4$ – тупой. Продолжим BD за точку D и проведем $AE\perp CA$, где E – точка пересечения с BD. Тогда прямоугольные треугольники BCD и EAC равны (по катету и острому углу). Следовательно, $AE=CB$ и $\angle AED=\angle CBD=\angle 1$. Рассмотрим ΔABE. $AB>AE$ ($AB>BC=AE$, как гипотенуза данного треугольника *ABC*). Таким образом, ∠1>∠2 (в треугольнике против большей стороны лежит и больший угол), т.е. ∠*CBD*>∠*ABD*.

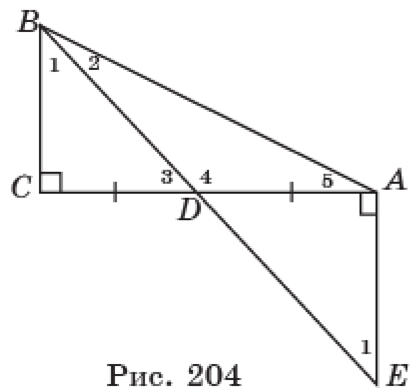


Рис. 204

IV. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 14 учебника).

2. Решить задачи.

1) Может ли прямоугольный треугольник быть: а) равнобедренным; б) равносторонним?

Ответ. а) Да; б) нет.

2) Стороны прямоугольного треугольника равны 3 см, 4 см, 5 см. Чему равна гипотенуза?

Ответ. 5 см.

3) В равнобедренном треугольнике *ABC* точки *D* и *E* взяты на основании *AC* так, что *AD*=*CE*. Из точек *D* и *E* к основанию проведены перпендикуляры до пересечения с боковыми сторонами треугольника соответственно в точках *M* и *N*. Докажите, что *DM*=*EN*.

4)* Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей меньше его периметра, но больше половины периметра.

Решение. Пусть дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. Тогда $AC<AB+BC$ и $AC<AD+CD$; $BD<AB+AD$ и $BD<BC+CD$ (неравенство треугольника). Таким образом, $AC+BD<AB+BC+CD+AD=P$, где *P* – периметр данного четырехугольника. Обозначим точку пересечения диагоналей четырехугольника через *O*. Тогда $AB<AO+BO$, $BC<BO+CO$, $CD<CO+DO$, $AD<AO+DO$. Отсюда, замечая, что $AO+OC=AC$ и $BO+OD=BD$, получим $P<2AC+2BD$ или $AC+BD>\frac{P}{2}$. Полученные результаты можно записать одним двойным неравенством, а именно, $\frac{P}{2}<AC+BD<P$.

Урок 42

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Треугольник называется прямоугольным, если …
2. Катетом прямоугольного треугольника называется …
3. Гипотенуза прямоугольного треугольника … его катетов.
4. Первый признак равенства треугольников применительно к прямоугольным треугольникам можно сформулировать следующим образом: …
5. Прямоугольный треугольник … иметь тупой угол.
6. Пусть $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ и $\angle C = 90^\circ$. Тогда …

Вариант 2

1. В прямоугольном треугольнике … прямой угол.
2. Гипотенузой прямоугольного треугольника называется …
3. Катет прямоугольного треугольника … его гипотенузы.
4. Второй признак равенства треугольников применительно к прямоугольным треугольникам можно сформулировать следующим образом: …
5. Прямоугольный треугольник … иметь тупой угол.
6. Пусть $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ и $\angle C = 90^\circ$. Тогда …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Мы знаем, что если катеты одного прямоугольного треугольника соответственног равны катетам другого прямоугольного треугольника, то треугольники равны. Тогда у них будут равны и гипотенузы. Интересно, а если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то будут ли равны сами треугольники? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство аналогично доказательству третьего признака равенства треугольников. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два прямоугольных треугольника, в которых углы C и C_1 - прямые, $AB = A_1B_1$ и $AC=A_1C_1$ (рис. 205).

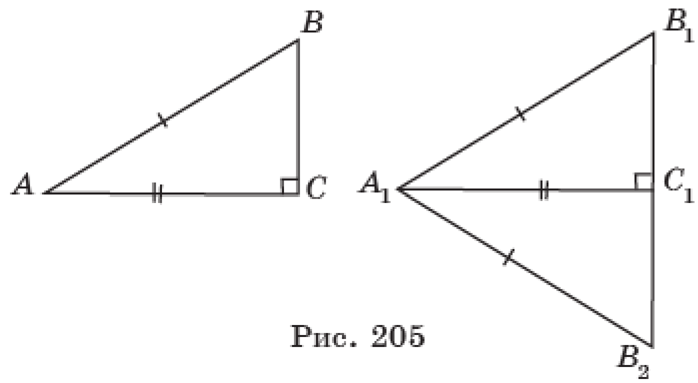


Рис. 205

Отложим треугольник ABC от луча A_1C_1 так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а вершина B перешла бы в точку B_2, лежащую с точкой B_1 по разные стороны от прямой A_1C_1. Тогда треугольник $A_1C_1B_2$ будет равен треугольнику ABC. Так как углы $A_1C_1B_1$ и $A_1C_1B_2$ - прямые, то точки B_1, C_1 и B_2 принадлежат одной прямой. Из равенства сторон A_1B_1 и A_1B_2 следует, что треугольник $B_1A_1B_2$ - равнобедренный. Воспользуемся тем, что высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является биссектрисой. Получим, что A_1C_1 - биссектриса и, значит, равны углы $C_1A_1B_1$ и $C_1A_1B_2$. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

IV. Закрепление нового материала

1. Докажите, что если катет и высота, опущенная на гипотенузу, одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и высоте, опущенной на гипотенузу, другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Решение. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два прямоугольных треугольника, в которых $\angle C=\angle C_1$,$=90^o$, $AC=A_1C_1$ и $CH=C_1H_1$, где $CH\perp AB$ и $C_1H_1\perp A_1B_1$ (рис. 206).

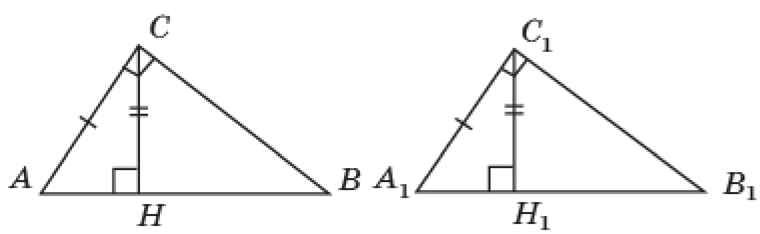


Рис. 206

Докажем, что треугольники равны. Действительно, по доказанной выше теореме $\Delta ACH=\Delta A_1C_1H_1$ (прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и катету). Отсюда следует, что $\angle A=\angle A_1$. Тогда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (треугольники прямоугольные и равны по катету и прилежащему к нему острому углу).

2. Докажите, что если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Решение. Пусть в прямоугольных треугольниках KLP и $K_1L_1P_1$ равны гипотенузы KL и K_1L_1 и острые углы K и K_1 (рис. 207).

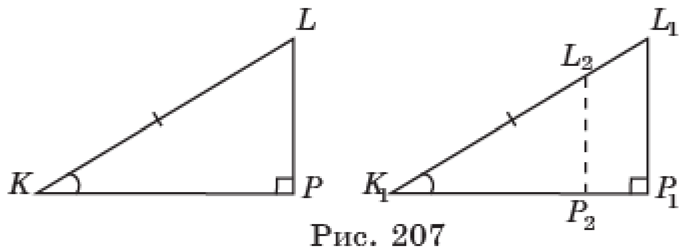


Рис. 207

Докажем, что треугольники равны. Для этого докажем, что у данных треугольников равны катеты, например, KP и K_1P_1. Допустим, они не равны и $KP<K_1P_1$. Отложим KP на луче K_1P_1, получим точку P_2, $KP=K_1P_2$. Через точку P_2 проведем прямую, перпендикулярную K_1P_1. Она не может пересекать сторону P_1L_1 и, следовательно, пересекает сторону K_1L_1 треугольника $K_1L_1P_1$ в некоторой точке L_2. Тогда прямоугольные треугольники KLP и $K_1L_2P_2$ равны (по катету и острому углу), значит, $KL=K_1L_2$. Однако по условию $KL=K_1L_1$. Таким образом, катеты KP и K_1P_1 данных треугольников должны быть равны, но тогда и треугольники равны (по катету и острому углу).

3*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) проведена биссектриса BE. Какой из отрезков больше AE или CE?

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) проведена биссектриса BE (рис. 208). $\angle CBE=\angle EBA$. Отложим $BD=BC$, тогда $\Delta BCE=\Delta BDE$ (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle BCE=\angle BDE=\angle ADE=90^{\circ}$ и $CE=DE$, но $DE<AE$ (AE - гипотенуза прямоугольного ΔADE). Таким образом, $AE>CE$.

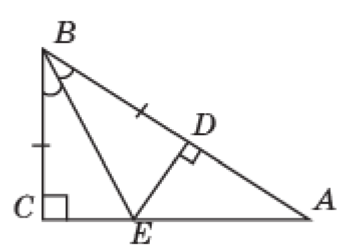


Рис. 208

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из необязательной части домашнего задания (см. этап IV урока 41).

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 14 учебника).

2. Решить задачи.

1) На сторонах угла с вершиной *O* взяты точки *A* и *B* так, что *OA*=*OB*. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке *C*. Докажите, что луч *OC* - биссектриса данного угла.

Решение следует из равенства прямоугольных треугольников *AOC* и *BOC* (по гипотенузе и катету).

2) Докажите, что в равнобедренном треугольнике две высоты, проведенные из вершин основания, равны.

Решение следует из равенства прямоугольных треугольников, в каждом из которых гипотенузой является основание данного равнобедренного треугольника, а одним из катетов - одна из данных высот. Прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и острому углу.

3) В треугольнике *KLM* проведена медиана *LN*. Докажите, что высоты треугольников *MLN* и *KLN*, проведенные соответственно из вершин *M* и *K*, равны.

Решение следует из равенства прямоугольных треугольников *MPN* и *KHN* (по гипотенузе и острому углу), где *MP* и *KH* – высоты соответственно треугольников *MLN* и *KLN*.

4)* Как измерить ширину реки, находясь на одном ее берегу?

Решение представлено на рисунке 209 (прямоугольные треугольники равны по катету и острому углу).

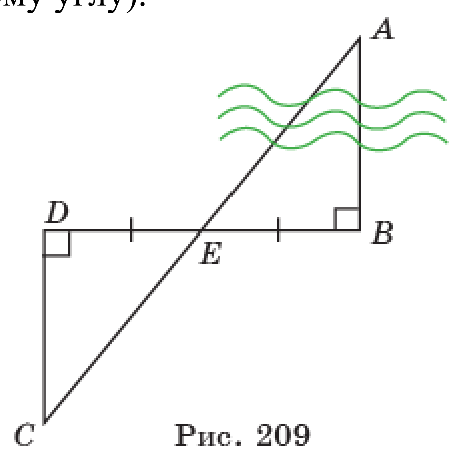


Рис. 209

5)* Найдите число углов, которые получатся, если из одной точки плоскости провести 3 луча.

Ответ. 6 углов.

п. 15. Перпендикуляр и наклонная (уроки 43, 44, 45)

Цель – сформировать понятия перпендикуляра, наклонной, проекции наклонной, расстояния от точки до прямой; доказать, что расстояние от точки до прямой является наименьшим из расстояний от этой точки до точек прямой; познакомить учащихся с геометрической интерпретацией закона отражения света.

Урок 43

I. Устная работа

1) Может ли прямоугольный треугольник иметь катеты 11 см и 111 см?

Ответ. Да.

2) Могут ли неравные прямоугольные треугольники иметь равные гипотенузы?

Ответ. Да.

3) Могут ли неравные прямоугольные треугольники иметь равные катеты?

Ответ. Да.

4) Может ли прямоугольный треугольник иметь два прямых угла?

Ответ. Нет.

5) Может ли прямоугольный треугольник иметь тупой угол?

Ответ. Нет.

6), 7), 8) – задачи по готовым чертежам – задачи 1, 2, 3 из обязательной части домашнего задания (см. этап VI урока 42).

II. Новый материал

Изобразим прямую *a* (рис. 210) и точку $A \notin a$. Проведем (с помощью угольника) через точку *A* прямую $b \perp a$, $b \cap a = B$.

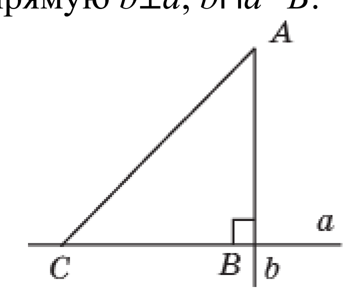


Рис. 210

Отрезок *AB* называется ***перпендикуляром***, опущенным из точки *A* на прямую *a*. Точка *B* называется ***основанием перпендикуляра***. Длина перпендикуляра называется ***расстоянием*** от точки *A* до прямой *a*.

Отметим на прямой *a* произвольную точку *C*, отличную от точки *B*.

Для произвольной точки C на прямой a, отличной от B, отрезок AC называется ***наклонной***, проведенной из точки A к прямой a. Точка C называется ***основанием наклонной***. Отрезок BC называется ***проекцией наклонной*** на прямую a.

Сравним расстояния между точками A и B; A и C. Получим, что $AB<AC$. Возьмем на прямой a еще какие-нибудь точки D, E, F и найдем соответствующие расстояния между ними и точкой A, сравним их с перпендикуляром AB.

Вопрос

- Какое расстояние между точкой A и a будет наименьшим? Почему?

После обсуждения ответа на поставленный вопрос доказываем теорему.

Теорема. Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую, короче всякой наклонной, проведенной из этой точки к этой прямой. Иначе говоря, расстояние от точки до прямой является наименьшим из расстояний от этой точки до точек данной прямой.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a, AB – перпендикуляр, AC – наклонная (рис. 210). Тогда в прямоугольном треугольнике ABC сторона AB – катет, а AC – гипотенуза. Следовательно, $AB<AC$.

III. Закрепление нового материала

1. С помощью угольника и линейки для данной прямой отметьте точки, находящиеся от нее на расстоянии: а) 1 см; б) 3 см.

2. Сколько наклонных заданной длины можно провести из данной точки к данной прямой? Почему?

Ответ. 2 наклонные.

3. Докажите, что равные наклонные, проведенные из одной точки к данной прямой, имеют равные проекции. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

Решение. Проведем из данной точки $A \notin a$ две наклонные AB и AC, причем $AB=AC$. Проведем $AH \perp a$. Тогда $\Delta ABH=\Delta ACH$ (прямоугольные треугольники равны по катету и гипотенузе), откуда следует равенство проекций, $BH=CH$. Обратное утверждение: «Если две наклонные, проведенные из одной точки к данной прямой, имеют равные проекции, то они равны». Утверждение верно (следует из равенства рассмотренных прямоугольных треугольников, только в этом случае треугольники будут равны по двум катетам).

4. Из точки A к прямой проведены перпендикуляр AB и наклонные AB_1, AB_2. Какая из двух наклонных меньше, если B_1 лежит между B и B_2?

Решение. Обратимся к рисунку 211. В треугольнике AB_1B_2 угол AB_1B_2 – тупой (так как в прямоугольном треугольнике ABB_1 угол AB_1B – острый). Следовательно, $AB_1<AB_2$.

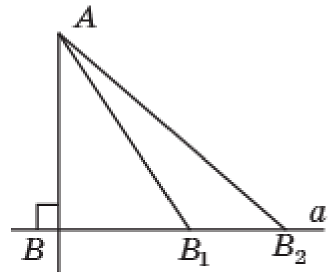


Рис. 211

5*. Пусть в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC>BC$. Докажите, что для высоты CH выполняется неравенство $\angle ACH>\angle BCH$.

Решение. Из условия $AC>BC$ следует, что $AH>BH$, как их проекции. Отложим $HD=HB$ (рис. 212). Прямоугольные треугольники DCH и BCH равны (по катетам). Поэтому $\angle ACH>\angle DCH=\angle BCH$.

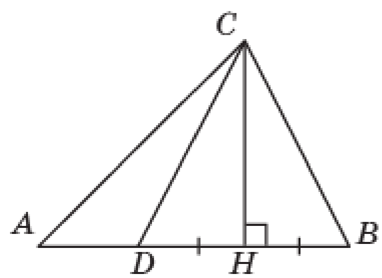


Рис. 212

IV. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательной части домашнего задания (см. этап VI урока 42).

При решении задачи 4* представляем учащимся интересную книгу по занимательной математике: Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. Математическая шкатулка: Пособие для учащихся. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1984.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 15 учебника).

2. Решить задачи.

1) Из точки, не принадлежащей данной прямой, с помощью угольника проведите перпендикуляр и наклонную.

2) С помощью угольника и линейки измерьте расстояние от данной точки до данной прямой, не проходящей через эту точку.

3) Докажите, что треугольник является равнобедренным, если совпадают проведенные из одной вершины высота и медиана.

4) Из точки A к прямой проведены перпендикуляр AB и наклонные AB_1, AB_2. Какая из двух наклонных меньше, если B лежит между B_1, B_2 и $BB_1<BB_2$? Сделайте вывод.

Решение. Обратимся к рисунку 213. Отложим на луче BB_1 отрезок $BB_3=BB_2$. Тогда точка B_1 будет лежать между точками B и B_3, поскольку по условию $BB_1<BB_2$. Следовательно, $AB_1<AB_3$ (см. решение задачи 4 из этапа III данного урока 43). Таким образом, $AB_1<AB_2$. Вывод: «Если из одной точки провести к прямой несколько наклонных, то наклонная с меньшей проекцией меньше».

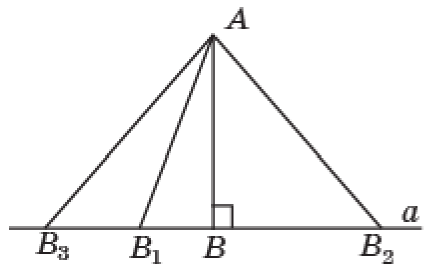


Рис. 213

5)* В каком направлении через город должна проходить магистраль, чтобы два данных населенных пункта A и B лежали по разные стороны от нее на одинаковом расстоянии?

Ответ. Магистраль должна проходить через середину отрезка AB перпендикулярно ему.

6)* Докажите, что биссектриса треугольника лежит между медианой и высотой, проведенными из одной его вершины.

Решение. Пусть CH – высота, CM – медиана, CL – биссектриса треугольника ABC, $AC>BC$ (рис. 214). На основании решения задачи 4* из этапа V урока 36 имеем $\angle ACM<\angle BCM$.

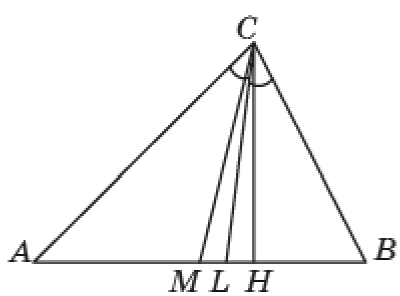


Рис. 214

На основании решения задачи 4* из этапа VI урока 36 имеем $AL>BL$.

На основании решения задачи 5* из этапа III урока 43 имеем $\angle ACH>\angle BCH$. Следовательно, биссектриса CL лежит между медианой CM и высотой CH.

Урок 44

I. Проверка домашнего задания

Четырех учащихся вызываем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 3

1. Дайте определения перпендикуляра, основания перпендикуляра, наклонной, основания наклонной.

2. Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре, опущенном из точки на прямую.

Задания 2, 4

1. Дайте определения расстояния от точки до прямой, проекции наклонной на прямую.

2. Сформулируйте и докажите теорему – признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Что служит в треугольнике расстоянием от вершины до противоположной ей стороны?

2) Чему равна проекция одной стороны равностороннего треугольника на другую его сторону? Ответ поясните.

3) Катеты прямоугольного треугольника ABC равны: BC=3 см, AC=5 см. Чему равны расстояния от вершины B до AC, от A до BC?

Ответы

1) Высота треугольника, опущенная из данной вершины.

2) Половине стороны треугольника.

3) 3 см, 5 см.

Задание для класса

1. Из точки, не принадлежащей данной прямой, проведите перпендикуляр и наклонную. Какой отрезок имеет большую длину? Почему?

2. Чему равна проекция гипотенузы прямоугольного треугольника на его катет? Ответ поясните.

Ответ. Этому катету.

3. Докажите, что если из одной точки провести к прямой наклонные, то большая наклонная имеет большую проекцию.

См. решения задачи 4 из этапа III урока 43 и задачи 4 из этапа V урока 43.

4*. Как должна проходить магистраль, чтобы расстояния от нее до трех данных населенных пунктов были одинаковыми? Укажите положение магистрали, при котором эти расстояния минимальны.

Решение. Населенные пункты обозначим точками A, B, C (рис. 215, а).

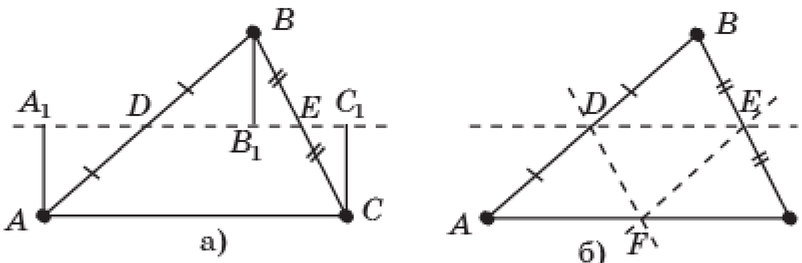


Рис. 215

Они не должны принадлежать одной прямой. Магистраль должна проходить через середины двух сторон треугольника ABC, например, D и E – середины соответственно AB и BC. Опустим из вершин треугольника ABC перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на DE. Докажем, что $AA_1=BB_1=CC_1$. Действительно, равенство $AA_1=BB_1$ следует из равенства треугольников AA_1D и BB_1D (прямоугольные, равны по гипотенузе и острому углу). Равенство $BB_1=CC_1$ следует из равенства треугольников BB_1E и CC_1E (прямоугольные, равны по гипотенузе и острому углу). Таким образом, $AA_1=BB_1=CC_1$. Другими словами, магистраль DE проходит на равном расстоянии от каждого населенного пункта. Магистралей, обладающих таким свойством, можно построить три (рис. 215, б), а именно: DE, DF и EF, где точка F середина AC. При этом минимальные расстояния будут до магистрали, соединяющей наибольшие стороны, т.е. лежащей против наименьшей стороны.

К доске вызываем трех учащихся (У$_1$, У$_2$, У$_3$).

У$_1$ – решает классную задачу 2.

У$_2$ – решает классную задачу 3.

У$_3$ - показывает решение задачи 4 из домашней работы (см. этап V урока 43).

Дополнительные вопросы

- Какие виды треугольников в зависимости от его углов вы знаете?

- Как формулируется первый признак равенства треугольников для прямоугольных треугольников?

Что называется проекцией наклонной на прямую?

II. Новый материал

Изобразим прямую a и точку C, где $C\notin a$. Опустим (с помощью угольника) из точки C перпендикуляр на прямую a.

Вопрос

- Сколько таких перпендикуляров можно опустить?

Докажем, что через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, перпендикулярной данной.

Решение. Предположим, что через точку C, не принадлежащую прямой a, проходят две прямые, перпендикулярные a. Пусть A_1, A_2 – их точки пересечения с прямой a. Тогда в треугольнике A_1A_2C будет два прямых угла, что противоречит свойствам прямоугольных треугольников. Следовательно, через точку C не может проходить более одной прямой, перпендикулярной a.

Теперь рассмотрим историческую задачу о нахождении кратчайшего пути на плоскости. Ее решение было известно еще Архимеду (287-212 гг. до н. э.).

Задача. Дана прямая c и две точки A и B на плоскости. Требуется найти такую точку C на этой прямой, чтобы сумма расстояний $AC+CB$ была наименьшей.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда точки A и B лежат по разные стороны от прямой c (рис. 216). Покажем, что в этом случае искомой точкой C является точка пересечения отрезка AB и прямой c. Действительно, из неравенства треугольника следует, что для любой другой точки C' прямой c выполняется неравенство $AC'+C'B>AC+CB$ и, значит, сумма $AC+CB$ будет наименьшей.

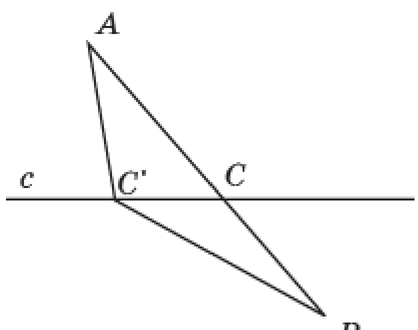


Рис. 216

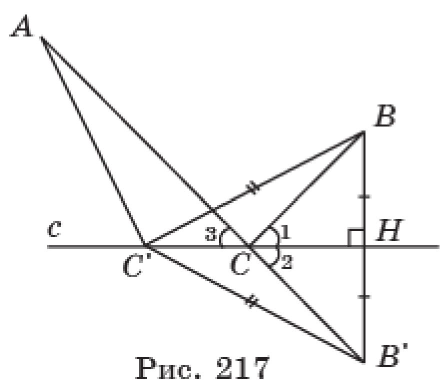


Рис. 217

Пусть теперь точки A и B лежат по одну сторону от прямой c (рис. 217). Идея нахождения искомой точки C состоит в замене точки B на точку B', лежащую по другую сторону от прямой c, и сведению этого случая к предыдущему.

Из точки B опустим на прямую c перпендикуляр BH и отложим отрезок HB', равный BH (рис. 217). Пусть C' – точка на прямой c. Прямоугольные треугольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B=C'B'$. Поэтому сумма $AC'+C'B$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC'+C'B'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A, B', C'

принадлежат одной прямой, т. е. искомая точка C является точкой пересечения отрезка AB' с прямой c.

Заметим, что полученная точка C обладает тем свойством, что углы, образованные прямыми AC и CB и прямой c, равны. Действительно, $\angle 1 = \angle 2$, как соответствующие углы в равных треугольниках BHC и $B'HC$, $\angle 2 = \angle 3$, как вертикальные углы. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Из этого равенства углов вытекает закон отражения света. А именно, известно, что луч света распространяется по кратчайшему пути. Поэтому, если луч света исходит из точки A, отражается от прямой c и приходит в точку B, то точка C будет точкой отражения и, таким образом, имеет место закон отражения света: угол падения светового луча равен углу отражения.

III. Закрепление нового материала

1. Докажите, что через точку, принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, перпендикулярной данной.

Решение. Предположим, что через точку M, принадлежащую прямой MN, проходят две прямые MA и MB, перпендикулярные MN. Тогда $\angle AMN = \angle BMN = 90^o$, но луч AM (или BM) лежит внутри угла $\angle BMN$ (или $\angle AMN$), т.е. $\angle AMN < \angle BMN$ (или $\angle AMN > \angle BMN$). Пришли к противоречию, значит, нельзя провести две такие прямые.

2. Точки A и B расположены по одну сторону и на одинаковом расстоянии от прямой a. Где на прямой a расположена точка C, для которой сумма расстояний $AC+CB$ наименьшая?

Решение. Пусть AH и BG – перпендикуляры, опущенные на прямую a (рис. 218). Тогда прямоугольные треугольники AHC и BGC равны (по катету и острому углу, см. задачу из этапа II данного урока 44) и, следовательно, точка C – середина отрезка HG.

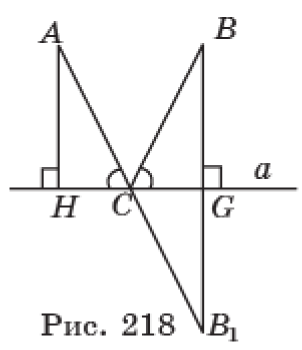


Рис. 218

3. Для снабжения водой двух населенных пунктов, расположенных по одну сторону от канала, требуется на берегу канала построить водонапорную башню. В каком месте следует построить башню, чтобы суммарная длина труб от нее до каждого из пунктов (по прямой) была наименьшей?

Решение. См. рисунок 217, где A, B – данные населенные пункты, в точке C следует построить водонапорную башню.

4*. Внутри острого угла взяты точки C_1 и C_2. Найдите на сторонах угла точки A и B такие, чтобы длина ломаной C_1ABC_2 была наименьшей.

Решение. Из точек C_1 и C_2 опустим перпендикуляры C_1H_1 и C_2H_2 на стороны угла и на их продолжениях отложим соответственно равные им отрезки H_1C_1', H_2C_2' (рис. 219).

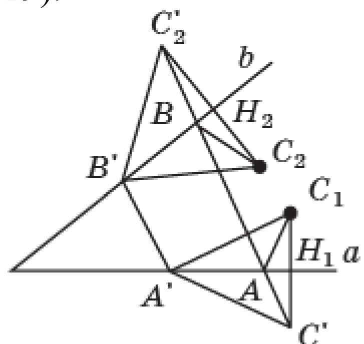


Рис. 219

Обозначим A, B точки пересечения прямой $C_1'C_2'$ со сторонами угла. Тогда длина ломаной C_1ABC_2 будет равна длине отрезка $C_1'C_2'$. Докажем, что A, B являются искомыми. Если A', B' – другие точки, то длина ломаной $C_1A'B'C_2$ будет равна длине ломаной $C_1'A'B'C_2'$, которая больше длины отрезка $C_1'C_2'$ и, следовательно, больше длины ломаной C_1ABC_2.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 15 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что треугольник является равнобедренным, если совпадают проведенные из одной вершины биссектриса и высота.

2) На рисунке 220 $BD=BF$, $DE \perp BC$, $FG \perp AB$. Докажите, что $DE=FG$.

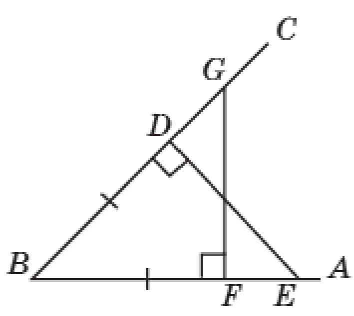


Рис. 220

Ответ. Прямоугольные треугольники BDE и BFG равны (по катету и острому углу), откуда $DE=FG$.

3) Докажите, что из двух наклонных, проведенных к прямой из одной точки, меньше та, проекция которой меньше.

4)* Внутри острого угла взята точка C. Найдите на сторонах угла точки A и B такие, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

Решение. Из точки C опустим перпендикуляры CH_1 и CH_2 на стороны угла и на их продолжениях отложим соответственно равные им отрезки H_1C', H_2C'' (рис. 221).

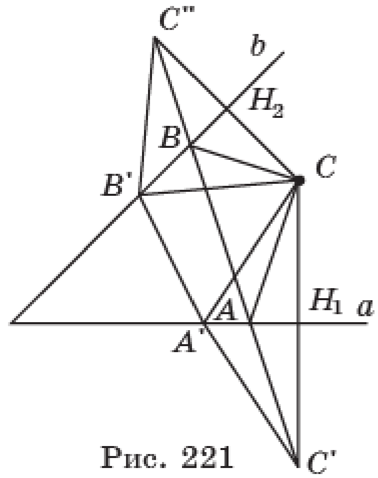


Рис. 221

Обозначим A, B точки пересечения прямой $C'C''$ со сторонами угла. Докажем, что они являются искомыми. Если A', B' – другие точки, то периметр треугольника $A'B'C$ будет равен длине ломаной $C'A'B'C''$, которая больше длины отрезка $C'C''$, равной периметру треугольника ABC.

5)* Сколько получится острых углов, если внутри данного острого угла из его вершины провести 3 луча?

Ответ. 10.

Урок 45

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Перпендикуляром, опущенным из точки B на прямую b, называется …
2. Основанием наклонной называется …
3. Расстоянием от точки B до прямой b называется …
4. Из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, больше …
5. Наклонная, проведенная из точки к прямой, … перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.
6. Дана прямая c и точки A и B, не принадлежащие ей и лежащие по разные стороны от нее. Чтобы найти точку C на прямой c, такую, чтобы сумма $AC+CB$ была наименьшей, нужно …

Вариант 2

1. Наклонной, проведенной из точки A к прямой a, называется …
2. Основанием перпендикуляра называется …
3. Проекцией наклонной, проведенной из точки A на прямую a, называется …
4. Из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, меньше …
5. Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую, …наклонной, проведенной из этой точки к данной прямой.
6. Дана прямая c и точки A и B, не принадлежащие ей и лежащие по одну сторону от нее. Чтобы найти точку C на прямой c, такую, чтобы сумма $AC+CB$ была наименьшей, нужно …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Дан треугольник ABC, AB=5,6 см; BC=3,1 см; AC=6 см. Сравните углы данного треугольника.

Ответ. $\angle A<\angle C<\angle B$.

2. В равнобедренном треугольнике KLM KL=8 см, KM=3 см. Найдите периметр данного треугольника.

Ответ. 19 см.

3. На рисунке 222 $AD=DB=BF=FC$, $DE\perp AB$, $FG\perp BC$. Докажите, что $DE=FG$.

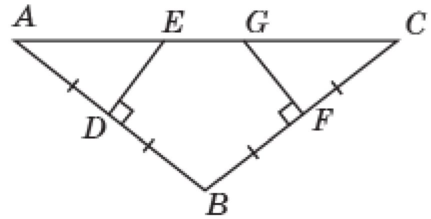


Рис. 222

Решение. ΔABC – равнобедренный ($AB=BC$), отсюда $\angle A=\angle C$. $\Delta ADE=\Delta CFG$ (прямоугольные, равны по катету и острому углу). Таким образом, $DE=FG$.

4*. Среди всех треугольников, вершины которых принадлежат сторонам данного треугольника, найдите треугольник наименьшего периметра.

Решение. На стороне AB треугольника ABC возьмем произвольную точку D и пусть D', D'' – точки, построенные аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче (рис. 223).

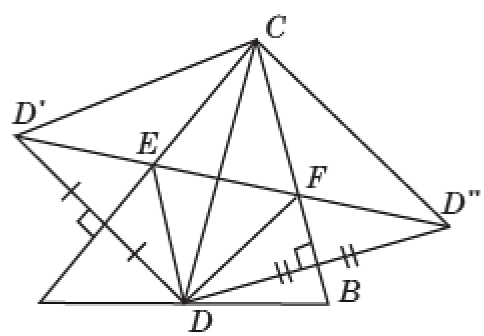


Рис. 223

Обозначим E, F точки пересечения прямой $D'D''$ со сторонами AC, BC треугольника ABC. Треугольник DEF будет иметь наименьший периметр из всех треугольников, у которых вершина D фиксирована, а две другие принадлежат сторонам AC и BC треугольника ABC. Причем его периметр будет равен длине отрезка $D'D''$. Найдем точку D, для которой периметр треугольника DEF наименьший. Треугольник $D'CD''$ равнобедренный с углом при вершине C, равным удвоенному углу ACB, и боковыми сторонами, равными CD. Поэтому его основание тем меньше, чем меньше боковая сторона. CD достигает наименьшего значения в случае, если она является высотой. Таким образом, искомая точка D есть основание высоты, опущенной из вершины C треугольника ABC. Применяя эти же аргументы к точкам E и F, получаем, что они также должны быть основаниями высот треугольника ABC. Окончательно получаем, что искомым треугольником наименьшего периметра является треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC.

IV. Занимательный момент

Решение задач 5* из необязательных частей домашних заданий уроков 43 и 44 (см. соответственно этап V урока 43 и этап IV урока 44).

V. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 12 – п. 15 учебника).

2. Решить задачи.

1) Сколько может быть у треугольника: а) острых углов; б) тупых углов; в) прямых углов? Ответ обоснуйте.

2) Проекция боковой стороны равнобедренного треугольника на его основание равна 3,5 см. Найдите периметр треугольника, если его основание в 2,5 раза меньше боковой стороны.

Ответ. Стороны треугольника равны 7 см, 17,5 см и 17,5 см. Периметр равен 42 см.

3) Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны. Докажите, что равны отрезки AD и CB.

Ответ. Равенство $AD=CB$ следует из равенства прямоугольных треугольников ADB и CBD (по двум катетам).

4)* Какое наибольшее число раз может отразиться луч от сторон угла в 60°? (При каждом отражении угол падения равен углу отражения.)

Решение. Воспользуемся тем, что после отражения от прямой луч движется так, что его зеркальное отражение лежит на продолжении пути луча до отражения (рис. 224). Поэтому наибольшее число отражений будет равно трем.

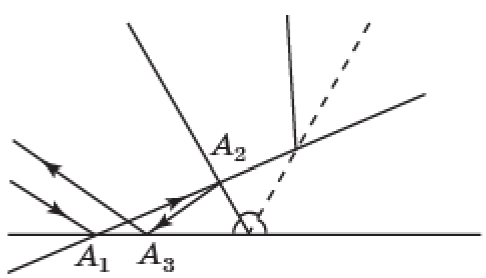


Рис. 224

5)* Для каких n существует выпуклый n-угольник, у которого одна сторона равна единице, а все диагонали выражаются целыми числами?

Решение. Докажем, что $n<6$. Пусть $AB=1$, а C – вершина, несоседняя ни с A, ни с B. Тогда $|AC-BC|<AB=1$. Поэтому $AC=BC$, т. е. точка C принадлежит серединному перпендикуляру к стороне AB. Таким образом, кроме вершин A, B, C многоугольник может иметь только две вершины.

Пример пятиугольника, обладающего требуемым свойством, приведен на рисунке 225.

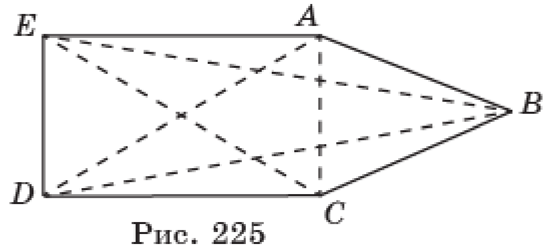


Рис. 225

В пятиугольнике $ABCDE$ $AC=DE=1$, $EB=DB=3$, $AD=EC=2$, $ACDE$ – прямоугольник, $\angle CAD=60^\circ$.

Примером четырехугольника, обладающего требуемым свойством, является прямоугольник $ACDE$ на том же рисунке.

Урок 46
Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Может ли внешний угол при основании равнобедренного треугольника быть тупым? Почему?

2. В треугольнике *HOP* *HO*=7 см, *HP*=13 см, *PO*=9 см. Сравните углы данного треугольника.

3. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 5 см, а другая – 11 см. Какая из них является основанием? Ответ обоснуйте.

4. При каком условии сумма проекций двух сторон треугольника на прямую, определяемую его третьей стороной, больше этой третьей стороны?

5*. Докажите, что в треугольнике медиана, проведенная к одной из его сторон, меньше полусуммы двух других сторон.

Вариант 2

1. Может ли внешний угол при основании равнобедренного треугольника быть острым? Почему?

2. Дан треугольник *KMN*, в котором *KM*=10 см, *MN*=10 см и *KN*=15 см. Сравните углы данного треугольника.

3. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 20 см, а другая – 9 см. Какая из них является боковой стороной? Ответ обоснуйте.

4. Каким должен быть треугольник, чтобы проекция одной его стороны на прямую, определяемую другой его стороной, была бы больше этой второй стороны?

5*. В треугольнике *ABC* на стороне *BC* взята точка *D*, которая соединена с вершиной *A*. Докажите, что периметр треугольника *ABC* больше периметра треугольника *ADC*.

п. 16. Окружность и круг
(уроки 47, 48)

Цель – сформировать понятия окружности, круга и их элементов; доказать теорему о диаметре окружности (круга), перпендикулярном хорде; научиться применять ее при решении задач.

Урок 47

I. Анализ контрольной работы № 3

II. Устная работа

1) Сколько наклонных заданной длины можно провести из данной точки к данной прямой?

Ответ. Две.

2) Из точки A к прямой проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Какая из двух наклонных меньше, если B лежит между H и C?

Ответ. AB.

3) Длина какого отрезка является расстоянием от вершины треугольника до его противоположной стороны?

Ответ. Длина высоты, опущенной из данной вершины треугольника.

4) В прямоугольном треугольнике катеты AC и BC равны соответственно 5 см и 3 см. Чему равно расстояние от вершины: а) B до стороны AC; б) A до стороны BC?

Ответ. а) 3 см; б) 5 см.

5) Могут ли неравные наклонные, проведенные из одной точки к одной прямой, иметь равные проекции?

Ответ. Нет.

6) Могут ли равные наклонные, проведенные из одной точки к одной прямой, иметь неравные проекции?

Ответ. Нет.

7) Как определяется расстояние между двумя точками?

Ответ. Длиной отрезка, соединяющего данные точки.

8) Каким геометрическим инструментом изображается окружность?

Ответ. Циркулем.

III. Новый материал

Изобразим точку O. Возьмем циркуль, поставим его ножку с иглой в точку O и, двигая другую ножку с карандашом по тетради (и по доске), начертим замкнутую кривую линию.

Вопросы

- Как она называется?

Отметим на ней несколько точек A, B, C и найдем расстояния от них до точки O, получим $OA=OB=OC$.

- Какое предположение можно высказать?

После обсуждения ответов даем определение.

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки на данное расстояние.

Данная точка называется ***центром окружности***, а данное расстояние – ***радиусом окружности***. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром.

Вопросы

- Какая точка является центром изображенной окружности?

- Какие изображенные отрезки являются радиусами?

- Чему равен радиус изображенной окружности?

Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек плоскости, расстояние от которых до точки O равно R. Можно ввести соответствующее обозначение, а именно, окр.(O; R).

Теперь изобразим на нашем рисунке точки K, L, M, для которых $OK<R$, $OL=R$, $OM>R$. Рассмотрим точки, лежащие внутри окружности или на самой окружности. Расстояние от них до центра окружности либо меньше, либо равно R. Другими словами, это расстояние не превосходит R.

Фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное, называется ***кругом***.

Данная точка называется ***центром круга***, а данное расстояние – ***радиусом круга***.

Таким образом, круг с центром в точке O и радиусом R, представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек плоскости, удаленных от точки O на расстояние, не превосходящее R.

Можно ввести соответствующее обозначение, а именно, круг(O; R).

Круг можно представлять себе как фигуру, ограниченную окружностью.

Изобразим окр.(O_1; R_1) и отметим точки E и F, ей принадлежащие. Соединим их отрезком, он называется хордой.

Отрезок, соединяющий две произвольные точки окружности, называется ***хордой***.

Вопрос

- Может ли хорда пройти через центр окружности?

Проведем радиус EO_1 и продолжим его до пересечения с окружностью, получим точку, которую назовем G (она может совпасть с точкой F), и отрезок EG (или сам отрезок EF). Таким образом, хорда EG проходит через центр окружности. У такой хорды есть особое название – диаметр.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром***.

Можно познакомить ребят с происхождением введенных терминов. Слово «радиус» происходит от латинского «radius» - спица колеса. От греческих слов происходят: «круг» - «$\chi\upsilon\chi\lambda o\varsigma$» - колесо; «$\chi o\rho\delta\eta$» - струна, тетива; «$\delta\iota\alpha\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$» - поперечник.

Докажем теорему, связывающую понятия хорды и диаметра.

Теорема. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Пусть дана окружность с центром в точке O, диаметр AB перпендикулярен хорде CD. Если хорда CD проходит через центр O, то она является диаметром и делится в точке O пополам. Пусть хорда CD не проходит через центр O. Обозначим точку ее пересечения с диаметром AB через E (рис. 226). Прямоугольные треугольники OEC и OED равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, $EC=ED$.

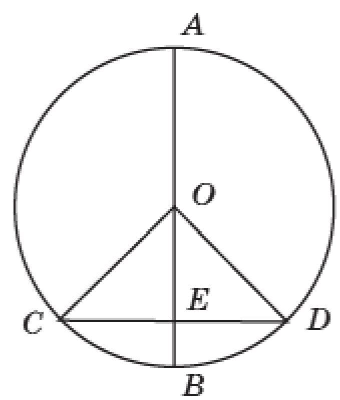


Рис. 226

IV. Закрепление нового материала

1. Изобразите окр.(C; 3 см). Проведите диаметр AB и найдите его длину. Сделайте вывод.

Ответ. AB=6 см. Вывод: $D=2R$, где D - диаметр, R – радиус одной окружности.

2. Отметьте точку M и изобразите точки A, B, C, которые находятся от нее на расстоянии 4 см. Какую фигуру будут образовывать точки плоскости, расстояние от которых до точки M равно 4 см?

3. Докажите, что диаметр, проведенный через середину хорды, отличной от диаметра, перпендикулярен к этой хорде.

Решение. См. рисунок 226. $\Delta COE=\Delta DOE$ (по трем сторонам), значит, $\angle CEO=\angle DEO=90^\circ$, т.е. $AB \perp CD$.

4*. В данной окружности окр.(O; 3 см) проведите хорду: а) 2 см; б) 3 см; в) 6 см; г) 7 см.

Решение. Из любой точки данной окружности, как из центра проводим окружность радиуса: а) 2 см; б) 3 см. Точки пересечения проведенной окружности с данной окружностью соединяем с данной точкой. В случае в) проводим диаметр. В случае г) нет решений, так как наибольшая хорда данной окружности равна 6 см.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 16 учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте окружность, которая проходит через данные точки A и B, AB=6 см, и имеет радиус 3 см.

2) Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Решение. Пусть дана окружность с центром в точке O и радиусом R; AB - произвольная хорда, отличная от диаметра (рис. 227). Проведем отрезки OA и OB. В треугольнике AOB сторона AB меньше суммы двух других сторон, т. е. $AB<OA+OB=R+R=2R$. Следовательно, хорда AB меньше диаметра.

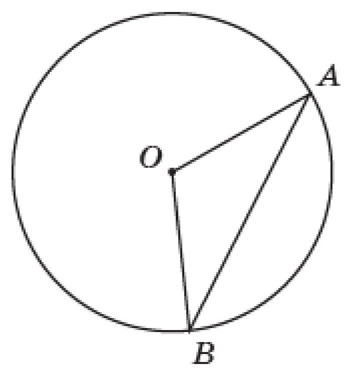


Рис. 227

3) Докажите, что если две хорды перпендикулярны и одна из них в точке пересечения делится пополам, то другая является диаметром.

Решение. Пусть CD и AB – хорды одной окружности (рис. 228) и $AB\perp CD$, причем $CM=MD$. Проведем диаметр этой окружности, перпендикулярный хорде CD. По доказанной теореме он будет проходить через точку M и, следовательно, совпадет с хордой AB.

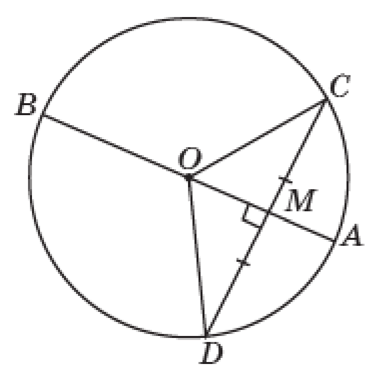


Рис. 228

4)* Постройте фигуру, избраженную на рисунке 229.

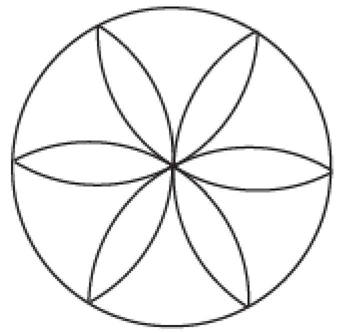


Рис. 229

Урок 48

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Кругом называется …
2. Радиусом окружности называется …
3. Хордой окружности называется …
4. Наибольшая хорда окружности …
5. Точки M, лежащие внутри круга с центром в точке O и радиусом R, удовлетворяют следующему неравенству: …

Вариант 2

1. Окружностью называется …
2. Диаметром круга называется …
3. Центром окружности называется …
4. Диаметр окружности, перпендикулярный к хорде, …
5. Точки N, лежащие вне круга с центром в точке O и радиусом R, удовлетворяют следующему неравенству: …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Решение задач

1. Точка A расположена вне окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равно наименьшее расстояние от точки A до точек данной окружности?

Решение. Пусть B – точка пересечения окружности с отрезком OA (рис. 230). Покажем, что расстояние AB является наименьшим из всех возможных расстояний от точки A до точек окружности. Действительно, для любой другой точки C окружности выполняется неравенство $AB+BO<AC+CO$. Так как $BO=CO=R$, то из этого неравенства получаем неравенство $AB<AC$. Учитывая, что $AO=d$ и $BO=R$, получаем, что искомое наименьшее расстояние равно длине отрезка AB, т.е. равно $d–R$.

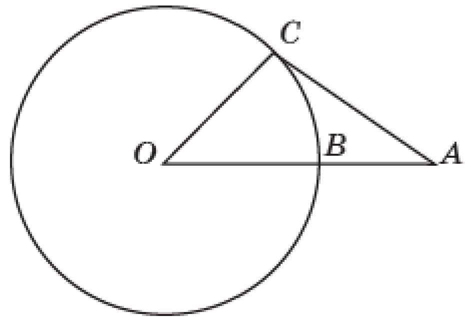


Рис. 230

2. Точка E расположена вне окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки E до точек данной окружности?

Ответ. $d–R$, $d+R$.

3. Точка H расположена внутри окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки H до точек данной окружности?

Ответ. R- d; R+ d.

4. Докажите, что равные хорды окружности одинаково удалены от ее центра.

Решение. Пусть в окружности с центром в точке O проведены хорды AB и CD, причем $AB=CD$. Тогда $\Delta AOB=\Delta COD$ (по трем сторонам). Отсюда следует, что $OH=OP$, где OH и OP – высоты проведенные из O соответственно на AB и CD.

5*. Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.

Решение. Пусть AB – общая хорда трех окружностей. Через ее середину C проведем прямую c, перпендикулярную AB. Диаметры данных окружностей будут лежать на этой прямой и, следовательно, центры окружностей будут принадлежать прямой c.

IV. Занимательный момент

Решение задач 4* из необязательных частей домашних заданий уроков 45 и 47 (см. этап V урока 45 и этап V урока 47).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 16 учебника).

2. Решить задачи.

1) Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 50 см и 20 см. Найдите радиус данной окружности.

Ответ. 15 см.

2) Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равны соответственно 20 см и 4 см. Найдите радиус данной окружности.

Ответ. 12 см.

3) Докажите, что если хорды окружности одинаково удалены от ее центра, то они равны.

Решение. Пусть в окружности с центром в точке O хорды AB и CD одинаково удалены от нее, т.е. $OH=OP$, где OH и OP – перпендикуляры, опущенные из точки O на хорды соответственно AB и CD (рис. 231).

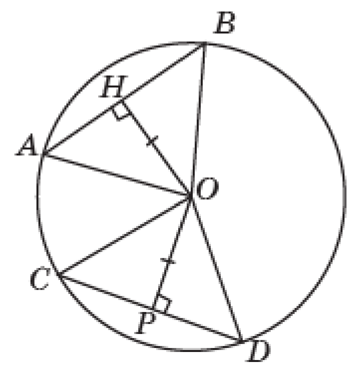


Рис. 231

Докажем, что $CD=AB$. Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники AOH, BOH, COP и DOP. Все они равны (по гипотенузе и катету). Значит, $AH=BH=CP=DP$ или $AB=AH+BH=CP+DP=CD$. Итак, хорды AB и CD равны.

4) На рисунке 232 изображена фигура, называемая кольцом. Сформулируйте определение этой фигуры.

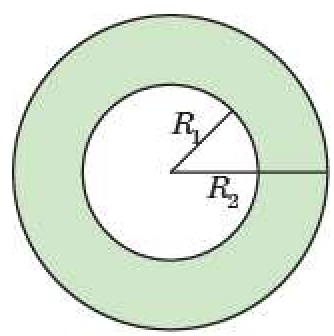


Рис. 232

Ответ. ***Кольцом*** называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки на расстояние большее или равное одному данному расстоянию и меньшее или равное другому данному расстоянию.

4)* Докажите, что если две точки принадлежат кругу, то отрезок, соединяющий эти точки, содержится в данном круге. Справедливо ли это свойство для кольца?

Решение. Пусть дан круг (O; R). Возьмем две точки A и B, принадлежащие ему, и рассмотрим два случая:

а) прямая AB проходит через центр O окружности. В этом случае отрезок AB содержится в диаметре и, значит, все точки отрезка AB принадлежат кругу;

б) прямая AB не проходит через центр O окружности. Пусть M – внутренняя точка отрезка AB (рис. 233). В треугольнике AOB или угол OMA, или угол OMB больше прямого угла или равен ему. Пусть, например, это угол OMA. Тогда угол OAM острый. Воспользуемся тем, что против большего угла треугольника лежит большая сторона. Тогда $OM < OA \leq R$. Значит, точка M принадлежит кругу.

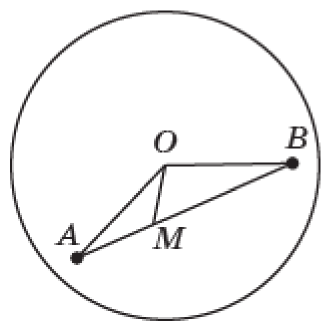


Рис. 233

Для кольца это свойство не справедливо.

6)* Какую геометрическую фигуру образуют середины всех равных хорд одной окружности?

Решение. Равные хорды окружности одинаково удалены от ее центра (см. задачу 4 этапа III данного урока). Следовательно, середины всех равных хорд одной окружности принадлежат окружности с тем же центром, радиус которой равен расстоянию от центра до любой из равных хорд.

п. 17. Взаимное расположение прямой и окружности (уроки 49, 50, 51)

Цель – сформировать понятие касательной к окружности; дать классификацию взаимного расположения прямой и окружности; выявить свойство и признак касательной к окружности; научиться применять их при решении задач.

Урок 49

I. Устная работа

1) Какому неравенству удовлетворяют точки A, лежащие: а) в круге с центром в точке O и радиусом R; б) вне этого круга?

Ответ. а) $OA \leq R$; б) $OA > R$.

2) Сколько диаметров можно провести через центр окружности?

Ответ. Бесконечно много.

3) Сколько окружностей может проходить через две заданные точки?

Ответ. Бесконечно много.

4) Найдите диаметр окружности, если известно, что он на 55 мм больше радиуса.

Ответ. 110 мм.

5) Найдите длину наибольшей хорды в окружности, радиус которой равен 5 см.

Ответ. 10 см.

6) Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус окружности, проходящей через эти точки.

Ответ. 1 см.

7) Может ли окружность проходить через три заданные точки, принадлежащие одной прямой?

Ответ. Нет.

8) Как провести окружность в саду для устройства круглой клумбы?

Ответ. Для проведения окружности можно воспользоваться двумя колышками и веревкой.

II. Новый материал

Изобразим окр.(O; R) и проведем прямую a.

Вопрос

- Как прямая a может быть расположена относительно окружности?

После обсуждения ответа получаем три возможных варианта, а именно, прямая и окружность:

а) не имеют общих точек (рис. 234, а);

б) имеют одну общую точку, касаются (рис. 234, б):

в) имеют две общие точки, пересекаются (рис. 234, в).

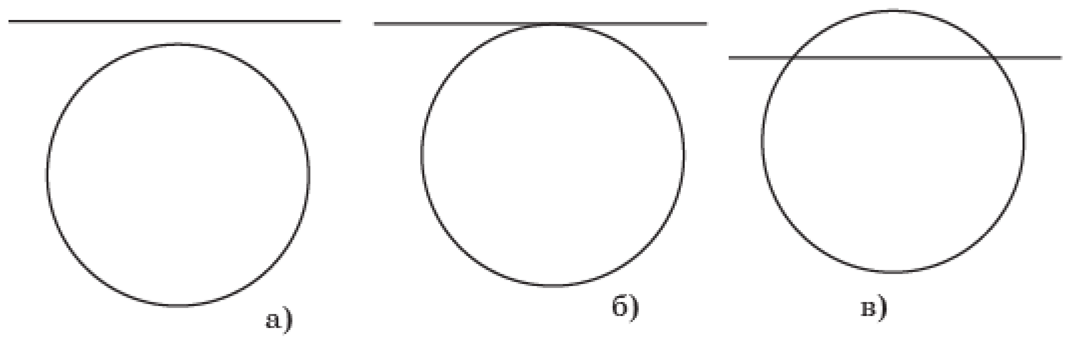


Рис. 234

Вопросы

- Чем обусловлено взаимное расположение прямой и окружности, от чего оно зависит?

- Как найти расстояние от центра окружности до прямой?

Расстояние d от центра O окружности радиуса R до прямой является длиной перпендикуляра, опущенного из точки O на данную прямую. Возможны три случая: $d>R$, или $d=R$, или $d<R$. Рассмотрим их.

Теорема. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то эти прямая и окружность не имеют общих точек.

Доказательство. Пусть расстояние от центра O окружности до прямой a больше радиуса R окружности (рис. 235).

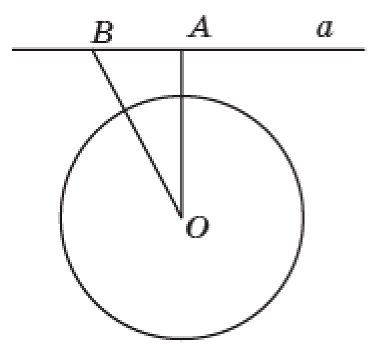


Рис. 235

Опустим из центра O перпендикуляр OA на эту прямую. Тогда $OA>R$. Для любой другой точки B на прямой a наклонная OB будет больше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R. Таким образом, расстояние от любой точки прямой a до центра O больше R. Значит, прямая a и окружность не имеют общих точек.

Теорема. (Признак касательной.) Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к окружности.

Доказательство. Пусть расстояние от центра O окружности до прямой a равно радиусу R окружности (рис. 236).

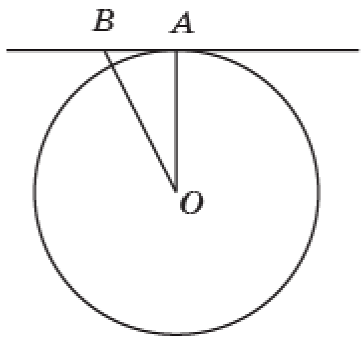


Рис. 236

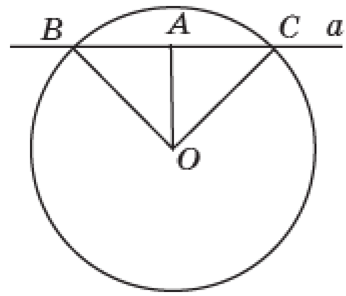


Рис. 237

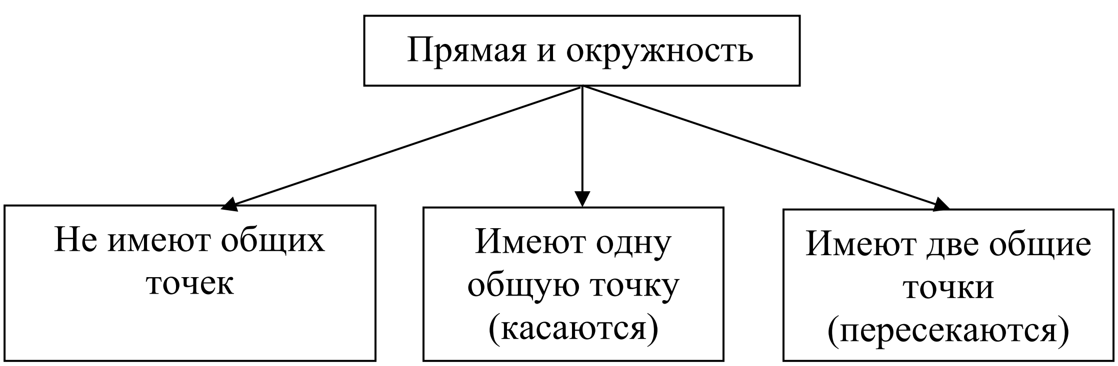
Опустим из центра O перпендикуляр OA на эту прямую. Тогда $OA = R$. Для любой другой точки B на прямой a наклонная OB будет больше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R. Таким образом, расстояние от любой точки прямой a, отличной от A, до центра O больше R. Значит, прямая a и окружность имеют одну общую точку A, т.е. прямая касается окружности.

Осталось рассмотреть последний случай, когда расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности (рис. 237). Примем без доказательства, что в этом случае прямая и окружность имеют две общие точки, т.е. пересекаются.

III. Закрепление нового материала

1. Составьте схему взаимного расположения прямой и окружности.

Взаимное расположение прямой и окружности



2. (Свойство касательной.) Докажите, что касательная к окружности перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания.

Решение. Пусть a – касательная к окружности с центром в точке O и радиусом R, A – точка касания. Если бы радиус OA был не перпендикулярен касательной, то отрезок OA был бы наклонной, проведенной из точки O к прямой a. Опустим из точки O перпендикуляр OH на прямую a. Его длина является расстоянием d от точки O до прямой a и оно меньше наклонной OA, равной R. Но тогда прямая a пересекается с окружностью. Получили противоречие с условием. Следовательно, касательная к окружности перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания.

3. Проведите (с помощью циркуля и угольника) касательную к данной окружности в данной на ней точке.

Решение. Проведем окружность, отметим на ней точку. Затем проведем радиус с концом в данной точке и через нее проведем прямую, перпендикулярную этому радиусу. Проведенная прямая будет касательной (по признаку касательной).

4*. Проведите (с помощью циркуля, угольника и транспортира) окружность, касающуюся сторон данного угла. Где находится ее центр? Сколько таких окружностей можно провести?

Решение. Проведем (с помощью транспортира) биссектрису данного угла и на ней возьмем произвольную точку O. Опустим перпендикуляр OH на одну из сторон угла. Окр.(O; OH) – искомая. Можно провести бесконечно много окружностей, удовлетворяющих условию задачи, их центры будут принадлежать биссектрисе данного угла.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 17 учебника)

2. Решить задачи.

1) Для данной окружности проведите прямые, пересекающие окружность, касающиеся окружности и не имеющие с окружностью общих точек.

2) Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 3 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно: а) 4 см; б) 3 см; в) 2 см?

Ответ. а) Не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются.

3) Проведите (с помощью циркуля и угольника) окружность данного радиуса R (возьмите R=3,5 см), которая касается данной прямой c в данной на ней точке M.

Решение. Проведем прямую c и отметим на ней точку M. Затем через точку M проведем прямую $k \perp c$. На прямой k от точки M отложим отрезок $MO=R$ и проведем окр.(O; R), которая удовлетворяет условию задачи.

Обратите внимание учащихся на то, что можно провести две такие окружности. На k от точки M в разные полуплоскости относительно прямой c можно отложить два отрезка $MO=R$ и $MO_1=R$ и провести две окружности, а именно, окр.(O; R) и окр.(O_1; R). Каждая из них удовлетворяет условию задачи.

4)* Проведите (используя угольник и транспортир) окружность, касающуюся всех сторон данного треугольника.

Решение. Центры окружностей, касающихся обеих сторон угла, принадлежат его биссектрисе (см. задачу 4* из этапа III данного урока). Таким образом, достаточно провести биссектрисы двух любых углов треугольника. Точка, в которой они пересекутся, будет центром искомой окружности, так как она удалена от каждой стороны треугольника на равное расстояние, которое и будет радиусом искомой окружности.

Урок 50

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Прямая и окружность не имеют общих точек, если …
2. Если прямая имеет с окружностью одну общую точку, то говорят, что …
3. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то …
4. Если прямая и окружность не имеют общих точек, то …
5. Даны окр.(O; R) и прямая a. Запишите условие пересечения прямой a и окружности.

Вариант 2

1. Прямая и окружность пересекаются, если …
2. Касательной к окружности называется …
3. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то …
4. Точкой касания прямой и окружности называется …
5. Даны окр.(O; R) и прямая a. Запишите условие пересечения прямой a и окружности.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Устная работа

Задачи по готовым чертежам.

1) По рисунку 238 докажите, что $AB=BC$.

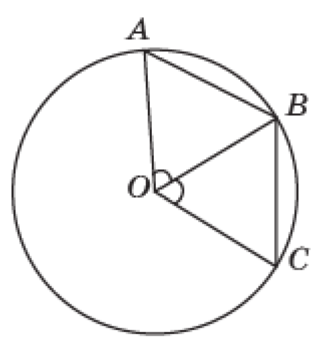


Рис. 238

2) По рисунку 239 докажите, что $\angle MKO = \angle NKO$.

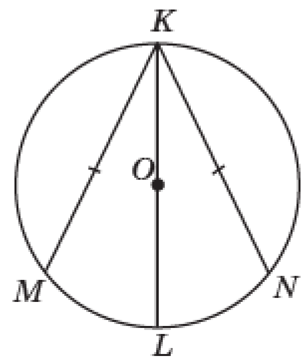


Рис. 239

3) На рисунке 240 $AB \perp OE$. Докажите, что $AH=BH$.

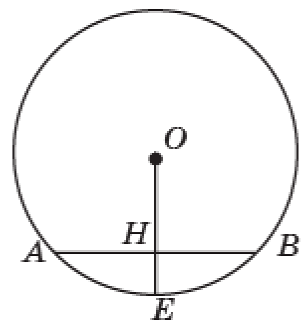


Рис. 240

4) На рисунке 240 $AH=BH$. Докажите, что $AB \perp OE$.
5) По рисунку 241 докажите, что $EF=GH$.

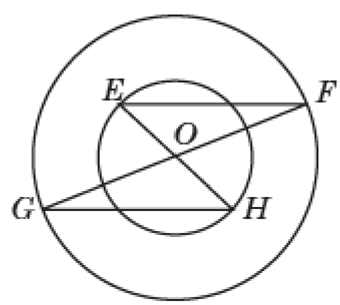


Рис. 241

IV. Решение задач

1. Из одной точки проведены две касательные к окружности. Докажите, что отрезки касательных, заключенных между этой точкой и точками касания, равны.

Решение. Рассмотрим две касательные к окружности с центром в точке O, проведенные из точки A и касающиеся окружности в точках B и C (рис.

242). Треугольники AOB и AOC прямоугольные, $OB = OC$ и сторона AO - общая. По признаку равенства прямоугольных треугольников (по катету и гипотенузе), они равны. Следовательно, $AB = AC$.

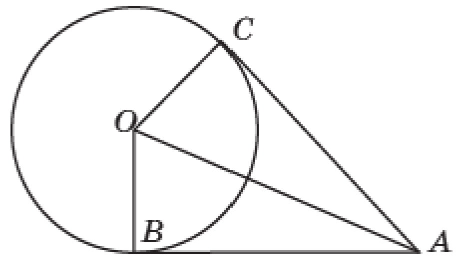


Рис. 242

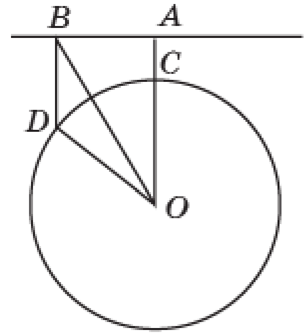


Рис. 243

2. Расстояние d от центра окружности до прямой больше радиуса R этой окружности. Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на окружности и прямой.

Решение. Пусть O центр окружности, OA – перпендикуляр, опущенный из O на данную прямую, C – точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью (рис. 243). Докажем, что длина отрезка AC является искомым наименьшим расстоянием. Действительно, для произвольных точек B на прямой и D на окружности будем иметь $AC+CO \leq BO \leq BD + DO$. Учитывая, что $CO=DO=R$, получаем неравенство $AC \leq BD$. Следовательно, искомое наименьшее расстояние между точками, расположенными на окружности и прямой, равно длине отрезка AC, т. е. равно $d - R$.

3. Докажите, что отрезки AB и CD общих внутренних касательных к двум окружностям (рис. 244), равны.

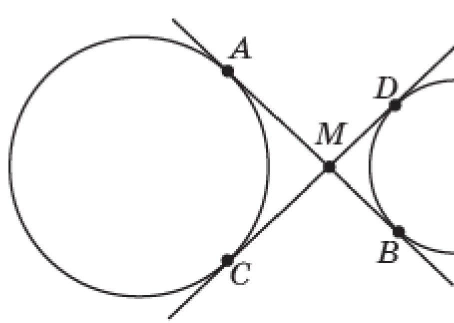


Рис. 244

Решение. $MA=MC$ и $MB=MD$ (см. выше задачу 1). Значит, $AB=MA+MB=MC+MD=CD$. Итак, $AB=CD$.

4*. Две окружности имеют общий центр. Докажите, что хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности, равны между собой.

Решение. Пусть две окружности имеют общий центр O (рис. 245). Хорды AB и CD большей окружности (имеющей больший радиус) касаются меньшей окружности соответственно в точках H и P. Тогда $OH \perp AB$, $OP \perp CD$. Прямоугольные треугольники AOH, BOH, COP и DOP равны (по гипотенузе и катету), значит, $AH=BH=CP=DP$ или $AB=AH+BH=CP+DP=CD$. Итак, $AB=CD$.

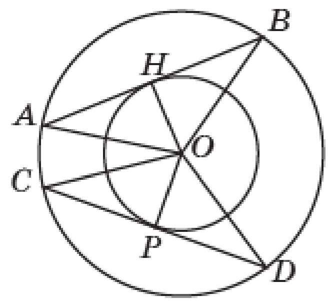


Рис. 245

V. Занимательный момент

Решение задач 5* и 6*, задачи 4* из необязательных частей домашних заданий уроков 48 и 49 (см. этап V урока 48 и этап IV урока 49).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 17 учебника).

2. Решить задачи.

1) Расстояние d от центра окружности до прямой меньше радиуса R этой окружности. Найдите наибольшее расстояние от точек данной окружности до прямой.

Ответ. $d+R$.

2) Докажите, что отрезки AB и CD общих пересекающихся внешних касательных к двум окружностям (рис. 246), равны.

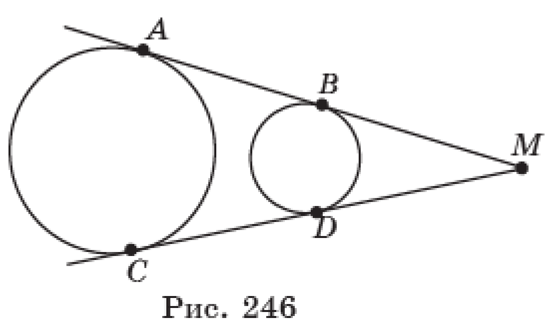


Рис. 246

Решение. $MA=MC$ (как отрезки касательных, проведенные к окружности из одной точки), аналогично $MB=MD$. Таким образом, $AB=MA-MB=MC-MD=CD$. Итак, $AB=CD$.

3) Докажите, что отрезки общих внутренних касательных к двум непересекающимся окружностям одинакового радиуса в точке пересечения делятся пополам.

Решение. На рисунке 247 AB и CD – общие касательные к окружностям с центрами O_1 и O_2 и равными радиусами. $\Delta AO_1M = \Delta BO_2M$ (прямоугольные, равны по катету и острому углу). Значит, $MA=MB$. Так как $MA=MC$ и $MB=MD$, то $MC=MD$, т.е. касательные в точке пересечения делятся пополам.

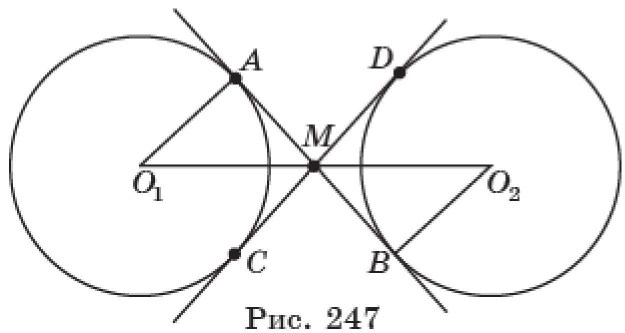


Рис. 247

4*. Через точку M, вне окружности, проведены касательные MA и MB, и через точку C на окружности проведена касательная, пересекающая отрезки MA и MB в точках K и L соответственно (рис. 248).

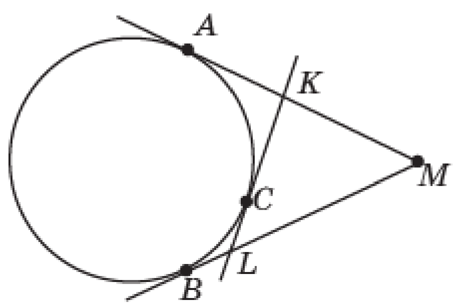


Рис. 248

Докажите, что периметр треугольника KML не зависит от положения точки C.

Решение. $P_{KLM}=MK+ML+KL$, где P_{KLM} – периметр треугольника KLM. $KL=KC+LC$, но $KC=KA$, $LC=LB$. Таким образом, $P_{KLM}=MK+ML+KA+LB=MA+MB$, и P_{KLM} не зависит от выбора точки C.

Урок 51

I. Проверка домашнего задания

Четырех учащихся приглашаем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 3

1. Дайте определения окружности, ее центра, радиуса, хорды и диаметра.
2. Сформулируйте и докажите теорему о непересекающихся прямой и окружности.

Задания 2, 4

1. Дайте определения круга, касательной к окружности, точки касания.
2. Сформулируйте и докажите теорему о касательной прямой к окружности.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Определите взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 5 см, а расстояние от прямой до центра окружности равно 7 см. Изобразите эту ситуацию.

2) Дана окружность с центром в точке A и радиусом R. Расстояние от точки A до прямой a равно d. Запишите условие, при котором прямая и окружность не имеют общих точек.

3) Прямая касается окружности. Найдите расстояние от центра окружности до этой прямой, если диаметр окружности равен 17 см.

Ответы

1) Не имеют ни одной общей точки.

2) $R<d$.

3) 8,5 см.

Задание для класса

1. Точка M движется по прямой MO в направлении к центру окружности (рис. 249).

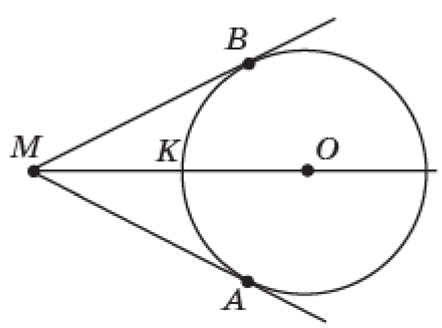


Рис. 249

1) Сколько различных касательных можно провести к данной окружности через точку *M* при различных ее положениях?

2) Как будет изменяться угол *AMB*, образованный этими касательными?

3) Как будет изменяться расстояние между точками касания?

4) Сравните *MA* и *MB*.

Решение. 1) Из любой точки отрезка *MK*, исключая точку *K*, можно провести две касательные к окружности; через точку *K* можно провести одну касательную к окружности; из любой точки отрезка *KO*, исключая точку *K*, нельзя провести ни одной касательной к окружности.

2) На отрезке *MK* $\angle AMB$ будет увеличиваться; в точке *K* - $\angle AKB=180^{o}$, т.е. будет развернутым.

3) На отрезке *MK* расстояние будет уменьшаться, в точке *K* будет равно нулю.

4) Равны.

2*. Какую фигуру образуют центры окружностей данного радиуса *R*, проходящие через данную точку *O*?

Ответ. Окр.(*O*; *R*), где *O* – данная точка, *R* – данный радиус.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом начинает решать задачу 1.

$У_2$, $У_3$ – дают решения задач 2 и 3 из домашней работы (см. этап VI урока 50).

Дополнительные вопросы

- Дайте определение касательной к окружности.
- Сформулируйте и докажите свойство касательной к окружности.
- Сформулируйте и докажите признак касательной к окружности.

II. Устная работа

1) Сколько прямых можно провести через данную точку окружности и пересекающих окружность?

Ответ. Бесконечно много.

2) Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку на окружности?

Ответ. Одну.

3) Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку, расположенную: а) внутри окружности; б) вне окружности?

Ответ. а) Ни одной; б) две.

4) Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой?

Ответ. Бесконечно много.

5) Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой в данной точке?

Ответ. Бесконечно много.

6) Сколько можно провести окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой в данной точке?

Ответ. Одну.

7) Задача по готовому чертежу (рис. 250). Определите вид треугольника ABC, если AC – касательная к данной окружности.

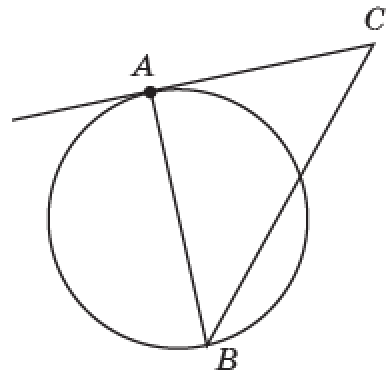


Рис. 250

Ответ. Прямоугольный.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Диаметр окружности равен 18 см, расстояние от ее центра до прямой равно 8 см. Каково взаимное расположение окружности и прямой? Изобразите эту ситуацию.

2. Дана прямая a и окр.(O; R). Расстояние от точки O до прямой a равно d. Запишите условие того, что прямая касается окружности.

3*. Докажите, что перпендикуляр к касательной в точке касания с окружностью проходит через центр окружности.

Вариант 2

1. Прямая удалена от центра окружности на 11 см. Каково взаимное расположение прямой и окружности, если диаметр окружности равен 11 см? Изобразите эту ситуацию.

2. Дана прямая b и не принадлежащая ей точка B. Расстояние между ними равно m. Каким радиусом R нужно провести окружность с центром в точке B, чтобы она пересеклась с прямой b?

3*. Докажите, что перпендикуляр, проведенный из центра окружности к касательной, проходит через точку касания.

Ответы

Вариант 1

1. Пересекаются.

2. $R = d$.

Вариант 2

1. Не имеют ни одной общей точки.

2. $R > m$.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из необязательной части домашнего задания (см. этап VI урока 50).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 16 и п. 17 учебника).

2. Решить задачи.

1) Дана прямая a и окр.(C; r). Перпендикуляр CH, опущенный на прямую a, равен h. Запишите условие того, что прямая и окружность пересекаются.

Ответ. $h<r$.

2) Через точку A окружности с центром в точке O проведена касательная. На ней отложены два равных отрезка AB и AC. Будут ли равны отрезки AO и CO? Почему?

Ответ. Да, как боковые стороны равнобедренного треугольника BOC. Треугольник BOC является равнобедренным, так как у него медиана OA является одновременно и высотой.

3) Прямая пересекает окружность в точках A и B. C – произвольная точка отрезка AB. Докажите, что расстояние от этой точки до центра окружности меньше ее радиуса.

Решение аналогично решению задачи 5* домашнего задания урока 48.

3. Вырезать из картона и принести на следующий урок два круга (с выколотыми центрами) разного радиуса (4 см и 2 см).

4)* Докажите, что если прямая пересекает две окружности, имеющие общий центр, то отрезки секущей (пересекающей прямой), лежащие между этими окружностями, равны между собой.

Решение. Докажем, что $AB=CD$ (рис. 251). Проведем $OH\perp AD$, тогда $\Delta BOH=\Delta COH$ (прямоугольные, равны по гипотенузе и катету). Значит, $BH=CH$. Аналогично, $\Delta AOH=\Delta DOH$ (прямоугольные, равны по гипотенузе и катету). Значит, $AH=DH$. Следовательно, $AB=AH-BH=DH-CH=CD$, т.е. $AB=CD$.

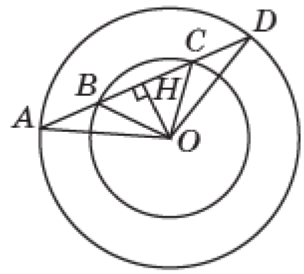


Рис. 251

5)* Точка A лежит внутри круга с центром в точке O и радиусом R. Расстояние AO равно a. Докажите, что круг с центром в точке A и радиусом R-a содержится в исходном круге.

Решение. Пусть C – произвольная точка круга с центром в точке A и радиусом R-a. Тогда $OC<OA+AC\leq a+R-a=R$. Следовательно, точка C принадлежит кругу с центром в точке O и радиусом R.

п. 18. Взаимное расположение двух окружностей (уроки 52, 53, 54)

Цель – дать классификацию взаимного расположения двух окружностей в зависимости от расстояния между их центрами.

Урок 52

I. Устная работа

1) Диаметр окружности равен 3 см. Как располагается относительно этой окружности прямая, удаленная от центра окружности на: а) 2 см; б) 1,5 см; в) 1 см.

Ответ. а) Не имеет с окружностью ни одной общей точки; б) касается окружности; в) пересекает окружность в двух точках.

2) Может ли прямая иметь с окружностью три общие точки?

Ответ. Нет.

3) Верно ли следующее определение: «Прямая, имеющая с окружностью общую точку, называется касательной к окружности»?

Ответ. Нет, нужно добавить: «только одну общую точку».

4) На рисунке 252 *AB* и *CD* – касательные. Докажите, что отрезки *AD* и *DB* равны.

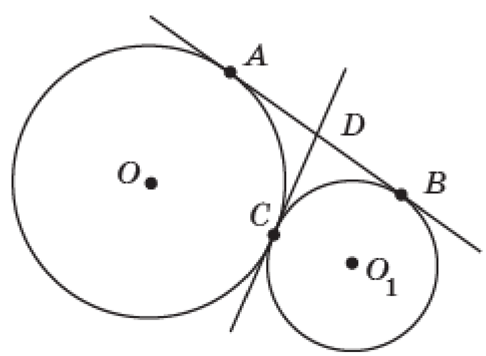


Рис. 252

5) На рисунке 253 *MA*, *MB* и *MC* – касательные. Докажите, что отрезки *MA* и *MC* равны.

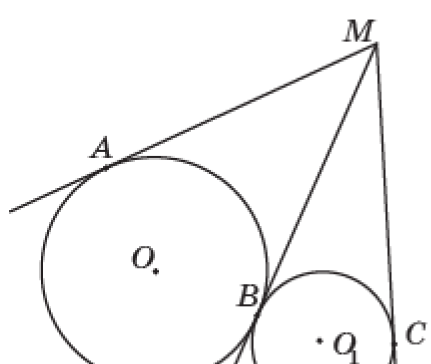


Рис. 253

II. Новый материал

Возьмем заготовленные дома картонные круги (см. задание 3 из домашней работы урока 51) и изобразим различные случаи взаимного расположения соответствующих окружностей. В результате проведения такого геометрического эксперимента получим следующие возможности (учитель выполняет то же задание на доске с помощью демонстрационных кругов):

1) Окружности не имеют общих точек. При этом возможны два случая, они изображены на рисунках 254, а и 254, б. В первом - окружности находятся вне друг друга, а во втором – одна окружность находится внутри другой.

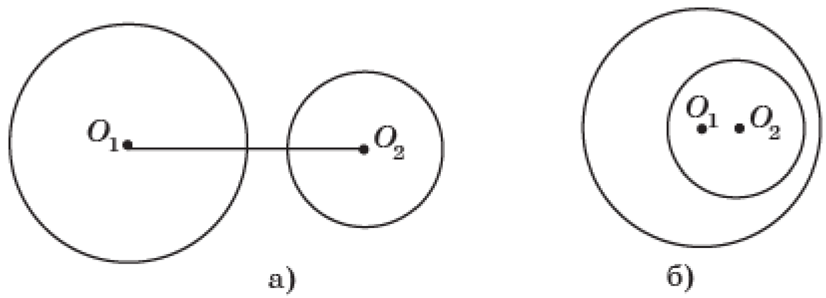


Рис. 254

2) Окружности имеют одну общую точку, т.е. касаются или внешним образом (рис. 255, а), или внутренним образом (рис. 255, б).

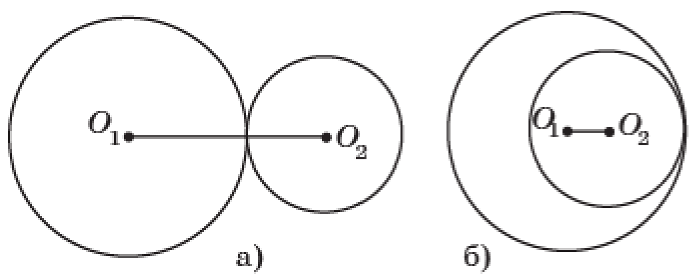


Рис. 255

Две окружности, имеющие только одну общую точку, называются ***касающимися***.

3) Окружности имеют две общие точки, т.е. пересекаются (рис. 256).

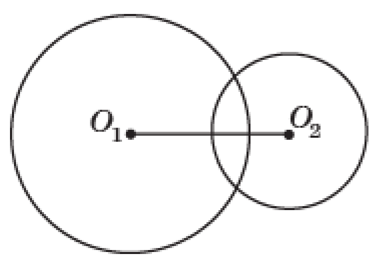
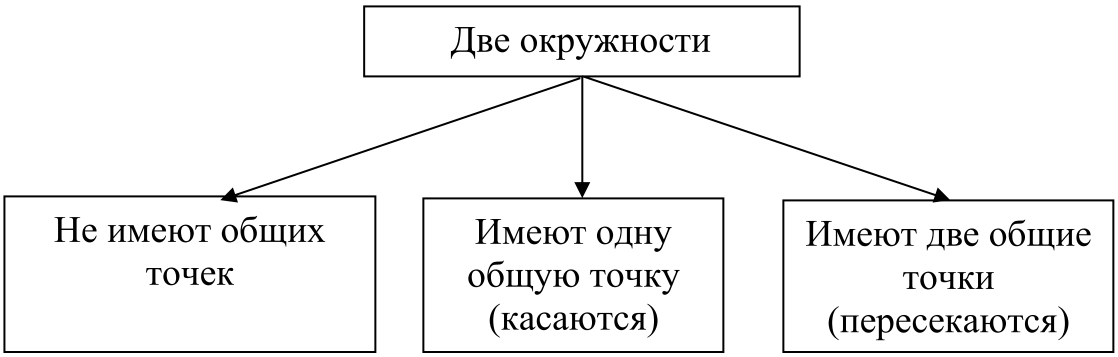


Рис. 256

Составляем схему взаимного расположения двух окружностей.

Взаимное расположение двух окружностей



Вопрос

- От чего зависит взаимное расположение двух окружностей?

Отметим центры окружностей (круги имеют выколотые центры), назовем их O_1 и O_2, радиусы соответственно R_1 и R_2, и пусть $R_1 > R_2$. Проведем O_1O_2.

Прямая, которой принадлежат центры двух окружностей, называется ***линией центров***.

Сравним отрезок O_1O_2 с R_1 и R_2. Получим:

а) если $O_1O_2 > R_1 + R_2$, т.е. расстояние между центрами окружностей больше суммы их радиусов, окружности располагаются вне друг друга (рис. 254, а);

б) если $O_1O_2 < R_1 - R_2$, т.е. расстояние между центрами окружностей меньше разности их радиусов, окружности лежат одна внутри другой (рис. 254, б);

в) если $O_1O_2 = R_1 + R_2$, т.е. расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, окружности касаются друг друга внешним образом (рис. 255, а);

г) если $O_1O_2 = R_1 - R_2$, т.е. расстояние между центрами окружностей равно разности их радиусов, окружности касаются друг друга внутренним образом (рис. 255, б);

д) если $R_1 - R_2 < O_1O_2 < R_1 + R_2$, т.е. расстояние между центрами окружностей меньше суммы их радиусов и больше их разностей, окружности пересекаются (рис. 256).

Теперь перейдем к доказательству соответствующих теорем.

Теорема. Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности, то эти окружности не имеют общих точек.

Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2, причем пусть $R_1+R_2<O_1O_2$ (рис. 257).

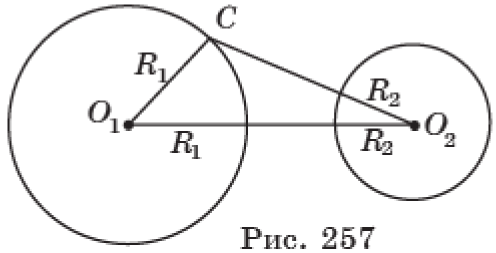


Рис. 257

Рассмотрим точку C на первой окружности, $O_1C=R_1$. Тогда $O_2C\geq O_1O_2 - O_1C>R_1+R_2-R_1=R_2$ и, следовательно, точка C не принадлежит второй окружности. Значит, эти окружности не имеют общих точек.

Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2<R_1-R_2$ ($R_1 > R_2$), то окружности также не имеют общих точек.

Теорема. Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме или разности их радиусов, то эти окружности касаются.

Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2 и $R_1+R_2=O_1O_2$ (рис. 258).

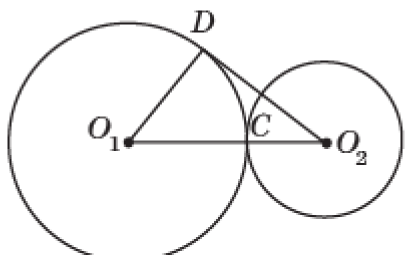


Рис. 258

Рассмотрим точку C на отрезке O_1O_2, для которой $O_1C=R_1$, $O_2C=R_2$. Она будет общей точкой для данных окружностей. Если D – точка на первой окружности, отличная от C, то из неравенства треугольника следует, что $O_2D>O_1O_2-O_1D=R_1+R_2-R_1=R_2$, значит, точка D не принадлежит второй окружности. Следовательно, данные окружности имеют только одну общую точку, т.е. касаются (внешним образом).

Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2=R_1-R_2$ ($R_1 >R_2$), то окружности также касаются (внутренним образом).

Осталось рассмотреть последний случай, когда расстояние между центрами окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей. Примем без доказательства, что в этом случае окружности имеют две общие точки, т.е. пересекаются.

III. Закрепление нового материала

1. Дана окружность радиуса 3 см и точка A на расстоянии, равном 5 см, от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A.

Ответ. 2 см.

2. Изобразите две окружности, радиусы которых равны 2 см и 3,5 см, а расстояние между центрами равно 0 см.

Ответ. Окружности имеют общий центр.

Окружности, имеющие общий центр, называются ***концентрическими***.

Концентрические окружности не пересекаются, одна лежит в другой, и для них выполняется условие доказанной теоремы, а именно, $O_1O_2<R_1-R_2$ ($R_1>R_2$), где O_1, O_2 < – центры окружностей, R_1, R_2 – соответственно их радиусы, так как $0<R_1-R_2$.

3. Две окружности с центрами в точках O_1, O_2 пересекаются в точках A и B (рис. 259). Докажите, что линия центров O_1O_2 перпендикулярна AB.

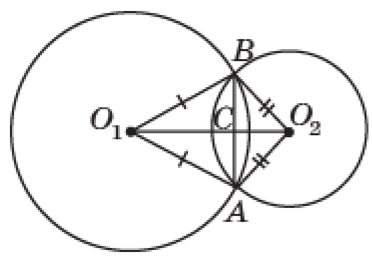


Рис. 259

Решение. Пусть C – середина отрезка AB. Тогда O_1C – медиана равнобедренного треугольника O_1AB и, следовательно, $O_1C\perp AB$. Аналогично, O_2C – медиана равнобедренного треугольника O_2AB и, следовательно, $O_2C\perp AB$. Значит O_1 и O_2 принадлежат прямой, проходящей через точку C и перпендикулярной AB.

4*. Нарисуйте три окружности, попарно касающиеся друг друга.

См. рисунок 260.

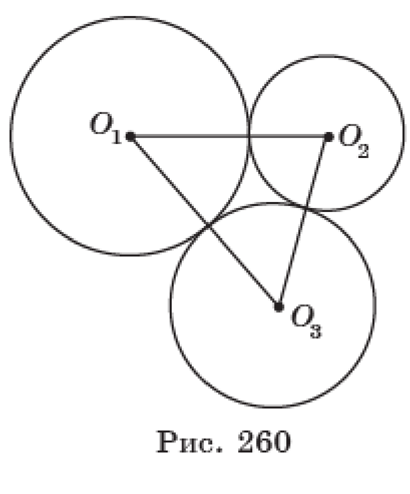


Рис. 260

IV. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательной части домашней работы (см. этап VI урока 51).

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 18 учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте две окружности: а) не имеющие общих точек; б) концентрические; в) касающиеся внешним образом; г) касающиеся внутренним образом; д) пересекающиеся.

2) Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см?

Ответ. а) Касаются внешним образом; б) не имеют общих точек.

3) Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 3:7. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 24 см.

Ответ. 36 см и 84 см.

4)* Три окружности одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.

Решение. На рисунке 261 изображены три равные, попарно касающиеся внешним образом окружности. Их центры образуют равносторонний треугольник ABC, так как $AB=BC=AC=2R$, где R – радиус каждой окружности. У равностороннего треугольника все углы равны (см. решение задачи 4* этапа I урока 29). Таким образом, ABC – правильный треугольник.

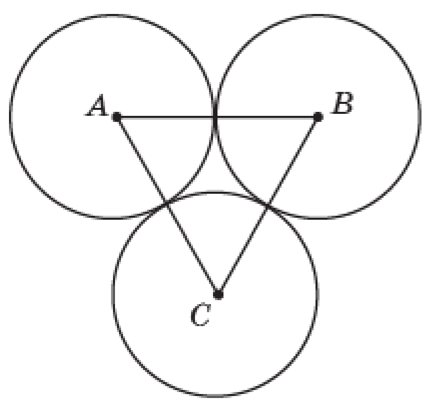


Рис. 261

5)* На шахматной доске с обычной раскраской нарисуйте окружность наибольшего возможного радиуса так, чтобы она не пересекала ни одного белого поля.

Решение. Искомая окружность не может пересекать границы клеток в точках между вершинами, ибо иначе она проходила бы по белой клетке.

Предположим, что окружность проходит по черной клетке *ABCD* и пересекает ее границу в точках *A* и *B* (рис. 262).

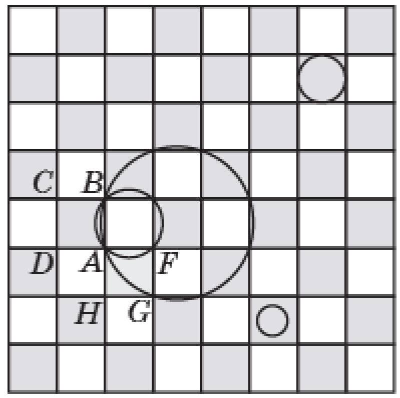


Рис. 262

Границу черной клетки *AFGH* эта окружность может пересечь либо в точке *F*, либо в точке *G*. Ясно, что во втором случае окружность будет больше, чем в первом. Пусть теперь окружность проходит по черной клетке *ABCD* и пересекает ее границу в точках *A* и *C*. Тогда она может пересечь границу клетки *AFGH* либо в точке *F*, либо в точке *H*. Полученные при этом окружности будут равны окружности, проходящей через точки *A*, *B* и *G*. Таким образом, искомой наибольшей окружностью будет окружность, изображенная на рисунке 262.

Урок 53

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Точка, одинаково удаленная от всех точек данной окружности, называется …

2. Две окружности пересекаются, если …

3. Если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между их центрами …

4. Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов, то …

5. Кольцом называется …

Вариант 2

1. Расстояние от точки окружности до ее центра называется …

2. Две окружности не имеют общих точек, если …

3. Если две окружности касаются внутренним образом, то расстояние между их центрами …

4. Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их радиусов, то …

5. Концентрическими окружностями называются …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Устная работа

1) Диаметр окружности равен 10 см. Как располагается относительно этой окружности прямая, удаленная от центра окружности на: а) 3 см; б) 5 см; в) 1 дм.

Ответ. а) Пересекает окружность; б) касается окружности; в) не имеет с окружностью ни одной общей точки.

2) Радиусы двух окружностей, имеющих общий центр, относятся как 2:7. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 20 см.

Ответ. 16 см, 56 см.

3) Две окружности касаются внешним образом. Радиусы окружностей относятся как 2:3. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 10 см.

Ответ. 8 см, 12 см.

4) Две окружности касаются внутренним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если они относятся как 5:2, а расстояние между центрами равно 15 см.

Ответ. 25 см, 10 см.

5) Можно ли провести из одной точки к окружности более двух касательных? Почему?

Ответ. Нет. В противном случае, например, три точки касания находились бы от данной точки на равном расстоянии, и окружность, проходящая через них, пересекала бы данную окружность в трех точках, что невозможно.

6) Три окружности имеют общую хорду. Где расположены их центры?

Ответ. На серединном перпендикуляре данной хорды.

IV. Решение задач

1. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.

Решение. Пусть O_1, O_2 – центры окружностей (рис. 263). Обозначим A_1, A_2 – точки пересечения отрезка O_1O_2 с этими окружностями. Тогда длина отрезка A_1A_2 будет искомым наименьшим расстоянием. Действительно, для любых других точек C_1, C_2 этих окружностей выполняется неравенство $O_1A_1+A_1A_2+A_2O_2<O_1C_1+C_1C_2+C_2O_2$. Учитывая, что $O_1A_1=O_1C_1$ и $A_2O_2=C_2O_2$, получаем неравенство $A_1A_2<C_1C_2$. Поэтому наименьшее расстояние равно $A_1A_2=d–R_1–R_2$.

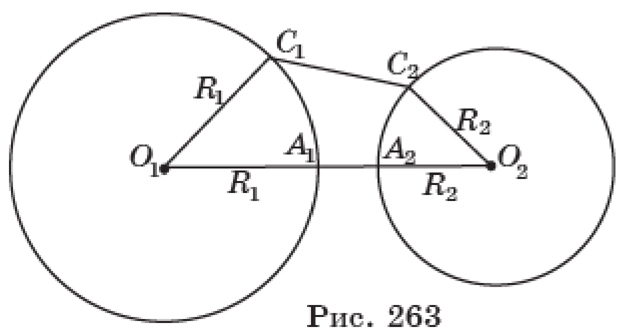


Рис. 263

2. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наибольшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.

Ответ. $d+ R_1+R_2$.

3. Даны две окружности – одна внутри другой. Через их центры проведен диаметр большой окружности, который малой окружностью

делится на три части, равные 3 см, 5 см и 1 см. Найдите расстояние между центрами данных окружностей.

Решение. Пусть даны окр.(O_1; R_1) и окр.(O_2; R_2), где $R_1>R_2$. Проведем $AB=2R_1=9$ см, откуда $R_1=4{,}5$ см, и $CD=2R_2=5$ см, откуда $R_2=2{,}5$ см. $CO_1=AO_1-AC=4{,}5-3=1{,}5$ (см), $O_1O_2=CO_2-CO_1=2{,}5-1{,}5=1$ (см). Таким образом, $O_1O_2=1$ см.

4*. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей меньше разности их радиусов, то эти окружности не имеют общих точек.

Решение. Даны окр.(O_1; R_1) и окр.(O_2; R_2), где $R_1>R_2$ и $O_1O_2< R_1-R_2$ (рис. 264). Рассмотрим точку $D\in$окр.(O_2; R_2). Тогда $O_1D<O_1O_2+ O_2D<R_1-R_2+ R_2= R_1$. Таким образом, $O_1D<R_1$. Это означает, что любая точка окр.(O_2; R_2) лежит внутри окр.(O_1; R_1). Значит, окружности не имеют ни одной общей точки.

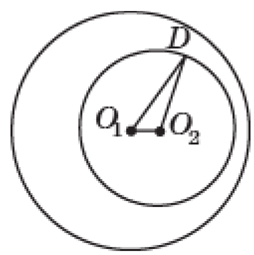


Рис. 264

V. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательной части домашней работы урока 52 (см. этап V урока 52).

VI. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 18 учебника).

2. Решить задачи.

1) Две окружности с центрами в точках O_1, O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2$.

Решение. Требуемое равенство следует из равенства треугольников O_1AO_2 и O_1BO_2 (по трем сторонам).

2) Расстояние между центрами двух окружностей равно d и меньше разности $R_1–R_2$ ($R_1 > R_2$) их радиусов. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между точками, расположенными на данных окружностях.

Решение. Из условия задачи следует, что окружности не имеют ни одной общей точки, и одна находится внутри другой (рис. 265). Наименьшее расстояние $AB=R_1–d-R_2$. Наибольшее расстояние $AC=R_1+d+R_2$.

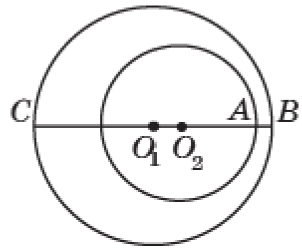


Рис. 265

3) Даны две окружности. Чему равен радиус окружности, касающейся данных и имеющей центр на прямой, проходящей через их центры, если радиусы данных окружностей и расстояние между их центрами соответственно равны 1, 3, 5? Сколько имеется решений?

Решение. Пусть даны окр.(O_1; 1) и окр.(O_2; 3), O_1O_2=5. Из условия задачи следует, что окружности не имеют ни одной общей точки и одна находится вне другой (рис. 266).

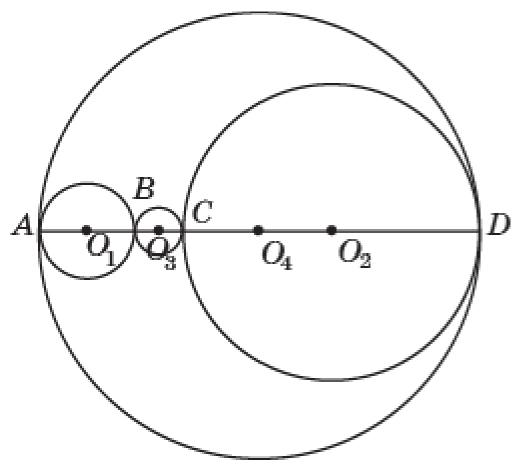


Рис. 266

Имеется два решения:

а) окр.(O_3; $\frac{BC}{2}$), где O_3 – середина отрезка BC, $\frac{BC}{2}$=0,5;

б) окр.(O_4; $\frac{AD}{2}$), где O_4 – середина отрезка AD, $\frac{AD}{2}$=4,5.

4)* Точка A лежит внутри круга с центром в точке O и радиусом R. Расстояние AO равно a. Докажите, что круг с центром в точке A и радиусом R - a содержится в исходном круге.

Решение. Пусть дан круг (O; R) и точка A внутри него. Рассмотрим его окружность, т.е. окр.(O; R), и окр.(A; R-a). Расстояние между центрами этих окружностей AO=a. Разность радиусов R-(R-a) = a. Следовательно, окружности касаются внутренним образом. Значит, круг (A; R-a) содержится в круге (O; R).

Можно ввести соответствующее обозначение «$\subset$» - содержится, кр.(A; R-a)$\subset$ кр.(O; R).

5)* Внутри окружности с центром O дана точка A, отличная от O. Найдите на окружности точку M, для которой угол AMO наибольший.

Решение. Пусть M – произвольная точка окружности и OK – перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую MA (рис. 267).

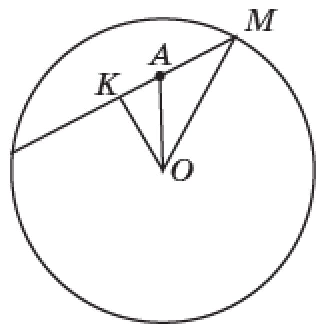


Рис. 267

В прямоугольном треугольнике KMO гипотенуза OM постоянна (равна радиусу), следовательно, угол AMO тем больше, чем больше катет OK. Поэтому угол OMA будет наибольшим, когда угол OAM – прямой.

Урок 54

I. Проверка домашнего задания

Четверых учащихся приглашаем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 3

1. Дайте определение касающихся окружностей.
2. Сформулируйте и докажите теорему о непересекающихся окружностях.

Задания 2, 4

1. Дайте определение концентрических окружностей.
2. Сформулируйте и докажите теорему о касающихся окружностях.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Изобразите две окружности, не имеющие ни одной общей точки. Запишите соответствующее неравенство, если радиусы окружностей равны R и r.

2) Как расположены относительно друг друга две окружности Окр.(A; R) и Окр.(B; r), если AB=10 см, R=7 см, r=3 см?

3) Две окружности с радиусами 20 см и 4 см пересекаются. Каким может быть расстояние между их центрами?

Ответы. 1) $O_1O_2>R+r$ или $O_1O_2<R-r$ ($R>r$), где O_1, O_2 соответственно центры окружностей.

2) Касаются внешним образом.

3) 16 см $<O_1O_2<$24 см, где O_1, O_2 соответственно центры окружностей.

Задание для класса

1. Две окружности касаются внешним образом. Диаметр первой равен 6 см, второй – 17 см. Найдите расстояние между их центрами.
2. Найдите диаметры двух концентрических окружностей, если ширина соответствующего кольца равна 12 см, а радиусы окружностей относятся как 5:2.
3. Две окружности Окр.(A; a) и Окр.(B; b) пересекаются, причем a=2m, b=10m, где m>0. Что можно сказать о расстоянии AB?

4*. Что можно сказать о взаимном расположении двух окружностей, если каждой из них принадлежат точки A, B, C? Ответ поясните.

Ответы

1. 11,5 см.
2. 40 см и 16 см.

3. $8m<AB<12m$.

4*. Совпадают.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ –вместе с классом начинает решать задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно решает классную задачу 2.

$У_3$ – оформляет решение задачи 3 из домашней работы (см. этап VI урока 53).

Дополнительные вопросы

- Какая геометрическая фигура называется окружностью?
- Каким свойством обладает диаметр, перепендикулярный хорде окружности?
- Чему равна наибольшая хорда окружности радиуса R?

II. Устная работа

1) Сколько диаметров можно провести через центр окружности?

Ответ. Бесконечно много.

2) Найдите радиус окружности, если известно, что он на 10 см меньше диаметра этой же окружности.

Ответ. 10 см.

3) В окружности на равном расстоянии от центра проведены хорды AB и CD. Чему равна хорда AB, если хорда CD равна 8 см?

Ответ. 8 см.

4) В окружности проведены две равные хорды, одна из которых удалена от центра на 2 см. На каком расстоянии от центра находится другая хорда?

Ответ. 2 см.

5) Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 3 см и 5 см; б) 2 см и 5 см?

Ответ. а) Касаются внутренним образом; б) не имеют ни одной общей точки, одна окружность лежит внутри другой.

6) Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 см и 6 см, если окружности: а) касаются внешне; б) касаются внутренне?

Ответ. а) 10 см; б) 2 см.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Точка M расположена вне окр.(O; R), $OM=d$. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от точки M до точек окружности.

Ответ. Соответственно $d-R$ и $d+R$.

2. Отрезки AB и CD - диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды AD и BC равны; б) $\angle BAD = \angle BCD$.

Решение. Требуемые равенства следуют из равенства равнобедренных треугольников *AOD* и *BOC* (по двум сторонам и углу между ними).

3. Диаметр окружности равен 18 см, расстояние от ее центра до прямой равно 8 см. Каково взаимное расположение окружности и прямой? Изобразите эту ситуацию.

Ответ.Пересекаются.

4. Дана прямая a и окр.(O; R). Расстояние от точки O до прямой a равно d. Запишите условие того, что прямая касается окружности.

Ответ. $d=R$.

5*. Прямая пересекает окружность в точках A и B. C – произвольная точка отрезка AB. Докажите, что расстояние от этой точки до центра окружности меньше ее радиуса.

См. решение задачи 5* из этапа V урока 48.

IV. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательной части домашней работы (см. этап VI урока 53).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п.16 – п.18 учебника).

2. Решить задачи.

1) Отрезки *AB* и *CD* - диаметры окружности с центром *O*. Найдите периметр треугольника *AOD*, если известно, что *CB* = 13 см, *AB* = 16 см.

Ответ. 29 см.

2) Одна окружность находится внутри другой, их радиусы равны 28 см и 12 см, а наименьшее расстояние между их точками равно 10 см. Найдите расстояние между центрами данных окружностей.

Решение. Пусть радиусы окружностей R_1=28 см и R_2=12 см, расстояние между центрами равно d. Тогда наименьшее расстояние между точками окружностей равно R_1-d-R_2. В нашем случае 28-d-12=10 (см), откуда d=6 см.

3) Радиусы двух окружностей относятся как 5:3, причем известно, что при их внутреннем касании расстояние между центрами равно 6 дм. Выясните взаимное расположение данных окружностей, если расстояние между их центрами будет равно: а) 24 дм; б) 5 дм; в) 28 дм; г) 20 дм.

Ответ. Радиусы окружностей равны 15 дм и 9 дм. Взаимное расположение: а) касаются внешним образом; б) не имеют ни одной общей точки, одна лежит внутри другой; в) не имеют ни одной общей точки, одна лежит вне другой; г) пересекаются.

4)* Какую геометрическую фигуру образуют центры окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке?

Ответ. Прямую, проходящую через данную точку и центр данной окружности без данной точки и без центра данной окружности.

5)*. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности; г) n окружностей?

Ответ. а) 2; б) 6; в) 12; г) $n(n - 1)$.

Урок 55
Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Каково взаимное расположение прямой и окружности радиуса 5 см, если расстояние от центра окружности до прямой равно: а) 3 см; б) 5 см; в) 11 см?

2. Как расположены относительно друг друга две окружности, если расстояние между их центрами равно: а) 18 см, а радиусы равны 3 см и 12 см; б) 20 см, а диаметры равны 14 см и 42 см?

3. Две окружности касаются внешним образом. Радиус одной окружности на 3 см меньше радиуса другой окружности. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 11 см.

4. Найдите радиусы двух концентрических окружностей, если известно, что диаметр большей окружности делится меньшей окружностью на три части, равные 7 см, 11 см и 7 см.

5*. Стороны угла касаются данной окружности. Какую линию опишет вершина этого угла, если, не изменяя своей величины, угол изменяет положение так, что стороны касаются данной окружности?

Вариант 2

1. Запишите условие того, что прямая и окружность радиуса 5 см: а) не имеют общих точек; б) пересекаются: в) касаются.

2. Как расположены относительно друг друга две окружности, если расстояние между их центрами равно: а) 15 см, а радиусы равны 9 см и 7 см; б) 8 см, а диаметры равны 20 см и 2 см?

3. Две окружности касаются внутренним образом. Радиус одной окружности в три раза больше радиуса другой. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 6 см.

4. Радиусы двух концентрических окружностей, относятся как 3:7. Найдите радиусы этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 16 см.

5*. На какое наибольшее число областей могут разбивать плоскость: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности?

п. 19. Геометрические места точек
(уроки 56, 57, 58)

Цель – дать учащимся представление об одном из основных способов задания геометрических фигур на плоскости; сформировать понятие геометрического места точек (ГМТ); выделить основные ГМТ; разъяснить сущность метода ГМТ; научиться применять его при решении задач.

Урок 56

I. Анализ контрольной работы № 4

II. Устная работа

1) Докажите, что треугольники *ABC* и *DEF* на рисунке 268 равнобедренные.

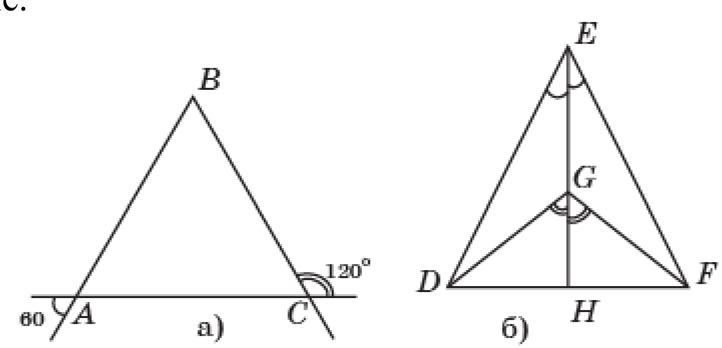


Рис. 268

2) Какую линию описывает центр круга, катящегося по прямой линии?

Ответ. Прямую.

3) Сколько окружностей можно провести через: а) одну точку; б) две точки; в) три точки, не принадлежащие одной прямой?

Ответ. а), б) Бесконечно много; в) одну.

4) Может ли окружность проходить через три заданные точки, принадлежащие одной прямой?

Ответ. Нет.

5) Сколько общих точек могут иметь две различные окружности?

Ответ. Ни одной, одну или две.

6) Каким свойством обладают точки, принадлежащие: а) окружности; б) кругу?

III. Новый материал

Отметим точку *O*, изобразим точки *A*, *B*, *C*, *D*, такие, что *OA*=*OB*=*OC*=*OD*=3 см.

Вопросы

- Какому свойству удовлетворяют точки *A*, *B*, *C*, *D*?

- Есть ли на плоскости еще точки, помимо взятых, удовлетворяющие данному свойству (удалены от точки O на 3 см)?

Теперь отметим точку E, удаленную от точки O на 3 см.

- Какой геометрической фигуре принадлежат точки, удовлетворяющие данному свойству?

Таким образом, все точки, удаленные от точки O на 3 см, принадлежат окр.(O; 3 см).

Проведем окр.(O; 3 см) и отметим на ней точку F.

- Будет ли она удовлетворять названному свойству?

Делаем вывод. Все точки, принадлежащие данной окружности, удалены от ее центра на 3 см. Говорят, что данная окружность является геометрическим местом точек, удаленных от данной точки O на 3 см. Дадим общее определение геометрического места точек.

Геометрическим местом точек называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Сокращенно «геометрическое место точек» можно записать «ГМТ».

Вопрос

- Как вы понимаете в данном определении слова «фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству»?

После обсуждения ответа на этот вопрос делаем вывод:

1) Если точка принадлежит фигуре, то она удовлетворяет заданному свойству.

2) Если точка удовлетворяет заданному свойству, то она принадлежит фигуре.

Вывод следует записать в тетради.

Вопросы

- Как определить окружность через ГМТ?

Окружностью называется ГМТ, удаленных от данной точки на данное расстояние.

- Как опеределить круг через ГМТ?

Кругом называется ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное.

Изобразим отрезок AB (рис. 269), найдем его середину O и проведем через O (с помощью угольника) прямую a, перпендикулярную AB. Эта прямая называется серединным перпендикуляром.

Серединным перпендикуляром к заданному отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

Выясним, каким геометрическим местом точек является серединный перпендикуляр.

1) Возьмем произвольную точку $C \in a$ и соединим ее с концами отрезка AB. ΔABC – равнобедренный (у него CO является одновременно высотой и медианой), значит, $CA=CB$. Таким образом, точка C одинаково удалена от концов данного отрезка.

2) Возьмем точку D, такую что $DA=DB$. Тогда ΔABD будет равнобедренным, значит, медиана и высота, опущенные из вершины D, совпадают. Это означает, что точка D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB.

Теорема. Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от концов этого отрезка.

Доказательство. Пусть дан отрезок AB и точка O – его середина. Покажем, что геометрическим местом точек, одинаково удаленных от точек A и B является серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 269).

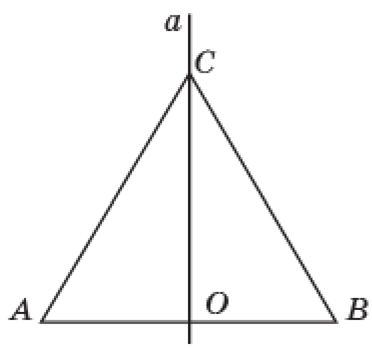


Рис. 269

Действительно, очевидно, точка O одинаково удалена от точек A, B и принадлежит серединному перпендикуляру. Если точка C одинаково удалена от точек A и B и не совпадает с точкой O, то треугольник ABC равнобедренный и CO – медиана. По свойству равнобедренного треугольника, медиана является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру. Обратно, пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с O, тогда прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по катетам). Следовательно, $AC=BC$.

IV. Закрепление нового материала

1. Сколько существует точек, одинаково удаленных от двух данных точек?

Ответ. Бесконечно много.

2. Сколько существует точек, удаленных от двух данных точек на 4 см? Сделайте соответствующий рисунок.

Ответ. Две, если расстояние между данными точками меньше либо равно 4 см; ни одной, если это расстояние больше 4 см.

3. Даны три точки: A, B, C. Найдите точки, которые одинаково удалены от точек A и B и находятся на расстоянии R от точки C.

Решение. Точки, одинаково удаленные от точек A и B, принадлежат серединному перпендикуляру, назовем его a, к отрезку AB. Точки, которые находятся на расстоянии R от точки C, принадлежат окр.(C; R). Таким образом, искомые точки – это точки пересечения двух названных ГМТ – серединного перпендикуляра и окружности. Следовательно, возможны такие варианты:

а) одна точка, если a касается окружности;

б) две точки, если a и окружность пересекаются;

в) ни одной точки, если a и окружность не имеют ни одной общей точки.

4*. Какое геометрическое место точек представляет собой отрезок?

Ответ. Отрезок – ГМТ, состоящее из двух точек и всех точек, лежащих между ними.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 19 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

Ответ. Серединный перпендикуляр к отрезку, образованному данными точками.

2) Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB.

Ответ. Серединный перпендикуляр к отрезку AB, без середины отрезка AB.

3) На данной прямой a найдите точки, удаленные от данной точки M на заданное расстояние d. Какие при этом возможны случаи?

Ответ. Точки пересечения прямой a и окр.(M; d). При этом возможны такие варианты:

а) одна точка, если a касается окружности;

б) две точки, если a и окружность пересекаются;

в) ни одной точки, если a и окружность не имеют ни одной общей точки.

4)* Невдалеке от двух населенных пунктов проходит шоссе. В каком месте этого шоссе нужно построить автозаправочную станцию, чтобы расстояния от нее до обоих пунктов были одинаковыми?

Ответ. На серединном перпендикуляре к отрезку с концами в данных населенных пунктах.

5)* Для составления одного равностороннего треугольника нужно 3 спички. Составьте 3 равносторонних треугольника из 12 спичек.

Решение показано на рисунке 270.

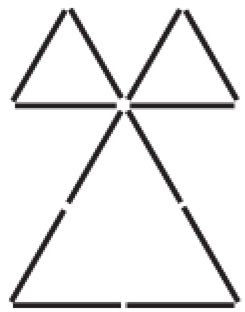


Рис. 270

Урок 57

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Геометрическим местом точек называется …
2. Серединным перпендикуляром к отрезку называется …
3. Кругом называется геометрическое место точек, …
4. Отрезком называется геометрическое место точек, …

Вариант 2

1. «Все точки, удовлетворяющие заданному свойству» означает …
2. Окружностью называется геометрическое место точек, …
3. Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, …
4. Лучом называется геометрическое место точек, …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Изобразим угол с вершиной в точке O и сторонами a, b (рис. 271).

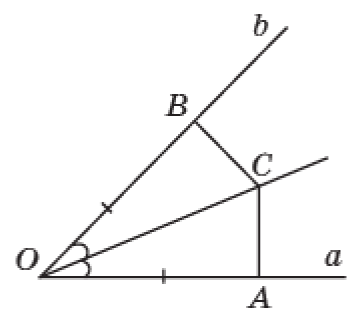


Рис. 271

Возьмем произвольную точку C, принадлежащую его биссектрисе. Найдем расстояние от нее до сторон данного угла. Для этого опустим перпендикуляры CA и CB на стороны угла соответственно a и b. Сравним CA и CB. $CA=CB$ (следует из равенства прямоугольных треугольников OAC и OBC по гипотенузе и острому углу). Итак, точки биссектрисы угла одинаково удалены от его сторон.

Вопрос

- Можно ли сделать вывод о том, что биссектриса угла – ГМТ, одинаково удаленных от его сторон?

Ответ. Пока нет, нужно доказать, что любая точка, одинаково удаленная от сторон угла, принадлежит его биссектрисе.

Теорема. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, лежащих внутри данного угла и одинаково удаленных от его сторон.

Доказательство. Рассмотрим угол, с вершиной в точке O и сторонами a, b. Пусть точка C принадлежит биссектрисе данного угла. Опустим из нее перпендикуляры CA и CB на стороны угла a и b (рис. 271). Прямоугольные треугольники OAC и OBC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AC=BC$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного угла. Обратно, пусть точка C лежит внутри этого угла и одинаково удалена от его сторон. Опустим перпендикуляры CA и CB на эти стороны. Тогда $CA=CB$ и прямоугольные треугольники AOC, BOC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, $\angle AOC = \angle BOC$ и, значит, OC – биссектриса угла AOB.

IV. Закрепление нового материала

1. Пусть a и b - пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, одинаково удаленных от a и b.

Ответ. Две прямые, на которых лежат биссектрисы четырех углов, образованных данными прямыми.

2. Дан угол ABC и точки M, N на его сторонах. Внутри угла найдите точку, одинаково удаленную от точек M и N и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла.

Ответ. Точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN и биссектрисы угла ABC.

3. В треугольнике ABC $AB=BC$=14 см. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E (рис. 272). Точка E соединена с точкой B. Найдите сторону AC треугольника ABC, если периметр ΔBEC равен 40 см.

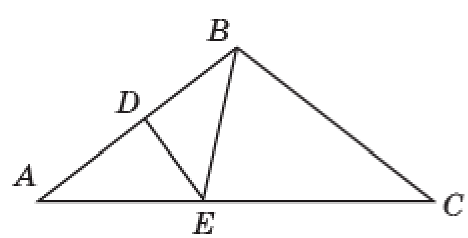


Рис. 272

Решение. $P_{BEC}=BE+EC+BC=(AE+EC)+BC=AC+BC=40$ (см) (где P_{BEC} – периметр треугольника BEC), откуда $AC=26$ см.

4*. Пусть A и B точки плоскости, c - прямая. Найдите геометрическое место точек прямой c, расположенных ближе к A, чем к B. В каком случае таких точек нет?

Решение. Обозначим серединный перпендикуляр к отрезку AB через a. Пусть $a \cap c = M$. Искомым ГМТ будет луч MK (рис. 273, а), лежащий на c и находящийся с точкой A в одной полуплоскости относительно прямой a. Если $a || c$ и c лежит в одной полуплоскости с точкой A относительно прямой a, то искомым ГМТ является прямая c (рис. 273, б). Таких точек нет, если c совпадает с a или $c || a$ и c лежит в одной полуплоскости с точкой B относительно прямой a.

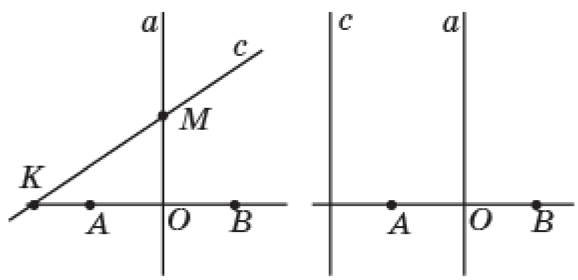


Рис. 273

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 19 учебника).

2. Решить задачи.

1) На прямой, пересекающей стороны угла, найдите точку, одинаково удаленную от этих сторон.

Ответ. Точка пересечения данной прямой и биссектрисы данного угла.

2) В треугольнике ABC $AB=BC=18$ см. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E (рис. 274). Точка E соединена с точкой A. Периметр треугольника AEC равен 27 см. Найдите сторону AC.

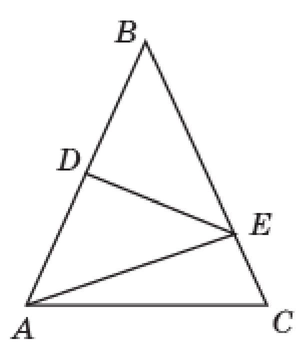


Рис. 274

Решение. $P_{AEC}=AE+EC+AC=(BE+EC)+AC=BC+AC=18+AC=27$ (см) (где P_{AEC} – периметр треугольника AEC), откуда AC=9 см.

3) Пусть A, B, C - три точки, не принадлежащие одной прямой. Найдите геометрическое место точек M таких, что прямая CM пересекает отрезок AB.

Ответ. Точки, лежащие внутри углов ACB и вертикального ему.

4)* Пусть a и b - пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, расположенных ближе к a чем к b.

Ответ. Искомым ГМТ будет геометрическое место внутренних точек двух вертикальных углов, образованных прямыми c и d, в которых лежит прямая a (рис. 275).

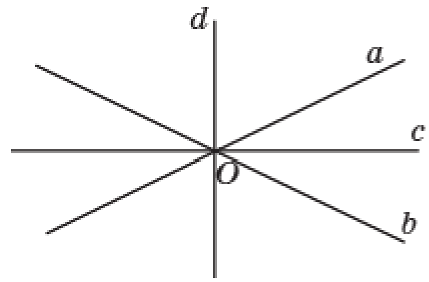


Рис. 275

5)* Из 16 спичек построена стрела (рис. 276, а). Переложите 8 спичек таким образом, чтобы получилось 8 равных четырехугольников.

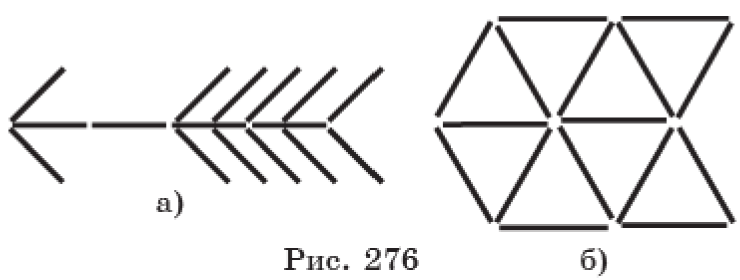


Рис. 276

Решение показано на рисунке 276, б.

Урок 58

I. Проверка домашнего задания

Четырех учащихся приглашаем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 3

1. Дайте определение серединного перпендикуляра к отрезку.
2. Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку как ГМТ.

Задания 2, 4

1. Дайте определение биссектрисы угла.
2. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе угла как ГМТ.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Найдите геометрическое место точек, лежащих между двумя заданными точками A и B.

2) Из данной точки окружности проведите две хорды. Найдите на окружности точку, одинаково удаленную от обеих прямых, на которых лежат данные хорды.

3*) Что является геометрическим местом центров окружностей данного радиуса R, касающихся данной прямой?

Ответы

1) Отрезок AB без точек A и B.

2) Точка пересечения биссектрисы угла, образованного данными хордами, и окружности.

3*) Две прямые, параллельные данной и отстоящие от нее на расстояние R.

Задание для класса

1. На данной прямой найдите точку, одинаково удаленную от двух заданных точек.

Решение. Пусть c – данная прямая, A, B – данные точки (рис. 277).

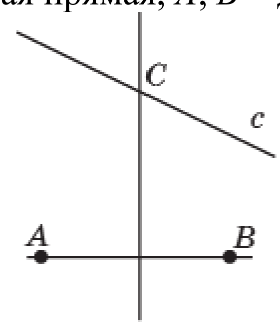


Рис. 277

Геометрическим местом точек, одинаково удаленных от точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB. Если серединный перпендикуляр и прямая c пересекаются, то искомой точкой C будет их точка пересечения. Если они не пересекаются, то задача не имеет решения.

2. Найдите геометрическое место точек таких, что отрезки касательных, проведенных из них к данной окружности, равны заданному отрезку.

Ответ. Окружность, концентрическая данной, радиус которой равен гипотенузе прямоугольного треугольника, катеты которого равны один данному отрезку касательной, а другой – радиусу данной окружности.

3. Найдите точки треугольника, одинаково удаленные от прямых, на которых лежат стороны этого треугольника.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 278).

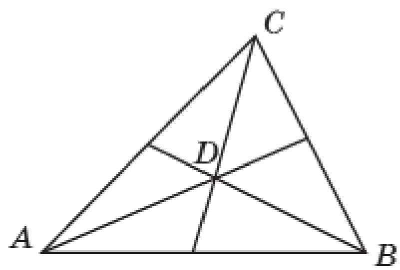


Рис. 278

Точка D этого треугольника одинаково удалена от AB и AC, если она принадлежит биссектрисе угла A. Аналогично, точка D треугольника ABC одинаково удалена от AB и BC, если она принадлежит биссектрисе угла B. Таким образом, точкой одинаково удаленной от AB, AC и BC будет точка пересечения биссектрис углов A и B треугольника ABC.

Заметим, что, так как эта точка одинаково удалена от AC и BC, то она будет принадлежать и биссектрисе угла C. Значит, все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

4*. Две окружности касаются внешним образом. Найдите геометрическое место точек, для которых отрезки касательных, проведенных из них к окружностям, равны.

Ответ. Прямая, перпендикулярная линии центров окружностей и проходящая через их точку касания.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ –вместе с классом начинает решать задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно решает классную задачу 2.

$У_3$ – оформляет решение задачи 2 из домашней работы (см. этап V урока 57).

Дополнительные вопросы

- Какая геометрическая фигура называется ГМТ?
- Сформулируйте определение окружности через понятие ГМТ.
- Сформулируйте определение круга через понятие ГМТ.

II. Устная работа

1) Что является геометрическим местом вершин равнобедренных треугольников с общим основанием?

Ответ. Серединный перпендикуляр основания, исключая середину этого основания.

2) Что представляет собой геометрическое место прямых, удаленных от данной точки A на данное расстояние a?

Ответ. Касательные, проведенные к окружности с центром в данной точке и радиусом a.

3) Дана окружность с центром в точке O и диаметром AB. Что собой представляет геометрическое место ее хорд, которые данным диаметром делятся пополам?

Ответ. Геометрическое место остальных диаметров и хорд, перпендикулярных данному диаметру.

4) Найдите геометрическое место точек, удаленных от всех точек окружности на равное расстояние.

Ответ. Центр данной окружности.

5) По какой линии движется центр окружности, катящейся по другой окружности вне ее?

Ответ. По окружности, концентрической по отношению к данной окружности.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Найдите геометрическое место точек M, таких, что расстояние от них до заданной точки O меньше заданного расстояния a.

2. Найдите геометрическое место центров равных окружностей, внешне касающихся данной окружности.

3*. Что представляет собой геометрическое место точек, удаленных от точки A на расстояние a, а от точки B на расстояние b?

Вариант 2

1. Найдите геометрическое место точек M, таких, что расстояние от них до заданной точки C больше заданного расстояния b.

2. Найдите геометрическое место центров равных окружностей, внутренне касающихся данной окружности.

3*. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла AOB и удаленных от точки C, взятой внутри этого угла, на расстояние d?

Ответы

Вариант 1

1. Внутренность круга с центром в точке O и радиусом a.

2. Окружность, концентрическая данной, радиус которой равен сумме радиусов данной окружности и любой из равных окружностей.

3*. Точки пересечения окружностей (A; a) и (B; b).

Вариант 2

1. Точки, лежащие вне круга (C; b).

2. Окружность, концентрическая данной, радиус которой равен разности радиусов данной окружности и любой из равных окружностей.

3*. Точки пересечения биссектрисы данного угла и окр.(C; d).

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа.

V. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательных частей домашних заданий уроков 56, 57.

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 19 учебника).

2. Решить задачи.

1) Пусть A и B - точки плоскости. Найдите геометрическое место точек C, для которых: а) $AC \leq BC$; б) $AC < AB$.

Ответ. а) Полуплоскость относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB, которой принадлежит точка A; б) внутренние точки круга (A; AB).

2) Пусть A, B, C - три точки, не принадлежащие одной прямой. Найдите геометрическое место точек M таких, что: а) луч CM пересекает отрезок AB; б) отрезок CM пересекает отрезок AB.

Ответ. а) Внутренние точки угла ACB; б) внутренние точки угла ACB без точек треугольника ACB.

3) Найдите геометрическое место центров окружностей, данного радиуса r, касающихся данной окружности радиуса $R > r$.

Ответ. Окружность, концентрическая данной окружности.

4)* Жильцы трех домов решили совместными усилиями вырыть колодец. В каком месте следует расположить колодец, чтобы все три расстояния от него до домов были одинаковыми?

Ответ. Если дома стоят на одной прямой, то нет решения. В противном случае колодец следует построить в точке пересечения серединных перпендикуляров к любым двум отрезкам, концы которых расположены в данных домах.

3. Принести циркуль и линейку.

п. 20. Задачи на построение
(уроки 59, 60, 61)

Цель – научиться выполнять основные построения с помощью циркуля и линейки, а именно: серединного перпендикуляра к отрезку; перпендикуляра, проведенного через заданную точку к прямой; биссектрисы угла; угла, равного данному; треугольника по трем его сторонам; касательной к окружности, проведенной из точки вне ее; начать знакомство учащихся с поэтапной методикой решения задач на построение.

Урок 59

I. Устная работа

1) Какая геометрическая фигура называется ГМТ?

2) Что называется серединным перпендикуляром к отрезку?

3) Что называется биссектрисой угла?

4) Каким ГМТ является серединный перпендикуляр к отрезку?

5) Каким ГМТ является биссектриса угла?

6) В чем заключается неравенство треугольника?

7) Что называется перпендикуляром, опущенным из точки на прямую?

II. Новый материал

До сих пор для геометрических построений мы пользовались линейкой, чертежным угольником, транспортиром, циркулем. Теперь мы накопили достаточно геометрических фактов, которые позволят нам выполнить построения некоторых фигур только двумя инструментами – циркулем и линейкой, причем линейкой без делений (можно просто перевернуть обычную линейку с делениями).

Рассмотрим основные задачи на построение циркулем и линейкой.

Задача 1. Построить серединный перпендикуляр к заданному отрезку.

Решение. Пусть AB – данный отрезок (рис. 279).

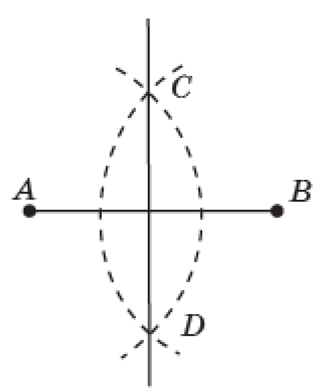


Рис. 279

С центрами в точках A и B и радиусом большим половины AB, опишем окружности. Обозначим точки их пересечения, лежащие по разные стороны от прямой AB, через C и D. Точки C и D одинаково удалены от концов отрезка AB. Следовательно, они лежат на серединном перпендикуляре и, значит, прямая CD и будет искомым серединным перпендикуляром.

Замечание. Можно описывать не полностью каждую окружность, а только их пересекающиеся части – дуги.

Задача 2. Из данной точки, не принадлежащей данной прямой, опустить перпендикуляр на эту прямую.

Решение. Пусть C – данная точка, a – прямая (рис. 280).

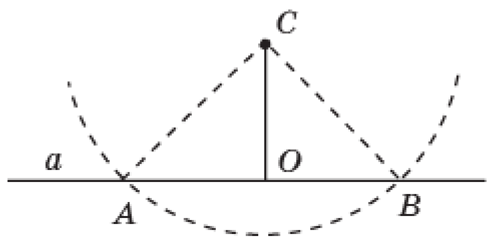


Рис. 280

Отметим на этой прямой какую-нибудь точку A. Если отрезок CA перпендикулярен a, то он является искомым. В противном случае с центром в точке C и радиусом CA проведем окружность. Она пересечет прямую a в точке A и некоторой точке B. Так как $AC=BC$, то точка C принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB. Поэтому искомый перпендикуляр CO будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB. После этого можно или воспользоваться построением серединного перпендикуляра из предыдущей задачи, или поступить следующим образом. С центрами в точках A и B и радиусом AC проведем окружности и обозначим их точку пересечения, лежащую по другую сторону от точки C, через D. Тогда D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB. Проведем прямую CD и ее точку пересечения с прямой a обозначим через O. Отрезок CO будет искомым перпендикуляром.

При рассмотрении первых задач на построение циркулем и линейкой пока четко не выделяем этапы их решение: 1. Анализ. 2. Построение. 3. Доказательство. 4. Исследование. При этом первые три этапа в неявном виде присутствуют, но учащимся еще трудно проводить анализ и доказательство. Постепенно, по мере накопления опыта решения таких задач, будем вводить классическую четырехэтапную схему решения, в том числе и исследование. Это важный этап, на нем устанавливаются различные случаи, которые могут возникать, определяется число возможных решений задачи и условия существования искомой фигуры.

III. Закрепление нового материала

1. Постройте середину заданного отрезка.

Решение. См. задачу 1 из этапа II данного урока.

2*. Через данную точку, принадлежащую данной прямой, проведите прямую, перпендикулярную данной прямой.

Решение. Пусть даны прямая a и точка $O \in a$. На прямой a в обе стороны от точки O отложим равные отрезки $OA=OB$. Далее из точек A и B, как из центров, проводим окружности радиусом, большим OA. Точку пересечения окружностей назовем C. CO – искомая прямая.

По-существу, построили серединный перпендикуляр к отрезку AB, при этом одна точка – середина отрезка была задана, поэтому достаточно было построить еще только одну точку, чтобы провести прямую.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из необязательной части домашнего задания (см. этап VI урока 58).

V. Задание на дом

1. Разобрать решение задач 1 и 2 (п. 20 учебника).

2. Решить задачи.

1) Данный отрезок разделите на четыре равные части.

Решение. Данный отрезок делим пополам, а потом каждую половину делим еще раз пополам.

2) Постройте окружность, проходящую через две заданные точки. Сколько таких окружностей можно построить? Чему равен наименьший радиус этих окружностей?

Решение. Можно построить бесконечно много таких окружностей, их центры будут находиться на серединном перпендикуляре к отрезку, определяемому данными точками. Наименьший радиус равен половине этого отрезка.

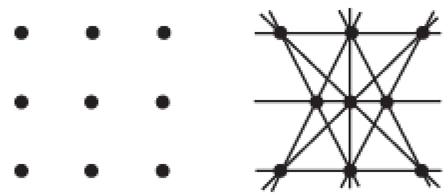
3) Из данной точки, принадлежащей данной прямой, восстановите к этой прямой перпендикуляр.

Решение. См. задачу 2* из этапа III данного урока.

4)* Найдите точку, одинаково удаленную от трех вершин треугольника.

Решение. Нужно построить серединные перпендикуляры любых двух сторон треугольника, точка их пересечения будет искомой.

5)* На рисунке 281, а переставьте 2 точки таким образом, чтобы было 10 рядов по 3 точки в каждом.



а) б)

Рис. 281

Ряд точек был определен в задаче 5* из домашнего задания урока 27 (см. этап V урока 27).

Решение показано на рисунке 281, б.

Урок 60

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Через данную точку можно провести … прямых.
2. С помощью линейки можно построить …
3. Чтобы на луче MN от его начала построить отрезок, равный данному, нужно …

Задача имеет … решений.

4. Точки серединного перпендикуляра к отрезку одинаково удалены от …

Вариант 2

1. Через данную точку можно провести … лучей с началом в этой точке.
2. С помощью циркуля можно построить …
3. Чтобы на прямой a от данной на ней точке A построить отрезок, равный данному, нужно …

Задача имеет … решений.

4. Точки биссектрисы угла одинаково удалены от …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Продолжаем знакомство с основными задачами на построение с помощью циркуля и линейки.

Задача 3. (Задачи 1 и 2 были рассмотрены на предыдущем уроке, см. этап II урока 59.) Построить биссектрису данного угла.

Решение. Из вершины O данного угла опишем дугу окружности, пересекающую стороны угла, и точки пересечения обозначим A и B. Затем этим же раствором циркуля с центрами в точках A и B опишем окружности. Их точку пересечения, отличную от O, обозначим C и проведем луч OC. Треугольники OAC и OBC равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle AOC=\angle BOC$, т.е. луч OC является искомой биссектрисой (рис. 282).

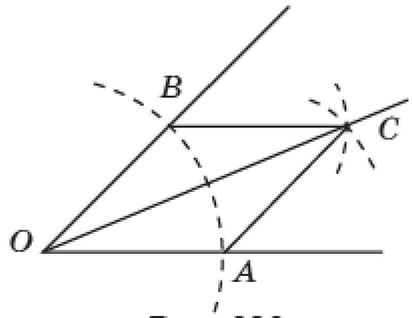


Рис. 282

Задача 4. Построить угол, равный данному, одна из сторон которого совпадает с данным лучом.

Решение. Пусть дан угол с центром в точке O и лучами a, b. Построим угол, равный данному, с вершиной в данной точке O_1 и лучом a_1. (рис. 283).

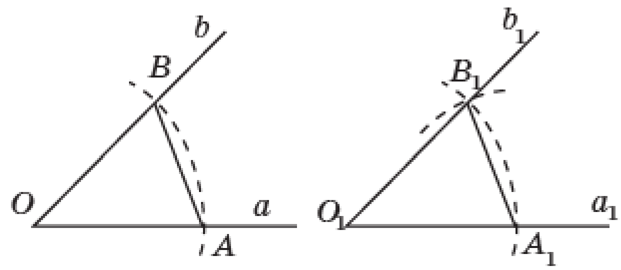


Рис. 283

Для этого с центром в точке O опишем дугу окружности, пересекающую лучи a и b в точках A и B соответственно. Затем этим же раствором циркуля опишем дугу окружности с центром в точке O_1 и пересекающую луч a_1 в точке A_1. Далее раствором циркуля, равным AB, опишем дугу окружности с центром в точке A_1. Полученную точку пересечения двух дуг обозначим B_1 и проведем луч O_1B_1. Тогда треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ равны (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, т.е. угол $A_1O_1B_1$ является искомым.

Задача 5. Построить треугольник ABC с данными сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

Решение. Заметим, что для того, чтобы три отрезка могли служит сторонами треугольника нужно, чтобы каждый из них был меньше суммы двух других. Пусть даны такие отрезки, длины a, b и c. Проведем прямую и отметим на ней точку A. Раствором циркуля, величины c, отложим на этой прямой отрезок AB, равный c. Раствором циркуля, величины b, опишем дугу окружности с центром в точке A, и раствором циркуля, величины a, опишем дугу окружности с центром в точке B. Точку пересечения этих дуг обозначим через C и соединим отрезками с точками A и B. Треугольник ABC будет искомым (рис. 284).

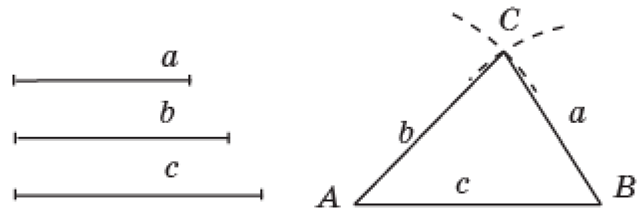


Рис. 284

IV. Закрепление нового материала

1. Постройте угол 90°.

Решение. Нужно построить биссектрису развернутого угла.

2. Постройте угол, вдвое больший данного угла.

Решение. Пусть дан угол AOB. Строим угол AOC, равный данному углу AOB, причем одна из его сторон, OA, совпадает со стороной данного угла (рис. 285). Тогда $\angle COB=2\angle AOB$.

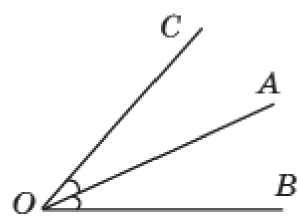


Рис. 285

3. Постройте равносторонний треугольник со стороной 3 см.

Решение аналогично решению задачи 5 из этапа III данного урока, только в данном случае $a=b=c=3$ см.

4*. Найдите точку, одинаково удаленную от всех сторон треугольника.

Решение. Нужно построить биссектрисы любых двух углов данного треугольника, точка их пересечения будет искомой.

V. Занимательный момент

Решение задач 4* и 5* из необязательной части домашнего задания (см. этап V урока 59).

VI. Задание на дом

1. Разобрать решения задач 3-5 (п. 20 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте угол 45°.

Решение. Сначала строим угол 90◦ (делим пополам развернутый угол), затем строим его биссектрису.

2) Постройте треугольник со сторонами 2 см, 3 см и 4 см.

Решение аналогично решению задачи 5 (см. этап III данного урока).

3) Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку этой окружности.

Решение. Пусть точка $A \in$окр.(O; R). Проведем радиус OA и через точку O проведем прямую $a \perp OA$.

4)* Постройте какую-нибудь окружность, касающуюся сторон данного угла. Сколько решений имеет задача?

Решение. Центр окружности принадлежит биссектрисе данного угла, радиус равен расстоянию от центра окружности до любой из сторон угла. Задача имеет бесконечно много решений.

5)* Найдите число треугольников, изображенных на рисунке 286.

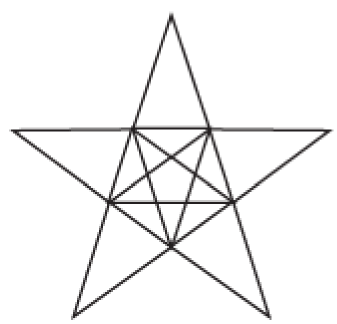


Рис. 286

Ответ. 60.

Урок 61

I. Проверка домашнего задания

Шестерых учащихся приглашаем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 3, 5

1. Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.
2. Постройте угол, равный данному углу.

Задания 2, 4, 6

1. Постройте биссектрису данного угла.
2. Опустите из данной точки перпендикуляр на данную прямую.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Постройте равнобедренный треугольник с основанием 3 см и боковой стороной 4 см.

Решение аналогично решению задачи 5 из этапа III урока 60, только в данном случае a=b=4 см, c=3 см.

2) В данный угол впишите окружность, которая касается одной из его сторон в данной на ней точке.

Решение. Построим биссектрису данного угла. Из данной точки, назовем ее M, восстановим перпендикуляр MH к соответствующей стороне угла и проведем его до пересечения с проведенной биссектрисой угла, H принадлежит биссектрисе. Окр.(H; MH) – искомая.

Задание для класса

1. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и прилежащему к нему острому углу.

Решение. Строим основание и прилежащие к нему данные острые углы. Углы имеют одну общую сторону. Другие стороны углов пересекаются в третьей вершине искомого треугольника.

Можно обратить внимание учащихся на то, что задача имеет два решения, в зависимости от того, в какую полуплоскость относительно прямой, на которой лежит основание треугольника, откладываются углы.

2. Постройте касательные к данной окружности, проходящие через данную точку вне этой окружности.

Решение. Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R, и пусть A – точка вне этой окружности (рис. 287, а).

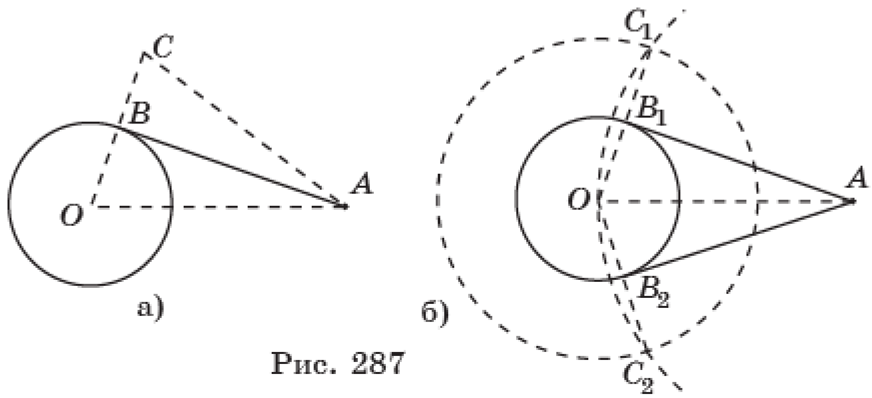


Рис. 287

Допустим, мы построили касательную AB, B – точка касания. Эта касательная будет перпендикулярна радиусу OB. Продолжим OB и отложим отрезок $BC=OB$. Тогда касательная будет серединным перпендикуляром к отрезку OC. Таким образом, если мы сможем построить точку C, то сможем построить и касательную.

Точка C, с одной стороны, принадлежит окружности с центром O и радиусом $2R$, а с другой стороны, она принадлежит окружности с центром A и радиусом AO. Отсюда построение точки C. Сначала строим окружность с центром O и радиусом $2R$ и окружность с центром A и радиусом AO. Эти окружности пересекаются в двух точках C_1 и C_2 (рис. 287, б). Затем соединяем эти точки с центром O и обозначаем точки пересечения отрезков C_1O, C_2O соответственно B_1 и B_2. Они и будут искомыми точками касания. Прямые AB_1 и AB_2 будут искомыми касательными.

3. Постройте геометрическое место центров окружностей с радиусом 2 см, проходящих через данную точку.

Ответ. Окружность с центром в данной точке и радиусом 2 см.

4*. Постройте прямую, проходящую через данную внутри угла точку и отсекающую от его сторон равные отрезки.

Решение. Пусть дан угол AOB и точка M внутри него (рис. 288). Строим биссектрису OC данного угла. Из точки M опускаем перпендикуляр MH на нее (если $M \in OC$, восстанавливаем из нее перпендикуляр к OC) и продолжаем его до пересечения со сторонами угла, получим точки K и L. Прямая KL – искомая. Действительно, OH является одновременно биссектрисой и высотой треугольника KOL, значит, он – равнобедренный и $OK=OL$.

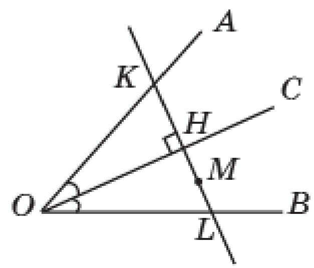


Рис. 288

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом начинает решать задачу 1.

$У_2$, $У_3$ – оформляют решения задач 2, 3 из домашней работы (см. этап VI урока 60).

Дополнительные вопросы

- Сформулируйте определение биссектрисы угла через понятие ГМТ.
- Сформулируйте определение серединного перпендикуляра к отрезку через понятие ГМТ.
- Сформулируйте определение круга через понятие ГМТ.

II. Устная работа

1) Что является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от трех точек, не принадлежащих одной прямой?

Ответ. Центр окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются три данные точки.

2) Найдите геометрическое место центров окружностей, расположенных внутри треугольника и касающихся не менее двух его сторон.

Ответ. Три биссектрисы углов треугольника, исключая его вершины и точки, принадлежащие сторонам треугольника.

3) Будет ли высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию геометрическим местом точек, одинаково удаленных от концов основания?

Ответ. Нет.

4) Будет ли луч, перпендикулярный к отрезку и имеющий начало в его середине, геометрическим местом точек, одинаково удаленных от концов отрезка?

Ответ. Нет.

5) Задача 4* из необязательной части домашнего задания (см. этап VI урока 60).

Ответ. 60.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой (рис. 289, а). Покажите на рисунке, каким образом следует провести через точку A прямую так, чтобы точки B и C отстояли от нее на одинаковое расстояние.

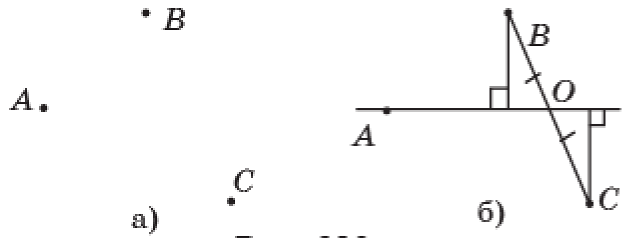


Рис. 289

Решение показано на рисунке 289, б.

2. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, опущенной на него. Сколько решений имеет задача?

Решение. Пусть отрезок AB – основание треугольника (рис. 290). Находим его середину O и восстаналиваем из нее перпендикуляр OC, равный данной высоте. Треугольник ABC – искомый. Действительно, у него $AC=BC$, AB равен данному основанию. Задача имеет два решения, поскольку можно было отложить данную высоту в другую полуплоскость относительно AB. На рисунке 290 треугольник ABC_1, где отрезок OC_1 равен данной высоте, также удовлетворяет условию задачи.

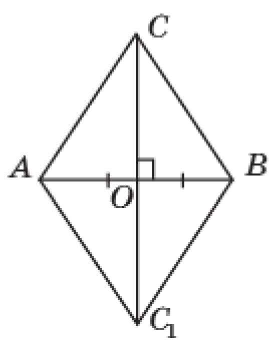


Рис. 290

3. Постройте прямую, проходящую через данную точку внутри данного угла и образующую равные углы с его сторонами.

Решение. См. решение задачи 4* из этапа I данного урока. В равнобедренном треугольнике KOL углы при основании KL равны.

4*. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.

Решение. Пусть нужно построить прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90°$), у которого $BC=a$ и $AC+AB=d$. Построим прямоугольный треугольник BCD (построим прямой угол и на его сторонах отложим данные отрезки, рисунок 291) по двум катетам $BC=a$ и $DC=d$. Затем найдем середину O его гипотенузы BD и проведем через O серединный перпендикуляр к BD. Точку его пересечения с CD назовем A. Тогда треугольник ABD будет равнобедренным и $AB=AD$. Итак, треугольник ABC – искомый. Действительно, он прямоугольный, у него катет $BC=a$ и $AC+AB=AC+AD=d$.

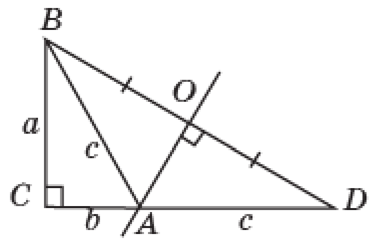


Рис. 291

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 19 и п. 20 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса R_1, касающихся данной окружности радиуса R_2. Рассмотрите случаи: а) $R_1<R_2$; б) $R_1=R_2$; в) $R_1> R_2$.

Решение. а) окр.(O; R_1+R_2) и окр.(O; R_2-R_1); б) окр.(O; R_1+R_2); в) окр.(O; R_1+R_2) и окр.(O; R_1-R_2).

2) Постройте равнобедренный треугольник с основанием 4 см и боковой стороной 5 см.

Решение. См. решение задачи 5 из этапа III урока 60, только в данном случае $a=b$=5 см, c=4 см.

3) Постройте хорду, которая проходит через точку на данной окружности и удалена от центра окружности на данное расстояние.

Решение. Пусть даны окр.(O; R) и точка M, принадлежащая ей, расстояние от искомой хорды до O равно d. Проведем окр.(O; d). Тогда, если $d\geq R$, задача не имеет решения, если $d<R$ - два решения. В этом случае нужно из точки M провести касательные к окр.(O; d) и продолжить их до пересечения с данной окружностью. Точки пересечения назовем A, B. Тогда хорды MA и MB – искомые. Действительно, они проходят через данную на окружности точку M и отстоят от центра O данной окружности на данное расстояние d.

4)* Постройте треугольник по стороне, опущенной на нее высоте и проведенной к ней медиане.

Решение. Пусть нужно построить треугольник ABC по стороне $AB=c$, высоте $CH=h$ и медиане $CM=m$. Сначала строим прямоугольный треугольник CHM по данным гипотенузе CM и катету CH. Для этого строим прямой угол с вершиной H. На одной из его сторон откладываем отрезок $CH=h$, проводим окр.(C; m), точку ее пересечения со второй стороной прямого угла назовем M. Теперь на HM от точки M в обе стороны отложим равные отрезки $MA=MC=\frac{c}{2}$. Треугольник ABC – искомый. Действительно, у него сторона $AC=c$, высота $CH=h$ и медиана $CM=m$.

5)* Постройте окружность, которая касается данной прямой и данной окружности в данной на ней точке (рис. 292, а).

Решение. Пусть дана прямая a и окр.(O; OM), M – данная точка. Допустим, что построена окр.(C; CM), которая касается данных прямой и окружности соответственно в точках H и M (рис. 292, б). Тогда касательная k, проведенная к окружностям через точку M, будет перпендикулярна линии центров CO. Назовем $A=k\cap a$. Тогда отрезки касательных, проведенных из точки A к искомой окружности, равны, т. е. $AH=AM$.

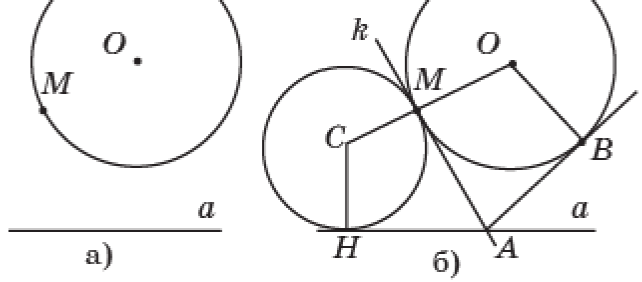


Рис. 292

Отсюда ясно построение. Проводим радиус OM и строим в точке M касательную k (через точку M проводим прямую $k\perp OM$). Находим точку $A=k\cap a$. Строим окр.(A; AM). Точка H=окр.(A; AM)$\cap$ a. Из точки H восстанавливаем перпендикуляр к прямой a и продолжаем его до пересечения с прямой MO, точку их пересечения назовем C. Проводим окр.(C; CM), которая и будет искомой. Действительно, окр.(C; CM) касается прямой a (в точке H) и данной окр.(O; OM) в данной на ней точке M.

Заметим, что точку C можно было найти иначе, а именно, провести биссектрису l угла A, лежащего с данной окружностью в разных полуплоскостях относительно прямой AM. Точка $C=l\cap OM$.

Урок 62

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Найдите геометрическое место точек, удаленных от данной точки на 5 см.

2. В данном треугольнике постройте медиану.

3. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.

4. Постройте равнобедренный треугольник KLM ($MK=ML$) по высоте MH и углу M.

5*. С помощью равностороннего вырезанного картонного треугольника и линейки без делений постройте биссектрису данного угла.

Вариант 2

1. Найдите геометрическое место внутренних точек данного угла, одинаково удаленных от его сторон.

2. В данном треугольнике постройте высоту.

3. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

4. Постройте равнобедренный треугольник EFG по основанию EG и углу E.

5*. С помощью равностороннего вырезанного картонного треугольника и линейки без делений постройте перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку, принадлежащую данной прямой.

Итоговое повторение
(уроки 63 – 68)

§ 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ, НЕОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ

п. 21*. Парабола
(*два урока*)

Цель – познакомить учащихся с новым ГМТ – параболой, ее элементами, основными свойствами, научиться строить параболу и проводить касательные.

Урок 1

1. Устная работа

1. Что называется геометрическим местом точек (ГМТ)?

2. Приведите примеры ГМТ.

3. Определите окружность как геометрическое место точек.

4. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от концов данного отрезка?

5. Что представляет собой геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон?

II. Новый материал

Пусть на плоскости задана прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой d и точки F, называется ***параболой***. Прямая d называется ***директрисой***, а точка F - ***фокусом*** параболы (рис. 293).

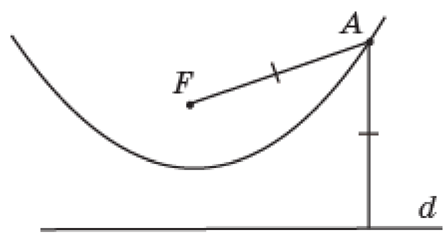


Рис. 293

Для того, чтобы нарисовать параболу, потребуются линейка, угольник, нить, длиной, равной большему катету угольника, и кнопки. Прикрепим один конец нити к фокусу, а другой - к вершине меньшего угла угольника. Приложим линейку к директрисе и поставим на нее угольник меньшим катетом. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги и прижималось к большему катету. Будем перемещать угольник и прижимать к его катету карандаш так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге параболу (рис. 294).

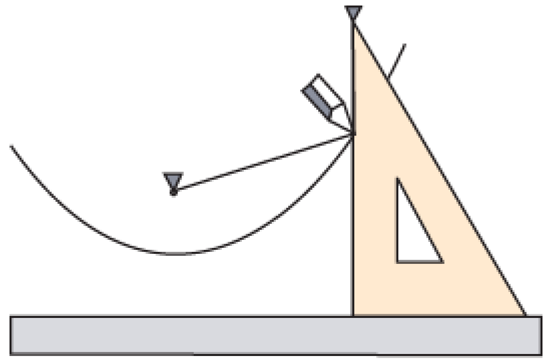


Рис. 294

Осью параболы называется прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Точка пересечения параболы с ее осью называется ***вершиной*** параболы.

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная ее директрисе, называется ***касательной*** к параболе.

Теорема. Пусть A – точка на параболе с фокусом F и директрисой d, AD – перпендикуляр, опущенный на директрису (рис. 295). Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A, будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD.

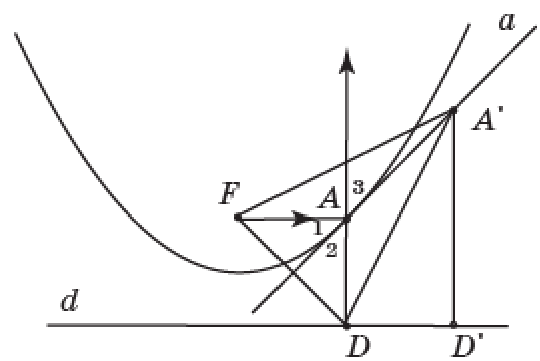


Рис. 295

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла FAD (рис. 295) будет касательной к параболе. Действительно, треугольник FAD равнобедренный. Следовательно, прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку FD. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, опустим перпендикуляр $A'D'$ на прямую d. Воспользуемся тем, что перпендикуляр короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же прямой. Тогда

$$A'F = A'D > A'D'.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит параболе и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с параболой, т.е. является касательной.

В качестве следствия из этой теоремы докажем, что для параболы выполняется следующее свойство.

Фокальное свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения и тем, что от кривой свет отражается также как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F параболы, a – касательная, AD – прямая, перпендикулярная директрисе (рис. 295). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла FAD. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 1, то угол отражения будет равен углу 3, т. е. направление отраженного луча будет перпендикулярно директрисе.

Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т.д.

III. Закрепление нового материала

1. Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 4 см. Чему равно расстояние от вершины параболы до директрисы?

Ответ. 2 см.

2. Нарисуйте параболу, у которой фокус удален от директрисы на расстояние: а) 2 см; б) 4 см; в) 6 см.

3. Что будет происходить с параболой, если фокус будет: а) приближаться к директрисе; б) удаляться от директрисы?

Ответ. Ветви параболы будут: а) сжиматься; б) расширяться.

4. Для параболы с заданными фокусом F и директрисой d постройте касательную, проходящую через данную точку A на параболе.

Решение. Из точки A опустим перпендикуляр AD на директрису D. Построим биссектрису угла FAD. Она и будет искомой касательной.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 21* учебника).

2. Изготовьте прибор для построения параболы.

3. Решить задачи.

1) Для заданных фокуса и директрисы постройте соответствующую им параболу.

2) Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек на параболе до директрисы? Укажите соответствующую точку на параболе.

Ответ. 2 см. Вершина параболы.

3) Для параболы с заданными фокусом F и директрисой d проведите касательную, перпендикулярную оси параболы.

Решение. Из фокуса F параболы опустим перпендикуляр FH на директрису d. Его середина G будет принадлежать параболе. Серединный перпендикуляр к отрезку FH будет искомой касательной к параболе.

4)* Для точки F, не принадлежащей прямой d, найдите геометрическое место точек, расстояния от которых до точки F: а) меньше расстояния до прямой d; б) больше расстояния до прямой d.

Ответ. Геометрическое место точек, расположенных: а) внутри параболы; б) вне параболы.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой и точки, ей не принадлежащей, называется …
2. Директрисой параболы называется …
3. Фокус параболы обозначается …
4. Осью параболы называется …
5. Касательной к параболе называется …
6. Фокальное свойство параболы состоит в том, что …

Вариант 2

1. Параболой называется геометрическое место точек …
2. Фокусом параболы называется …
3. Директриса параболы обозначается …
4. Вершиной параболы называется …
5. Прямая, имеющая с параболой одну общую точку и не перпендикулярная директрисе называется …
6. Фокальное свойство параболы используется при изготовлении …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Построение касательной к параболе. Пусть парабола задана фокусом F и директрисой d. Используя циркуль и линейку, построим касательную к параболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF проведем окружность и найдем ее точки пересечения с директрисой d. Если расстояние от точки C до фокуса больше, чем расстояние до директрисы, то таких точек две (рис. 296).

Обозначим их D_1 и D_2. Проведем биссектрисы углов FCD_1 и FCD_2. Соответствующие прямые a_1 и a_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам FD_1 и FD_2 и, значит, будут искомыми касательными к параболе. Для построения точек касания через точки D_1 и D_2 проведем прямые, перпендикулярные директрисе и найдем их точки пересечения A_1 и A_2 с прямыми a_1 и a_2. Они и будут искомыми точками касания.

Может случиться, что расстояние от точки C до фокуса равно расстоянию до директрисы. В этом случае точка C будет лежать на параболе, окружность с центром в точке C и радиусом CF будет касаться директрисы в некоторой точке D и, следовательно, через точку C будет проходить одна касательная – биссектриса угла FCD.

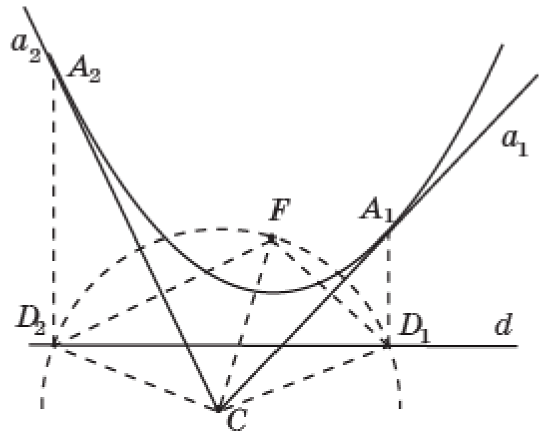


Рис. 296

В случае, если расстояние от точки C до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, то точек пересечения окружности с директрисой нет и, следовательно, нет касательных к параболе, проходящих через эту точку.

IV. Закрепление нового материала

1. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, проходящую через данную точку вне параболы.

2. Даны: директриса d параболы; точка A на параболе и касательная a, проходящая через эту точку. Постройте фокус параболы.

Решение. Опустим перпендикуляр AD на директрису. Из точки D опустим перпендикуляр DB на касательную и отложим на его продолжении отрезок BF равный DB. Полученная точка F и будет искомым фокусом.

3*. Докажите, что две касательные к параболе, проведенные из точки, принадлежащей директрисе, перпендикулярны.

Решение. Пусть G – какая-нибудь точка директрисы d параболы, F – фокус, GA_1, GA_2 – касательные, A_1, A_2 – точки касания. Опустим из точек A_1, A_2 перпендикуляры A_1D_1 и A_2D_2 на директрису. Проведем отрезки FD_1 и FD_2 и обозначим их точки пересечения с касательными соответственно B_1 и B_2 (рис. 297). Тогда, так как касательная GA_1 к параболе является серединным перпендикуляром к отрезку FD_1, то $GF = GD_1$. Поэтому прямоугольные треугольники GFB_1 и GD_1B_1 равны и, следовательно, равны углы FGB_1 и D_1GB_1. Аналогично, рассматривая вторую касательную, получаем равенство углов FGB_2 и D_2GB_2. Из этого следует, что угол B_1GB_2 составляет половину развернутого угла D_1GD_2 и, значит, угол между касательными равен 90°, т.е. касательные перпендикулярны.

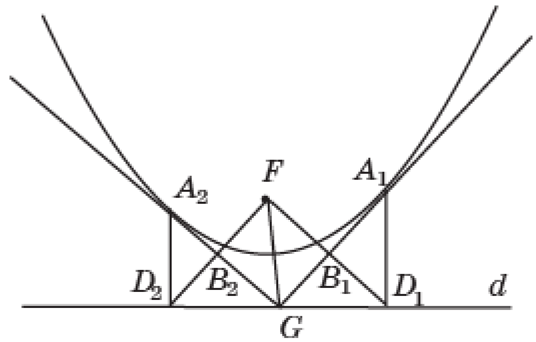


Рис. 297

V. Лабораторная работа

Укажем способ получения параболы из листа бумаги. Возьмем лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большой стороны точку F. Сложим лист так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой D на большой стороне, и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 298). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FD и, следовательно, касательной к параболе. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку F с другой точкой большой стороны. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к параболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму параболы.

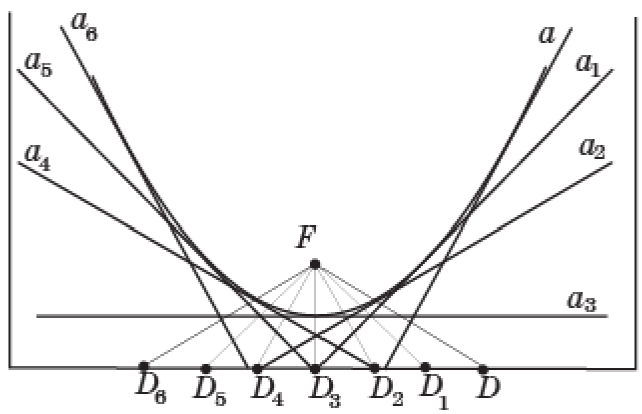


Рис. 298

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 21* учебника).

2. Решить задачи.

1) Получите параболу из листа бумаги.

2) Для заданных фокуса F и директрисы d параболы, с помощью циркуля и линейки постройте несколько точек параболы.

Решение. Возьмем какую-нибудь точку D на директрисе. Построим серединный перпендикуляр к FD и через точку D проведем прямую, перпендикулярную директрисе. Тогда их точка пересечения будет принадлежать параболе.

3) Даны фокус F параболы и две ее касательные a_1, a_2. Постройте директрису параболы.

Решение. Опустим из точки F перпендикуляры FB_1 и FB_2 на касательные a_1 и a_2 соответственно. На их продолжении отложим отрезки B_1D_1 и B_2D_2, равные FB_1 и FB_2 соответственно (рис. 299). Через точки D_1 и D_2 проведем прямую d. Она и будет искомой директрисой.

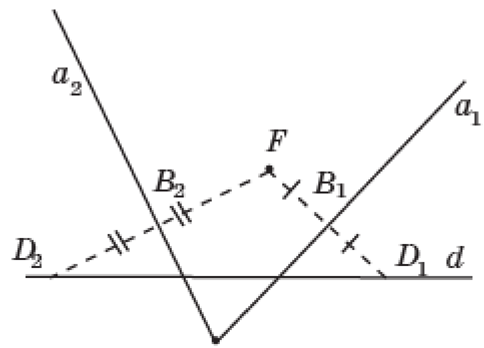


Рис. 299

4) Даны фокус F, касательная a и на ней точка касания A. Постройте директрису параболы.

Решение. Опустим перпендикуляр FB на касательную и отложим на его продолжении отрезок BD, равный FB. Точка D будет принадлежать диретрисе. Проведем через точку D прямую d, перпендикулярную AD. Она и будет искомой директрисой параболы.

5)* Найдите геометрическое место точек, из которых парабола видна под: а) прямым углом; б) острым углом.

Ответ. а) Директриса; б) точки, лежащие в полуплоскости, определяемой директрисой, по другую сторону от параболы.

п. 22*. Эллипс
(два урока)

Цель – ввести понятие эллипса через ГМТ, познакомить учащихся с его элементами и основными свойствами, научить строить эллипс и проводить касательные.

Урок 1

I. Проверка домашнего задания

Шестерых учащихся приглашаем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 2

1. Дайте определение параболы, ее директрисы и фокуса.
2. Сформулируйте и докажите теорему о касательной к параболе.

Задания 3, 4

1. Дайте определение касательной к параболе.
2. Сформулируйте и докажите фокальное свойство параболы.

Задания 5, 6

1. Дайте определение оси и вершины параболы.
2. Постройте касательную к параболе.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 6 см. Чему равно расстояние от вершины параболы до директрисы?

Ответ. 3 см.

2) Для параболы с заданным фокусом и директрисой постройте касательную, проходящую через заданную точку вне параболы.

Задание для класса

1. Даны фокус F параболы, касательная a и на ней точка касания A. Постройте директрису параболы.

Решение. Опустим перпендикуляр FB на касательную и отложим на его продолжении отрезок BD, равный FB. Точка D будет принадлежать директрисе. Проведем через точку D прямую d, перпендикулярную AD. Она и будет искомой директрисой параболы.

2. Даны фокус, директриса и касательная к параболе. Постройте точку касания.

Решение. Через фокус F проведем прямую, перпендикулярную данной касательной a, и обозначим точку его пересечения с директрисой D. Через точку D проведем прямую, перпендикулярную директрисе и найдем точку A ее пересечения с касательной a. Она и будет искомой точкой касания.

К доске вызываем двух учащихся.

Первый решает задачу 1.

Второй вместе с классом начинает решать задачу 2.

Дополнительные вопросы.

- Сформулируйте определение параболы.
- Сформулируйте теорему о касательной к параболе.
- В чем заключается фокальное свойство параболы.

II. Новый материал

Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется **эллипсом**. Точки F_1, F_2 называются **фокусами** эллипса.

Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 сумма $AF_1 + AF_2$ постоянна и равна некоторому отрезку c (рис. 300). Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть больше отрезка F_1F_2.

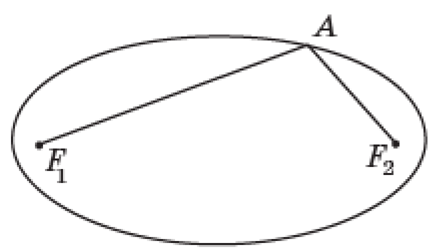


Рис. 300

Слово "фокус" в переводе с латинского означает "очаг", "огонь", и именно это свойство эллипса послужило основанием для названия точек F_1, F_2 фокусами.

Еще И.Кеплер обнаружил, что планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причем Солнце находится в фокусах этих эллипсов. Точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу, называется перигелий, а наиболее удаленная - афелий. Однако, из-за того, что орбита Земли представляет собой очень мало сжатый эллипс, похожий на окружность, такое приближение и удаление от Солнца незначительно сказывается на температуре. Гораздо большее значение для температуры на поверхности Земли имеет угол падения солнечных лучей. Так, например, когда Земля бывает в перигелии в нашем полушарии зима, а когда в афелии - лето. Луна, исскуственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Для того чтобы нарисовать эллипс, потребуется нить и кнопки. Прикрепим концы нити к фокусам. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги. Будем перемещать карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге эллипс (рис. 301).

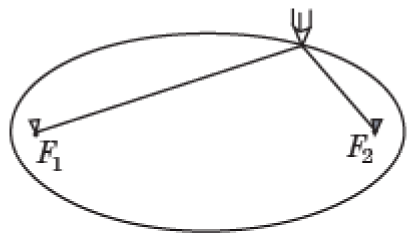


Рис. 301

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку.

Теорема. Пусть A - произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A является прямая, содержащая биссектрису угла смежного с углом F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла смежного с углом F_1AF_2 будет касательной к эллипсу (рис. 302).

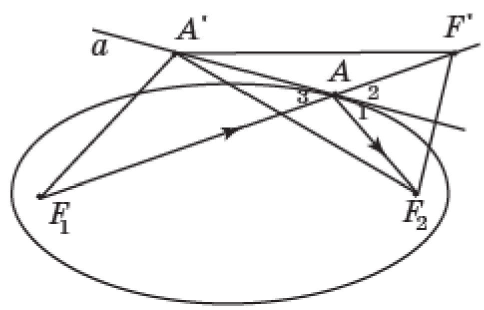


Рис. 302

Обозначим $AF_1 + AF_2 = c$. Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = c.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т. е. является касательной.

В качестве следствия из этой теоремы докажем, что для эллипса выполняется следующее свойство.

Фокальное свойство. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом его фокусе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения и тем, что от кривой свет отражается также как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a – касательная (рис. 302). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_1AF'. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т.е. луч света, после отражения в точке A, пойдет в направлении AF_2.

III. Закрепление нового материала

1. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c.

Ответ. Эллипс с фокусами A и B, за исключением двух точек, принадлежащих прямой AB.

2. Даны фокусы F_1, F_2 эллипса и сумма расстояний до них c. С помощью циркуля постройте несколько точек этого эллипса.

Решение. С центрами в точках F_1, F_2 проведем окружности, так чтобы их сумма радиусов была равна c. Тогда точки их пересечения будут принадлежать эллипсу.

3. Нарисуйте эллипс, у которого сумма расстояний от точек эллипса до фокусов равна 8 см, а расстояние между фокусами равно: а) 6 см; б) 4 см; в) 2 см.

4. Что будет происходить с эллипсом, если сумма расстояний от точек эллипса до фокусов будет постоянной, равной c, а расстояние между фокусами будет: а) уменьшаться; б) увеличиваться?

Ответ. Эллипс будет: а) приближаться к окружности радиуса $\frac{c}{2}$; б) сжиматься к отрезку длины c.

5. Для эллипса с заданными фокусами F и константой c постройте касательную, проходящую через данную точку A на эллипсе.

Решение. Точку A соединим с фокусами F_1 и F_2. Проведем биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2. Она и будет искомой касательной.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 22* учебника).

2. Изготовьте прибор для построения эллипса.

3. Решить задачи.

1) Для заданных фокусов и константы c нарисуйте соответствующий эллипс.

2) Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и суммой радиусов.

Ответ. Эллипс.

3) Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точкек: а) меньше c; б) больше c.

Ответ. Геометрическое место точек, расположенных: а) внутри эллипса; б) вне эллипса.

4)* Пусть дан эллипс с центрами F_1, F_2 и константой c. Докажите, что окружность с центром в фокусе F_1 и радиусом $r = \frac{1}{2}(c - F_1F_2)$ лежит внутри эллипса. Нарисуйте эти эллипс и окружность.

Решение. Пусть точка A принадлежит окружности с центром в фокусе F_1 и радиусом $r = \frac{1}{2}(c - F_1F_2)$. Тогда $AF_2 < AF_1 + F_1F_2$ и, следовательно, $AF_1 + AF_2 < 2r + F_1F_2 = c$. Таким образом, точка A лежит внутри эллипса.

5)* Расстояние между фокусами эллипса равно 4 см, $c = 6$ см. Чему равно наименьшее расстояние от точек на эллипсе до одного из фокусов? Укажите соответствующую точку на эллипсе.

Ответ. 1 см. Соответствующей точкой является точка пересечения эллипса с прямой, проходящей через фокусы.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Эллипсом называется …
2. Прямая, имеющая с эллипсом одну общую точку, называется …
3. Фокусы эллипса обозначаются …
4. Касательной к эллипсу является …
5. Перигелием называется точка орбиты планеты, …

Вариант 2

1. Геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек есть величина постоянная, называется …
2. Фокусами эллипса называются …
3. Касательной к эллипсу называется …
4. Фокальное свойство эллипса заключается в том, что …
5. Афелием называется точка орбиты планеты, …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Построение касательной к эллипсу. Пусть эллипс задан своими фокусами и константой c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к эллипсу, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 303).

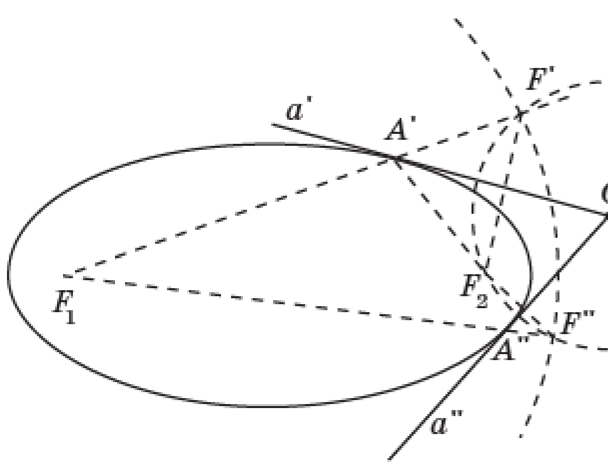


Рис. 303

Таких точек может быть две F', F'', одна или ни одной в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a', a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'CF_2$, $F''CF_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'' соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

IV. Лабораторная работа. Укажем способ получения эллипса из листа бумаги. Вырежем из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставим точку F. Сложим круг так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности круга, и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 304). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FF' и, следовательно, касательной к эллипсу. Разогнем круг и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности круга. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к эллипсу. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму эллипса.

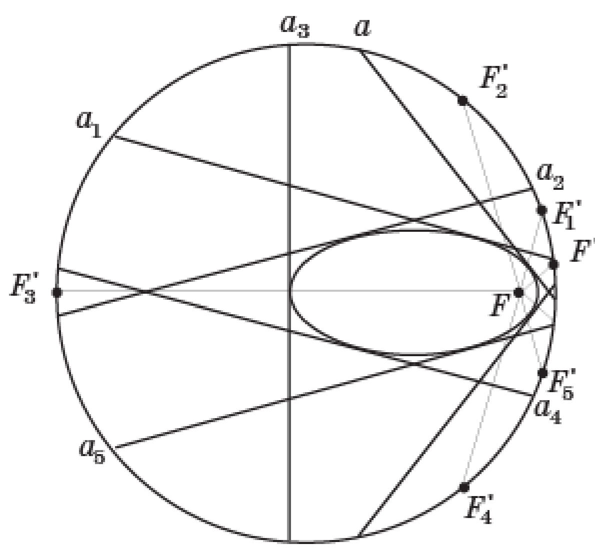


Рис. 304

Для другого способа получения эллипса потребуется сковорода и картонный круг диаметром, вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положив круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 22* учебника).

2. Решить задачи.

1) Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и константой c. Найдите наибольшее расстояние между точками эллипса. Укажите эти точки.

Решение. Искомые точки являются точками пересечения эллипса с прямой F_1F_2. Расстояние между ними равно c.

2) Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c проведите касательную, проходящую через заданную точку C вне эллипса.

3)* Даны два фокуса F_1, F_2 и касательная a к эллипсу. Постройте постоянную c и нарисуйте эллипс.

Решение. Из одного из фокусов, например F_2, опустим перпендикуляр F_2B на касательную и отложим на его продолжении отрезок BF'', равный F_2B. Тогда отрезок F_1F'' даст искомую константу c.

4)* Даны две касательные a_1, a_2, фокус F_2 и постоянная c. Постройте второй фокус эллипса.

Решение. Как и в предыдущей задаче, для касательных a_1, a_2 построим точки F_1'', F_2'' . С центрами в этих точках и радиусом c проведем окружности. Их точка пересечения и будет вторым фокусом.

п 23*. Гипербола
(два урока)

Цель – ввести понятие гиперболы через ГМТ, познакомить учащихся с ее элементами и основными свойствами, научить строить гиперболу и проводить касательные к ней.

Урок 1

I. Устная работа

1) Какое ГМТ называется эллипсом?

2) Какая прямая называется касательной к эллипсу?

3) Сколько касательных можно провести к эллипсу из данной точки?

4) В чем состоит фокальное свойство эллипса?

5) Как получить эллипс из листа бумаги?

II. Новый материал

Геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется ***гиперболой***. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** гиперболы (рис. 305).

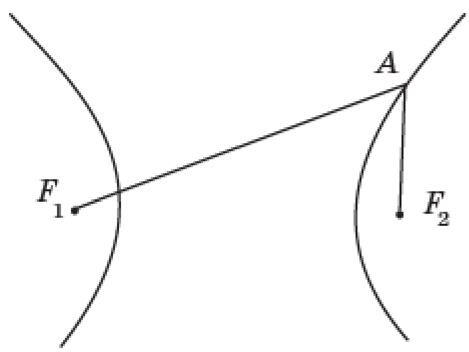


Рис. 305

Таким образом, для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется одно из равенств: $AF_1 - AF_2 = c$, $AF_2 - AF_1 = c$, где c - некоторый фиксированный отрезок.

Гипербола состоит из двух ветвей, для точек которых выполняется соответственно первое или второе равенство.

Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть меньше отрезка F_1F_2.

Для того чтобы нарисовать гиперболу, потребуется линейка, нить, длина которой меньше длины линейки, а разность длин линейки и нити была бы меньше, чем расстояние между фокусами. Прикрепим один конец нити к концу линейки, а второй конец к фокусу. Второй конец линейки совместим со вторым фокусом. Натянем нить, прижав ее к линейке острием карандаша (рис. 306). Если поворачивать линейку вокруг фокуса, прижимая к ней карандаш и оставляя нить натянутой, то карандаш будет описывать гиперболу.

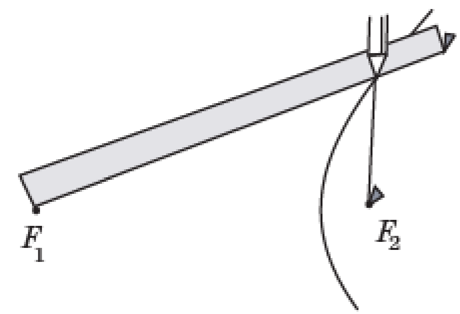


Рис. 306

Рассмотрим ветвь гиперболы, точки которой удовлетворяют равенству AF_1 - $AF_2 = c$. Она разбивает плоскость на две области – внешнюю, для точек A' которой выполняется неравенство $A'F_1 – A'F_2 < c$ и внутреннюю, для точек A'' которой выполняется неравенство $A'F_1 – A'F_2 > c$.

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат во внешней области, т.е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 – A'F_2 < c$, называется ***касательной*** к гиперболе. Точка A называется ***точкой касания***.

Аналогичным образом определяется касательная для точки, лежащей на другой ветви гиперболы.

Теорема. Пусть A - точка гиперболы с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла F_1AF_2 будет касательной к гиперболе (рис. 307).

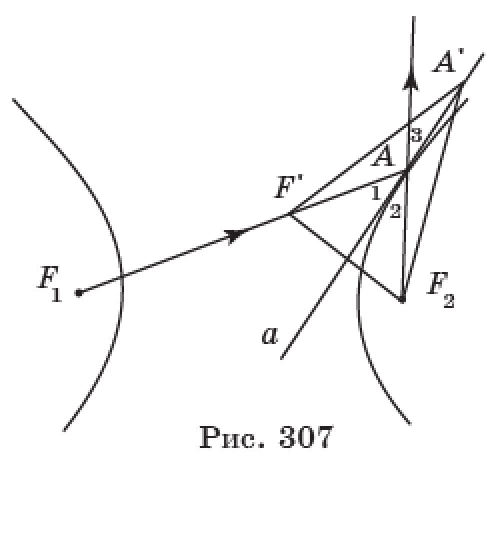


Рис. 307

Обозначим AF_1 - AF_2 = c. Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - A'F' < F_1F' = c.$$

Следовательно, прямая a является касательной.

В качестве следствия из этой теоремы докажем, что для гиперболы выполняется следующее свойство.

Фокальное свойство гиперболы. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от эллипса, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a – касательная (рис. 307). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_1AF_2. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т.е. луч света, после отражения в точке A, пойдет в направлении AF_2.

III. Закрепление нового материала

1. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и разностью радиусов.

Ответ. Гипербола.

2. С помощью циркуля постройте несколько точек гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них.

Решение. С центром в одном из данных фокусов проведем окружность, радиуса $R > c$. Затем с центром в другом фокусе проведем окружность радиуса $R - c$. Точки их пересечения будут принадлежать гиперболе.

3. Найдите геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

Ответ. а) Точки, расположенные между ветвями гиперболы; б) точки, расположенные внутри ветвей гиперболы.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 23* учебника).

2. Изготовить прибор для построения гиперболы.

3. Решить задачи.

1) Дана гипербола с фокусами F_1, F_2 и константой c. Чему равно наименьшее расстояние между точками на различных ветвях этой гиперболы? Укажите соответствующие точки.

Ответ: c. Соответствующими точками являются точки пересечения гиперболы и прямой, проходящей через фокусы.

2) Что будет происходить с гиперболой, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

Ответ. а) Ветви гиперболы сжимаются; б) ветви гиперболы расширяются.

3) Через точку A гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 проведите касательную к гиперболе.

Решение. Строим биссектрису угла F_1AF_2. Она и будет искомой касательной.

4) Даны фокусы F_1 и F_2 гиперболы. Световой луч исходит из фокуса F_1 и отражается от гиперболы в точке A. Постройте отраженный луч.

Решение. Искомым лучом будет луч с вершиной в точке A, лежащий на луче F_2A.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек есть … , называется …

2. Для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется одно из следующих равенств …

3. Фокусами гиперболы называются …

4. Для построения гиперболы можно воспользоваться …

Вариант 2

1. Гиперболой называется ГМТ, …

2. Гипербола состоит из … ветвей.

3. Для константы c должно выполняться неравенство …

4. Касательной к гиперболе называется …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал

Построение касательной к гиперболе. Пусть гипербола задана своими фокусами и константой c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к гиперболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 308).

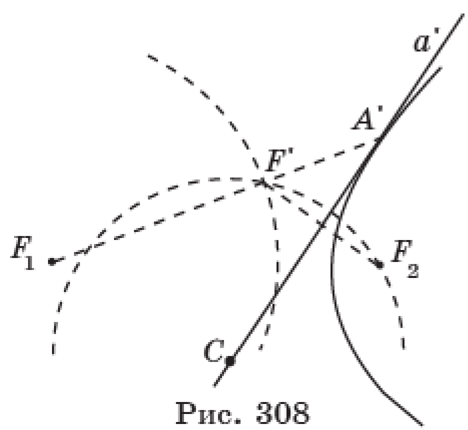


Рис. 308

Таких точек может быть две F', F'', одна или ни одной в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a', a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'CF_2$, $F''CF_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'' соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

IV. Лабораторная работа. Укажем способ получения гиперболы из листа бумаги. Вырежем из листа бумаги круг и отметим точку F на оставшейся части листа. Сложим лист так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности вырезанного круга, и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности. Сделаем так несколько раз. Линии сгибов будут касательными к гиперболе. Граница участка листа внутри этих сгибов будет иметь форму гиперболы.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 23* учебника).

2. Решить задачи.

1) Через точку вне гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них проведите касательную к этой гиперболе.

2) Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и разностью расстояний до них c найдите точки, касательные в которых перпендикулярны прямой F_1F_2.

Ответ. Точки пересечения гиперболы с прямой F_1F_2.

3) Даны два фокуса F_1, F_2 и касательная a к гиперболе. Постройте постоянную c гиперболы.

Решение. Из одного из фокусов, например F_2, опустим перпендикуляр F_2B на касательную и отложим на его продолжении отрезок BF'', равный F_2B. Тогда отрезок F_1F'' даст искомую константу c.

4) Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.

Решение. Пусть даны окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 соответственно, причем $R_1 > R_2$ и $O_1O_2 > R_1 + R_2$. Если окружность с центром в точке O и радиусом R касается данных окружностей внешним образом (рис. 309, а), то $OO_1 = R_1 + R$, $OO_2 = R_2 + R$ и, следовательно, $OO_1 - OO_2 = R_1 - R_2$, т.е. центр O окружности принадлежит ветви гиперболы с фокусами O_1 и O_2. Если же окружность с центром в точке O и радиусом R касается данных окружностей внутренним образом (рис. 309, б), то $OO_1 = R - R_1$, $OO_2 = R - R_2$ и, следовательно, $OO_2 - OO_1 = R_1 - R_2$, т.е. центр O окружности принадлежит другой ветви гиперболы с фокусами O_1 и O_2.

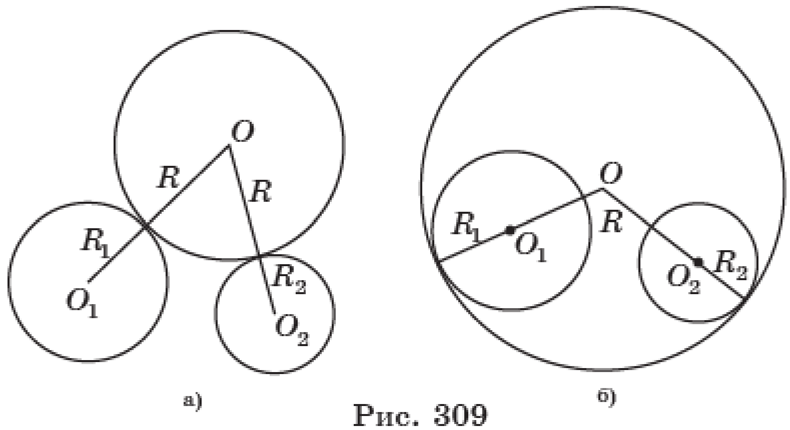


Рис. 309

5) Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами F_1, F_2 в точках пересечения имеют перпендикулярные касательные.

Решение. Если A – точка пересечения эллипса и гиперболы, то касательной к эллипсу в этой точке является биссектриса угла, смежного с углом F_1AF_2, а касательной к гиперболе является биссектриса угла F_1AF_2. Так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то и касательные перпендикулярны.

п. 24*. Графы
(два урока)

Цель – ввести понятия графа, его вершины, ребра, индекса вершины, уникурсального графа, рассмотреть исторические аспекты данной темы.

Урок 1

I. Проверка домашнего задания

Шестерых учащихся приглашаем за первые парты для опроса по теории.

Задания 1, 2

1. Дайте определения гиперболы, ее фокусов.
2. Сформулируйте и докажите теорему о касательной к гиперболе.

Задания 3, 4

1. Постройте гиперболу.
2. Сформулируйте и докажите фокальное свойство гиперболы.

Задания 5, 6

1. Дайте определение касательной к гиперболе.
2. Постройте касательную к гиперболе.

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Через точку вне гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них проведите касательную к этой гиперболе.

2) Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.

Задание для класса

1. Расстояние между фокусами гиперболы равно 6 см, константа c равна 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек гиперболы до фокусов? Укажите соответствующие точки на гиперболе.

Решение. Наименьшее расстояние от точек гиперболы до фокусов равно 1 см. Искомыми точками являются точки пересечения гиперболы с прямой, проходящей через фокусы.

К доске вызываем двух учащихся.

Первый вместе с классом начинает решать задачу 1.

Второй решает задачу 4 из домашней работы предыдущего урока.

Дополнительные вопросы

- Сформулируйте определение параболы.
- В чем заключается фокальное свойство параболы?
- В чем заключается фокальное свойство эллипса?

II. Новый материал

Фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек, называется ***плоским графом***, или просто ***графом*** (рис. 310, а). Точки называются ***вершинами***, а отрезки – ***ребрами*** графа.

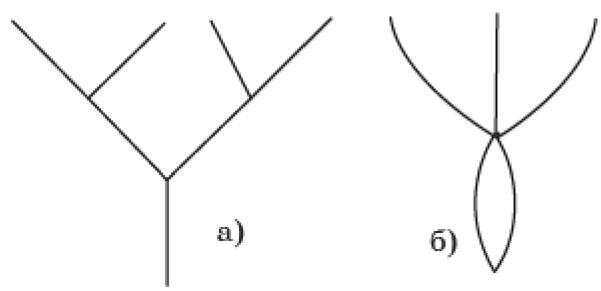


Рис. 310

Вместо отрезков в качестве ребер графов рассматриваются также кривые линии на плоскости (рис. 310, б).

Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы выставок и т. д.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад.

Одной из таких задач-головоломок была задача о кенигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707-1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

Задача. В г. Кенигсберге (ныне Калининграде) было семь мостов через реку Прегель (рис. 311), где Л - левый берег, П - правый берег, А и Б - острова).

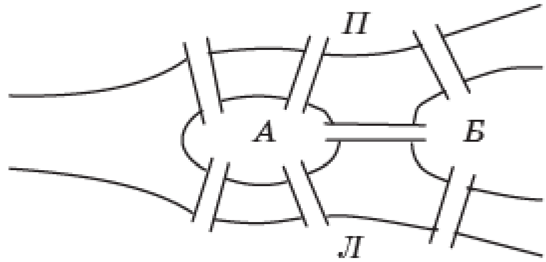


Рис. 311

Задача заключалась в следующем: можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост ровно по одному разу?

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т.е. "нарисовать одним росчерком". Такие контуры образуют так называемые ***уникурсальные графы***.

Задаче о кенигсбергских мостах Л.Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую Академию наук.

На рисунке 312 изображен граф, соответствующий задаче о кенигсбергских мостах. Требуется доказать, что этот граф является уникурсальным.

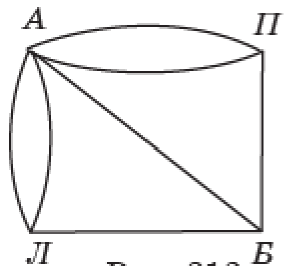


Рис. 312

Для этого рассмотрим понятие ***индекса вершины*** - число ребер графа, сходящихся в данной вершине, и докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум.

Доказательство. Действительно, если граф уникурсален и его начало не совпадает с концом, то начало и конец являются единственными вершинами нечетного индекса. Остальные вершины имеют четный индекс, так как в каждую точку мы входим и выходим из нее. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечетным индексом нет.

Приступим теперь к решению задачи. Определим четность вершин графа на рисунке 312. Вершина А имеет индекс 5, Б - 3, П - 3 и Л - 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечетного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Отсюда получаем, что нельзя пройти во время прогулки по городу по всем семи мостам, проходя по каждому только один раз.

III. Закрепление нового материала

1. Нарисуйте любой граф. Сколько у него вершин и ребер? Определите индекс каждой вершины.

2. В графе 5 вершин, каждая из которых имеет индекс 4. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.

Ответ. Р=$\frac{5\cdot 4}{2}$=10, где Р – число ребер.

3. Определите, какие графы, изображенные на рисунке 313, являются уникурсальными?

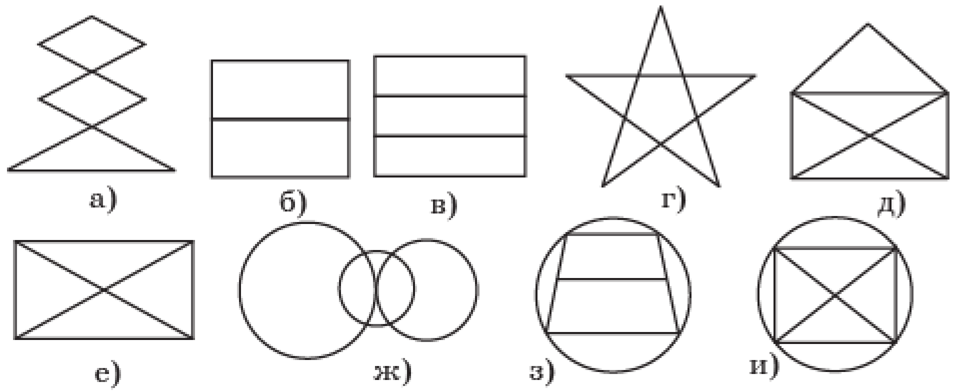


Рис. 313

Ответ. а), б), г), д), ж), з).

4. Может ли граф иметь только одну вершину нечетного индекса?

Ответ. Нет, не может.

5*. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале только один раз? Соответствующий граф приведен на рисунке 314.

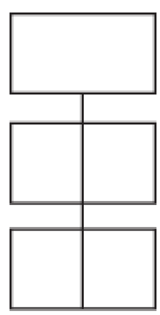


Рис. 314

Вершины графа - это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра - залы и коридоры. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

Ответ. Вход и выход нужно поместить в вершины соответствующего графа нечетного индекса (их две, индекс каждой равен 3).

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 24* учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте граф, в котором каждая вершина имеет индекс, равный: а) двум; б) трем; в) четырем.

2) Нарисуйте одним росчерком фигуры, изображенные на рисунке 315.

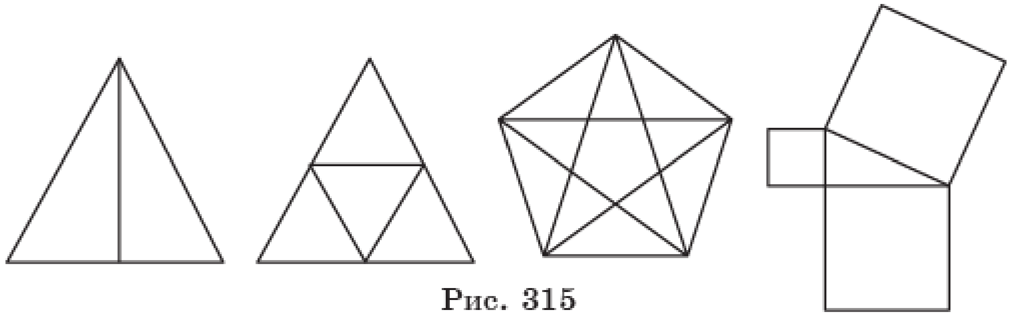


Рис. 315

3) Докажите, что во всяком графе, ребрами которого являются отрезки, найдутся, по крайней мере, две вершины одинакового индекса.

Решение. Рассмотрим вершину наибольшего индекса. Пусть ее индекс равен n. Это означает, что в этой вершине сходится n ребер. У них всего n + 1 вершина. Индексами этих вершин могут быть числа от 1 до n. Поэтому среди них обязательно найдутся вершины с одинаковыми индексами.

4) Какое наименьшее число мостов в задаче о кенигсбергских мостах придется пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?

Ответ. Один.

5)* На рисунке 316 изображен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После его смерти наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

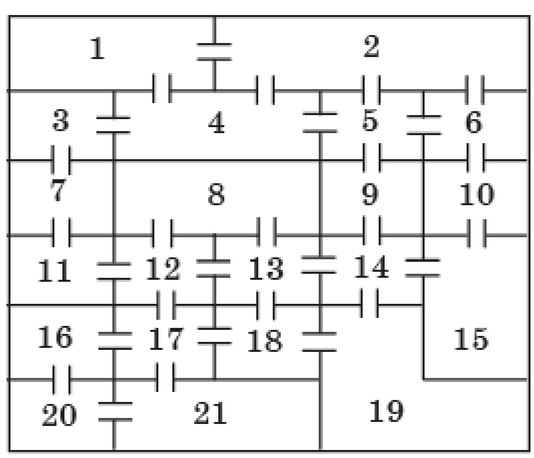


Рис. 316

Решение. Соответствующий граф имеет две вершины нечетного индекса, это вершины (комнаты) 6 и 18. Начинаем искать сокровища с 6 комнаты, а заканчиваем в 18. Итак, сокровища скрыты в 18 комнате.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Плоским графом называется …
2. Вершиной графа называется …
3. Ребрами графа могут быть …
4. Индексом вершины графа называется …
5. Если граф уникурсальный, то он содержит …
6. Задача Эйлера о кенигсбергских мостах заключается …

Вариант 2

1. Графом называется …
2. Ребрами графа называются …
3. Примерами графов могут быть …
4. Число ребер графа, сходящихся в данной вершине, называется …
5. Граф называется уникурсальным, если …
6. Задача Эйлера о кенигсбергских мостах решается с помощью …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Решение задач

1. В графе 10 вершин, каждая из которых имеет индекс 3. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.

Ответ. $P=\frac{10\cdot 3}{2}=15$.

2. Нарисуйте графы, у которых имеются вершины индексов 1, 2, 3 и 4.

3. Каким свойством должен обладать уникурсальный граф, чтобы у него не совпадали начальная и конечная точки? Нарисуйте такой граф.

Ответ. Иметь две вершины нечетного индекса.

4*. Докажите, что в любом графе сумма индексов всех его вершин - число четное, равное удвоенному числу ребер графа. Выведите из этого, что число вершин с нечетными индексами четно.

Решение. Сумма индексов всех вершин графа равна удвоенному числу его ребер, т.е. четное число. Если бы число вершин с нечетными индексами было нечетным, то сумма индексов этих вершин также была бы нечетной. Поскольку сумма индексов вершин с четными индексами четна, то сумма индексов всех вершин была бы нечетной. Противоречие.

IV. Занимательный момент

Решение задач 5* из этапов III и IV предыдущего урока.

V. Задание на дом

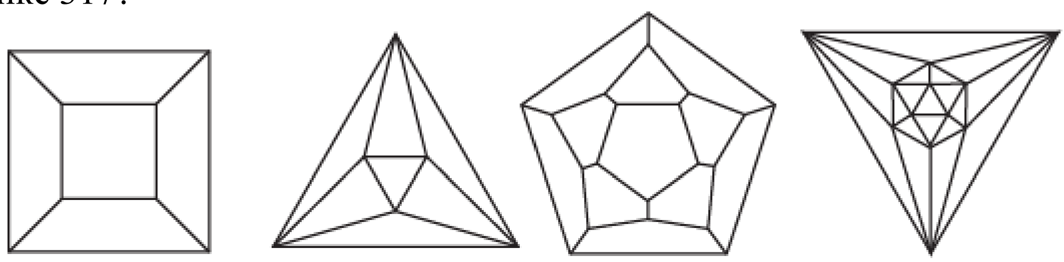
1. Повторить теорию (п. 24* учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте любой граф, имеющий 7 вершин. Сколько у него ребер? Определите индекс каждой вершины.

2) Нарисуйте уникурсальный граф: а) не имеющий вершин нечетного индекса; б) имеющий вершины нечетного индекса, определите, сколько их. Найдите число вершин и ребер графа.

3) Какое наименьшее число ребер придется обвести дважды, чтобы нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, графы, изображенные на рисунке 317?



а) б) в) г)

Рис. 317

Ответ. а) 3; б) 0; в) 9; г) 5.

4)* Возьмите карту Санкт-Петербурга и определите, можно ли прогуливаясь по городу, обойти все Дворцовые мосты ровно по одному разу?

3*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «Жизнь и творчество Л.Эйлера». (Литература: Учебник, п. 24*. Дополнительная литература: Гиндикин С.Г. Леонард Эйлер //Квант. – 1983. - № 10, № 11; Юшкевич А.П. Леонард Эйлер и математическое просвещение в России //Математика в школе. – 1983. - № 5; Яковлев А.Я. Леонард Эйлер. – М.: Просвещение, 1983).

п. 25*. Теорема Эйлера
(два урока)

Цель – познакомить учащихмя с теоремой Эйлера для многоугольников; показать ее применение для решения задач, в частности, исторической задачи «О трех домиках и трех колодцах»; ввести понятия связного графа, графа – дерева, графа – леса.

Урок 1

I. Сообщение на тему «Жизнь и творчество Л.Эйлера».

(См. задание 3* из этапа V прошлого урока.)

II. Новый материал

Еще одной задачей-головоломкой, связанной с графами и с именем Эйлера, является задача о трех домиках и трех колодцах.

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу (рис. 318)?

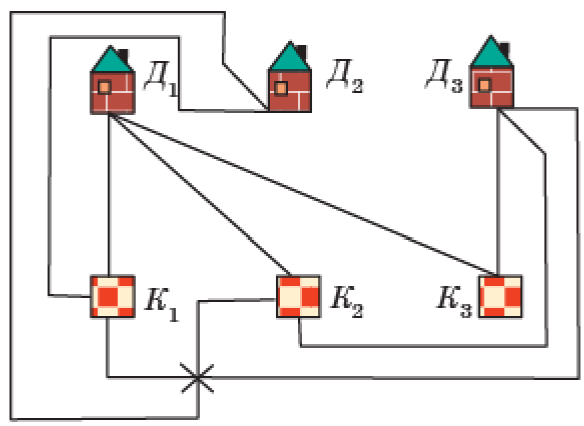


Рис. 318

Для решения этой задачи воспользуемся теоремой, доказанной Леонардом Эйлером в 1752 году.

Теорема. Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или имеют общие вершины, или имеют общие ребра, то имеет место равенство

$$В - Р + Г = 1, (*)$$

где В - общее число вершин, Р - общее число ребер, Г - число многоугольников (граней).

Доказательство. Докажем, что соотношение (*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике данного разбиения провести диагональ (рис. 319, а).

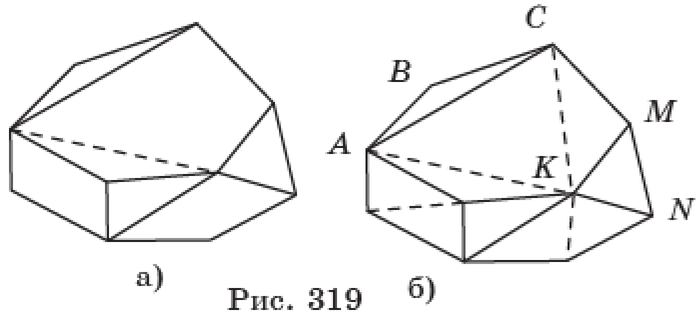


Рис. 319

Действительно, после проведения такой диагонали в новом разбиении будет В вершин, Р+1 ребер и количество многоугольников увеличится на единицу. Следовательно, имеем

$$В - (Р + 1) + (Г+1) = В – Р + Г.$$

Пользуясь этим свойством, проведем диагонали, разбивающие входящие многоугольники на треугольники, и для полученного разбиения покажем выполнимость соотношения (*) (рис. 319, б). Для этого будем последовательно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника *ABC* требуется снять два ребра, в нашем случае *AB* и *BC*;

б) для удаления треугольника *MKN* требуется снять одно ребро, в нашем случае *MN*.

В обоих случаях соотношение (*) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника граф будет состоять из В-1 вершин, Р-2 ребер и Г-1 многоугольника:

$$(В - 1) - (Р + 2) + (Г -1) = В – Р + Г.$$

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношение (*). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придем к разбиению, состоящему из одного треугольника. Для такого разбиения В = 3, Р = 3, Г = 1 и, следовательно, В - Р + Г= 1. Значит, соотношение (*) имеет место и для исходного разбиения, откуда окончательно получаем, что для данного разбиения многоугольника справедливо соотношение (*).

Заметим, что соотношение Эйлера не зависит от формы многоугольников. Многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Соотношение Эйлера при этом не изменится.

Приступим теперь к решению задачи о трех домиках и трех колодцах.

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы - точками $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 318). Каждую точкудомик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые попарно не пересекаются.

Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники. Поэтому для этого разбиения должно выполняться соотношение Эйлера В - Р + Г= 1. Добавим к рассматриваемым граням еще одну - внешнюю часть плоскости по отношению к многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В - Р + Г = 2, причем, В = 6 и Р = 9. Следовательно, Г = 5. Каждая из пяти граней имеет, по крайней мере, четыре ребра, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, то количество ребер должно быть не меньше $\frac{5\cdot4}{2}$=10, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен - нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

III. Закрепление нового материала

1. Два соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Ответ. Да.

2. Три соседа имеют два общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Ответ. Да.

3. Граф называется ***связным***, если любые две его вершины можно соединить ломаной, состоящей из ребер графа. Нарисуйте связные и несвязные графы.

Решение. На рисунке 310, а, б представлены связные графы, на рисунке 320 – несвязный.

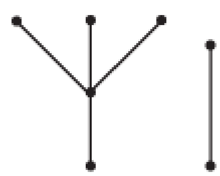


Рис. 320

4. Связный граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется ***деревом***. Нарисуйте графы, являющиеся деревьями.

Решение. На рисунке 310, а изображен граф, являющийся деревом. Граф на рисунке 310, б не является деревом.

5*. Внутри n - угольника взяты m точек. Эти точки и вершины многоугольника соединены отрезками так, что исходный многоугольник разбивается на треугольники. Докажите, что при этом число треугольников равно $n + 2m - 2$.

Решение. Число В вершин разбиения равно $n+m$. Число Р ребер разбиения равно $\frac{1}{2}$ (3Г+n). Используя соотношение Эйлера, получаем, что число Г треугольников разбиения равно $n + 2m - 2$.

IV. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 25* учебника).

2. Решить задачи.

1) Два соседа имеют четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Ответ. Да.

2) Три соседа имеют четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Ответ. Нет.

3) Докажите, что в графе, являющимся деревом, любые две вершины можно соединить только одной ломаной.

Решение. Если бы нашлись две вершины, которые можно соединить двумя ломаными, то вместе эти ломаные составляли бы замкнутую ломаную, что в графе, являющимся деревом невозможно.

4)* Многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что в каждой вершине сходится три ребра. Сколько при этом имеется вершин и граней, если число ребер равно 12?

Ответ. В=8, Г=5.

Урок 2

I. Устная работа

1) Какая фигура называется графом? Что называется: а) вершинами; б) ребрами графа?

2) В чем состоит задача Эйлера о Кенигсбергских мостах?

3) Какой граф называется уникурсальным?

4) Что такое индекс вершины графа?

5) Что можно сказать об индексах вершин уникурсального графа?

6) В чем состоит задача Эйлера о трех домиках и трех колодцах?

7) Сформулируйте теорему Эйлера о числе вершин, ребер и граней разбиения многоугольника.

8) Какой граф называется: а) плоским; б) связным; в) деревом?

II. Решение задач

1. Нарисуйте граф, имеющий 5 вершин, который: а) является связным; б) не является связным.

2. Найдите число ребер дерева, у которого В вершин.

Ответ. В-1.

3. Граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется ***лесом*** (рис. 320). Пусть лес состоит из n деревьев и имеет В вершин и Р ребер. Чему равно В-Р?

Ответ. В-Р= n.

4*. Многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что в каждой вершине сходится три ребра. Сколько при этом имеется вершин и граней, если число ребер равно 6?

Ответ. В=4, Г=3.

III. Занимательный момент

Задачи из домашнего задания предыдущего урока (см. этап IV).

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 25* учебника).

2. Решить задачи.

1) Сколько ребер нужно удалить из связного графа, имеющего Р ребер и В вершин, чтобы получить дерево с теми же вершинами?

Ответ. Р-(В-1).

2) Лес состоит из k деревьев и имеет В вершин. Найдите число ребер такого графа.

Ответ. В-k.

3) Внутри треугольника взято n точек. Они соединены друг с другом и вершинами треугольника. Докажите, что число треугольников в образовавшемся графе четное.

Решение. Пусть Г – число треугольников, тогда 2·Р=3·Г, откуда Г=2· $\frac{P}{3}$, т.е. Г – четное число.

4)* Нарисуйте графы, для которых В - Р равно: а) 0; б) 1; в) 2; г) -1; д) -2.

п. 26*. Проблема четырех красок
(два урока)

Цель – познакомить учащихся с историческими аспектами возникновения и развития знаменитой гипотезы о том, что любую карту на плоскости можно окрасить не более, чем в четыре цвета, идеями ее решения; разобрать теорему о двух красках, научиться применять ее при решении задач.

Урок 1

I. История проблемы четырех красок

Еще одной проблемой, связанной с многоугольниками и графами является проблема четырех красок, имеющая почти 150-летнюю историю.

Задача заключается в том, чтобы раскрасить данную географическую карту (рис. 321, а) так, чтобы пограничные страны были окрашены в разные цвета (непограничные страны можно окрашивать одним цветом), использовав при этом наименьшее число красок.

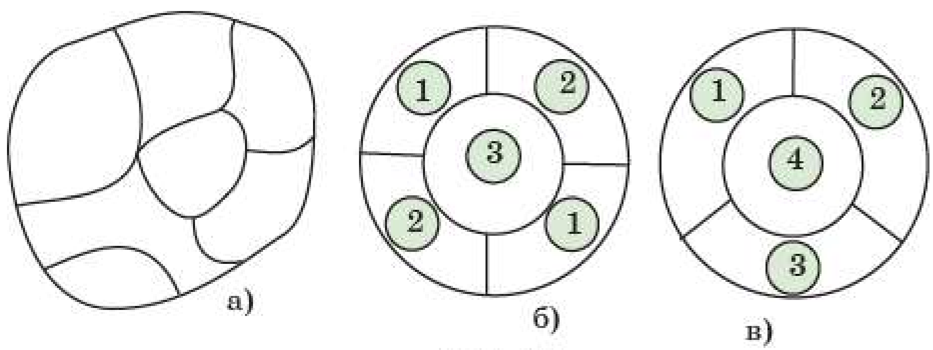


Рис. 321

На рисунке 321, б изображена карта, для раскраски которой требуется три цвета. На рисунке 321, в изображена карта, для раскраски которой трех цветов недостаточно и требуется четыре цвета.

В 1850 году шотландский физик Фредерик Гутри обратил внимание на то, что задачи раскрашивания карт очень популярны среди студентов-математиков в Лондоне, а сформулировал проблему четырех красок его брат Фрэнсис Гутри, который, раскрасив карту графств Англии четырьмя цветами, выдвинул гипотезу о том, что этого количества цветов достаточно для раскраски любой карты. Он привлек к проблеме внимание своего преподавателя математики А.Де Моргана, а тот сообщил о ней своему другу В.Гамильтону и тем самым способствовал ее широкому распространению.

Однако годом рождения проблемы четырех красок считается 1878 год (в некоторых изданиях указывается 1879). Именно тогда на одном из заседаний

Британского географического общества выдающийся английский математик А.Кэли четко сформулировал поставленную задачу: "Доказать, что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками". Раскраска карты называется правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета. Именно с этого момента проблема привлекла к себе внимание многих крупных математиков.

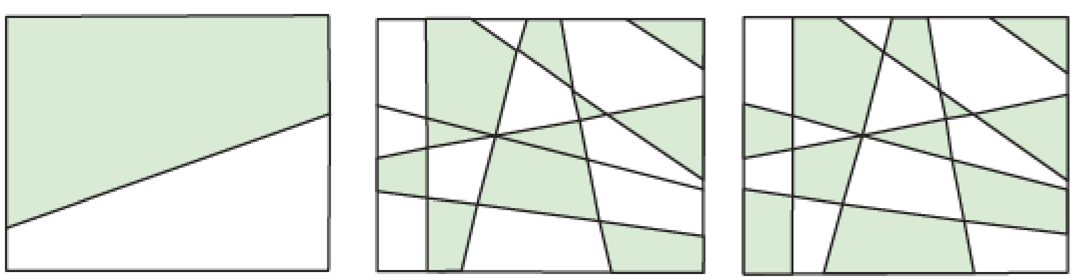
В 1890 году английский математик П.Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Однако долгое время проблема четырех красок не поддавалась решению. В 1968 году американские математики Оре и Стемпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время для решения этой проблемы существенно используются компьютеры, что связано с выполнением огромного количества вычислений. В 1976 году американскими учеными К.Аппелем и В.Хакеном было получено первое машинное решение. С помощью машины они просматривали различные типы карт, и для каждого из них машина решала, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается в четыре цвета. Учеными было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: "Нет", - что и позволило объявить о машинном решении проблемы четырех красок.

II. Новый материал

Теорема. (О двух красках.) Всякую карту, образованную прямыми, можно раскрасить в два цвета.

Доказательство. Ясно, что карту, образованную одной прямой можно раскрасить в два цвета (рис. 322, а).



а) б) в)

Рис. 322

Докажем, что если карта, образованная прямыми, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из нее добавлением новой прямой, также может быть раскрашена в два цвета (рис. 322, б). Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причем к самой прямой примыкают пары областей, закрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты (рис. 322, в). Поскольку любую карту, образованную прямыми, можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета.

III. Закрепление нового материала

1. Раскрасьте карту, изображенную на рисунке 321, а. Какое минимальное число красок для этого потребуется?

Ответ. Три.

2. Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими *n* перегородок (рис. 321, б, в)?

Ответ. В первом случае достаточно трех красок (*n* четно), во втором – четырех (*n* нечетно).

3. Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить поверхность тетраэдра?

Ответ. Четыре краски.

4*. Докажите, что всевозможные карты на плоскости, образованные окружностями, могут быть раскрашены в два цвета.

Решение. Доказательство аналоично доказательству теоремы о двух красках. Карту, образованную одной окружностью, можно раскрасить в два цвета. Докажем, что если карта, образованная окружностями, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из нее добавлением еще одной окружности, также может быть раскрашена в два цвета. Действительно, новая окружность делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причем к самой окружности примыкают пары областей, закрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты. Поскольку любую карту, образованную окружностями, можно получить последовательным добавлением окружностей, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 26* учебника).

2. Решить задачи.

1) Какое минимальное число красок потребуется, чтобы раскрасить карту, образованную тремя концентрическими окружностями?

Ответ. Две краски.

2) Какое минимальное число красок потребуется, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими 4 перегородки (рис. 323)?

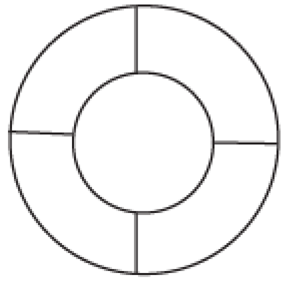


Рис. 323

Ответ. Три краски.

3) Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить паркет, составленный из квадратов и треугольников, изображенный на рисунке 324?

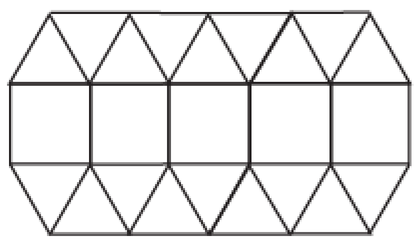


Рис. 324

Ответ. Три краски.

4)* Исследуйте вопрос о том, какие свойства прямых и окружностей используются при раскрашивании карт двумя цветами. Можно ли раскрасить двумя цветами карту, образованную: а) параболами; б) эллипсами?

Решение. Единственным свойством кривой, которое используется при доказательстве является то, что эта кривая разбивают плоскость или рассматриваемую часть плоскости на две части, общей границей которых является данная кривая. Поэтому любую карту, образованную параболами или эллипсами можно раскрасить в два цвета.

5)* Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников, так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Ответ. Тетраэдр - 4 краски; гексаэдр (куб) - 3; октаэдр - 2; додекаэдр - 4; икосаэдр - 4.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Проблема четырех красок возникла в … (когда).
2. Пограничными на карте называются страны …
3. В XIX веке с решением проблемы четырех красок связаны имена следующих ученых: …
4. Доказано, что любую карту на плоскости можно окрасить …
5. Машинное решение проблемы четырех красок заключается …

Вариант 2

1. Проблема четырех красок возникла в … (где).
2. Проблема четырех красок заключается в том, что …
3. В XX веке с решением проблемы четырех красок связаны имена следующих ученых: …
4. Существуют карты на плоскости, которые можно окрасить в три цвета, например, …
5. Машинное решение проблемы четырех красок заключается …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Решение задач

1. Какое наименьшее число красок нужно взять, чтобы окрасить карту на плоскости, образованную четырьмя пересекающимися прямыми?

Ответ. Две краски.

2. Какое минимальное число красок потребуется, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими 5 перегородок (рис. 325)?

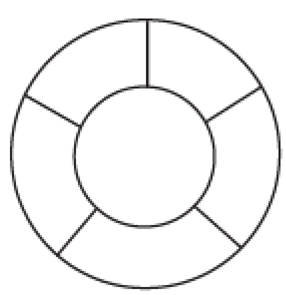


Рис. 325

Ответ. Четыре краски.

3. Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить паркет, составленный из квадратов и правильных восьмиугольников, изображенный на рисунке 326?

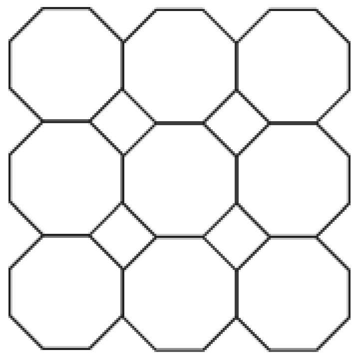


Рис. 326

Ответ. Три краски.

4. Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить поверхность куба?

Ответ. Три краски.

5*. Докажите, что если карту, заполняющую всю плоскость, можно раскрасить в два цвета, то она имеет вершины только четного индекса.

Решение. Если бы одна из вершин была бы нечетного индекса, то вокруг нее располагалось бы нечетное число стран. Для их правильной раскраски потребовалось бы три краски.

IV. Занимательный момент

Задачи 4* и 5* домашнего задания предыдущего урока (см. этап IV).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 26* учебника).

2. Решить задачи.

1) Какое минимальное число красок потребуется, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими $2n$ перегородок?

Ответ. Потребуется три краски.

2) Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить паркет, составленный из квадратов и правильных треугольников, изображенный на рисунке 327?

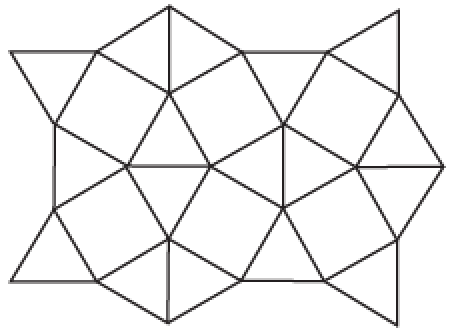


Рис. 327

Ответ. Три краски.

3) Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить поверхность додекаэдра?

Ответ. Нужно четыре краски.

4)* На рисунке 328 изображена карта, раскрашенная в два цвета, полученная разбиением шестиугольника на треугольники. Причем треугольники, примыкающие к сторонам шестиугольника, закрашены в один цвет. Докажите, что карту, полученную разбиением 10-угольника на треугольники, нельзя раскрасить в два цвета так, чтобы треугольники, примыкающие к сторонам 10-угольника были закрашены в один цвет.

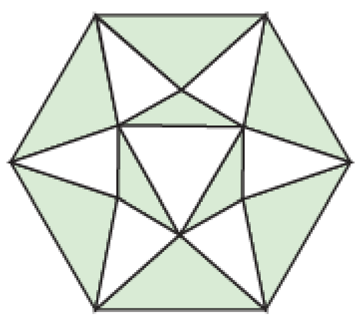


Рис. 328

Решение. Предположим, что мы раскрасили карту в черный и белый цвета. Обозначим n - число сторон черных треугольников, m - число сторон белых треугольников. Так как каждая сторона черного треугольника (кроме сторон 10-угольника) является также и стороной белого треугольника, то n-m=10. С другой стороны, оба числа n и m делятся на три. Получили противоречие.

О Т В Е Т Ы

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. 18 см, 6 см.
2. Два угла по 30° и два угла по 150°.
3. Шестиугольник.

4*. n-3.

Вариант 2

1. 15 см, 21 см.
2. Два угла по 60° и два угла по 120°.
3. Семиугольник.

4*. n-2.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

2. 10 см, 24 см, 24 см.

4*. Нет, могут не равняться соответствующие углы четырехугольников.

Вариант 2

2. 24 см, 36 см, 36 см.

4*. Да, четырехугольники равны, лишнее условие $\angle D = \angle D_1$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Да.
2. $\angle P < \angle H < \angle O$.
3. 5 см.
4. Если к третьей стороне прилегает тупой угол.

5*. Обратимся к рисунку 186. $\Delta ADE = \Delta BDC$ (по первому признаку равенства треугольников, по двум сторонам и углу между ними). Значит, $BC = AE = a$. В треугольнике ACE $CE < a+b$ (неравенство треугольника). Следовательно, $CD < \frac{a+b}{2}$.

Вариант 2

1. Нет.
2. $\angle M > \angle K = \angle N$.
3. 20 см.
4. Тупоугольным.

5*. Из треугольника ABD имеем: $AB+BD > AD$ (неравенство треугольника). Поэтому $P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + BD + DC + AC > AD + DC + AC = P_{ADC}$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют ни одной общей точки.

2. а) Не имеют ни одной общей точки, одна лежит вне другой; б) пересекаются.

3. 14 см и 8 см.

4. 12,5 см и 5,5 см.

5*. Окружность с центром в центре данной окружности и радиусом, равным расстоянию от центра данной окружности до вершины данного угла.

Вариант 2

1. Обозначим расстояние от центра данной окружности до данной прямой через d. а) $d > 5$ см; б) $d < 5$ см; в) $d = 5$ см.

2. а) Пересекаются; б) не имеют ни одной общей точки, одна лежит внутри другой.

3. 6 см и 18 см.

4. 12 см и 28 см.

5*. а) 4; б) 8; в) 14.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Окр.(M; 5 см), где M - данная точка.

2. Построить середину любой стороны треугольника и соединить ее с противоположной вершиной.

3. Строим отрезок, равный данному катету, и от его концов в одну полуплоскость откладываем углы, равные прямому и данному. Точка, где пересекутся соответствующие стороны углов, будет третьей вершиной искомого треугольника.

4. Сначала строим прямоугольный треугольник MKH (по катету и прилежащему острому углу, см. предыдущую задачу), у которого дан отрезок MH, $\angle MHK=90^\circ$, $\angle KMH$ равен половине данного угла M. Затем откладываем на прямой HK отрезок $HL=HK$, треугольник KLM - искомый.

5*. Пусть дан угол AOB. На его сторонах откладываем равные отрезки, $OE=OF$, это можно сделать с помощью картонного треугольника: отложить его сторону. В точках E и F восстанавливаем к соответствующим сторонам угла перпендикуляры, это можно сделать, перегнув картонный треугольник пополам, т.е. совместив друг с другом любые две его вершины. Точку, где пересеклись перпендикуляры назовем H. OH – искомая биссектриса угла AOB. Действительно, $\Delta AOH=\Delta BOH$ (прямоугольные, равны по катету и гипотенузе), значит, $\angle AOH=\angle BOH$.

Вариант 2

1. Биссектриса данного угла.

2. Из любой вершины треугольника опускаем перпендикуляр на противоположную сторону.

3. Строим прямой угол, назовем его O. На одной из его сторон от вершины O откладываем данный отрезок OA, равный данному катету. Проводим окружность с центром в точке A и радиусом, равным данной гипотенузе. Точку пересечения окружности со второй стороной угла назовем B. Треугольник AOB – искомый.

4. Берем данный отрезок EG и на его концах в одну полуплоскость откладываем углы, равные углу E. Точку пересечения их соответствующих сторон обозначим F. Треугольник EFG – искомый, у него $\angle E=\angle G$, значит, он равнобедренный с основанием EG.

5*. Перегнем данный картонный треугольник по его высоте, для этого нужно совместить друг с другом любые две его вершины. Теперь вершину полученного прямого угла совместим с данной точкой, половину стороны треугольника совместим с данной прямой и обведем высоту, получим искомый перпендикуляр.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

С.