

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
2024



УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

Смирнова И. М.

С50 Геометрия. 7 класс : учебное пособие для общеобразовательных организаций / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Мнемозина, 2024. — 191 с. : ил.

ISBN 978-5-346-05196-1

Учебное пособие написано в соответствии с требованиями ФГОС 2021 г., Федеральной рабочей программы ООО и Примерной рабочей программы ООО по математике. Оно может быть использовано для изучения геометрии как на базовом, так и на углублённом уровне. Данное пособие является переработанным вариантом учебника «Геометрия. 7—9 классы» и содержит главы этого учебника, относящиеся к курсу 7 класса. Помимо основного материала, в него включены вопросы истории геометрии, научно-популярный материал, задачи с практическим содержанием и др.

**УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721**

ISBN 978-5-346-05196-1

© «Мнемозина», 2024
© Оформление. «Мнемозина», 2024
Все права защищены

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия — наука, изучающая формы, размеры и взаимное расположение фигур. Она возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. С древних времён люди сталкивались с необходимостью находить расстояния между предметами, определять размеры участков земли, ориентироваться по расположению звёзд на небе и т. п.

Слово *геометрия* — греческое, оно означает «землемерие» (*гео* — земля, *метрео* — измеряю).

Геометрия состоит из двух разделов: планиметрии и стереометрии.

Планиметрия — средневековый термин, первая часть которого — «плани» — происходит от латинского слова «плоскость», а вторая — «метрия» — от греческого «мерить», т. е. буквально планиметрия означает «плоскомерие». В планиметрии изучаются плоские фигуры, т. е. расположенные в одной плоскости.

Стереометрия — греческое слово, составленное из «стерео» — тело — и «метрео» — измеряю. Таким образом, стереометрия — это «теломерие». В стереометрии изучаются неплоские фигуры, т. е. не лежащие в одной плоскости. Чаще их называют пространственными.

О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до нашей эры древнегреческий учёный Геродот (V в. до н. э.) писал следующее: «Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, насколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

При строительстве различных сооружений необходимо было рассчитывать, сколько материала пойдёт на постройку,

вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так, египетские пирамиды, сооружённые за две, три и четыре тысячи лет до нашей эры, поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие геометрические положения и расчёты. Одна из самых известных и больших пирамид — пирамида Хеопса (XXVIII в. до н. э.). Её высота достигает 146,5 м, а основанием служит квадрат, сторона которого равна 233 м. Это сооружение, сотворённое человеком, считалось самым высоким на Земле вплоть до XIX века.

Развитие торговли и мореплавания требовало умения ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времён года, уметь определять своё местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направление движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звёздами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке — астрономии.

Начиная с VII века до нашей эры в Древней Греции создаются так называемые философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Всё большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства, исходя из некоторого перечня свойств, принимаемых без доказательства и называемых аксиомами.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI—V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора.

Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма (рис. 1). В переводе на язык математики пентаграмма — правильный невыпуклый, или звёздчатый, пятиугольник, который можно получить из выпуклого правильного пятиугольника путём проведения его диагоналей.

Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов. Вот что мы находим у Гёте в «Фаусте»:

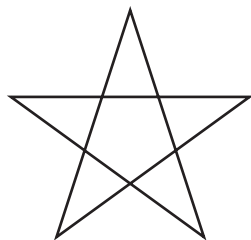


Рис. 1

Мефистофель:

Нет, трудновато выйти мне теперь,
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

Фауст:

Не пентаграмма ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путём впросак попался?

Мефистофель:

Изволили её вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей, — и я свободно мог вскочить.

Объяснение устройства мира пифагорейцы тесно связывали с геометрией. Так, выделяя первоосновы бытия, они приписывали их атомам форму правильных многогранников, а именно: атомам огня — форму тетраэдра (рис. 2, а), земли — гексаэдра (куба, рис. 2, б), воздуха — октаэдра (рис. 2, в), воды — икосаэдра (рис. 2, г). Всей Вселенной приписывалась форма додекаэдра (рис. 2, д). В названиях этих многогранников указывается число граней (от греч. *эдра* — грань): *тетра* — четыре, *гекса* — шесть, *окто* — восемь, *икоси* — двадцать, *додека* — двенадцать.

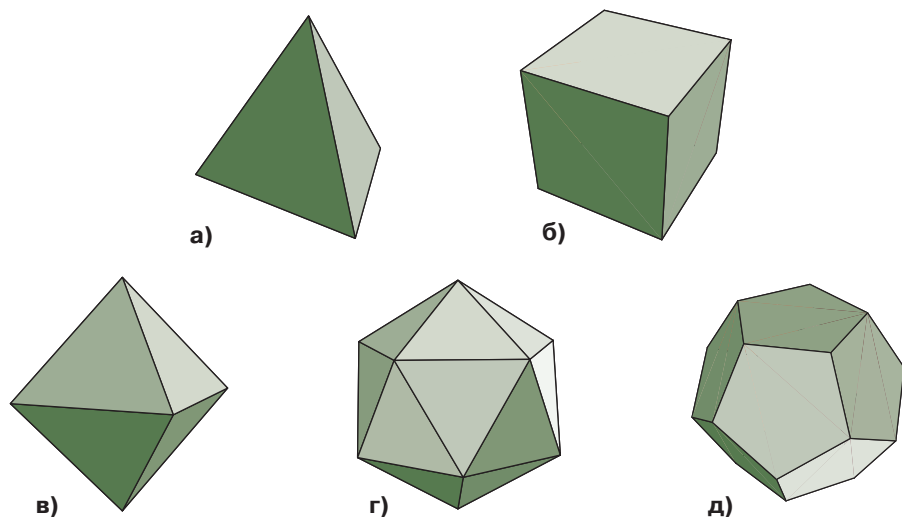


Рис. 2

Более поздняя философская школа — александрийская — интересна тем, что дала миру знаменитого учёного Евклида, который жил около 300 года до нашей эры. К сожалению, о жизни его мало известно. В одном из своих сочинений математик Папп (III в. н. э.) изображает его как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм. Насколько серьёзно и строго он относился к изучению математики, можно судить по следующему известному рассказу. Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его «Начала». Евклид на это ответил: «В геометрии нет царского пути».

Именно «Начала» создали славу Евклиду. В них впервые было представлено стройное аксиоматическое строение геометрии. На протяжении около двух тысячелетий этот труд остаётся основой изучения систематического курса геометрии.

В последние столетия возникли и развивались новые направления геометрии, среди которых: геометрия Лобачевского, топология, теория графов и др. Появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволяющие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Геометрия широко используется в других науках: физике, химии, биологии, экономике и др.

Геометрия, как ни один другой предмет, нужна каждому человеку, поскольку именно она даёт необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения различных фигур, что позволяет человеку правильно ориентироваться в окружающем мире. С другой стороны, геометрия даёт метод научного познания, способствует развитию мышления, формирует навыки дедуктивных рассуждений.

Помимо этого, изучение геометрии вырабатывает необходимые практические навыки в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длины, величины угла, площади, объёма и др.).

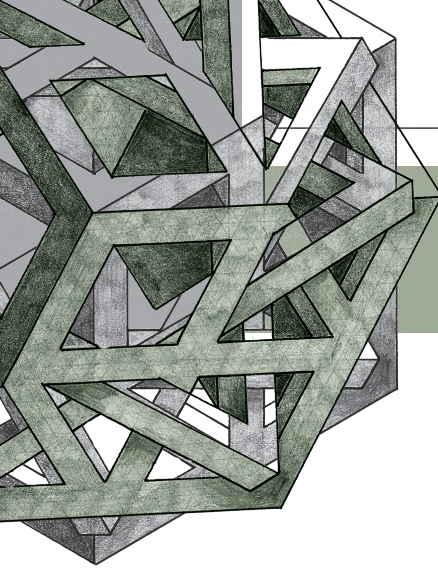
Кроме сказанного, геометрия обладает интересным содержанием, имеет богатую историю, яркие приложения, она занимательна, изучает красивые объекты. Всё это постепенно будет раскрываться и представляться по мере изучения курса геометрии.

Материал настоящего учебного пособия разбит на параграфы, которые содержат теоретический материал, исторические сведения и задачи для решения в классе и для самостоятельной работы. Устные задачи выделены цветом (■).

Параграфы, теоремы и задачи, помеченные звёздочкой (*), относятся к дополнительному материалу, имеют исследовательский характер и могут быть использованы при проведении курсов по выбору и организации проектной и исследовательской деятельности.

Для дополнительных занятий и подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ), помимо данного пособия, рекомендуем использовать материалы авторского сайта www.vasmirnov.ru

Желаем успехов в изучении геометрии!



НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ

§ 1 Основные геометрические фигуры

Основными геометрическими фигурами являются *точка*, *прямая* и *плоскость*.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Древнегреческий учёный Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге «Начала» определял точку как то, что не имеет частей.

Точки изображаются остро отточенным карандашом или ручкой на листе бумаги, мелом на доске и т. п. Чем острее карандаш, тем лучше это изображение. Однако изображение точки только приближённое, потому что точка, нарисованная карандашом, всегда имеет хоть и очень маленькие, но ненулевые размеры, а геометрическая точка размеров не имеет.

Точки обозначаются прописными латинскими буквами A , B , C , ..., A_1 , B_2 , C_3 , ..., A' , B'' , C''' , ... (рис. 1.1).

• C

Рис. 1.1

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки. Хотя изображения прямых ограничены, их следует

A •

• B

представлять себе неограниченно продолженными в обе стороны.

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами $a, b, c, \dots, a_1, b_2, c_3, \dots, a', b'', c''', \dots$ или двумя прописными латинскими буквами $AB, CD, \dots, A_1B_1, C_2D_2, \dots, A'B', C''D'', \dots$ (рис. 1.2).

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точка, прямая и плоскость являются основными геометрическими фигурами в том смысле, что остальные фигуры определяются с их помощью. Сами же основные фигуры не определяются, для них указываются свойства, которым они удовлетворяют. Эти свойства называются **аксиомами**, что в переводе с греческого языка означает «достойное признания, не вызывающее сомнения».

Идея аксиоматического построения геометрии была предложена и реализована Евклидом. Она состоит в том, что если мы не можем определить, что представляет собой исследуемый объект, то следует определить его свойства, выделить существенные признаки объекта и абстрагироваться от несущественных.

Например, фигуры шахматного слона могут быть сделаны из разных материалов, иметь разную форму, быть непохожими на настоящих слонов. Все эти признаки не являются для них существенными. Существенными являются правила (аксиомы), по которым они могут передвигаться по шахматной доске.

Каждая наука имеет свои определённые правила. В жизни также приходится иметь дело с теми или иными правилами. Например, различные игры основываются на правилах. При работе с компьютером руководствуются определёнными правилами. Свод законов, регулирующих деятельность человека в той или иной области, также представляет собой набор правил.

Аналогичным образом аксиомы геометрии можно рассматривать как правила игры в геометрию. Используя аксиомы, путём логических рассуждений выводятся (доказываются) свойства геометрических фигур, называемые **теоремами**. Особую роль при этом играют логические рассуждения — **доказательства**. Несмотря на то что некоторые свойства геометрических фигур могут показаться вытекающими из рисун-

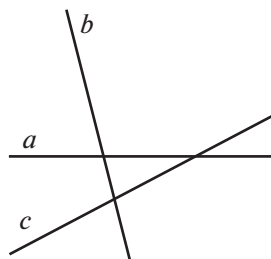


Рис. 1.2

ка, тем не менее они нуждаются в доказательстве. Рисунок помогает найти доказательство, но не заменяет его.

Раздел геометрии, изучающий свойства геометрических фигур на плоскости (плоских фигур), называется **планиметрией**. Мы начнём изучение геометрии с этого раздела.

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении точек и прямых на плоскости.

Точка может принадлежать данной прямой, в этом случае говорят также, что прямая проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что прямая не проходит через точку (рис. 1.3).

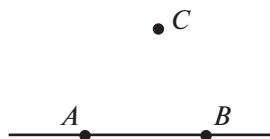


Рис. 1.3

Если две прямые имеют одну общую точку, то говорят, что прямые **пересекаются** в этой точке (рис. 1.4).

Если две прямые не имеют общих точек, то говорят, что прямые **параллельны** (рис. 1.5).

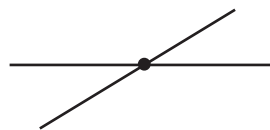


Рис. 1.4

В качестве первых аксиом принимаются следующие свойства.

Через любые две точки проходит единственная прямая.

Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, ей не принадлежащие.



Рис. 1.5

ПРИМЕР 1. Провести четыре прямые так, чтобы каждые две прямые пересекались и никакие три прямые не пересекались в одной точке.

Решение. Показано на рисунке 1.6.

ПРИМЕР 2. Сколько прямых можно провести через различные пары из: а) трёх точек; б) четырёх точек; в) пяти точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Решение. Непосредственным подсчётом убеждаемся, что: через различные пары из трёх точек проходят три пря-

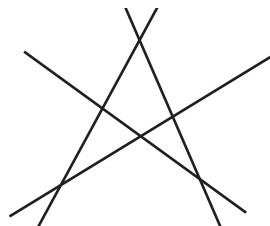


Рис. 1.6

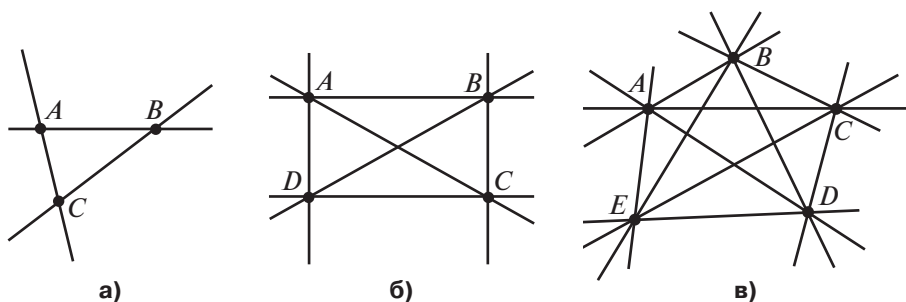


Рис. 1.7

мые (рис. 1.7, а на с. 11); через различные пары из четырёх точек проходят шесть прямых (рис. 1.7, б на с. 11); через различные пары из пяти точек проходят десять прямых (рис. 1.7, в на с. 11).

Вопросы

1. Перечислите основные геометрические фигуры.
2. Как изображаются и обозначаются: а) точки; б) прямые?
3. Какие две прямые называются пересекающимися?
4. Какие две прямые называются параллельными?
5. Что в переводе с греческого языка означает слово «аксиома»?
6. Сколько прямых проходит через две точки?

Задачи

1. Сколько общих точек могут иметь две пересекающиеся прямые?
2. Могут ли две прямые иметь две общие точки?
3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три прямые?
4. Сколько прямых может проходить через различные пары из: а) трёх точек; б) четырёх точек? Рассмотрите возможные случаи.
5. Сколько прямых изображено на рисунке 1.8? Сколько у них точек попарных пересечений?
6. Пусть точки A, B, C принадлежат одной прямой и точки B, C, D принадлежат другой прямой. Что можно сказать о всех точках A, B, C, D ?

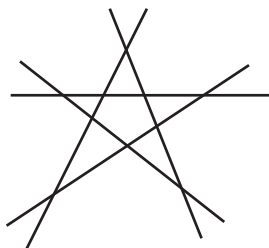


Рис. 1.8

7. Пусть прямые a , b , c пересекаются в одной точке и прямые b , c , d пересекаются в одной точке. Что можно сказать о всех прямых a , b , c , d ?
8. Проведите прямую b и отметьте точки A , B , C , ей принадлежащие, и точки E , F , G , ей не принадлежащие. Сделайте соответствующие записи.
9. Проведите две пересекающиеся прямые. Отметьте точку: а) их пересечения; б) на одной из них, не принадлежащую другой.
10. Изобразите прямую и три точки, две из которых принадлежат прямой, а третья нет.
11. Проведите три прямые, пересекающиеся в одной точке.
12. Проведите три прямые, не пересекающиеся в одной точке, каждые две из которых пересекаются.
13. По рисунку 1.9 запишите точки, принадлежащие и не принадлежащие прямым a и b .
14. Изобразите три точки, принадлежащие одной прямой, и четвёртую точку, не принадлежащую этой прямой. Сколько всего прямых проходит через различные пары из этих точек?
- *15. Даны три прямые. На каждой прямой взяты две точки. Сколько всего точек? Рассмотрите различные случаи.
- *16. Сколько прямых можно провести через различные пары из n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?
- *17. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) три прямые; б) четыре прямые; в) пять прямых; г) n прямых?
- *18. Изобразите четыре прямые и четыре точки так, чтобы на каждой прямой было ровно две точки.
- *19. Изобразите пять прямых и десять точек так, чтобы на каждой прямой было ровно четыре точки.
- *20. Могут ли семь прямых попарно пересекаться в: а) семи точках; б) восьми точках?

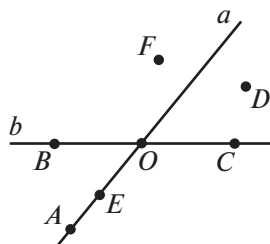


Рис. 1.9

§2 Отрезок и луч

Отметим на прямой какую-нибудь точку C . Она разбивает прямую на две части. Точки A и B на рисунке 2.1 принадлежат разным частям. В этом случае говорят, что точки A и B *лежат по разные стороны* от точки C , а точка C *лежит между* точками A и B . Точки B и D принадлежат одной части. В этом случае говорят, что точки B и D *лежат по одну сторону* от точки C .



Рис. 2.1

В качестве аксиомы взаимного расположения точек на прямой принимается следующее свойство.

Каждая точка на прямой разбивает эту прямую на две части так, что точки из разных частей лежат по разные стороны от данной точки, а точки из одной части лежат по одну сторону от данной точки.

Часть прямой, состоящая из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком*. При этом сами данные точки называются *концами отрезка*.

Отрезок обозначается указанием его концов. Например, AB , C_1D_1 (рис. 2.2) и т. д. Там, где это не вызывает недоразумений, будем обозначать отрезки строчными латинскими буквами. Например, a , b , c и т. д.

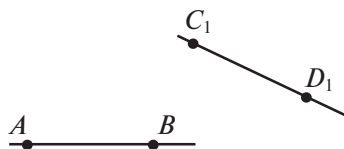


Рис. 2.2

Лучом, или *полупрямой*, называется часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих от неё по одну сторону. При этом сама данная точка называется *началом* или *вершиной луча*.

Для обозначения лучей используются пары прописных латинских букв, например AB , первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку, принадлежащую лучу (рис. 2.3). Там, где это не вызывает недоразумений, будем обозначать лучи строчными латинскими буквами. Например, a , b , c и т. д.

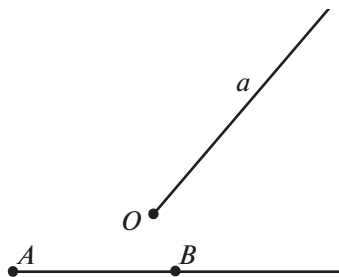


Рис. 2.3

Заметим, что обозначение отрезка совпадает с обозначением луча. Поэтому, чтобы не возникало недоразумений, следует оговаривать, о чём идёт речь в том или ином случае — луче или отрезке.

Одной из основных операций, которую можно производить с отрезками, является операция **откладывания данного отрезка** на данном луче от его вершины. Получающийся при этом отрезок называется **равным** исходному отрезку.

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

На любом луче от его начала можно отложить только один отрезок, равный данному.

Равенство отрезков AB и A_1B_1 записывается в виде $AB = A_1B_1$. Оно означает, что если один из этих отрезков, например AB , отложить на луче A_1B_1 от точки A_1 , то отрезок AB при этом совместится с отрезком A_1B_1 (рис. 2.4, а).

Если при откладывании отрезка AB на луче A_1B_1 от точки A_1 точка B переходит в точку B' , лежащую между точками A_1 и B_1 , то говорят, что отрезок AB **меньше** отрезка A_1B_1 , и обозначают $AB < A_1B_1$. Говорят также, что отрезок A_1B_1 **больше** отрезка AB , и обозначают $A_1B_1 > AB$ (рис. 2.4, б).

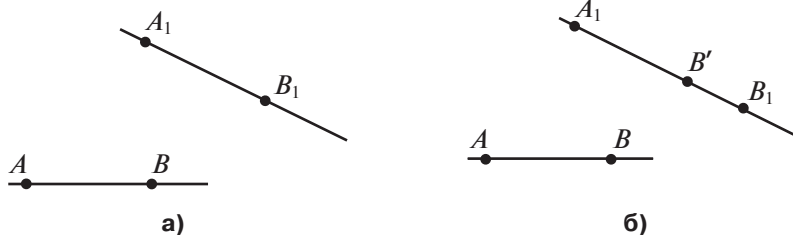


Рис. 2.4

Операция откладывания отрезков позволяет определить сложение и вычитание отрезков. А именно, чтобы сложить отрезки AB и DE , выберем какой-нибудь луч с вершиной A_1 и отложим от его начала отрезок A_1B_1 , равный AB (рис. 2.5). Затем от точки B_1 в ту же сторону отложим отрезок B_1C_1 , равный отрезку DE . Отрезок A_1C_1 будет искомой суммой отрезков AB и DE , обозначается $A_1C_1 = AB + DE$.

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего отрезка меньшего.

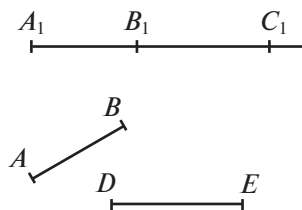


Рис. 2.5

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

Отрезки, полученные сложением или вычитанием соответственно равных отрезков, равны.

Можно доказать, что для сложения отрезков выполняются свойства, аналогичные свойствам сложения положительных чисел:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность).

Используя операцию сложения отрезка с самим собой, можно определить операцию **умножения** отрезка на натуральное число. А именно положим для отрезка AB

$$2AB = AB + AB, 3AB = 2AB + AB, \dots, nAB = (n - 1)AB + AB, \dots$$

Определим также операцию **деления** отрезка на натуральное число, или, что то же самое, операцию деления отрезка на n равных частей, считая $AB : n$ отрезком, при умножении которого на n получается исходный отрезок AB , т. е. $n(AB : n) = AB$.

Точка, делящая отрезок на две равные части, называется его **серединной**.

ПРИМЕР 1. Для точек A, B, C, D прямой известно, что точки B и C лежат по одну сторону от точки A , точки B и D тоже лежат по одну сторону от точки A . Как расположены точки C и D относительно точки A ?

Решение. По условию точка C лежит по ту же сторону от точки A , что и точка B . Точка D также лежит по ту же сторону от точки A , что и точка B .

Следовательно, точки B и D лежат по одну сторону от точки A (рис. 2.6).



Рис. 2.6

ПРИМЕР 2. Докажите, что если для отрезков b и c выполняется неравенство $b < c$, то для отрезка a будет выполняться неравенство

$$a + b < a + c.$$

Решение. Неравенство $b < c$ означает, что если отрезки b и c отложить на луче OX , то для полученных отрезков $OB = b$ и $OC = c$ точка B будет лежать между точками O и C (рис. 2.7).

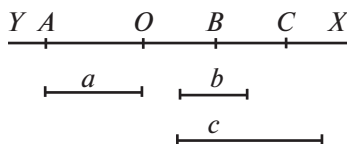


Рис. 2.7

Отложим на луче OY отрезок $OA = a$, как показано на рисунке 2.7. Тогда $AB = a + b$ и $AC = a + c$. Так как B лежит между точками A и C , то выполняется неравенство $a + b < a + c$.

Вопросы

1. На сколько частей разбивает прямую одна точка?
2. На прямой даны три точки. Сколько точек из них лежит между двумя другими?
3. Какая фигура называется: а) отрезком; б) лучом?
4. Какую операцию можно производить над отрезками?
5. Какие отрезки называются равными? Как обозначается равенство отрезков?
6. Что означает, что отрезок AB меньше отрезка A_1B_1 ? Какое обозначение в этом случае используется?
7. Как определяется: а) сумма двух отрезков; б) разность двух отрезков?
8. В каком случае определена разность двух отрезков?
9. Как определяется: а) умножение отрезка на натуральное число; б) деление отрезка на натуральное число?
10. Какая точка называется серединой отрезка?

Задачи

1. Изобразите на прямой точки A, B, C, D так, чтобы:
а) точка C лежала между точками A и B , а точка D лежала между точками B и C ;
б) точка A лежала между точками B и C , а точка C — между точками A и D .
2. На сколько частей делят прямую: а) одна точка; б) две точки; в) три точки; г)* n точек?
3. Сколько лучей, расположенных на данной прямой, могут иметь данную точку в качестве своей вершины?
4. Как могут располагаться два луча на прямой?
5. На отрезке AB взята точка C . Среди лучей AB, AC, CA, CB, BA, BC назовите пары совпадающих лучей.
6. Объясните, почему любые две точки луча лежат по одну сторону от его вершины.
7. Назовите все лучи, образовавшиеся при пересечении двух прямых AB и CD в точке O .
8. Сколько всего отрезков изображено на рисунке 2.6? Назовите их.

9. На отрезке AB взята точка C . Какой отрезок больше — AB или AC ? Почему?
10. На луче AB отложен отрезок AC , меньший AB . Какая из трёх точек A , B , C лежит между двумя другими?
11. На прямой отмечены точки A , B , C , D (рис. 2.6). Запишите каждый из отрезков в виде суммы или разности остальных.
12. На данной прямой от данной точки отложите данный отрезок. Сколько решений имеет задача?
13. Для данных отрезков AB и CD ($CD < AB$) постройте отрезки: а) $AB + CD$; б) $AB - CD$.
14. Для данного отрезка AB постройте отрезки: а) $2AB$; б) $3AB$; в) $4AB$.
15. Сравните отрезки AB и CD на рисунке 2.8, не измеряя их.

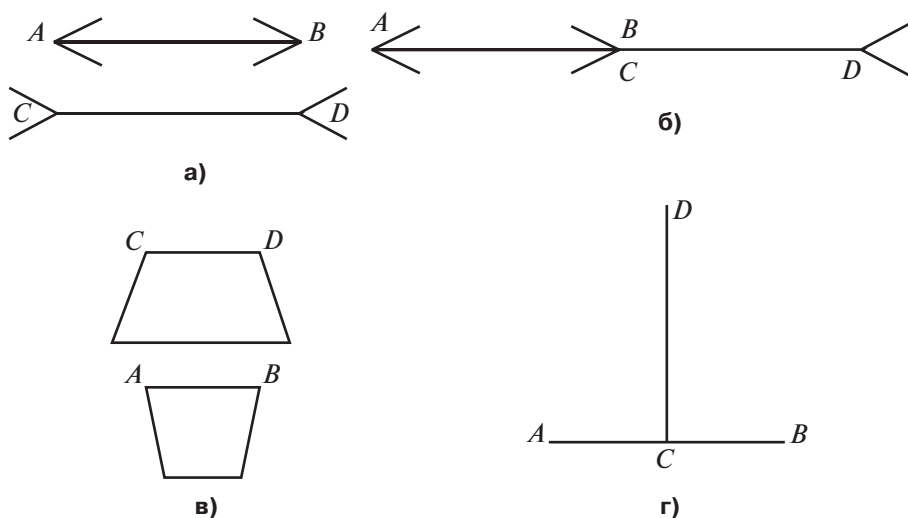


Рис. 2.8

- *16. Расположите на плоскости шесть отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими.
- *17. Пусть A и B — точки, принадлежащие прямой s , O — середина отрезка AB . Докажите, что для любой точки C прямой s , не принадлежащей отрезку AB , выполняется равенство $OC = (AC + BC) : 2$.
- *18. Докажите коммутативность и ассоциативность сложения отрезков.

- *19. Докажите, что если для отрезков a , b , c выполняются неравенства $c < a < b$, то выполняется и неравенство $a - c < b - c$.
- *20. Определите операцию вычитания отрезков.

§3 Измерение длин отрезков

Измерение длины отрезка основано на сравнении его с отрезком, длина которого принимается за единицу (*единичный отрезок*).

Длина отрезка — это положительное число, показывающее, сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в данном отрезке.

Для измерения длины данного отрезка AB последовательно откладывают единичный отрезок OE на луче AB от вершины A . Если при этом единичный отрезок целиком укладывается в отрезке AB целое число раз без остатка, то процесс измерения на этом заканчивается и полученное число считается длиной отрезка AB . Например, на рисунке 3.1, а единичный отрезок укладывается в данном ровно три раза.

Если единичный отрезок целиком укладывается в отрезке AB с остатком, т. е. конец последнего единичного отрезка C не совпадает с концом отрезка AB и остаток CB меньше единичного отрезка (рис. 3.1, б), то полученное число n считается приближённым значением длины отрезка (с точностью до 1). В этом случае единичный отрезок разбивается на 10 равных частей. На луче CB от вершины C последовательно откладывают одну десятую часть единичного отрезка и находят число m , показывающее, сколько раз она укладывается в отрезке CB . Если при этом конец последнего отрезка совпадет с концом отрезка CB , то процесс измерения заканчива-

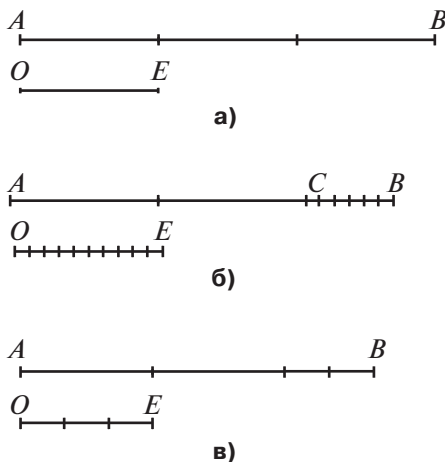


Рис. 3.1

ется и число, выражаемое десятичной дробью n,m , считается длиной отрезка AB . На рисунке 3.1, б $n = 2$, $m = 6$.

Если конец последнего отрезка не совпадает с концом отрезка CB , то число n,m считается приближённым значением длины отрезка (с точностью до $0,1$). В этом случае одна десятая часть единичного отрезка разбивается на десять равных частей и повторяется описанная процедура.

В результате процесс измерения может на некотором шаге закончиться. В этом случае длина отрезка будет выражаться конечной десятичной дробью. Однако может случиться, что процесс измерения не заканчивается ни на каком шаге. В этом случае длина отрезка будет выражаться бесконечной десятичной дробью.

Единичный отрезок можно разбивать не только на 10, но и на другое число частей. Так, если единичный отрезок разбит на q равных частей и одна такая часть укладывается в отрезке AB ровно p раз, то длина отрезка AB считается равной дроби $\frac{p}{q}$. На рисунке 3.1, в $q = 3$, $p = 8$.

Длину отрезка AB называют также *расстоянием между точками* A и B . Иногда под расстоянием между точками A и B мы будем понимать сам отрезок AB .

Длину отрезка AB будем обозначать так же, как и сам отрезок, — AB .

Длина отрезка удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. Длины равных отрезков равны.

Свойство 2. Длина суммы отрезков равна сумме их длин.

Для измерения длин отрезков применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является линейка с делениями, обозначающими сантиметры и их десятые части — миллиметры. На рисунке 3.2 длины отрезков AB , AC и AD равны соответственно 4 см, 5,2 см, 6,5 см.

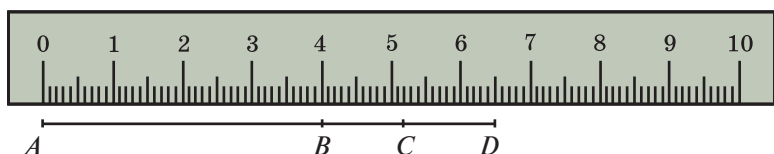


Рис. 3.2

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метр как единая единица измерения длин отрезков появился относительно недавно, в конце XVIII века. До этого времени существовали различные меры длины и все они страдали неточностью определения, что давало большие ошибки в вычислениях. По-видимому, одними из самых первых единиц измерения длины были единицы, связанные с размерами человеческого тела.

В одной старинной арабской рукописи VIII века нашей эры, посвящённой вопросам измерения длин, сказано, что за единицу измерения длины принимается локоть, равный ширине 8 кулаков, кулак — ширине 4 пальцев, палец — толщине 6 ячменных зёрен, а ячменное зерно — толщине 6 волос с ослиной морды. Современным учёным, решившим проверить вычисления арабов, пришлось заняться измерениями толщины волос с морды осла.

К концу XVIII века положение с измерениями длин стало совершенно нетерпимым. В каждой стране были свои единицы измерения. И все они были не совершеннее, чем толщина волоса с морды осла. От этого страдали астрономы, торговцы, мореплаватели, землемеры и др. Учёные не раз придумывали хорошие способы избавления от этой путаницы. Они представляли их на утверждение королям, короли благодарили учёных, одобряли проекты и — клали их под сукно.

Но вот грянула Французская революция. Группа учёных решила, что со сломом старого общества удастся избавиться и от старых мер. Они внесли соответствующий проект в Учредительное собрание Франции, которое поручило Академии наук разработать единую систему мер и весов. В состав комиссии вошли величайшие математики, физики и астрономы Франции во главе с Пьером Лапласом (1749—1827).

Доклад Академии был готов в марте 1791 года. По мнению Академии, новая система мер должна была покоиться на трёх принципах:

1) в основе её должна лежать единица длины, естественная и неизменная, т. е. такая, которая существует в природе независимо от людей и будет существовать вечно;

2) все остальные меры длины, веса и прочие должны быть выведены из неё и с ней связаны;

3) в пределах единиц одного порядка большая должна равняться десяти меньшим.

Академия предложила взять за основу системы мер одну сорокамиллионную часть парижского меридиана. Ей было дано название: метр. Для определения величины метра и изготовления эталона нужно было измерить длину парижского меридиана с большой степенью точности. Для этого были сформированы шесть комиссий.

Работа комиссий проходила во время военных действий. Измерительными работами во Франции руководил Даламбер. В 1795 году на парижской конференции были подведены итоги этой работы и утверждён эталон единицы длины — метр. В результате был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве.

Впоследствии выяснилось, что он оказался на 0,05 мм короче одной сорокамиллионной парижского меридиана. Ошибка была вызвана тем, что форма Земли не является идеально шаровой, а чуть-чуть сплюснута у полюсов. Тем не менее, чтобы не ломать всю систему мер и не пересчитывать все цифры и таблицы во всех отраслях науки и техники, учёные XIX века решили навсегда сохранить однажды установленный метр. Это решение было вынесено в 1872 году в Париже на Международной конференции. Старый платиновый эталон метра был признан ненадёжным и неудобным для сравнения. Учёные сообща разработали для него новую конструкцию из нержавеющей и почти нерасширяющегося сплава металлов.

Эталон представляет собой брусок с поперечным сечением в форме буквы Х. Длина эталона 102 см. На нём на расстоянии 1 см от каждого конца нанесены очень тонкие штрихи. Расстояние между ними и считается метром. По постановлению конферен-

ции был изготовлен тридцать один эталон метра. Хранение одного из них было поручено Международному бюро мер и весов в городе Севре, недалеко от Парижа. Остальные тридцать прототипов метра были распределены между государствами — участниками конференции. Россия получила два из них.

ПРИМЕР 1. Могут ли точки A , B , C принадлежать одной прямой, если $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см?

Решение. Нет, не могут. Если бы они принадлежали одной прямой, то одна из этих точек лежала бы между двумя другими. В этом случае длина большего отрезка равнялась бы сумме длин двух других отрезков. Но для данных длин отрезков это условие не выполняется.

ПРИМЕР 2. Сумма двух отрезков равна 6 см, а их разность — 2 см. Найдите сами отрезки.

Решение. Обозначим искомые отрезки через x и y . Тогда $x + y = 6$, а $x - y = 2$. Сложим левые и правые части этих равенств. Получим $2x = 8$. Откуда $x = 4$, и, следовательно, $y = 2$. Таким образом, искомые отрезки равны 4 см и 2 см.

Вопросы

1. Что такое длина отрезка?
2. Как измеряется длина отрезка?
3. В каком случае длина отрезка выражается: а) натуральным числом; б) десятичной дробью с одной цифрой после запятой?
4. Всегда ли длина отрезка выражается конечной десятичной дробью? Может ли длина отрезка выражаться бесконечной десятичной дробью?
5. Длина отрезка выражается дробью $\frac{p}{q}$. Что это означает?
6. Что называется расстоянием между точками A и B ?
7. Каким свойствам удовлетворяет длина отрезка?
8. Что в настоящее время принято за единицу измерения длины?

Задачи

1. Точка C лежит на прямой между точками A и B . Найдите длину отрезка AB , если: а) $AC = 2,5$ см, $CB = 3,5$ см; б) $AC = 3,1$ дм, $CB = 4,6$ дм; в) $AC = 12,3$ м, $CB = 5,8$ м.
2. На прямой в одну сторону последовательно отложены отрезки $OE = 5$ см, $EF = 30$ мм, $FG = 1,5$ см, $GH = 11$ см. Найдите отрезки: а) OH ; б) OF ; в) EG ; г) FH .

3. Точки A , B и C принадлежат одной прямой. Известно, что $AB = 4,3$ см, $AC = 7,5$ см, $BC = 3,2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C ? Может ли точка C лежать между точками A и B ? Какая из точек A , B , C лежит между двумя другими?
4. Точки A , B , C принадлежат одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC , если $AC = 3$ см, $BC = 5$ см?
5. Могут ли точки A , B , C принадлежать одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC ?
6. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся в ней пополам. Известно, что $AO = 2CO$. Сравните отрезки AB и CD .
7. С помощью линейки измерьте изображённые на рисунке 3.3 отрезки.

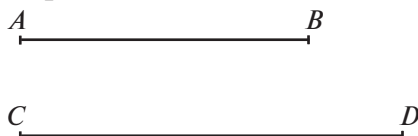


Рис. 3.3

8. Используя линейку, нарисуйте отрезки длиной: а) 6 см; б) 18 мм; в) 1,1 дм; г) 0,08 м.
9. На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C . Найдите длины отрезков AC и BC , если: а) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC ; б) отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC ; в) длины отрезков AC и BC относятся как 2 : 3.
10. На данной прямой от данной точки отложите на глаз отрезки, равные: а) 3 см; б) 7 см; в) 10 см. Проверьте точность построений линейкой.
11. На рисунке 2.6 (см. с. 15) $AB = CD$, $AC = 6$ см. Найдите BD .
12. На рисунке 2.6 (см. с. 15) $AC = BD$, $AC = 10$ см, $CD = 4$ см. Найдите длину отрезка BC .
13. На прямой последовательно отложены три отрезка AB , BC и CD так, что $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD .
14. От точки A , взятой на некоторой прямой, отложены в одном направлении два отрезка AB и AC , причём $AB = 60$ мм, $AC = 100$ мм. Найдите: а) длину отрез-

ка BC ; б) расстояние от точки A до середины отрезка BC ; в) расстояние между серединами отрезков AB и AC .

15. На рисунке 3.4 укажите наибольший и наименьший отрезки.

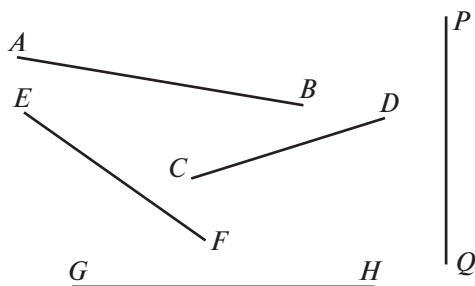


Рис. 3.4

16. Общей частью двух отрезков длины a и b является отрезок длины c . Найдите длину отрезка, покрываемого обоими данными отрезками.
- *17. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма которых равна 28 см; конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго — серединой третьего. Найдите длины этих отрезков.
- *18. На прямой взяты точки A , B , C и D таким образом, что $AB = CD$, $AC = BD$. Докажите, что середина отрезка AD является серединой отрезка BC .
- *19. Отрезки AB и AC лежат на одной прямой. Точка O — середина отрезка AB , точка P — середина отрезка AC . Докажите, что $BC = 2OP$.
- *20. Вдоль прямой улицы по одну сторону от неё стоят четыре дома. В каком месте улицы нужно установить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

§4 Полуплоскость и угол

Проведём на плоскости какую-нибудь прямую a . Она разобьёт плоскость на две части. На рисунке 4.1 точки A и B принадлежат одной из этих частей, отрезок AB не пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки A и B ле-

жат по одну сторону от прямой a . Точки B и C принадлежат разным частям плоскости, отрезок BC пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки B и C *лежат по разные стороны* от прямой a .

Следующее свойство является аксиомой взаимного расположения точек на плоскости относительно данной прямой.

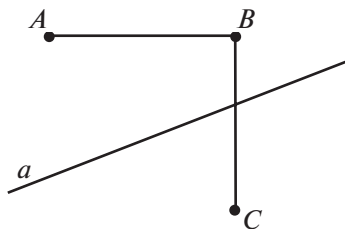


Рис. 4.1

Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части. При этом если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

Часть плоскости, состоящая из точек данной прямой и точек, лежащих по одну сторону от этой прямой, называется *полуплоскостью* (рис. 4.2).

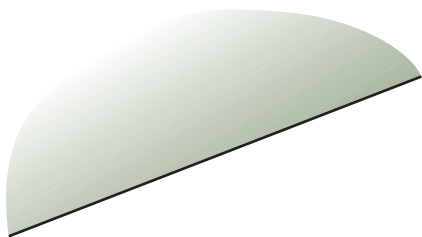


Рис. 4.2

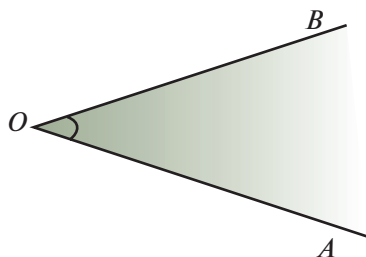


Рис. 4.3

Рассмотрим два луча с общей вершиной (рис. 4.3). Они разбивают плоскость на две части.

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется *углом*. Общая вершина называется *вершиной угла*, а сами лучи — *сторонами угла*.

Угол обозначается или одной буквой, указывающей его вершину, или тремя буквами, средняя из которых указывает вершину угла, а крайние — какие-нибудь точки на сторонах угла. Например, $\angle A$, $\angle AOB$ и т. д. Иногда углы обозначаются цифрами, например $\angle 1$, $\angle 2$ и т. д.

Точки угла, не принадлежащие его сторонам, называются **внутренними**. Лучи, исходящие из вершины данного угла и проходящие через внутренние точки угла, называются **внутренними**.

На рисунке 4.4 изображён угол AOB . Точки C и D — его внутренние точки, лучи OC и OD — его внутренние лучи.

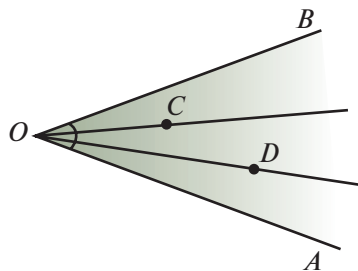


Рис. 4.4

Угол называется **развёрнутым**, если его стороны вместе составляют прямую (рис. 4.5, а). В противном случае угол называется **неразвёрнутым**.

Неразвёрнутый угол может быть меньше развёрнутого, т. е. являться частью развёрнутого угла (рис. 4.5, б), или быть больше развёрнутого, т. е. содержать развёрнутый угол (рис. 4.5, в). Как правило, если не оговорено противное, мы будем рассматривать углы, меньшие развёрнутых.

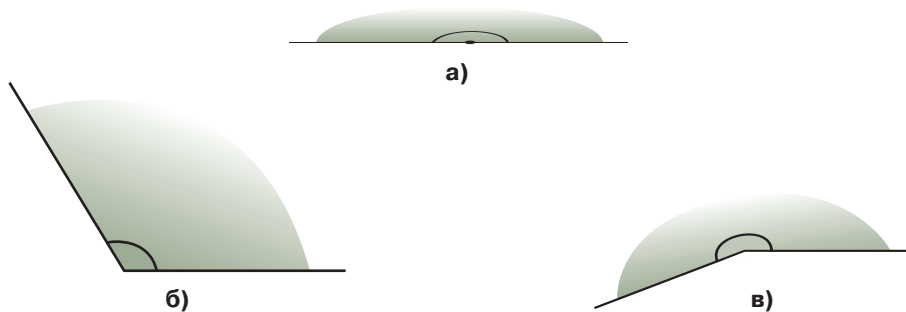


Рис. 4.5

Два угла называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую (рис. 4.6, а).

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла (рис. 4.6, б).

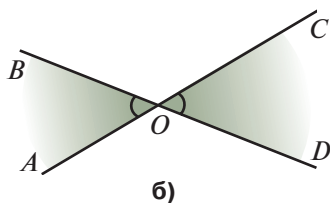
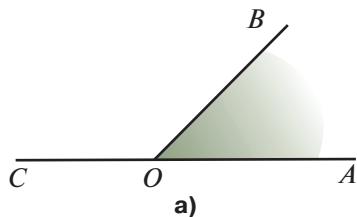


Рис. 4.6

Одной из основных операций, которую можно производить с углами, является операция **откладывания данного угла** в ту или другую сторону от данного луча (рис. 4.7). Получающийся при этом угол называется **равным** исходному углу.

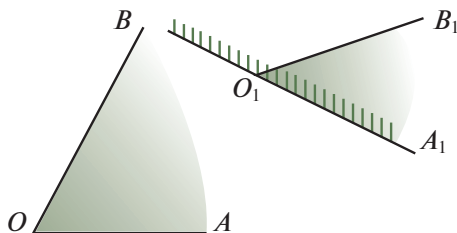


Рис. 4.7

В качестве аксиом принимаются следующие свойства.

От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить только один угол, равный данному.

Все развёрнутые углы равны.

Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например $\angle AOB$, отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1 , то угол AOB при этом совместится с углом $A_1O_1B_1$.

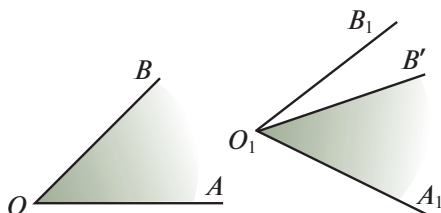


Рис. 4.8

Если при откладывании угла AOB от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч O_1B' , лежащий внутри угла $A_1O_1B_1$, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$, и обозначают $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ (рис. 4.8). Говорят также, что угол $A_1O_1B_1$ больше угла AOB , и обозначают $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$.

Операция откладывания углов позволяет определить сложение и вычитание углов. А именно, чтобы сложить углы AOB и DQE , выберем какой-нибудь луч O_1A_1 и отложим от него угол $A_1O_1B_1$, равный углу AOB (рис. 4.9). Затем от луча O_1B_1 в ту же сторону отложим угол $B_1O_1C_1$, равный углу DQE . Угол $A_1O_1C_1$ будет искомой суммой углов AOB и DQE , обозначается $\angle A_1O_1C_1 = \angle AOB + \angle DQE$.

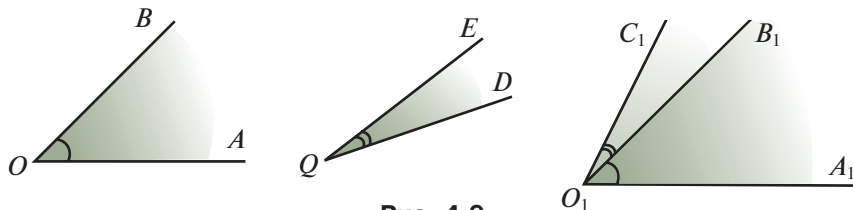


Рис. 4.9

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего угла меньшего.

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

Углы, полученные сложением или вычитанием соответственно равных углов, равны.

Непосредственно из определения суммы углов следует, что сумма смежных углов равна развёрнутому углу.

Можно доказать, что для сложения углов выполняются свойства, аналогичные свойствам сложения положительных чисел:

1. $\angle A + \angle B = \angle B + \angle A$ (коммутативность);
2. $(\angle A + \angle B) + \angle C = \angle A + (\angle B + \angle C)$ (ассоциативность).

ТЕОРЕМА

Вертикальные углы равны.

Доказательство. Пусть $\angle AOC$ и $\angle BOD$ — вертикальные углы. Стороны OB и OD угла $\angle BOD$ дополняют до прямых стороны соответственно OA и OC угла $\angle AOC$ (рис. 4.10). Тогда углы $\angle AOC$ и $\angle COB$ составляют в сумме развёрнутый угол. Углы $\angle BOD$ и $\angle COB$ также составляют в сумме развёрнутый угол. Следовательно, $\angle AOC + \angle COB = \angle BOD + \angle COB$. Вычитая из обеих частей этого равенства $\angle COB$, получаем требуемое равенство $\angle AOC = \angle BOD$.

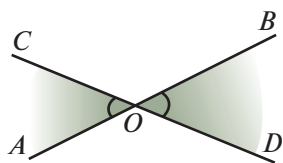


Рис. 4.10

Угол, равный своему смежному, называется **прямым**. Угол, меньший прямого угла, называется **острым**. Угол, больший прямого угла, но меньший развёрнутого угла, называется **тупым** (рис. 4.11).

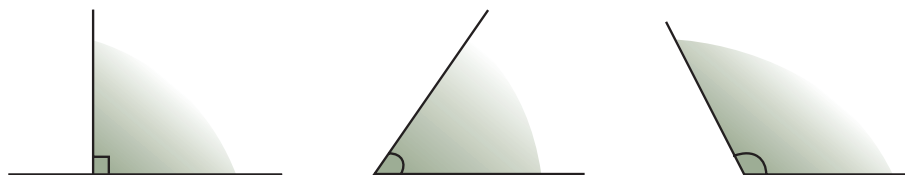


Рис. 4.11

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами, на которые делятся данные прямые точкой их пересечения (рис. 4.12).

Две прямые называются **перпендикулярными**, если они образуют прямые углы (рис. 4.13).

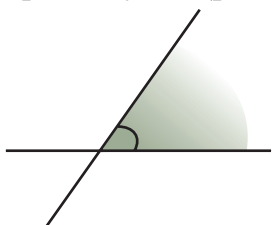


Рис. 4.12

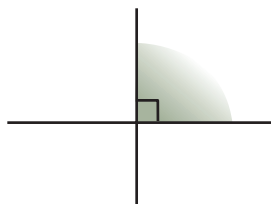


Рис. 4.13

Перпендикулярность прямых a и b обозначается $a \perp b$.

Будем также называть два луча, два отрезка или прямую и отрезок перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Используя операцию сложения угла с самим собой, можно определить операцию умножения угла на натуральное число и деления угла на n равных частей. Для угла AOB углом $AOB : n$ считается такой угол, при умножении которого на n получается исходный угол AOB , т. е. $n(\angle AOB : n) = \angle AOB$.

Биссектрисой угла называется внутренний луч, делящий этот угол на два равных угла (рис. 4.14).

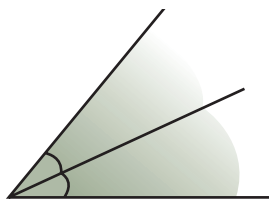


Рис. 4.14

ПРИМЕР 1. Даны прямая и три точки A , B , C , не принадлежащие этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает её. Пересекает ли прямую отрезок BC ?

Решение. Из того, что отрезок AB пересекает прямую, следует, что точки A и B лежат по разные стороны от этой прямой. Из того, что отрезок AC не пересекает прямую, следует, что точки A и C лежат по одну сторону от прямой. Таким образом, точки B и C лежат по разные стороны от прямой, и, следовательно, отрезок BC пересекает прямую (рис. 4.15).

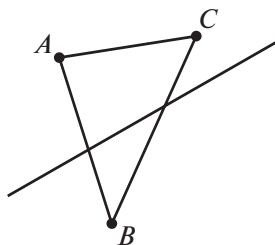


Рис. 4.15

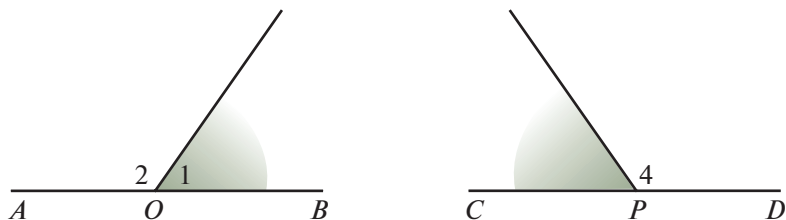


Рис. 4.16

ПРИМЕР 2. На рисунке 4.16 AB и CD — прямые, $\angle 1 = \angle 3$. Докажите, что $\angle 2 = \angle 4$.

Решение. $\angle AOB = \angle CPD$ как развёрнутые углы. При этом $\angle AOB = \angle 1 + \angle 2$, $\angle CPD = \angle 3 + \angle 4$.

Так как по условию $\angle 1 = \angle 3$, получаем $\angle 2 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

Вопросы

1. На сколько частей прямая разбивает плоскость? Что называется полуплоскостью?
2. В каком случае две точки принадлежат: а) одной полуплоскости; б) разным полуплоскостям относительно данной прямой?
3. Какая фигура называется углом? Что называется вершиной угла? Что называется сторонами угла?
4. Какой угол называется развёрнутым?
5. Какие углы называются: а) смежными; б) вертикальными?
6. Как обозначаются углы?
7. Какую операцию можно производить над углами? Какие углы называются равными? Как обозначается равенство углов?
8. Один угол меньше другого. Что это означает? Какое обозначение в этом случае используется?
9. Как определяется: а) сумма двух углов; б) разность двух углов?
10. Как определяется: а) умножение угла на натуральное число; б) деление угла на натуральное число?
11. Какой угол называется: а) острым; б) прямым; в) тупым?
12. Какие прямые называются перпендикулярными?
13. Что называется биссектрисой угла?
14. Сформулируйте и докажите теорему о вертикальных углах.

Задачи

1. На рисунке 4.17 укажите пары точек, лежащие по одну и по разные стороны от данной прямой.
2. На сколько частей разбивают плоскость: а) две пересекающиеся прямые; б) три попарно пересекающиеся прямые; в) четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?
3. Изобразите прямую p и точки A, B, C, D, E, F такие, что A, E принадлежат данной прямой, а остальные ей не принадлежат, причём D и F лежат в разных полуплоскостях, B и C — в одной полуплоскости, и отрезок BD пересекает прямую p .
4. Даны прямая и четыре точки A, B, C, D , не принадлежащие этой прямой. Пересекает ли эту прямую отрезок AD , если: а) отрезки AB, BC и CD пересекают прямую; б) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает; в) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; г) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; д) отрезки AB, BC и CD не пересекают прямую; е) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую? Изобразите данные ситуации.
5. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости, а две другие — в другой полуплоскости относительно этой прямой. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков: а) пересекает прямую; б) не пересекает прямую? Сделайте соответствующий рисунок.
- *6. Точки A, B, C, D не принадлежат одной прямой. Известно, что прямая AB пересекает отрезок CD , а прямая CD пересекает отрезок AB . Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.
7. Изобразите лучи OA, OB, OC, OD так, чтобы: а) луч OC лежал внутри угла AOB , а луч OD лежал внутри угла BOC ; б) луч OA лежал внутри угла BOC , а луч OC лежал бы внутри угла AOD .

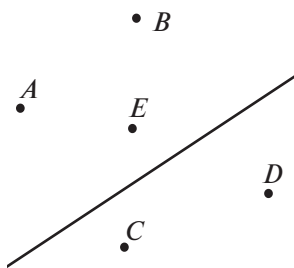


Рис. 4.17

8. Сколько всего углов определяется лучами, изображёнными на рисунке 4.18? Назовите их. Укажите наибольший и наименьший.
9. Укажите, какие из углов на рисунке 4.18: а) острые; б) прямые; в) тупые.
10. Сколько имеется углов, смежных данному?
11. Могут ли два смежных угла быть одновременно: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми?
12. По рисунку 4.19 запишите пары: а) вертикальных углов; б) смежных углов.
13. Докажите, что если два угла равны, то равны и смежные с ними углы.
14. На рисунке 4.20 AB перпендикулярна OC и $\angle 1 = \angle 2$. Сравните углы 3 и 4.
15. Найдите угол, который образуют биссектрисы вертикальных углов.
16. Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
17. Углы AOB и BOC имеют общую сторону OB . Найдите угол, образованный биссектрисами данных углов.
- *18. Докажите коммутативность и ассоциативность сложения углов.
- *19. Определите операцию вычитания углов.
- *20. Докажите, что если для углов A и B выполняется неравенство $\angle A < \angle B$, то выполняется и неравенство $\angle A + \angle C < \angle B + \angle C$.
- *21. Когда часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол?
- *22. Сколько раз за сутки часовая и минутная стрелки образуют развёрнутый угол?

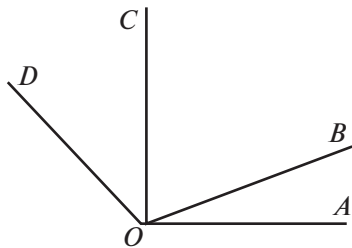


Рис. 4.18

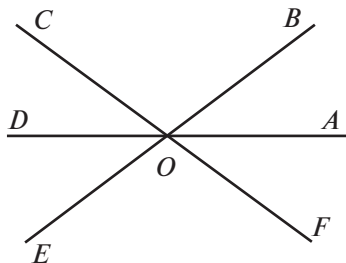


Рис. 4.19

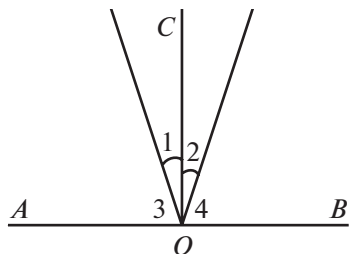


Рис. 4.20

§5 Измерение величин углов

Для измерения величин углов поступают так же, как и в случае измерения длин отрезков.

Сначала выбирают угол, принимаемый за единицу измерения, — единичный угол. Обычно такой угол составляет одну сто восьмидесятую часть развёрнутого угла. Считают, что величина этого угла равна одному градусу; обозначают 1° .

Затем для измерения величины данного угла AOB от луча OA последовательно откладывают единичный угол и находят число n , показывающее, сколько раз он укладывается в данном угле. Если при этом луч последнего единичного угла совпадёт с лучом OB , то процесс измерения считается законченным и полученное число градусов n будет величиной угла AOB ; обозначается $\angle AOB = n^\circ$. Если же луч OC последнего единичного угла лежит между лучами OA и OB , то единичный угол разбивают на 60 равных частей. Величину одной такой части называют одной минутой и обозначают $1'$. Затем последовательно откладывают от луча OC угол, равный одной минуте, и находят число m , показывающее, сколько раз этот угол целиком укладывается в угле COB . Если при этом луч последнего угла совпадёт с лучом OB , то процесс измерения считается законченным и величина $n^\circ m'$, показывающая, сколько раз в данном угле укладываются угол в 1° и угол в $1'$, будет величиной данного угла. Если же последний луч лежит между лучами OC и OB , то угол в одну минуту делят на 60 равных частей (величину одной такой части считают равной одной секунде и обозначают $1''$) и повторяют процедуру измерения.

Таким образом, **градусная величина угла** показывает, сколько раз угол в один градус и его части укладываются в этом угле.

Градусная величина угла удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. Градусные величины равных углов равны.

Свойство 2. Градусная величина суммы углов равна сумме их градусных величин.

Градусную величину угла обычно обозначают так же, как и сам угол. Например, запись $\angle AOB = 30^\circ$ означает, что величина угла AOB равна 30° . Говорят также, что угол AOB равен 30° . Иногда градусную величину угла обозначают строчными греческими буквами, например φ , ψ и т. д.

Непосредственно из определений следует, что прямой угол равен 90° . Острый угол меньше 90° , а тупой угол больше 90° , но меньше 180° .

Для измерения величин углов применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является известный вам транспортир (рис. 5.1).

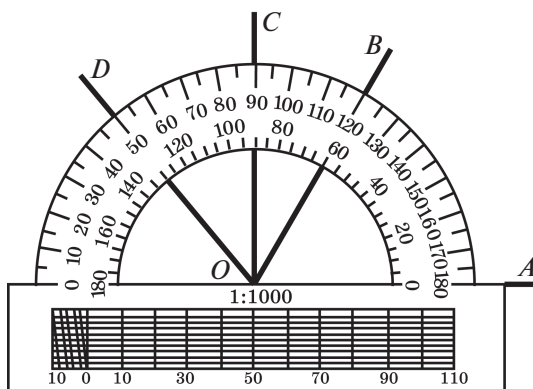


Рис. 5.1

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Проблема измерения углов восходит к глубокой древности. Астрономические наблюдения, необходимость определения положения солнца и звёзд на небе потребовали создания специальных приборов для определения углов, под которыми видны эти светила. На старинной гравюре (рис. 5.2) художник изобразил моряка эпохи Великих географических открытий, прокладывающего курс корабля с помощью измерительных инструментов. Одним из первых угломерных инструментов была астролябия, изобретённая Гиппархом (180—125 гг. до н. э.) и усовершенствованная впоследствии немецким учёным Региомontanом (1436—1476). Она состояла из тяжёлого медного диска — лимба, который подвешивался за кольцо так, чтобы он висел вертикально и линия G_1G_2 принимала горизонтальное положение. По краю лимба наносилась шкала, разделённая на градусы. Кроме этого, на лимбе имела полоса A_1A_2 ,



Рис. 5.2

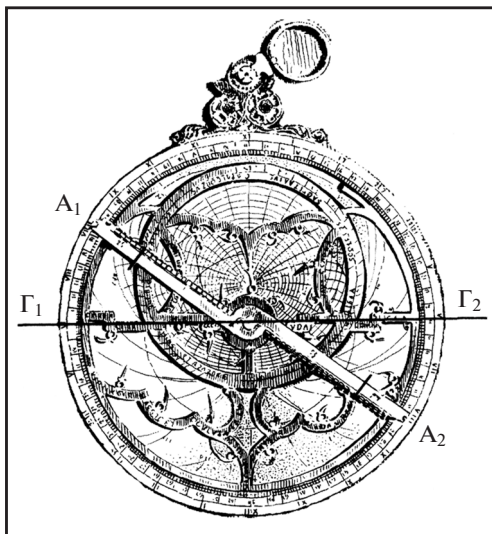


Рис. 5.3

называемая алидадой, которая могла вращаться вокруг центра лимба и имела на концах поперечные пластинки с отверстиями, называемыми диоптрами.

Для определения высоты звезды над горизонтом наблюдатель прикладывал глаз к нижнему диоптру и поворачивал алидаду так, чтобы звезда была видна через другой диоптр. Деление на шкале, около которого останавливался край алидады, и показывало высоту звезды над горизонтом в градусах.

Располагая плоскость лимба горизонтально, можно измерять углы и в горизонтальной плоскости. Для этого после установки астролябии (рис. 5.3) алидаду сначала наводят на один объект наблюдения и засекают угол на шкале лимба, а затем на другой объект и также засекают угол. Разность между этими значениями и есть искомая величина угла.

Другим инструментом для измерения углов был квадрант, представляющий собой одну четвёртую часть астролябии (рис. 5.4 на с. 36). Квадрант имел то преимущество перед астролябией, что его можно было сделать значительно больших размеров и тем самым увеличить точность измерения углов.

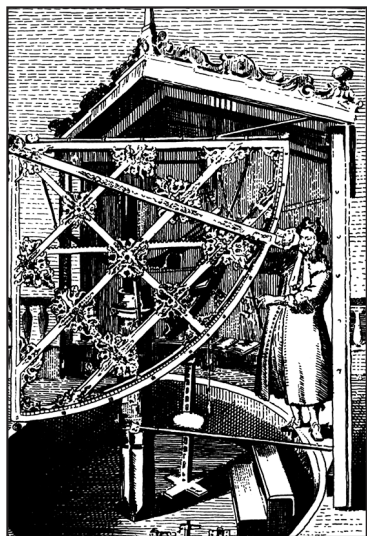


Рис. 5.4

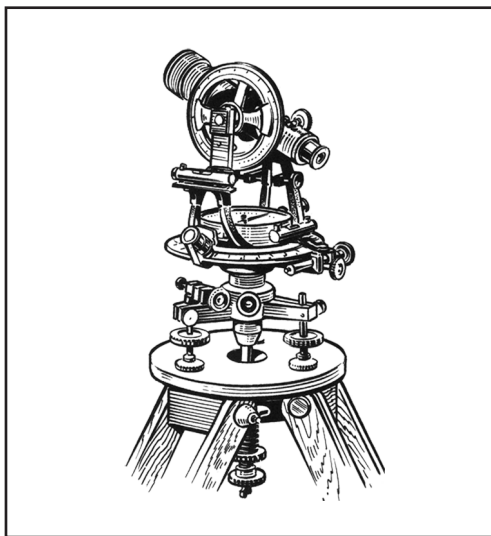


Рис. 5.5

Существенные усовершенствования в конструкции астролябии и квадранта были сделаны французским учёным Жаном Пикаром в середине XVII века. Пикар заменил диоптры зрительной трубой, изобретённой незадолго до этого Галилеем. Перед линзой трубы он установил сетку из перекрещивающихся волосков, а для плавного вращения алидады использовал микрометрический винт, что значительно повысило точность измерения.

Наиболее совершенным угловым инструментом, применяющимся в настоящее время для выполнения геодезических работ, является теодолит (рис. 5.5), состоящий из двух лимбов, расположенных в вертикальной и горизонтальной плоскостях, что позволяет измерять вертикальные и горизонтальные углы одновременно. На вертикальном лимбе имеется зрительная труба, с помощью которой алидады вертикального и горизонтального лимбов наводятся на объект наблюдения. Точность измерения углов при этом составляет доли минуты.

ПРИМЕР 1. Один из смежных углов на 45° меньше другого. Найдите эти углы.

Решение. Назовём данные углы $\angle 1$ и $\angle 2$. По условию задачи $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Пусть $\angle 1 = \angle 2 + 45^\circ$. Следовательно,

$$(\angle 2 + 45^\circ) + \angle 2 = 180^\circ. \text{ Откуда } \angle 2 = \frac{135^\circ}{2} = 67^\circ 30'. \angle 1 = 67^\circ 30' + 45^\circ = 112^\circ 30'.$$

ПРИМЕР 2. Сумма трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306° . Найдите эти углы.

Решение. Поскольку два из трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, смежные, то их сумма равна 180° . Значит, третий угол равен 126° . Смежный с ним угол равен 54° . Оставшийся угол будет равен 126° .

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения величины угла?
2. Что такое: а) градус; б) минута; в) секунда?
3. Что такое градусная величина угла?
4. Что делают для измерения градусной величины угла?
5. Градусная величина угла равна n° . Что это означает?
6. Каким свойствам удовлетворяет градусная величина угла?
7. Какие инструменты служат для измерения углов?
8. Что представляет собой: а) астролябия; б) квадрант; в) теодолит?

Задачи

1. С помощью транспортира измерьте величины указанных на рисунке 5.6 углов.
2. С помощью транспортира постройте углы, величиной 10° , 30° , 60° , 90° , 120° .
3. Оцените «на глаз» градусную величину углов на рисунке 5.7. Проверьте ваши оценки, измерив углы с помощью транспортира.

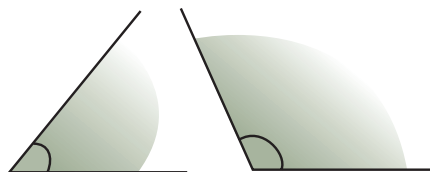


Рис. 5.6



Рис. 5.7

4. Луч OC лежит внутри угла AOB . Найдите градусную величину угла AOB , если: а) $\angle AOC = 35^\circ$, $\angle COB = 75^\circ$; б) $\angle AOC = 75^\circ$, $\angle COB = 62^\circ$; в) $\angle AOC = 94^\circ$, $\angle COB = 85^\circ$.
5. Может ли луч OC лежать внутри угла AOB , если: а) $\angle AOC = 30^\circ$, $\angle AOB = 80^\circ$; б) $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle AOC = 100^\circ$; в) $\angle AOC > \angle AOB$?
6. Луч OC лежит внутри угла AOB , равного 60° . Найдите углы AOC и BOC , если: а) угол AOC на 30° больше угла BOC ; б) угол AOC в два раза больше угла BOC ; в) градусные меры углов AOC и BOC относятся как $2 : 3$.
7. Некоторый угол равен 38° . Чему равен смежный с ним угол?
8. Какую часть прямого угла составляют углы, равные: а) 45° ; б) 30° ; в) 10° ; г) 18° ; д) 72° ; е) 150° ?
9. Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.
10. Найдите смежные углы, если: а) один из них на 30° больше другого; б) их разность равна 40° ; в) один из них в три раза меньше другого; г) они равны.
11. Найдите смежные углы, если их градусные величины относятся как: а) $2 : 3$; б) $3 : 7$; в) $11 : 25$; г) $22 : 23$.
12. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30° . Чему равны остальные углы?
13. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.
14. Даны три прямые, пересекающиеся в одной точке (рис. 5.8). Докажите, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.
15. Может ли сумма трёх углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, быть равной 150° ?
16. Разность двух смежных углов равна 90° . Найдите величину этих углов.
17. Общей частью двух углов величины φ и ψ является угол величины γ . Найдите угол, покрываемый обоими данными углами.

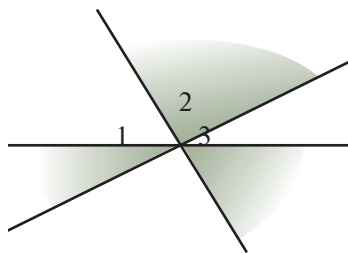


Рис. 5.8

18. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в: а) 3 ч; б) 6 ч; в) 9 ч; г) 5 ч?
19. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за: а) 20 мин; б) 10 мин?
20. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за: а) 2 ч; б) 15 мин; в) 30 с?
- *21. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки, когда часы показывают 2 ч 15 мин?

§6 Ломаные и многоугольники

Фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго — началом третьего и т. д., называется **ломаной линией** или просто **ломаной** (рис. 6.1). Отрезки называются **сторонами ломаной**, а их концы — **вершинами ломаной**.

Длиной ломаной называется сумма длин её сторон.

Ломаная обозначается последовательным указанием её вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2...A_n$. Ломаная называется **простой**, если она не имеет точек самопересечения (рис. 6.2).

Ломаная называется **замкнутой**, если начало первого отрезка ломаной совпадает с концом последнего. Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют простой (рис. 6.3).

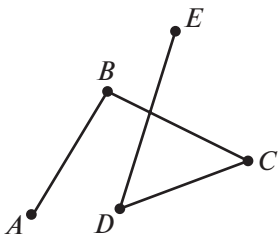


Рис. 6.1

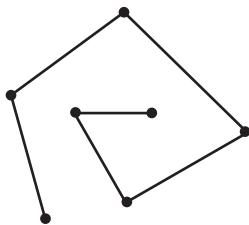


Рис. 6.2

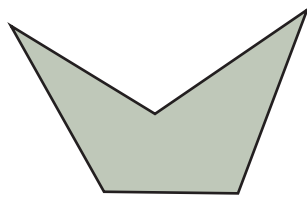


Рис. 6.3

Всякая простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. Фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью, называется **многоугольником**. Вершины ломаной называются **вершинами многоугольника**, стороны ломаной — **сторонами многоугольника**, а углы, образованные соседними сторонами, — **углами многоугольника**. Точки многоугольника, не принадлежащие его сторонам, называются **внутренними**.

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Многоугольники подразделяются на **треугольники** — многоугольники с тремя углами (рис. 6.4 а), **четырёхугольники** — многоугольники с четырьмя углами и т. д. (рис. 6.4 б). Многоугольник, у которого n углов, называется **n -угольником**.

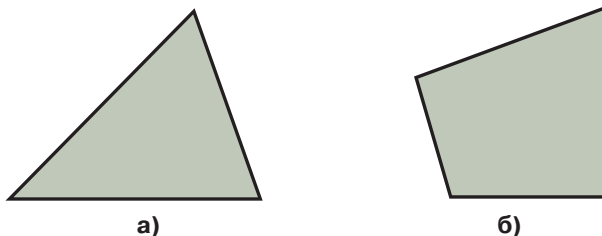


Рис. 6.4

Многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны (рис. 6.5).

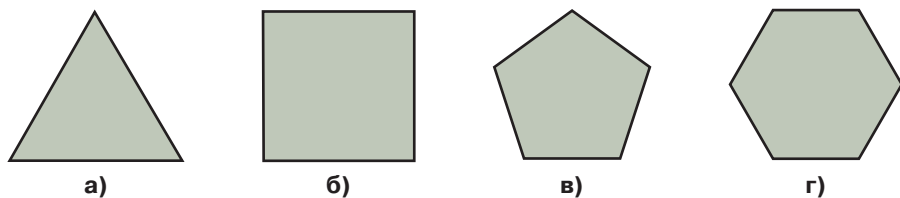


Рис. 6.5

Многоугольник называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 6.6).

Любой треугольник выпуклый. Среди многоугольников с числом углов, большим трёх, могут быть выпуклые и невыпуклые (рис. 6.7 а, б).

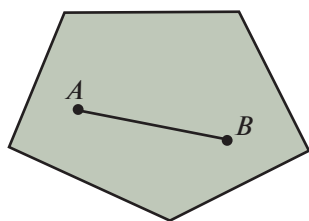


Рис. 6.6

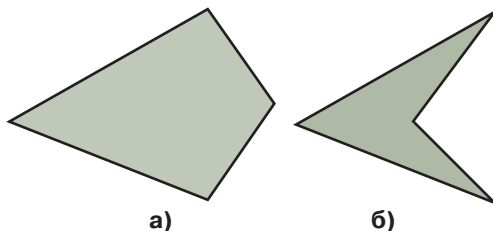


Рис. 6.7

Диагональ многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины. Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 6.8).

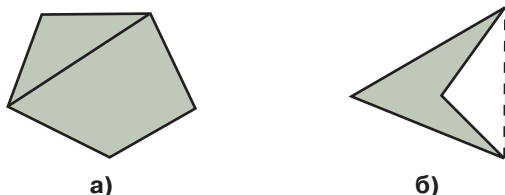


Рис. 6.8

Иногда многоугольником называется замкнутая ломаная, у которой возможны точки самопересечения (рис. 6.9). К числу таких многоугольников относятся правильные звёздчатые многоугольники, у которых все стороны и все углы равны (рис. 6.10).

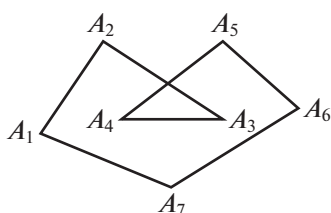


Рис. 6.9

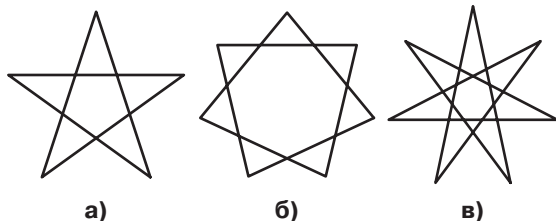


Рис. 6.10

ПРИМЕР 1. Сколько диагоналей имеет пятиугольник?

Решение. Через каждую вершину пятиугольника можно провести две диагонали (рис. 6.11, а). Всего вершин пять. Однако, подсчитывая диагонали, мы каждую из них посчитаем дважды: первый раз — проходящей через одну вершину и второй раз — через другую. Таким образом, число диагоналей пятиугольника равно $2 \cdot 5 : 2 = 5$ (рис. 6.11, б).

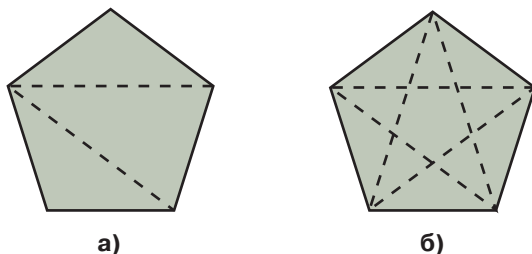


Рис. 6.11

ПРИМЕР 2. Могут ли четыре точки на плоскости быть вершинами разных четырёхугольников?

Решение. Да. Соответствующий пример показан на рисунке 6.12.

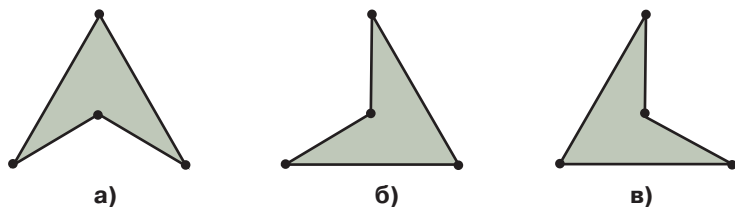


Рис. 6.12

Вопросы

1. Что называется ломаной? Что называется: а) сторонами; б) вершинами ломаной?
2. Как обозначается ломаная?
3. Что называется длиной ломаной?
4. Какая ломаная называется: а) простой; б) замкнутой?
5. На сколько частей разбивает плоскость простая замкнутая ломаная?
6. Какая фигура называется многоугольником? Что называется: а) вершинами; б) сторонами; в) углами многоугольника?
7. Какие точки многоугольника называются внутренними?
8. Что называется периметром многоугольника?
9. Какой многоугольник называется n -угольником?
10. Какой многоугольник называется: а) правильным; б) выпуклым?
11. Что называется диагональю многоугольника?
12. Какой многоугольник содержит все свои диагонали?

Задачи

1. Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у неё сторон?
2. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у неё вершин?
3. Укажите, какие фигуры, изображённые на рисунке 6.13, являются простыми ломаными.



Рис. 6.13

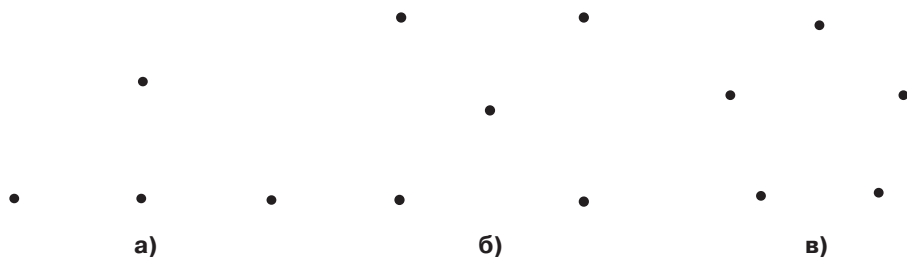


Рис 6.14

4. Данные точки, изображённые на рисунке 6.14, соедините простой ломаной.
5. Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области?
6. Проверьте, что линия, изображённая на рисунке 6.15, является простой замкнутой ломаной. Выясните, какие из данных точек лежат внутри, а какие вне этой ломаной.
7. Нарисуйте выпуклые и невыпуклые: а) четырёхугольники; б) пятиугольники; в) шестиугольники. Используя линейку, найдите периметры этих многоугольников.
8. Нарисуйте правильные треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.

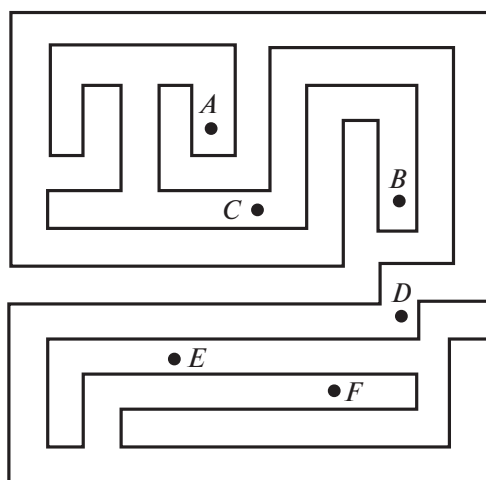


Рис. 6.15

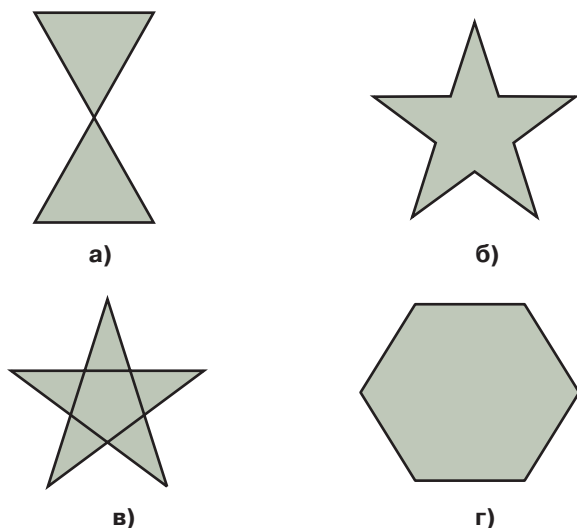


Рис. 6.16

9. Укажите, какие из представленных на рисунке 6.16 фигур являются многоугольниками, а какие нет.
10. Какая имеется зависимость между числом вершин и числом сторон многоугольника?
11. На сколько треугольников делится выпуклый: а) четырёхугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г)* n -угольник своими диагоналями, проведёнными из одной вершины?
12. Сколько диагоналей имеет:
а) шестиугольник; б)* n -угольник?
13. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей?
14. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?
- *15. Докажите, что в любом четырёхугольнике найдётся диагональ, целиком в нём содержащаяся.
- *16. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из: а) четырёх сторон; б) пяти сторон; в) n сторон?
- *17. Нарисуйте замкнутую шестистороннюю ломаную, пересекающую каждую свою сторону ровно один раз.

- *18. Может ли прямая иметь с простой замкнутой ломаной нечётное число общих точек?
- *19. Может ли прямая, не проходящая через вершины простой замкнутой ломаной, пересекать её стороны в нечётном числе точек?
- *20. Прямая l имеет с простой замкнутой ломаной 2021 общую точку. Докажите, что существует прямая l' , пересекающая эту ломаную более чем в 2021 точке.
- *21. Докажите, что у выпуклого многоугольника нет углов, больших развёрнутого.
- *22. Докажите, что выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону.

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§7 Треугольники

Напомним, что треугольником называется многоугольник с тремя углами. **Периметром** треугольника называется сумма длин его сторон.

Треугольник обозначается указанием его вершин. Например, треугольник ABC .

Среди основных элементов треугольника, кроме вершин, сторон и углов, выделяют следующие:

- **медиана** треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 7.1, а);
- **биссектриса** треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны (рис. 7.1, б);

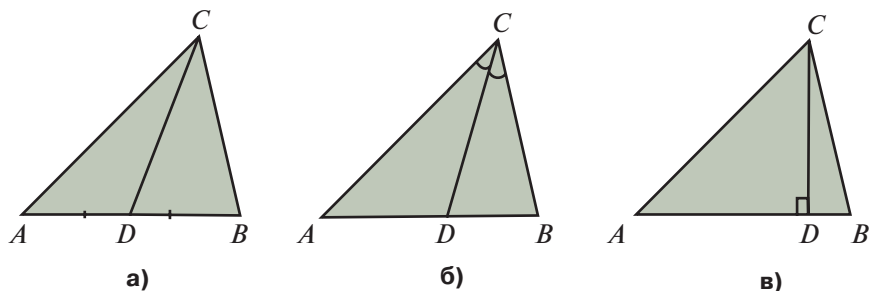


Рис. 7.1

- **высота** треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны или её продолжения и перпендикулярный этой стороне (рис. 7.1, в на с. 46).

Два треугольника называются **равными**, если стороны одного соответственно равны сторонам другого и углы, заключённые между соответственно равными сторонами, равны.

Таким образом, если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то эти треугольники равны и их равенство обозначают: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 7.2).

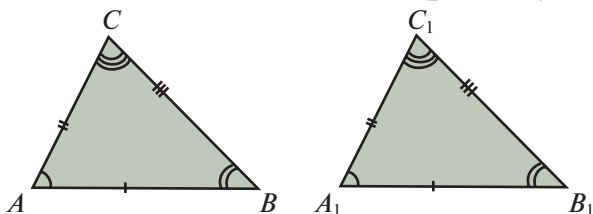


Рис. 7.2

Следующее свойство равенства треугольников принимается за аксиому.

Каковы бы ни были треугольник и луч на плоскости, существует треугольник, равный данному, у которого первая вершина совпадает с вершиной луча, вторая — принадлежит лучу, а третья — расположена в заданной полуплоскости относительно луча (рис. 7.3).

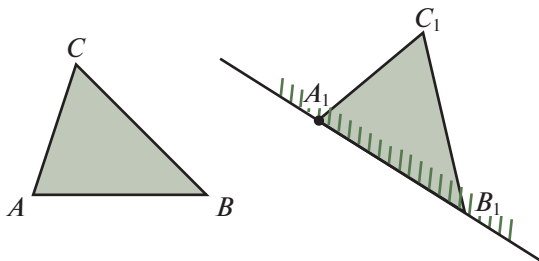


Рис. 7.3

Другими словами, это свойство означает (см. рис. 7.3), что в заданной полуплоскости относительно заданного луча можно отложить треугольник, равный данному, у которого одна вершина совпадает с вершиной луча, а другая — принадлежит лучу.

ПРИМЕР 1. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 96 см, если они пропорциональны числам 3, 4, 5.

Решение. Пусть стороны треугольника равны $3x$, $4x$, $5x$. Тогда $3x + 4x + 5x = 96$. Откуда $12x = 96$, и, следовательно, $x = 8$. Таким образом, стороны треугольника равны 24 см, 32 см и 40 см.

ПРИМЕР 2. По рисунку 7.4, а выпишите все треугольники. Сколько их? Из какой вершины можно провести высоту, общую для этих треугольников? В каких треугольниках она будет расположена: а) внутри треугольника; б) вне треугольника?

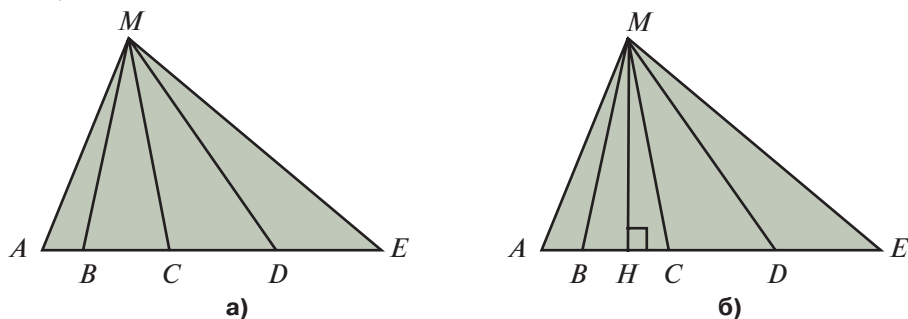


Рис. 7.4

Решение. На рисунке 7.4, а изображены следующие треугольники: AMB , AMC , AMD , AME , BMC , BMD , BME , CMD , CME , DME . Всего 10 треугольников. Общая высота для них проходит через вершину M . На рисунке 7.4, б — это MH . Она лежит: а) внутри треугольников AMC , AMD , AME , BMC , BMD , BME ; б) вне треугольников AMB , CMD , CME , DME .

Вопросы

1. Какая фигура называется треугольником? Что называется: а) вершинами треугольника; б) сторонами треугольника; в) углами треугольника?
2. Как обозначается треугольник?
3. Что называется: а) медианой; б) биссектрисой; в) высотой треугольника?
4. Что называется периметром треугольника?
5. Какие треугольники называются равными? Как обозначается равенство треугольников?
6. Сформулируйте аксиому об откладывании треугольника, равного данному.

Задачи

1. Перечислите все треугольники, изображённые на рисунке 7.5.
2. Сколько у треугольника:
а) медиан; б) биссектрис;
в) высот?
3. Дан треугольник ABC . Существует ли другой, равный ему треугольник ABD ?
4. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли эти треугольники быть равными?
5. Нарисуйте треугольник, у которого все углы острые. Проведите из какой-нибудь его вершины медиану, биссектрису и высоту.
6. Нарисуйте треугольник с прямым углом и проведите из вершины прямого угла медиану, биссектрису и высоту.
7. Нарисуйте треугольник с тупым углом и проведите из вершины тупого угла медиану, биссектрису и высоту.
8. Может ли проходить вне треугольника его: а) медиана; б) биссектриса; в) высота?
9. Треугольники ABC и EFG равны. Известно, что $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Найдите стороны треугольника EFG .
10. Треугольники ABC и EFG равны. Известно, что $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. Найдите углы треугольника EFG .
11. Треугольники ABC , PQR и XYZ равны. Известно, что $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $XZ = 7$ см. Найдите остальные стороны каждого треугольника.
12. Сторона AB треугольника ABC равна 17 см. Сторона AC вдвое больше стороны AB , а сторона BC на 10 см меньше стороны AC . Найдите периметр треугольника ABC .
13. Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.
14. Периметр треугольника равен 54 см. Найдите его стороны, если они относятся как 2 : 3 : 4.

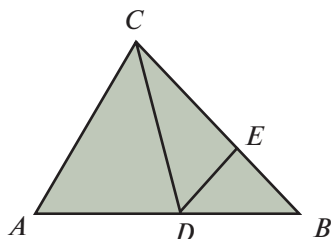


Рис. 7.5

15. У треугольника равны две стороны и каждая из них составляет $\frac{2}{7}$ его периметра. Третья сторона равна 21 см. Найдите периметр данного треугольника.
- *16. Докажите, что если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает и одну из других его сторон.
- *17. Дан треугольник ABC . На стороне AC взята точка B_1 , а на стороне BC — точка A_1 . Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются.

§ 8 Первый признак равенства треугольников

Для установления равенства треугольников оказывается необязательным проверять равенство всех пар сторон и углов, достаточно проверить равенство только некоторых из них. Соответствующие теоремы называются признаками равенства треугольников.

ТЕОРЕМА

(Первый признак равенства треугольников.) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 8.1). Если, откладывая один из этих треугольников, его удастся совместить с другим, то эти треугольники будут равны. Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 в полуплоскости, определяемой вершиной C_1 . При этом вершина A совместится с вершиной A_1 . В силу равенства сторон AB и A_1B_1 вершина B совместится с вершиной B_1 . В силу равенства углов A и A_1 сторона AC пойдёт по стороне A_1C_1 , и в силу равенства

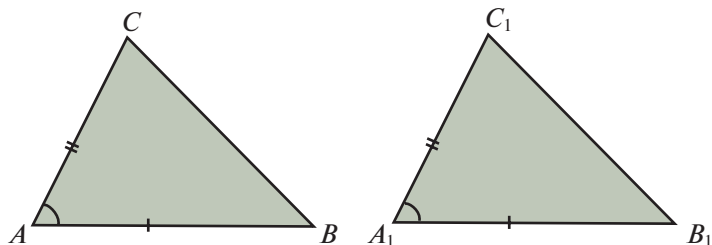


Рис. 8.1

этих сторон вершина C совместится с вершиной C_1 . Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A_1B_1C_1$. Следовательно, эти треугольники равны.

ПРИМЕР 1. На рисунке 8.2 $AB = AC$, $AE = AD$. Докажите, что $BD = CE$.

Решение. Треугольники ABD и ACE равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$, $AE = AD$, угол A — общий). Следовательно, $BD = CE$.

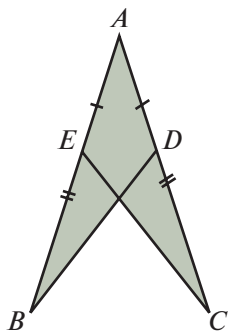


Рис. 8.2

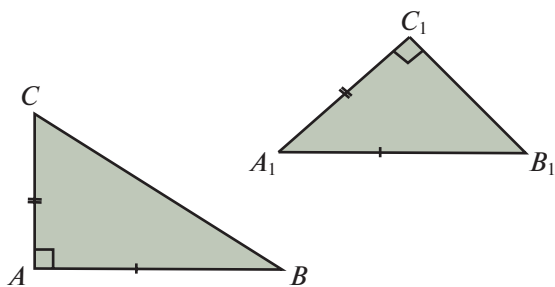


Рис. 8.3

ПРИМЕР 2. Две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника. Следует ли из этого, что эти треугольники равны?

Решение. Нет, не следует. Заметим, что в формулировке признака равенства треугольников требуется, чтобы соответственно равные углы лежали между соответственно равными сторонами. Если это не так, то треугольники могут быть не равны. Примеры таких треугольников показаны на рисунке 8.3.

Вопросы

1. Какие теоремы называются признаками равенства треугольников?
2. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.

Задачи

1. Равны ли треугольники ABC и DEF , если $AB = DE$, $AC = DF$ и $\angle A = \angle D$?
2. На рисунке 8.4 $KL = NM$, $\angle 1 = \angle 2$. Есть ли на нём равные треугольники?

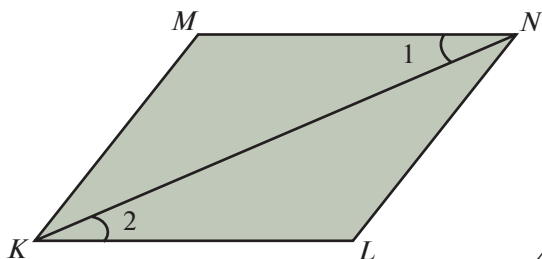


Рис. 8.4

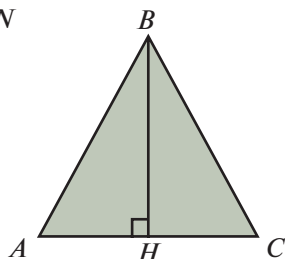


Рис. 8.5

3. На рисунке 8.5 $BH \perp AC$ и $AH = CH$. Есть ли на нём равные треугольники?
4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD , если отрезок AC равен 10 м?
5. Через середину O отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB . Докажите, что каждая точка C этой прямой одинаково удалена от точек A и B .
6. На стороне AB треугольника ABC взята точка D , а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1 . Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
7. На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD (рис. 8.6). Произвольная точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D . Докажите, что $EC = ED$.
8. На рисунке 8.7 $AO = OB$ и $DO = OC$. Докажите равенство отрезков AD и BC .

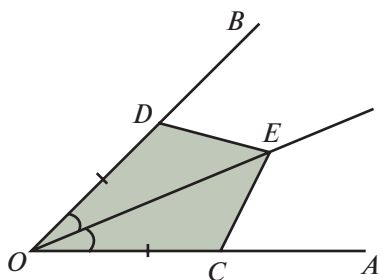


Рис. 8.6

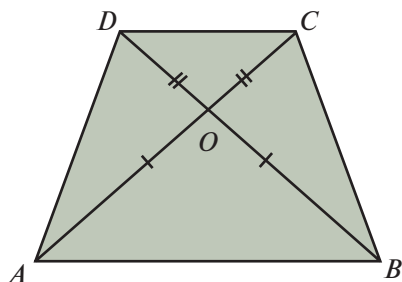


Рис. 8.7

9. Медиана AD треугольника ABC продолжена за сторону BC на отрезок DE , равный отрезку AD , и точка E соединена с точкой C . Найдите величину угла ACE , если $\angle ACD = 56^\circ$, $\angle ABD = 40^\circ$.
10. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к равным сторонам, равны.
11. На рисунке 8.8 $AB = BC$, $BD = BE$, $\angle ABC = \angle DBE$. Найдите на этом рисунке равные треугольники.
12. На сторонах правильного треугольника ABC отложены равные отрезки AD , BE и CF (рис. 8.9). Точки D , E и F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF правильный.
13. На продолжении сторон правильного треугольника ABC отложены равные отрезки AD , BE и CF (рис. 8.10). Докажите, что точки D , E и F являются вершинами правильного треугольника.

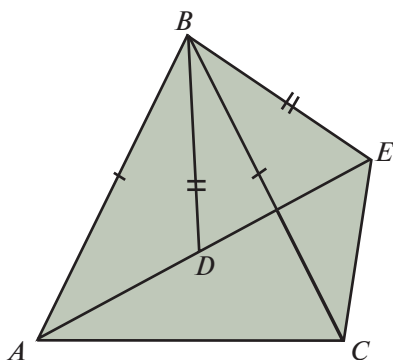


Рис. 8.8

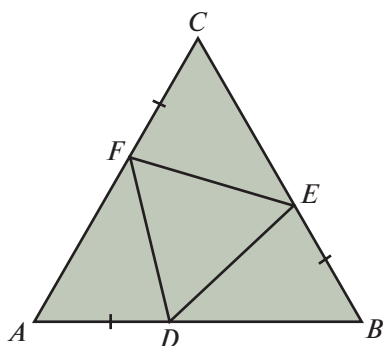


Рис. 8.9

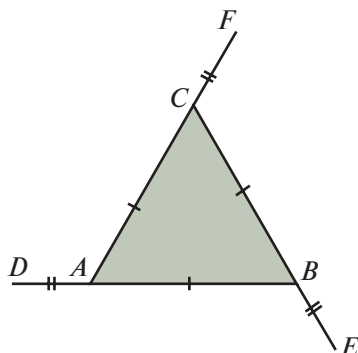


Рис. 8.10

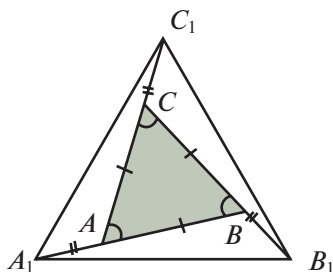


Рис. 8.11

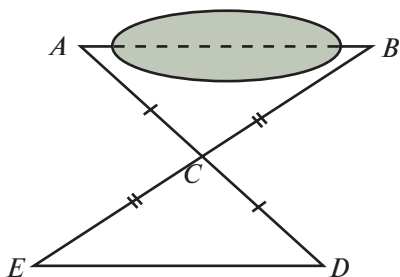


Рис. 8.12

14. По рисунку 8.11 докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный.
15. Докажите, что в правильном четырёхугольнике диагонали равны.
- *16. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B , между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 8.12), выбирают какую-нибудь точку C , для которой можно измерить расстояния AC и BC , и откладывают отрезки $CD = AC$ и $CE = BC$. Тогда расстояние между точками E и D будет равно искомому расстоянию. Объясните почему.

§9 Второй признак равенства треугольников

Сформулируем ещё один признак равенства треугольников.

ТЕОРЕМА

(Второй признак равенства треугольников.) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 9.1). Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 в полуплоскости, определяемой вершиной C_1 . При этом вершина A со-

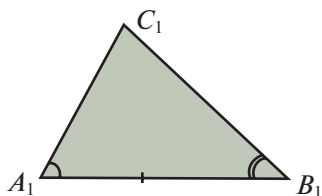
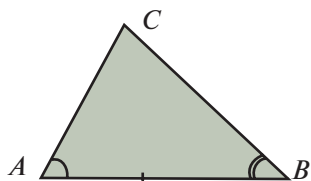


Рис. 9.1

вместится с вершиной A_1 . В силу равенства сторон AB и A_1B_1 вершина B совместится с вершиной B_1 . В силу равенства углов A и A_1 сторона AC пойдёт по стороне A_1C_1 , и в силу равенства углов B и B_1 сторона BC пойдёт по стороне B_1C_1 . Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A_1B_1C_1$. Следовательно, эти треугольники равны.

ПРИМЕР 1. На рисунке 9.2 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Будут ли треугольники CDA и ABC равны?

Решение. Да. Треугольники CDA и ABC равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона и $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ по условию).

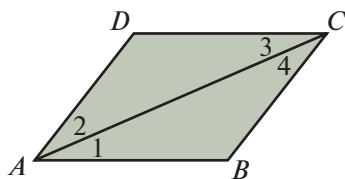


Рис. 9.2

ПРИМЕР 2. На рисунке 9.3 $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

Решение. Треугольники AOC и BOD равны по второму признаку равенства треугольников ($AO = BO$, $\angle OAC = \angle OBD$, $\angle AOC = \angle BOD$). Следовательно, $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

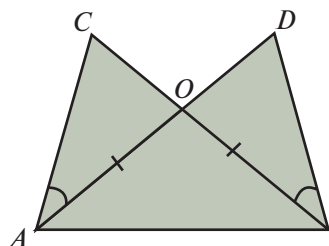


Рис. 9.3

Вопрос

Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

Задачи

1. В треугольнике ABC высота BH является и биссектрисой. Будут ли треугольники ABH и CBH равны?
2. Сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника. Следует ли из этого, что данные треугольники равны?
3. На рисунке 9.4 дана фигура, у которой $AD = CF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны.

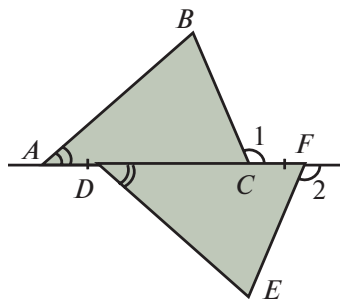


Рис. 9.4

4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 9.5), $OB = OC$ и $\angle B = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOC и DOB .
5. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O (рис. 9.6), $AO = OC$ и $\angle A = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOB и COD .
6. На рисунке 9.7 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что треугольники ABC и CDA равны. Найдите AB и BC , если $AD = 19$ см, $CD = 11$ см.
7. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC лежит на биссектрисах углов A и C . Докажите, что треугольники ABC и ADC равны.
8. Лучи AD и BC пересекаются в точке O (рис. 9.8), $\angle 1 = \angle 2$, $OC = OD$. Докажите, что $\angle A = \angle B$.
9. На рисунке 9.9 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ см. Найдите DB .

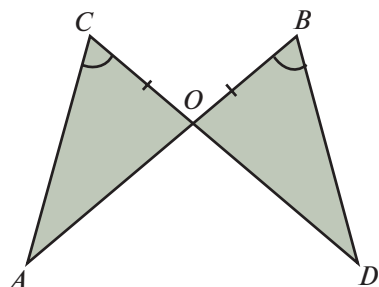


Рис. 9.5

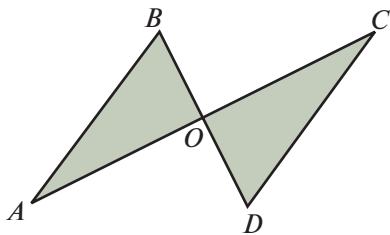


Рис. 9.6

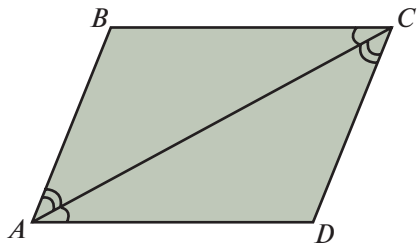


Рис. 9.7

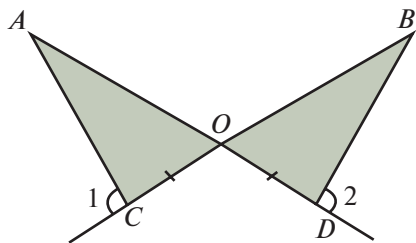


Рис. 9.8

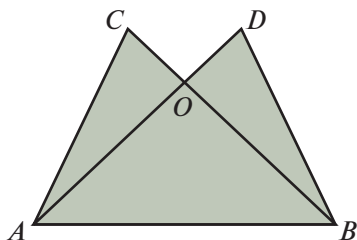


Рис. 9.9

10. В треугольнике ABC $AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 9.10). Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.
11. На рисунке 9.11 $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $BD = CE$.

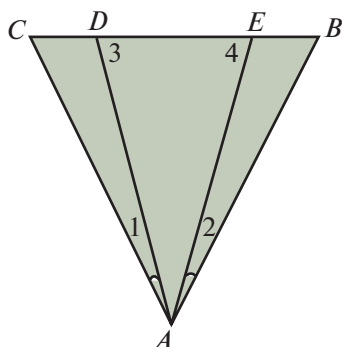


Рис. 9.10

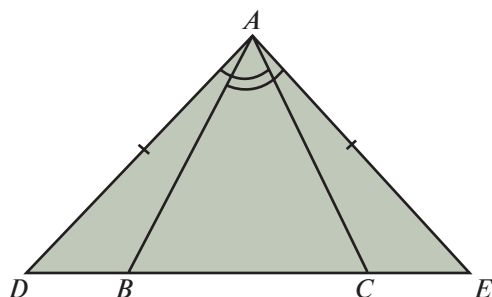


Рис. 9.11

12. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы равных углов равны.
13. В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 9.12) $\angle DAB = \angle CBA$ и диагонали AC и BD образуют со стороной AB равные углы. Докажите, что $AC = BD$.
14. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (рис. 9.13). Отрезки CD и C_1D_1 образуют со сторонами соответственно CB и C_1B_1 равные углы. Докажите, что $AD = A_1D_1$.

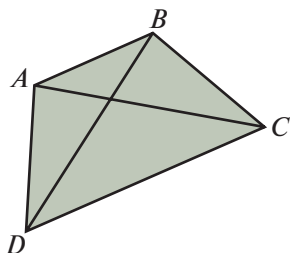


Рис. 9.12

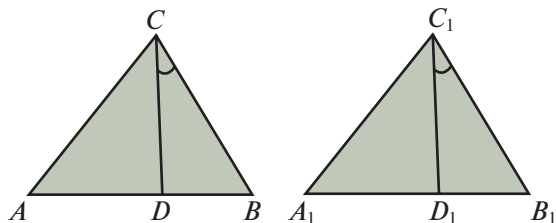


Рис. 9.13

15. Докажите, что прямая, перпендикулярная биссектрисе угла, отсекает на его сторонах равные отрезки.

16. На рисунке 9.14 укажите пары равных треугольников.

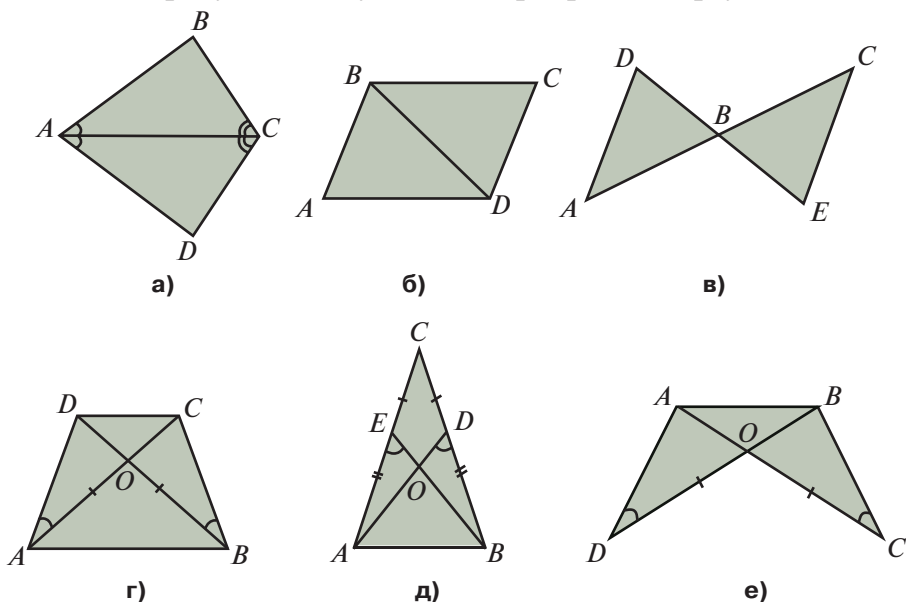


Рис. 9.14

§10 Равнобедренные треугольники

В зависимости от соотношений между сторонами треугольники подразделяются на следующие виды: а) разносторонние; б) равнобедренные; в) равносторонние.

Треугольник называется **разносторонним**, если у него стороны попарно не равны (рис. 10.1, а).

Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны (рис. 10.1, б).

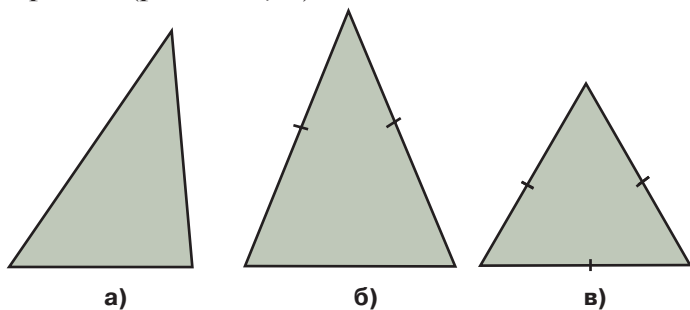


Рис. 10.1

Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием*.

Треугольник называется *равносторонним*, если у него все стороны равны (рис. 10.1, в на с. 58).

ТЕОРЕМА

В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является одновременно медианой и высотой.

Доказательство. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $AC = BC$, CD — биссектриса (рис. 10.2). Тогда треугольник ACD равен треугольнику BCD по первому признаку равенства треугольников ($AC = BC$, CD — общая сторона, $\angle ACD = \angle BCD$). Следовательно, имеют место равенства $AD = BD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Первое из этих равенств означает, что CD является медианой данного треугольника, второе — что CD является его высотой.

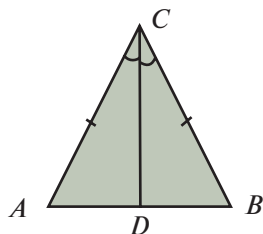


Рис. 10.2

Таким образом, в равнобедренном треугольнике ABC один и тот же отрезок CD одновременно является биссектрисой, медианой и высотой, а также перпендикуляром к основанию, проходящим через его середину.

Так как каждое из этих свойств вполне определяет положение отрезка CD , то наличие одного из них влечёт за собой все остальные. Например, высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является одновременно биссектрисой угла при вершине, медианой, проведённой к основанию, и перпендикуляром к основанию, проходящим через его середину.

ТЕОРЕМА

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство. Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AC = BC$). Докажем, что угол A равен углу B . Воспользуемся первым признаком равенства треугольников, применённым к треугольнику ABC и треугольнику BAC , т. е. к тому же самому треугольнику, вершины в котором записаны в другом порядке. Имеем: $AC = BC$, $BC = AC$, $\angle ACB = \angle BCA$. Следовательно, эти треугольники равны. Значит, $\angle A = \angle B$.

Из этой теоремы следует, что у равностороннего треугольника все углы равны, и, значит, равносторонний треугольник является правильным.

ТЕОРЕМА

(Признак равнобедренного треугольника.) Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол A равен углу B (рис. 10.3). Воспользуемся вторым признаком равенства треугольников, применённым к треугольнику ABC и треугольнику BAC , т. е. к тому же самому треугольнику, вершины в котором записаны в другом порядке. Имеем: сторона AB равна стороне BA , $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$. Следовательно, $AC = BC$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный.

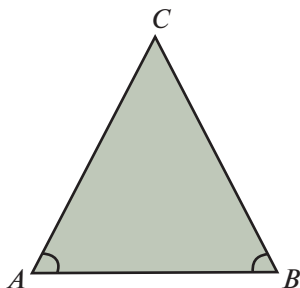


Рис. 10.3

ПРИМЕР 1. На рисунке 10.4 $AB = BC$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

Решение. Треугольник ABC — равнобедренный, так как $AB = BC$. Следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2$ как смежные углы к соответственно равным углам.

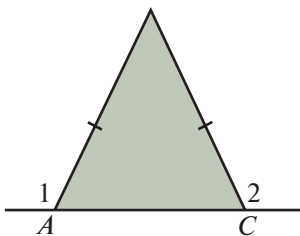


Рис. 10.4

ПРИМЕР 2. На основании AB равнобедренного треугольника ABC даны точки A_1 , B_1 , для которых $AA_1 = B_1B$. Докажите, что треугольник A_1B_1C — равнобедренный.

Решение. Треугольники AA_1C и BB_1C равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = BC$, $AA_1 = B_1B$, $\angle A = \angle B$). Следовательно, $A_1C = B_1C$, и, значит, треугольник A_1B_1C — равнобедренный.

Вопросы

1. Назовите виды треугольников в зависимости от соотношения между их сторонами.
2. Какой треугольник называется: а) разносторонним; б) равнобедренным; в) равносторонним?

3. Какие стороны называются боковыми, а какая — основанием равнобедренного треугольника?
4. Чем является биссектриса, проведённая к основанию равнобедренного треугольника?
5. Что можно сказать об углах при основании равнобедренного треугольника?

Задачи

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 2 м, а основание — 0,4 м. Найдите боковую сторону.
2. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона — 2 м. Найдите основание.
3. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если: а) основание меньше боковой стороны на 3 м; б) основание больше боковой стороны на 3 м.
4. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника относятся как 3 : 8. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 38 см.
5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD . Найдите её длину, если периметр треугольника ABC равен 50 м, а треугольника ABD — 40 м.
6. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.
7. Треугольники ABC и ABD равнобедренные с общим основанием AB . Докажите равенство треугольников ACD и BCD .
8. От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB . Докажите равенство треугольников: а) CAB_1 и CBA_1 ; б) ABB_1 и BAA_1 .
9. Треугольники ACD и BCD равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CD . Докажите, что треугольники ABC и ABD равнобедренные.
10. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.
11. Докажите, что у равнобедренного треугольника медианы, проведённые к боковым сторонам, равны; биссектрисы, проведённые к боковым сторонам, равны.

12. На рисунке 10.5 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.
13. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.
14. Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой, причём отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB , то треугольник CDE тоже равнобедренный с основанием CD .
15. Отрезки равной длины AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB .
- *16. Докажите, что если медиана и биссектриса, проведённые из одной вершины треугольника, совпадают, то треугольник равнобедренный.

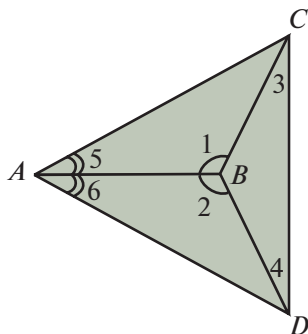


Рис. 10.5

§ 11 Третий признак равенства треугольников

Рассмотрим ещё один признак равенства треугольников.

ТЕОРЕМА

(Третий признак равенства треугольников.) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 11.1). Докажем, что эти треугольники равны. Для этого отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла в точку C_2 , лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно

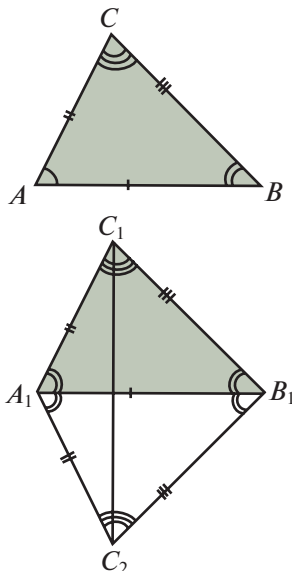


Рис. 11.1

прямой A_1B_1 . Тогда треугольник $A_1B_1C_2$ будет равен треугольнику ABC . При этом луч C_1C_2 может лежать внутри угла $A_1C_1B_1$, совпадать с одной из его сторон или лежать вне этого угла. Рассмотрим первый из этих случаев (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ равнобедренный, и, значит, $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Аналогично из равенства сторон B_1C_1 и B_1C_2 следует, что треугольник $C_1B_1C_2$ равнобедренный, и, значит, $\angle B_1C_1C_2 = \angle B_1C_2C_1$. Складывая равные углы, получаем, что угол C_1 равен углу C_2 . Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$, $A_1B_1C_2$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

ПРИМЕР 1. На рисунке 11.2 $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что: а) $\angle BAC = \angle CDB$; б) $\angle CAD = \angle ADB$.

Решение. Треугольники ABC и DCB равны по третьему признаку ($AB = DC$, $AC = DB$, BC — общая сторона). Следовательно, $\angle BAC = \angle CDB$. Аналогично треугольники ABD и DCA равны по третьему признаку ($AB = DC$, $AC = DB$, AD — общая сторона). Следовательно, $\angle CAD = \angle ADB$.

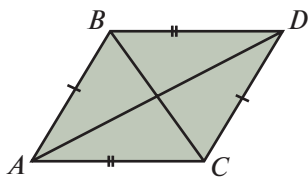


Рис. 11.2

ПРИМЕР 2. В треугольниках ABC и EFG равны стороны AB и EF , BC и FG , а также медианы CD и GH , проведенные соответственно к сторонам AB и EF . Докажите, что треугольники равны.

Решение. Треугольники BCD и FGH равны по третьему признаку равенства треугольников ($BC = FG$, $CD = GH$ по условию, $BD = FH$ как половины равных сторон). Следовательно, $\angle B = \angle F$, и, значит, треугольники ABC и EFG равны по первому признаку равенства треугольников ($BC = FG$, $AB = EF$, $\angle B = \angle F$).

Вопросы

1. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.
2. Сформулируйте третий признак равенства треугольников применительно к равнобедренным треугольникам.
3. Сформулируйте третий признак равенства треугольников применительно к равносторонним треугольникам.

Задачи

1. В треугольниках ABC и MNK справедливы неравенства $AB \neq MN$, $BC \neq NK$, $CA \neq KM$, а треугольники всё же равны. Возможно ли это?
2. Среди изображённых на рисунке 11.3 треугольников укажите пары равных треугольников.
3. Верно ли утверждение, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то эти треугольники равны? Почему?

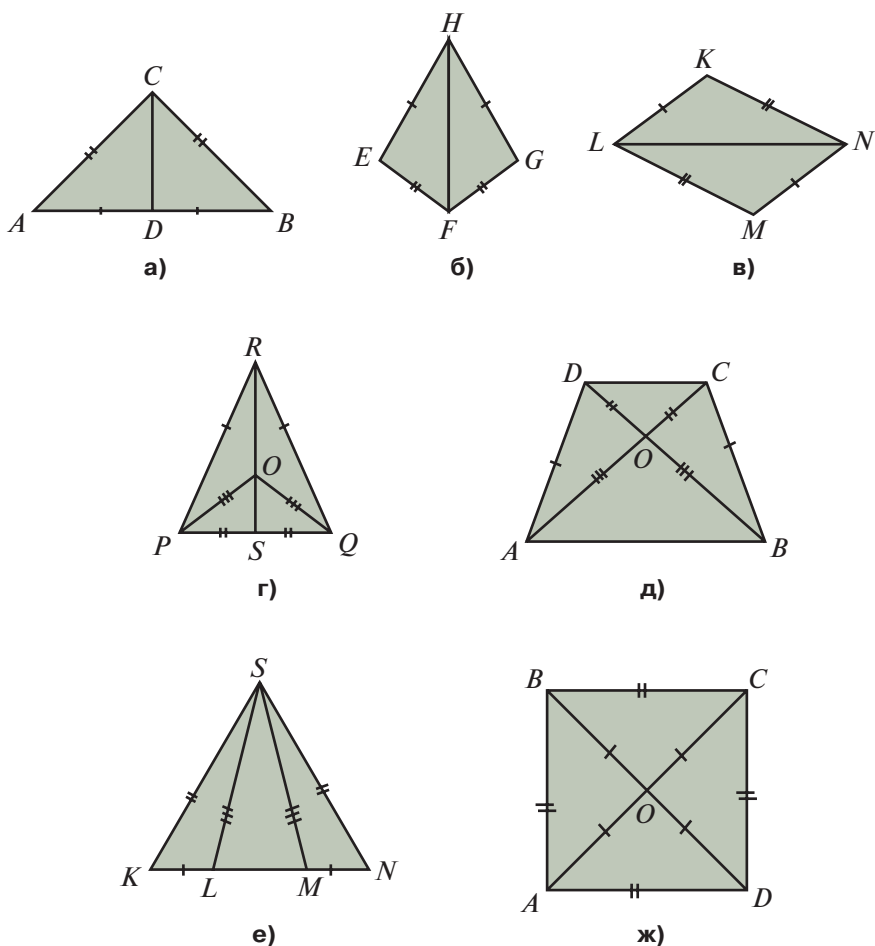


Рис. 11.3

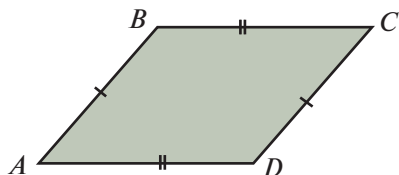


Рис. 11.4

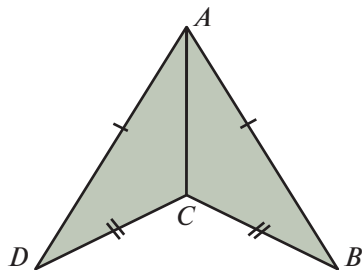


Рис. 11.5

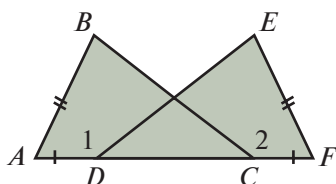


Рис. 11.6

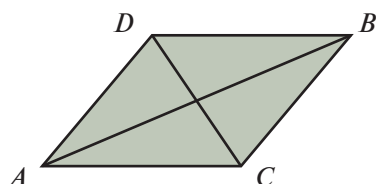


Рис. 11.7

4. На рисунке 11.4 $AB = DC$ и $BC = AD$. Докажите, что угол B равен углу D .
5. Докажите, что у равных треугольников медианы, проведенные из соответственных вершин, равны.
6. На рисунке 11.5 $AB = AD$ и $DC = BC$. Докажите, что: а) $\angle ADC = \angle ABC$; б) луч AC является биссектрисой угла BAD .
7. На рисунке 11.6 $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.
8. Треугольники ABC и BAD равны, причём точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 11.7). Докажите, что: а) треугольники CBD и DAC равны; б) прямая CD делит отрезок AB пополам.
9. Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны (рис. 11.8).

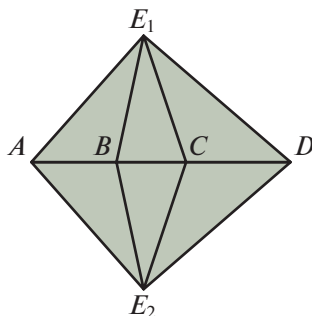


Рис. 11.8

10. На рисунке 11.9 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC , а DF — биссектриса угла ADC . Докажите, что: а) $\angle ABE = \angle CDF$; б) $\triangle ABE = \triangle CDF$.

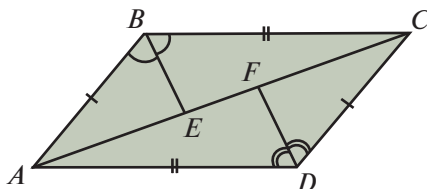


Рис. 11.9

11. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ биссектрисы AD и A_1D_1 равны; $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
- *12. Докажите, что если у выпуклых четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны и диагонали AC и A_1C_1 , то равны и соответствующие углы.
- *13. Верно ли, что если у двух выпуклых четырёхугольников равны соответствующие стороны, то равны и соответствующие углы? Приведите примеры.
- *14. Докажите, что если у выпуклых четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны и $\angle A = \angle A_1$, то $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$. Верно ли это для произвольных четырёхугольников?

§12 Соотношения между сторонами и углами треугольника

В треугольнике ABC (рис. 12.1) продолжим одну из его сторон, например AC , и рассмотрим угол BCD , смежный с углом C данного треугольника. Такой угол называют **внешним углом** треугольника, а углы самого треугольника иногда называют **внутренними углами** треугольника. Итак:

- угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется **внешним углом** этого треугольника.

При каждой вершине треугольника, продолжая стороны треугольника, можно построить по два внешних угла. Эти два угла равны как вертикальные.

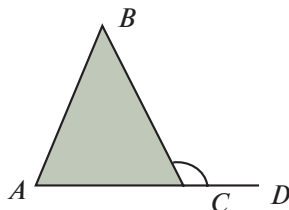


Рис. 12.1

ТЕОРЕМА

Внешний угол произвольного треугольника больше каждого его внутреннего угла, не смежного с ним.

Доказательство. Пусть ABC — произвольный треугольник. Рассмотрим, например, внешний угол BCD и докажем, что он больше внутреннего угла ABC (рис. 12.2). Для этого через вершину A и середину E стороны BC проведём прямую и отложим на ней отрезок EF , равный AE . Треугольники ABE и FCE равны по первому признаку равенства треугольников ($BE = CE$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BCF$. Но вершина F лежит внутри угла BCD . Поэтому угол BCF составляет только часть угла BCD . Значит, $\angle BCD > \angle ABC$. Аналогично доказывается, что $\angle BCD > \angle BAC$ (сделайте это самостоятельно).

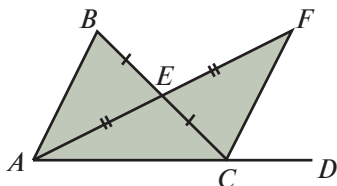


Рис. 12.2

Следствие 1. В треугольнике может быть только один тупой угол.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол C тупой. Тогда смежный с ним внешний угол будет острым. По доказанной теореме он больше внутренних углов A и B . Следовательно, углы A и B тоже острые.

Следствие 2. В треугольнике может быть только один прямой угол.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

ТЕОРЕМА

(Соотношение между сторонами и углами треугольника.)
В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC . Докажем, что угол C больше угла B . Для этого отложим на луче AB отрезок AD , равный стороне AC (рис. 12.3). Треугольник ACD — равнобедренный. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

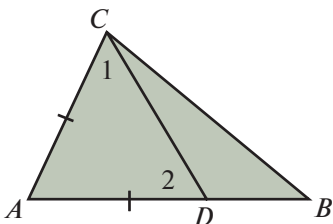


Рис. 12.3

Угол 1 составляет часть угла C , поэтому $\angle 1 < \angle C$. С другой стороны, угол 2 является внешним углом треугольника BCD , поэтому $\angle 2 > \angle B$. Следовательно, имеем $\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$.

Следствие. В произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол C больше угла B (рис. 12.4). Стороны AB и AC не могут быть равны, так как в этом случае треугольник ABC был бы равнобедренным и, следовательно, угол C равнялся бы углу B . Сторона AB не может быть меньше стороны AC , так как в этом случае, по доказанному, угол C был бы меньше угла B . Остаётся только, что сторона AB больше стороны AC .

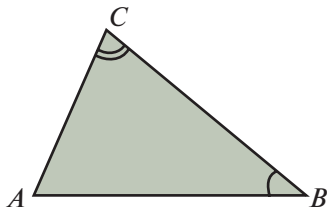


Рис. 12.4

ПРИМЕР 1. Могут ли в треугольнике градусные величины двух углов быть равны 130° и 60° ?

Решение. Нет, так как внешний угол к углу треугольника в 130° равен 50° , а он должен быть больше всех остальных углов треугольника.

ПРИМЕР 2. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

Решение. Пусть прямые a и b перпендикулярны прямой c (рис. 12.5) и A, B — их точки пересечения с прямой c . Если бы прямые a и b пересекались в точке C , то внешний угол при вершине A треугольника ABC был бы равен 90° и равен внутреннему углу B , что противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Значит, прямые a и b не пересекаются, т. е. параллельны.

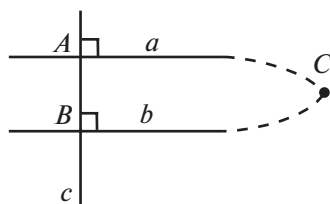


Рис. 12.5

Вопросы

1. Какой угол называется внешним углом треугольника?
2. Сколько внешних углов имеется при каждой вершине треугольника?
3. Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.

4. Сформулируйте и докажите теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.

Задачи

1. Может ли внешний угол треугольника быть больше:
а) одного внутреннего угла; б) двух внутренних углов этого треугольника? Приведите примеры.
2. Какая сторона треугольника лежит против: а) прямого угла; б) тупого угла?
3. Известно, что в треугольнике ABC $BC > AC > AB$. Какой из углов больше: а) B или A ; б) C или A ; в) B или C ?
4. Сравните стороны треугольника ABC , если:
а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.
5. Какой вид имеет треугольник, если известно, что:
а) два его угла равны между собой; б) три его угла равны между собой?
6. Может ли в треугольнике быть: а) два прямых угла; б) два тупых угла?
7. Докажите, что если один из углов треугольника прямой, то два другие острые.
8. Докажите, что если один из углов треугольника тупой, то два другие острые.
9. Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.
10. Могут ли в треугольнике градусные величины двух углов быть равны 100° и 90° ?
11. Точка D , взятая внутри треугольника ABC , соединена с вершинами A и C . Докажите, что угол ADC больше угла ABC .
12. Может ли внешний угол при основании равнобедренного треугольника быть: а) прямым; б) острым; в) тупым?
13. Если один из внешних углов треугольника острый, то какими являются его остальные внешние углы?
14. В треугольнике ABC сторона AB наибольшая: а) какие углы этого треугольника острые; б) каким может быть угол C ?
15. Докажите, что в равнобедренном треугольнике ABC отрезок, соединяющий любую точку основания AB , отличную от A и B , с вершиной C , меньше боковой стороны.

- *16. Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведённой из той же вершины.
- 17. Докажите, что средней по величине стороне треугольника противолежит средний по величине угол.
- 18. Докажите, что среднему по величине углу треугольника противолежит средняя по величине сторона.
- 19. Используя соотношение между сторонами и углами треугольника, докажите признак равнобедренного треугольника: «Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный».
- *20. Пусть в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$. Докажите, что: а) если CD — медиана, то $\angle ACD < \angle BCD$; б) если CD — биссектриса, то $AD > BD$.
- *21. Можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника?

§ 13 Соотношения между сторонами треугольника

Одним из основных соотношений между сторонами треугольника является неравенство треугольника.

ТЕОРЕМА

(Неравенство треугольника.) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC . Отложим на продолжении стороны AB отрезок BD , равный стороне BC (рис. 13.1). Треугольник BDC — равнобедренный. Поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Угол 2 составляет часть угла ACD . Следова-

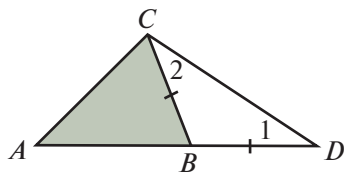


Рис. 13.1

тельно, $\angle 2 < \angle ACD$. Таким образом, в треугольнике ACD угол C больше угла D . Воспользуемся тем, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Получим неравенство $AD > AC$. Но $AD = AB + BD = AB + BC$. Следовательно, имеем неравенство $AB + BC > AC$, или $AC < AB + BC$, означающее, что сторона AC треугольника меньше суммы двух других сторон.

Следствие 1. Каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AC больше стороны BC . По доказанной теореме выполняется неравенство $AB + BC > AC$. Вычитая из обеих частей этого неравенства BC , получим неравенство $AB > AC - BC$, означающее, что сторона AB треугольника больше разности двух сторон AC и BC .

Следствие 2. Если выполняется равенство $AC + CB = AB$, то точка C лежит на отрезке AB между точками A и B .

Доказательство. Действительно, если точка C не принадлежит прямой AB , то будет выполняться неравенство $AC + CB > AB$. Если точка C принадлежит прямой AB и находится вне отрезка AB , то также будет выполняться это неравенство. Остаётся одна возможность — точка C лежит на отрезке AB между точками A и B .

ТЕОРЕМА

Длина отрезка, соединяющего концы ломаной, не превосходит длины самой ломаной.

Доказательство. Рассмотрим, например, ломаную $ABCDE$ (рис. 13.2). Заменим соседние стороны AB и BC на отрезок AC . При этом длина ломаной уменьшится или, по крайней мере, не увеличится. Будем и дальше заменять соседние стороны ломаной на отрезки, пока не дойдём до отрезка, соединяющего начало и конец ломаной. При этом каждый раз длина ломаной не будет увеличиваться. Значит, длина отрезка, соединяющего концы ломаной, не превосходит длины всей ломаной.

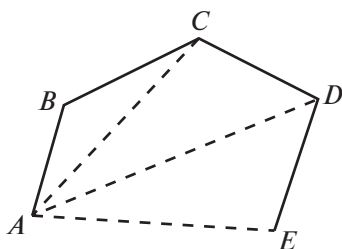


Рис. 13.2

ПРИМЕР 1. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 15 см, а другая 7 см. Найдите его периметр.

Решение. Сторона, равная 15 см, не может быть основанием равнобедренного треугольника, так как в этом случае не выполнялось бы неравенство треугольника ($7 + 7 < 15$). Поэтому сторона, равная 15 см, является боковой стороной, и, следовательно, периметр данного треугольника равен $7 + 15 + 15 = 37$ (см).

ПРИМЕР 2. Докажите, что если для точек A , B , C и D выполняется равенство $AB + BC + CD = AD$, то они принадлежат одной прямой.

Решение. Для точек A , B и D будет выполняться неравенство $AB + BD \leq AB + BC + CD = AD$. С другой стороны, выполняется неравенство $AD \leq AB + BD$. Следовательно, имеем равенство $AB + BD = AD$, из которого вытекает, что точки A , B и D принадлежат одной прямой. Аналогично, взяв вместо точки B точку C , получим, что точки A , C и D принадлежат одной прямой. Значит, все четыре точки принадлежат одной прямой.

Вопросы

1. В чём заключается неравенство треугольника?
2. Что можно сказать о разности двух сторон треугольника?
3. Что можно сказать о точке C , для которой выполняется равенство $AC + CB = AB$?
4. Может ли длина отрезка, соединяющего концы ломаной, быть: а) больше длины ломаной; б) равной длине ломаной?

Задачи

1. Можно ли построить треугольник со сторонами: а) 13 см, 2 см, 8 см; б) 1 м, 0,5 м, 0,5 м?
2. Могут ли стороны треугольника относиться как: а) 1 : 2 : 3; б) 2 : 3 : 6; в) 1 : 1 : 2?
3. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая 10 см. Какая из них является основанием?
4. Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 6 см и 3 см; б) 8 см и 2 см.
5. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 12 см, а другая — 5 см. Найдите периметр данного треугольника.
6. Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см. Одна из сторон больше другой в два раза. Найдите длины сторон этого треугольника.
7. Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.
8. Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов острый. Найдите стороны треугольника.

9. Докажите, что если для точек A , B и C выполняется равенство $AC - AB = BC$, то они принадлежат одной прямой.
10. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины его периметра.
11. Существуют ли на плоскости точки A , B , C , D , для которых выполняется неравенство $AB + BC + CD < AD$?
12. Для точек A , B , C , D одной прямой выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$. Выясните, как расположены эти точки.
- *13. Верно ли, что если для точек A , B , C , D выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$, то они принадлежат одной прямой?
- *14. Докажите, что диагонали четырёхугольника меньше его полупериметра.
- *15. В каких пределах может изменяться периметр треугольника, если две его стороны равны a и b ?
- *16. Для точек A , B , C , D на плоскости выполняются равенства $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см и неравенство $AC + BD \leq 2$ см. Найдите AD .
- *17. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше его половины.
- *18. Докажите, что для всякой точки O , взятой внутри треугольника ABC , выполняется неравенство $AB + BC > AO + OC$.
- *19. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до вершин данного многоугольника больше его полупериметра.
- *20. Четыре населённых пункта расположены в вершинах выпуклого четырёхугольника. В каком месте следует построить пекарню, чтобы сумма расстояний от неё до всех четырёх данных пунктов была наименьшей?

§ 14 Прямоугольные треугольники

В зависимости от величины углов различают следующие виды треугольников: остроугольные, тупоугольные и прямоугольные.

Треугольник называется *остроугольным*, если у него все углы острые (рис. 14.1, а на с. 74).

Треугольник называется **тупоугольным**, если у него есть тупой угол (рис. 14.1, б).

Треугольник называется **прямоугольным**, если у него есть прямой угол (рис. 14.1, в).

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется **гипотенузой**, две другие стороны называются **катетами**.

На рисунке 14.1, в $\angle C = 90^\circ$, AB — гипотенуза, AC и BC — катеты прямоугольного треугольника ABC .

Так как внешний угол к прямому углу треугольника является прямым и он больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним, то в прямоугольном треугольнике только один прямой угол, а остальные два — острые.

Так как против большего угла в треугольнике лежит большая сторона, то гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катетов.

Признаки равенства треугольников, применённые к прямоугольным треугольникам, дают следующие признаки равенства прямоугольных треугольников.

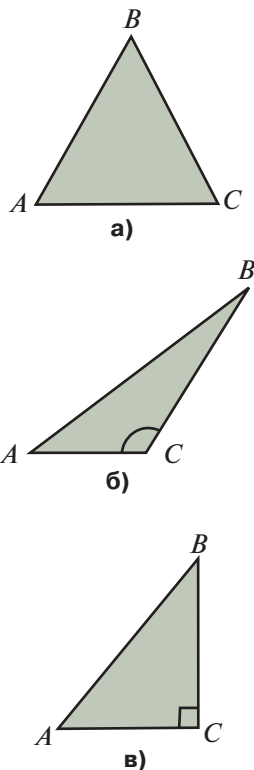


Рис. 14.1

ТЕОРЕМА

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Прямоугольные треугольники будут равны по двум сторонам и углу между ними, т. е. по первому признаку равенства треугольников.

ТЕОРЕМА

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Прямоугольные треугольники будут равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, т. е. по второму признаку равенства треугольников.

Рассмотрим ещё один признак равенства прямоугольных треугольников.

ТЕОРЕМА

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство аналогично доказательству третьего признака равенства треугольников. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника, в которых углы C и C_1 прямые, $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$ (рис. 14.2). Отложим треугольник ABC от луча A_1C_1 так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1 , а вершина B перешла бы в точку B_2 , лежащую по другую сторону от точки B_1 относительно прямой A_1C_1 . Тогда треугольник $A_1B_2C_1$ будет равен треугольнику ABC . Так как углы $A_1C_1B_1$ и $A_1C_1B_2$ прямые, то точки C_1 , B_1 и B_2 принадлежат одной прямой. Из равенства сторон A_1B_1 и A_1B_2 следует, что треугольник $B_1A_1B_2$ — равнобедренный. Воспользуемся

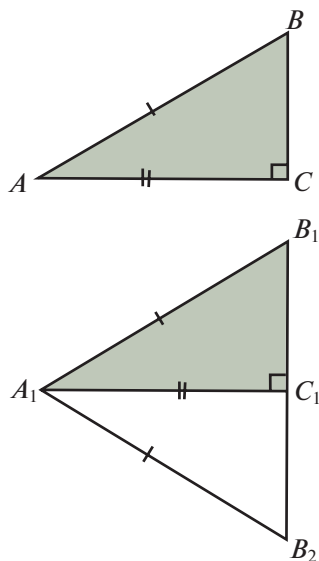


Рис. 14.2

тем, что высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является биссектрисой. Получим, что A_1C_1 — биссектриса, и, значит, равны углы $C_1A_1B_1$ и $C_1A_1B_2$. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

ПРИМЕР 1. Может ли прямоугольный треугольник иметь стороны, равные 4, 5, 5?

Решение. Нет, так как гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катетов и, следовательно, одна сторона прямоугольного треугольника должна быть больше двух других сторон.

ПРИМЕР 2. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный.

Решение. Пусть в треугольнике ABC высоты AD и BE равны (рис. 14.3). Прямоугольные треугольники ABD и BAE равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle B = \angle A$, и, следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

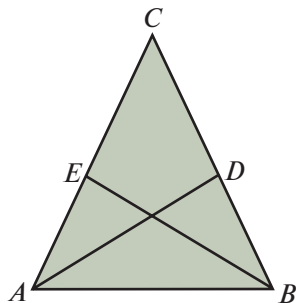


Рис. 14.3

Вопросы

1. Назовите виды треугольников в зависимости от их углов.
2. Какой треугольник называется: а) остроугольным; б) тупоугольным; в) прямоугольным?
3. Что называется гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника?
4. Что больше — катет или гипотенуза прямоугольного треугольника и почему?
5. Сформулируйте и докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.

Задачи

1. Нарисуйте какие-нибудь прямоугольные треугольники.
2. Может ли прямоугольный треугольник иметь катеты 11 см и 111 см?
3. Могут ли неравные прямоугольные треугольники иметь равные гипотенузы?
4. Могут ли неравные прямоугольные треугольники иметь равные катеты?
5. Может ли прямоугольный треугольник иметь два прямых угла?
6. Может ли прямоугольный треугольник иметь тупой угол?
7. Может ли прямоугольный треугольник быть: а) равнобедренным; б) равносторонним?
8. Стороны прямоугольного треугольника равны 3 см, 4 см, 5 см. Чему равна гипотенуза?
9. На высоте равнобедренного треугольника, опущенной на его основание, взята произвольная точка. Докажите,

что она одинаково удалена от вершин при основании.

10. Докажите, что если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
11. В равнобедренном треугольнике ABC точки D и E взяты на основании AC так, что $AD = CE$. Из точек D и E к основанию проведены перпендикуляры до пересечения с боковыми сторонами треугольника соответственно в точках M и N . Докажите, что $DM = EN$.
12. Докажите, что в равнобедренном треугольнике две высоты, проведённые из вершин основания, равны.
13. Докажите, что если катет и высота, опущенная на гипотенузу, одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и высоте, опущенной на гипотенузу, другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
14. В треугольнике KLM проведена медиана LN . Докажите, что высоты треугольников MLN и KLN , проведённые соответственно из вершин M и K , равны.
15. На сторонах угла с вершиной O взяты точки A и B так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C . Докажите, что луч OC — биссектриса данного угла.
- *16. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена медиана BD . Какой из углов больше: ABD или CBD ?
- *17. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена биссектриса BE . Какой из отрезков больше: AE или CE ?
- *18. Как измерить ширину реки, находясь на одном её берегу?

§ 15 Перпендикуляр и наклонная

Рассмотрим прямую a и не принадлежащую ей точку A . Пусть прямая b проходит через точку A и перпендикулярна прямой a , B — точка пересечения прямых a и b . Отрезок AB называется **перпендикуляром**, опущенным из точки A на прямую a (рис. 15.1 на с. 78). Точка B называется **основанием пер-**

пендикуляра. Длина перпендикуляра называется **расстоянием** от точки A до прямой a .

Для произвольной точки C на прямой a , отличной от B , отрезок AC называется **наклонной**, проведённой из точки A к прямой a . Точка C называется **основанием наклонной**. Отрезок BC называется **проекцией наклонной** на прямую a (рис. 15.1).

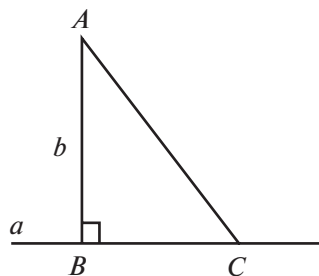


Рис. 15.1

Из соотношений между сторонами в прямоугольном треугольнике получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА

Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую, короче всякой наклонной, проведённой из этой точки к этой прямой. Иначе говоря, расстояние от точки до прямой является наименьшим из расстояний от этой точки до точек данной прямой.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a , AB — перпендикуляр, AC — наклонная (см. рис. 15.1). Тогда в прямоугольном треугольнике ABC сторона AB — катет, а AC — гипотенуза. Следовательно, $AB < AC$.

С перпендикулярами и наклонными связана одна классическая задача о нахождении кратчайшего пути на плоскости. Её решение было известно ещё Архимеду (287—212 гг. до н. э.).

Задача. Дана прямая c и две точки A и B на плоскости. Требуется найти такую точку C на этой прямой, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда точки A и B лежат по разные стороны от прямой c (рис. 15.2, а на с. 79). Покажем, что в этом случае искомой точкой C является точка пересечения отрезка AB и прямой c . Действительно, из неравенства треугольника следует, что для любой другой точки C' прямой c выполняется неравенство $AC' + C'B > AC + CB$, и, значит, сумма $AC + CB$ будет наименьшей.

Пусть теперь точки A и B лежат по одну сторону от прямой c (рис. 15.2, б на с. 79). Идея нахождения искомой точки C состоит в замене точки B на точку B' , лежащую по другую

сторону от прямой c , и сведении этого случая к предыдущему. Из точки B опустим на прямую c перпендикуляр BH и отложим отрезок BH' , равный BH (рис. 15.2, б). Пусть C' — точка на прямой c . Прямоугольные треугольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Поэтому сумма $AC' + C'B$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC' + C'B'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A , B' , C' принадлежат одной прямой, т. е. искомая точка C является точкой пересечения отрезка AB' с прямой c .

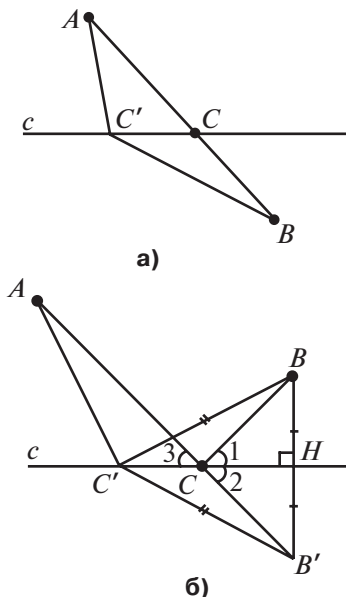


Рис. 15.2

Заметим, что полученная точка C обладает тем свойством, что углы, образованные прямыми AC и CB и прямой c , равны. Действительно, $\angle 1 = \angle 2$ как соответствующие углы в равных треугольниках BHC и $B'HC$, $\angle 2 = \angle 3$ как вертикальные углы. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Из этого равенства углов вытекает закон отражения света. А именно известно, что луч света распространяется по кратчайшему пути. Поэтому если луч света исходит из точки A , отражается от прямой c и приходит в точку B , то точка C будет точкой отражения, и, таким образом, имеет место закон отражения света: угол падения светового луча равен углу отражения.

ПРИМЕР 1. Точки A и B расположены по одну сторону и на одинаковом расстоянии от прямой c . Где на прямой c расположена точка C , для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая?

Решение. Пусть AG и BH — перпендикуляры, опущенные на прямую c (рис. 15.3). Тогда треугольники AGC и BHC равны, и, следовательно, точка C — середина отрезка GH .

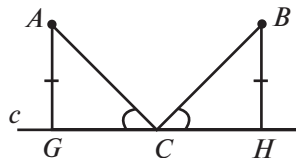


Рис. 15.3

ПРИМЕР 2. Докажите, что для произвольной прямой и точки, ей не принадлежащей, существует перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую.

Решение. Пусть AB — прямая, C — точка, ей не принадлежащая (рис. 15.4). Выберем на прямой AB какую-нибудь точку D . Если прямая CD перпендикулярна AB , то отрезок CD — искомым перпендикуляром. В противном случае отложим от луча DA в полуплоскость, не содержащую точку C , угол ADC' , равный углу ADC . Точку C' выберем так, чтобы отрезки DC и DC' были равны. Точку пересечения прямых AB и CC' обозначим H . Треугольники CDH и $C'DH$ равны ($CD = C'D$, DH — общая сторона, $\angle CDH = \angle C'DH$). Значит, $\angle CHD = \angle C'HD$, и, следовательно, $\angle CHD$ — прямой. Таким образом, CH — искомым перпендикуляром, опущенным из точки C на прямую AB .

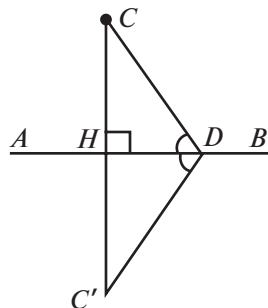


Рис. 15.4

Вопросы

1. Что называется перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую? Что называется основанием перпендикуляра?
2. Что называется наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой? Что называется: а) основанием наклонной; б) проекцией наклонной?
3. Что называется расстоянием от точки до прямой?
4. Что больше — перпендикуляр или наклонная, проведённые из одной точки к данной прямой?
5. Сформулируйте и решите задачу Архимеда.
6. Сформулируйте и обоснуйте закон отражения света.

Задачи

1. Сколько наклонных заданной длины можно провести из данной точки к данной прямой?
2. Верно ли, что проекции равных наклонных равны?
3. Из точки вне данной прямой с помощью угольника проведите перпендикуляр и наклонную.
4. С помощью угольника измерьте расстояние от данной точки до данной прямой, не проходящей через эту точку.

5. С помощью угольника для данной прямой отметьте точки, находящиеся от неё на расстоянии: а) 1 см; б) 3 см; в) 4,5 см.
6. С помощью угольника проведите прямые, находящиеся от данной точки на расстоянии: а) 1 см; б) 2 см; в) 3,5 см.
7. Даны две точки, расстояние между которыми 5 см. С помощью угольника через одну из них проведите прямую, удалённую от другой на расстояние 3 см.
8. Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AB и наклонные AB_1 , AB_2 . Какая из двух наклонных меньше, если: а) B_1 лежит между B и B_2 ; б) B лежит между B_1 и B_2 , $BB_1 < BB_2$?
9. Докажите, что если наклонные проведены из данной точки к данной прямой, то: а) равные наклонные имеют равные проекции; б) большая наклонная имеет большую проекцию.
10. Сформулируйте утверждения, обратные утверждениям задачи 9. Верны ли они? Докажите.
11. На рисунке 15.5 $AB \perp DB$ и $DC \perp DB$, $DE = BE$. Докажите, что расстояние AB равно длине отрезка DC .
12. Докажите, что треугольник является равнобедренным, если совпадают проведённые из одной вершины: а) высота и медиана; б) биссектриса и высота.
13. На рисунке 15.6 $BD = BF$, $DE \perp BC$, $FG \perp AB$. Докажите, что $DE = FG$.
14. На рисунке 15.7 $AD = DB = BF = FC$, $DE \perp AB$, $FG \perp BC$. Докажите, что $DE = FG$.

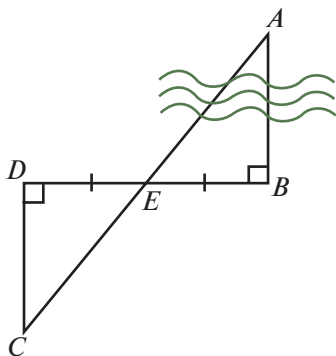


Рис. 15.5

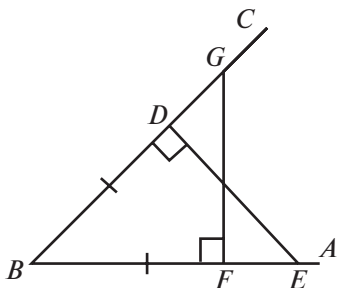


Рис. 15.6

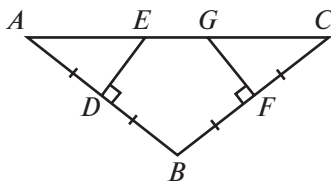


Рис. 15.7

15. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a . Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны. Докажите, что равны отрезки AD и CB .
16. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки, принадлежащей биссектрисе угла, на его стороны, равны.
- *17. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, перпендикулярной данной.
- *18. Докажите, что в произвольном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведёнными из той же вершины.
- *19. Внутри острого угла взяты точки C_1 и C_2 . Найдите на сторонах угла такие точки A и B , чтобы длина ломаной C_1ABC_2 была наименьшей.
- *20. Внутри острого угла взята точка C . Найдите на сторонах угла точки A и B такие, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.
- *21. Докажите, что если точка C лежит внутри прямого или тупого угла, то на сторонах угла не существует точек A и B , для которых периметр треугольника ABC был бы наименьшим.
- *22. В каком направлении через город должна проходить магистраль, чтобы два данных населённых пункта A и B лежали по разные стороны от неё на одинаковом расстоянии?
- *23. Как должна проходить магистраль, чтобы расстояние от неё до трёх данных населённых пунктов было одинаковым? Укажите положение магистрали, при котором это расстояние минимально.
- *24. Для снабжения водой двух населённых пунктов, расположенных по одну сторону от канала, требуется на берегу канала построить водонапорную башню. В каком месте следует построить башню, чтобы суммарная длина труб от неё до каждого из пунктов (по прямой) была наименьшей?
- *25. Дана прямая c и две точки A и B на плоскости. Найдите такую точку C на этой прямой, чтобы разность расстояний $AC - CB$ была наибольшей. Рассмотрите случаи, когда точки A и B расположены по одну сторону и по разные стороны от прямой c .

ОКРУЖНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

§ 16 Окружность и круг

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от данной точки на данное расстояние.

Данная точка называется **центром окружности**, а данное расстояние — **радиусом окружности**. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром (рис. 16.1).

Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек плоскости, расстояние от которых до точки O равно R .

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от данной точки на расстояние, не превосходящее данное.

Данная точка называется **центром круга**, а данное расстояние — **радиусом круга**.

Таким образом, круг с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек плоскости, удалённых от точки O на расстояние, не превосходящее R .

Круг можно представлять себе как фигуру, ограниченную окружностью.

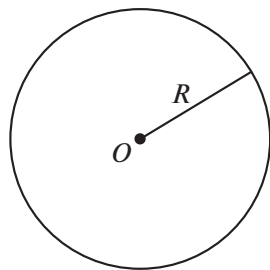


Рис. 16.1

Отрезок, соединяющий произвольные две точки окружности, называется *хордой* этой окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром* этой окружности.

Хордой и диаметром круга называют соответственно хорду и диаметр окружности, ограничивающей этот круг.

ТЕОРЕМА

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Пусть дана окружность с центром в точке O , диаметр AB перпендикулярен хорде CD . Если хорда CD проходит через центр O , то она является диаметром и делится в точке O пополам. Пусть хорда CD не проходит через центр O . Обозначим точку её пересечения с диаметром AB через E (рис. 16.2). Треугольники OEC и OED равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, $EC = ED$.

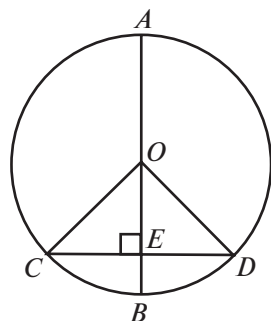


Рис. 16.2

ПРИМЕР 1. Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Решение. Пусть дана окружность с центром в точке O и радиусом R , AB — произвольная хорда, отличная от диаметра (рис. 16.3). Проведём отрезки OA и OB . В треугольнике AOB сторона AB меньше суммы двух других сторон, т. е. $AB < OA + OB = R + R = 2R$. Следовательно, хорда AB меньше диаметра.

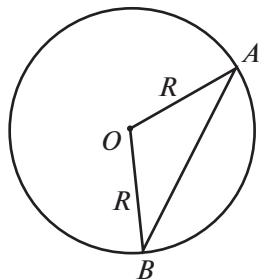


Рис. 16.3

ПРИМЕР 2. Точка A расположена вне окружности с радиусом R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d . Чему равно наименьшее расстояние от точки A до точек данной окружности?

Решение. Пусть B — точка пересечения окружности с отрезком OA (рис. 16.4 на с. 85). Покажем, что расстояние AB является наименьшим из всех возможных расстояний от точки A до точек окружности. Действительно, для любой

другой точки C окружности выполняется неравенство $AB + BO < AC + CO$. Так как $BO = CO = R$, то из этого неравенства получаем неравенство $AB < AC$. Учитывая, что $AO = d$ и $BO = R$, получаем, что искомое наименьшее расстояние равно длине отрезка AB , т. е. равно $d - R$.

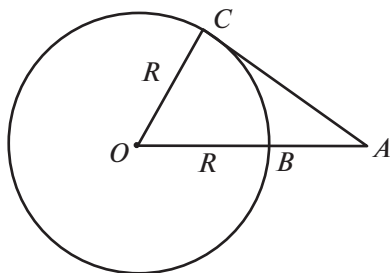


Рис. 16.4

Вопросы

1. Какая фигура называется окружностью? Что называется:
а) центром окружности; б) радиусом окружности?
2. Какая фигура называется кругом? Что называется:
а) центром круга; б) радиусом круга?
3. Что называется:
а) хордой; б) диаметром окружности?
4. Как связаны между собой диаметр и радиус?
5. Чем является наибольшая хорда окружности?
6. В каком отношении делит диаметр перпендикулярную ему хорду?

Задачи

1. Какому неравенству удовлетворяют точки A , лежащие:
а) в круге с центром в точке O и радиусом R ; б) вне этого круга?
2. Сколько диаметров можно провести через центр окружности?
3. Сколько окружностей может проходить через две заданные точки?
4. Найдите диаметр окружности, если известно, что он на 55 мм больше радиуса.
5. Найдите длину наибольшей хорды в окружности, радиус которой равен 5 см.
6. Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус окружности, проходящей через эти точки.
7. Может ли окружность проходить через три заданные точки, принадлежащие одной прямой?
8. Нарисуйте окружность, которая проходит через данные точки A и B ($AB = 6$ см) и имеет радиус 3 см.

9. Точка A расположена вне окружности радиусом R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d . Чему равно наибольшее расстояние от точки A до точек данной окружности?
10. Точка A расположена внутри окружности радиусом R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d . Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?
11. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 50 см и 20 см. Найдите радиус данной окружности.
12. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равны соответственно 20 см и 4 см. Найдите радиус данной окружности.
13. Докажите, что диаметр, проведённый через середину хорды, отличной от диаметра, перпендикулярен к этой хорде.
14. Докажите, что если две хорды перпендикулярны и одна из них в точке пересечения делится пополам, то другая является диаметром.
15. Докажите, что равные хорды окружности одинаково удалены от центра окружности и, наоборот, если хорды окружности одинаково удалены от её центра, то они равны.
16. На рисунке 16.5 изображена фигура, называемая *кольцом*. Сформулируйте определение этой фигуры.
17. Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды AD и BC равны; б) $\angle BAD = \angle BCD$.
18. Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O . Найдите периметр треугольника AOD , если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.
19. Докажите, что прямая, перпендикулярная хорде окружности и проходящая через её середину, проходит через центр этой окружности.
- *20. Докажите, что если две точки принадлежат кругу, то отрезок, соединяющий эти точки, содержится в данном круге. Справедливо ли это свойство для кольца?

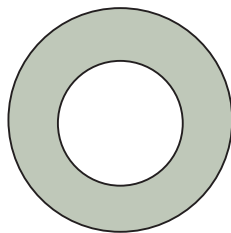


Рис. 16.5

§ 17 Взаимное расположение прямой и окружности

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямой и окружности.

Прямая и окружность могут не иметь общих точек (рис. 17.1), иметь одну общую точку (рис. 17.2) или иметь две общие точки (рис. 17.3).

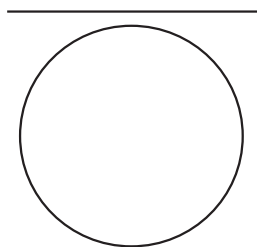


Рис. 17.1

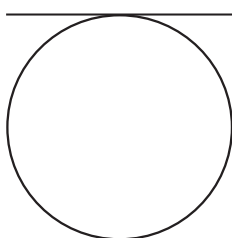


Рис. 17.2

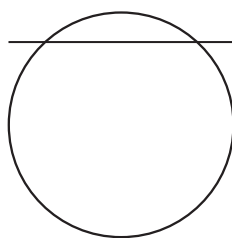


Рис. 17.3

Если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то говорят, что **прямая касается окружности**, а саму прямую называют **касательной** к окружности (см. рис. 17.2).

Таким образом, **касательная** к окружности — это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Общая точка называется **точкой касания**.

Если прямая и окружность имеют две общие точки, то говорят, что прямая и окружность **пересекаются** (см. рис. 17.3).

Взаимное расположение прямой и окружности зависит от расстояния между центром окружности и данной прямой.

ТЕОРЕМА

Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то эта прямая и окружность не имеют общих точек.

Доказательство. Пусть расстояние от центра O окружности до прямой a больше радиуса R окружности (рис. 17.4). Опустим из центра O перпендикуляр OA на эту прямую. Тогда $OA > R$. Для любой другой точки B на прямой a наклонная OB будет боль-

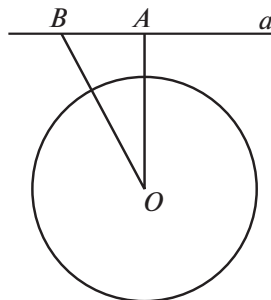


Рис. 17.4

ше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R . Таким образом, расстояние от любой точки прямой a до центра O больше R . Значит, прямая a и окружность не имеют общих точек.

ТЕОРЕМА

Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к окружности.

Доказательство. Пусть расстояние от центра O окружности до прямой a равно радиусу R окружности (рис. 17.5). Опустим из центра O перпендикуляр OA на эту прямую. Тогда $OA = R$. Для любой другой точки B на прямой a наклонная OB будет больше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R . Таким образом, расстояние от любой точки прямой a , отличной от A , до центра O больше R . Значит, прямая a и окружность имеют одну общую точку A , т. е. прямая касается окружности.

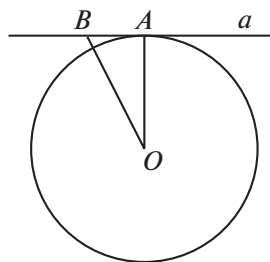


Рис. 17.5

Следствие. Касательной к окружности является прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведённому в эту точку.

Доказательство. Действительно, пусть прямая a проходит через точку A окружности и перпендикулярна радиусу OA . Тогда расстояние от центра O окружности до прямой a равно радиусу OA , и, следовательно, прямая a является касательной к окружности.

Осталось рассмотреть случай, когда расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности. Пример такого расположения прямой и окружности показан на рисунке 17.3 (см. с.87).

ТЕОРЕМА

Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность пересекаются.

Ясно, что если прямая a проходит через центр O окружности, то она имеет с этой окружностью две общие точ-

ки C_1 и C_2 (рис. 17.6), удалённые от точки O на расстояние, равное радиусу R окружности.

Пусть прямая a не проходит через центр окружности. Опустим из центра O окружности перпендикуляр OA на прямую a (рис. 17.7). Его длина по условию меньше радиуса R , и, следовательно, точка A лежит внутри окружности. С другой стороны, на прямой a есть точки B_1 и B_2 , лежащие вне окружности. Отрезки AB_1 и AB_2 соединяют точку A , лежащую внутри окружности, с точками B_1 и B_2 , лежащими вне окружности. Примем без доказательства, что если отрезок соединяет точку, лежащую внутри окружности, и точку, лежащую вне окружности, то он имеет с окружностью одну общую точку. Тогда отрезки AB_1 и AB_2 имеют с окружностью общие точки C_1 и C_2 , которые являются искомыми точками пересечения прямой a и окружности.

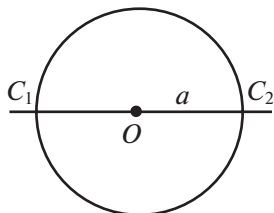


Рис. 17.6

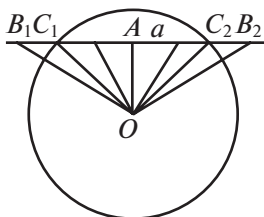


Рис. 17.7

ПРИМЕР 1. Из одной точки проведены две касательные к окружности. Докажите, что отрезки касательных, заключённые между этой точкой и точками касания, равны.

Решение. Рассмотрим две касательные к окружности с центром в точке O , проведённые из точки A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 17.8). Треугольники AOB и AOC прямоугольные, $OB = OC$ и сторона AO общая. По признаку равенства прямоугольных треугольников (по катету и гипотенузе) они равны. Следовательно, $AB = AC$.

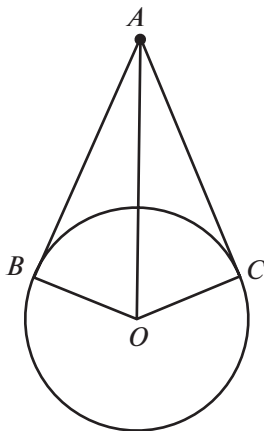


Рис. 17.8

ПРИМЕР 2. Расстояние d от центра окружности до прямой больше радиуса R этой окружности. Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на окружности и на прямой.

Решение. Пусть O — центр окружности, OA — перпендикуляр, опущенный из O на прямую, C — точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью (рис. 17.9). Докажем, что длина отрезка AC является искомым наименьшим расстоянием. Действительно, для произвольных точек B на прямой и D на окружности будем иметь $AC + CO \leq BO \leq BD + DO$. Учитывая, что $CO = DO = R$, получаем неравенство $AC \leq BD$. Следовательно, искомое наименьшее расстояние между точками, расположенными на окружности и прямой, равно длине отрезка AC , т. е. равно $d - R$.

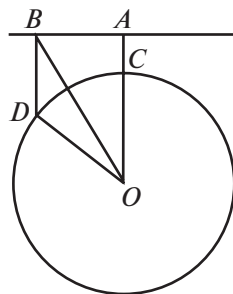


Рис. 17.9

Вопросы

1. Как могут быть расположены друг относительно друга прямая и окружность?
2. Какая прямая называется: а) касательной к окружности; б) пересекающей окружность?
3. В каком случае прямая и окружность не имеют общих точек?
4. В каком случае прямая касается окружности?
5. В каком случае прямая и окружность пересекаются?
6. Что можно сказать об отрезках касательных к окружности, проведённых из одной точки?

Задачи

1. Для данной окружности проведите прямые, пересекающие окружность, касающиеся окружности и не пересекающие окружность.
2. Сколько прямых, пересекающих окружность, можно провести через данную точку окружности?
3. Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку на окружности?
4. Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку, расположенную: а) внутри окружности; б) вне окружности?
5. Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой?
6. Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой в данной точке?
7. Сколько можно провести окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой в данной точке?

8. Может ли прямая иметь с окружностью три общие точки?
9. Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 3 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно: а) 4 см; б) 3 см; в) 2 см?
10. Расстояние d от центра окружности до прямой меньше радиуса R этой окружности. Найдите наибольшее расстояние от точек данной окружности до прямой.
11. Две окружности имеют общий центр. Докажите, что хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности, равны между собой.
12. Докажите, что отрезки AB и CD общих внутренних касательных к двум окружностям (рис. 17.10) равны.
13. Докажите, что отрезки общих внутренних касательных к двум окружностям одинакового радиуса в точке пересечения делятся пополам.
14. Докажите, что отрезки AB и CD общих пересекающихся внешних касательных к двум окружностям (рис. 17.11) равны.
- *15. Через точку M вне окружности проведены касательные MA и MB , и через точку C на окружности проведена касательная, пересекающая отрезки MA и MB в точках K и L соответственно (рис. 17.12). Докажите, что периметр треугольника KML не зависит от положения точки C .
- *16. Докажите, что если прямая пересекает окружность в точках A и B , то отрезок AB целиком содержится в круге, ограниченном этой окружностью.

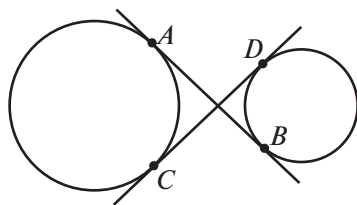


Рис. 17.10

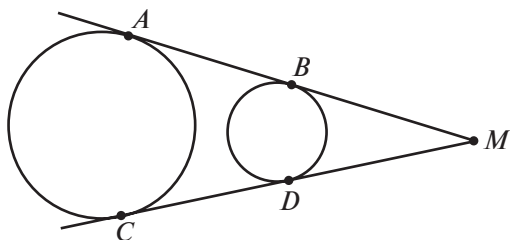


Рис. 17.11

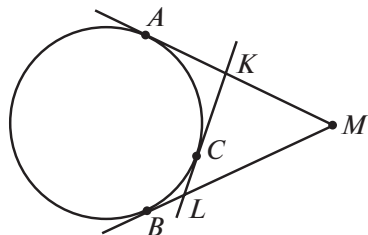


Рис. 17.12

§ 18 Взаимное расположение двух окружностей

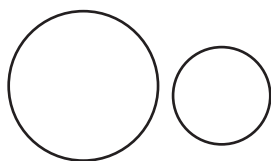
Рассмотрим случаи взаимного расположения двух окружностей.

1) Две окружности могут не иметь общих точек (рис. 18.1). При этом они могут находиться вне друг друга (рис. 18.1, а) или одна внутри другой (рис. 18.1, б).

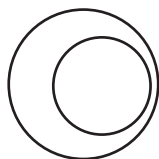
2) Две окружности могут иметь одну общую точку (рис. 18.2). В этом случае говорят, что окружности **касаются**. Причём окружности могут касаться внешним образом (рис. 18.2, а) или внутренним образом (рис. 18.2, б).

3) Две окружности могут иметь две общие точки (рис. 18.3). В этом случае говорят, что окружности **пересекаются**.

Окружности, имеющие общий центр, называются **концентрическими** (рис. 18.4).

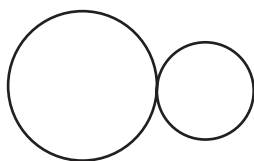


а)

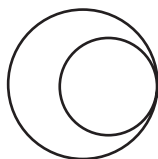


б)

Рис. 18.1



а)



б)

Рис. 18.2

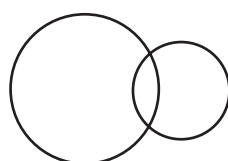


Рис. 18.3

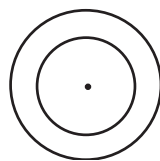


Рис. 18.4

Взаимное расположение двух окружностей зависит от их радиусов и расстояния между центрами.

ТЕОРЕМА

Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности, то эти окружности не имеют общих точек.

Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1 , O_2 и радиусами соответственно R_1 , R_2 , $R_1 + R_2 < O_1O_2$ (рис. 18.5 на с. 93). Рассмотрим точку C на первой окружности, $O_1C = R_1$. Тогда

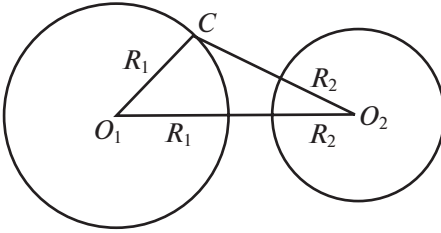


Рис. 18.5

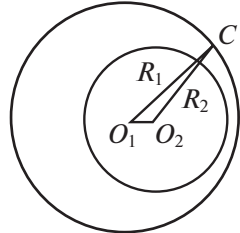


Рис. 18.6

$$O_2C \geq O_1O_2 - O_1C > R_1 + R_2 - R_1 = R_2,$$

и, следовательно, точка C не принадлежит второй окружности. Значит, эти окружности не имеют общих точек.

Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2 < R_1 - R_2$ ($R_1 > R_2$), то окружности также не имеют общих точек (рис. 18.6).

ТЕОРЕМА

Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме или разности их радиусов, то эти окружности касаются.

Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1 , O_2 и радиусами соответственно R_1 , R_2 , $R_1 + R_2 = O_1O_2$ (рис. 18.7). Рассмотрим точку C на отрезке O_1O_2 , для которой $O_1C = R_1$, $O_2C = R_2$. Она будет общей точкой для данных окружностей. Если D — точка на первой окружности, отличная от C , то из неравенства треугольника следует, что $O_2D > O_1O_2 - O_1D = R_1 + R_2 - R_1 = R_2$, следовательно, точка D не принадлежит второй окружности. Значит, данные окружности имеют только одну общую точку, т. е. касаются.

Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2 = R_1 - R_2$ ($R_1 > R_2$), то окружности также касаются (рис. 18.8).

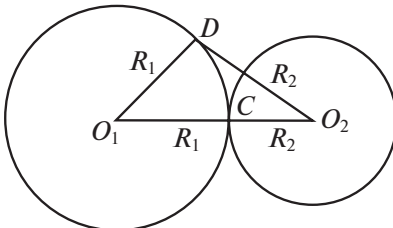


Рис. 18.7

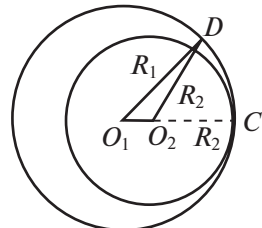


Рис. 18.8

Таким образом, мы рассмотрели случаи, когда расстояние между центрами двух окружностей: а) больше суммы радиусов; б) меньше разности радиусов; в) равно сумме радиусов; г) равно разности радиусов.

Осталось рассмотреть случай, когда расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей. Пример взаимного расположения таких окружностей показан на рисунке 18.3 (см. с. 92.)

ТЕОРЕМА

Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разности, то эти окружности пересекаются.

Рассмотрим окружности с центрами O_1 и O_2 (рис. 18.9), радиусами R_1 и R_2 соответственно ($R_1 \geq R_2$, $R_1 - R_2 < O_1O_2 < R_1 + R_2$). Прямая O_1O_2 пересекает вторую окружность в точках B_1 и B_2 . Причём $O_1B_1 = O_1O_2 - R_2 < R_1$, $O_1B_2 = O_1O_2 + R_2 > R_1$. Таким образом, точка B_1 лежит внутри первой окружности, а B_2 — вне её. Примем без доказательства, что в этом случае окружности пересекаются.

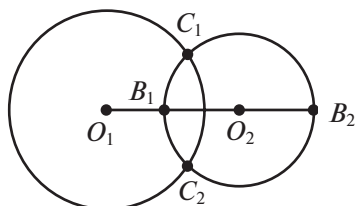


Рис. 18.9

ПРИМЕР 1. Две окружности с центрами в точках O_1 , O_2 пересекаются в точках A и B (рис. 18.10). Докажите, что O_1O_2 перпендикулярна AB .

Решение. Пусть C — середина отрезка AB . Тогда O_1C — медиана равнобедренного треугольника O_1AB , и, следовательно, $O_1C \perp AB$. Аналогично O_2C — медиана равнобедренного треугольника O_2AB , и, следовательно, $O_2C \perp AB$. Значит, O_1 и O_2 принадлежат прямой, проходящей через точку C и перпендикулярной AB .

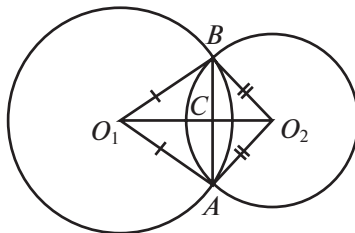


Рис. 18.10

ПРИМЕР 2. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2 . Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.

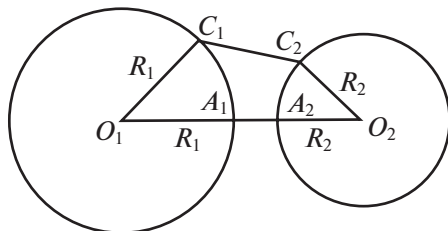


Рис. 18.11

Решение. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей (рис. 18.11). Обозначим A_1, A_2 — точки пересечения отрезка O_1O_2 с этими окружностями. Тогда длина отрезка A_1A_2 будет искомым наименьшим расстоянием. Действительно, для любых других точек C_1, C_2 этих окружностей выполняется неравенство $O_1A_1 + A_1A_2 + A_2O_2 < O_1C_1 + C_1C_2 + C_2O_2$. Учитывая, что $O_1A_1 = O_1C_1$ и $A_2O_2 = C_2O_2$, получаем неравенство $A_1A_2 < C_1C_2$. Поэтому наименьшее расстояние равно $A_1A_2 = d - R_1 - R_2$.

Вопросы

1. Как могут быть расположены друг относительно друга две окружности?
2. Какие две окружности называются: а) касающимися; б) пересекающимися?
3. Какие окружности называются концентрическими?
4. В каком случае две окружности не имеют общих точек?
5. В каком случае две окружности касаются: а) внешним образом; б) внутренним образом?
6. В каком случае две окружности пересекаются?

Задачи

1. Нарисуйте две окружности: а) не имеющие общих точек; б) концентрические; в) касающиеся внешним образом; г) касающиеся внутренним образом; д) пересекающиеся.
2. Дана окружность радиусом 3 см и точка A на расстоянии, равном 5 см от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A .
3. Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см?

4. Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 3 см и 5 см; б) 2 см и 5 см?
5. Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 см и 6 см, если окружности: а) касаются внешне; б) касаются внутренне?
6. Какую фигуру образуют центры окружностей с данным радиусом, проходящих через данную точку?
7. Какую фигуру образуют центры окружностей различных радиусов, проходящих через две данные точки?
8. Радиусы двух concentрических окружностей относятся как 3 : 7. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 24 см.
9. Две окружности касаются внешним образом. Радиусы окружностей относятся как 2 : 3. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 10 см.
10. Две окружности касаются внутренним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если они относятся как 5 : 2, а расстояние между центрами равно 15 см.
11. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей меньше разности их радиусов, то эти окружности не имеют общих точек.
12. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей равно разности их радиусов, то эти окружности касаются.
13. Докажите, что если две окружности пересекаются, то расстояние между их центрами меньше суммы радиусов и больше разности радиусов.
14. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2 . Найдите наибольшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.
15. Расстояние между центрами двух окружностей равно d и меньше разности $R_1 - R_2$ их радиусов. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между точками, расположенными на данных окружностях.
16. Две окружности с центрами в точках O_1 , O_2 пересекаются в точках A и B . Докажите, что $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$.
17. Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.

18. Даны две окружности. Чему равен радиус окружности, касающейся данных окружностей и имеющей центр на прямой, проходящей через их центры, если радиусы данных окружностей и расстояние между их центрами соответственно равны: а) 1, 3, 5; б) 5, 2, 1; в) 3, 4, 5? Сколько имеется решений?
- *19. Точка A лежит внутри круга с центром в точке O и радиусом R . Расстояние AO равно a . Докажите, что круг с центром в точке A и радиусом $R - a$ содержится в исходном круге.
- *20. Нарисуйте три окружности, попарно касающиеся друг друга.
- *21. Три окружности одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.
- *22. Могут ли четыре окружности попарно касаться друг друга?
- *23. Могут ли четыре окружности одинакового радиуса попарно касаться друг друга?
- *24. Могут ли пять окружностей попарно касаться друг друга?
- *25. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности; г)* n окружностей? Нарисуйте соответствующие окружности.
- *26. На какое наибольшее число областей разбивают плоскость: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности? Нарисуйте соответствующие области.

§ 19 Геометрические места точек

Один из основных способов задания фигуры на плоскости заключается в указании свойства, которому удовлетворяют точки этой фигуры.

Вспомним определение окружности. Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от данной точки на данное расстояние. Свойством здесь является удалённость от данной точки на данное расстояние.

Фигуры, состоящие из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству, получили особое название «геометрические места точек». Таким образом, *геометрическим местом точек*

называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Поясним смысл слов «всех точек, удовлетворяющих заданному свойству» в этом определении. Они означают, что все точки, принадлежащие фигуре, удовлетворяют заданному свойству и, наоборот, что все точки, удовлетворяющие заданному свойству, принадлежат фигуре. Другими словами, точка принадлежит фигуре в том и только том случае, когда для неё выполняется заданное свойство.

Рассмотрим ещё несколько геометрических мест точек.

Серединным перпендикуляром к заданному отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

Выясним, каким геометрическим местом точек является серединный перпендикуляр.

ТЕОРЕМА

Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, одинаково удалённых от концов этого отрезка.

Доказательство. Пусть даны отрезок AB и точка O — его середина. Покажем, что геометрическим местом точек, одинаково удалённых от точек A и B , является серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 19.1). Действительно, очевидно, что точка O одинаково удалена от точек A , B и принадлежит серединному перпендикуляру. Если точка C одинаково удалена от точек A и B и не совпадает с точкой O , то треугольник ABC равнобедренный и CO — медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру. Обратно, пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с O , тогда прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по катетам). Следовательно, $AC = BC$.

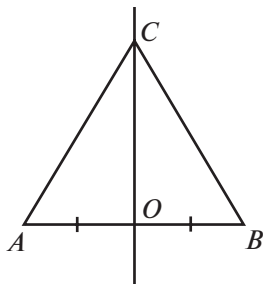


Рис. 19.1

ТЕОРЕМА

Биссектриса угла является геометрическим местом точек, лежащих внутри данного угла и одинаково удалённых от его сторон.

Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной в точке O и сторонами a , b . Пусть точка C лежит внутри данного угла. Опустим из неё перпендикуляры CA и CB на стороны a и b (рис. 19.2). Если $CA = CB$, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, углы AOC и BOC равны.

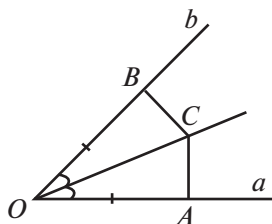


Рис. 19.2

Значит, точка C принадлежит биссектрисе угла. Обратно, если точка C принадлежит биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AC = BC$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного угла.

ПРИМЕР 1. На данной прямой найдите точку, одинаково удалённую от двух заданных точек.

Решение. Пусть c — данная прямая, A , B — данные точки (рис. 19.3). Геометрическим местом точек, одинаково удалённых от точек A и B , является серединный перпендикуляр к отрезку AB . Если серединный перпендикуляр и прямая c пересекаются, то искомой точкой C будет их точка пересечения. Если они не пересекаются, то задача не имеет решения.

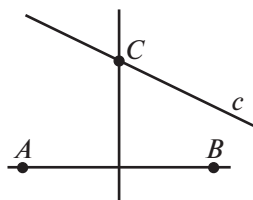


Рис. 19.3

ПРИМЕР 2. Найдите точки треугольника ABC , одинаково удалённые от прямых, на которых лежат его стороны.

Решение. Геометрическим местом точек треугольника ABC , одинаково удалённых от прямых AB и AC , будет биссектриса AA_1 (рис. 19.4). Геометрическим местом точек этого треугольника, одинаково удалённых от прямых AB и BC , будет биссектриса BB_1 . Таким образом, геометрическим местом точек этого треугольника, одинаково удалённых от прямых AB , BC и AC , будет точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 . Заметим, что так как эта точка одинаково удалена от AC и BC , то она будет принадлежать и биссектрисе угла C . Значит, все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

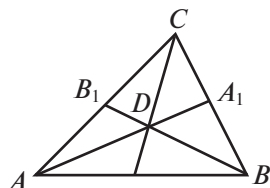


Рис. 19.4

Точка пересечения биссектрис является одной из замечательных точек треугольника, которые будут рассмотрены в 8-м классе.

Вопросы

1. Что означают слова «фигура состоит из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству»?
2. Что называется геометрическим местом точек?
3. Определите окружность через понятие геометрического места точек.
4. Какая прямая называется серединным перпендикуляром?
5. Каким геометрическим местом точек является: а) серединный перпендикуляр; б) биссектриса угла?

Задачи

1. Какое геометрическое место точек представляет собой:
а) отрезок; б) луч; в) круг с центром O и радиусом R ;
г) кольцо с центром O и радиусами R_1, R_2 ($R_1 < R_2$)?
2. Найдите геометрическое место центров окружностей радиусом R_1 , касающихся данной окружности радиусом R_2 . Рассмотрите случаи: а) $R_1 < R_2$; б) $R_1 = R_2$; в) $R_1 > R_2$.
3. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.
4. Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB .
5. Пусть A и B — точки плоскости. Найдите геометрическое место точек C , для которых: а) $AC \leq BC$; б) $AC < AB$.
6. Даны три точки: A, B, C . Найдите точки, которые одинаково удалены от точек A и B и находятся на расстоянии R от точки C .
7. На данной прямой a найдите точки, удалённые от данной точки C на заданное расстояние R . Какие при этом возможны случаи?
8. Пусть A и B — точки плоскости, c — прямая. Найдите геометрическое место точек прямой c , расположенных ближе к A , чем к B . В каком случае таких точек нет?
9. Пусть a и b — пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек: а) одинаково удалённых от a и b ; б) расположенных ближе к a , чем к b .
10. Пусть A, B, C — три точки, не принадлежащие одной прямой. Найдите геометрическое место точек M таких, что:

а) прямая CM пересекает отрезок AB ; б) луч CM пересекает отрезок AB ; в) отрезок CM пересекает отрезок AB .

11. На прямой, пересекающей стороны угла, найдите точку, одинаково удалённую от этих сторон.
12. Даны угол ABC и точки M, N на его сторонах. Внутри угла найдите точку, одинаково удалённую от точек M и N и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла.

13. В треугольнике ABC $AB = BC = 14$ см. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E (рис. 19.5). Точка E соединена с точкой B . Найдите сторону AC треугольника ABC , если периметр треугольника BEC равен 40 см.

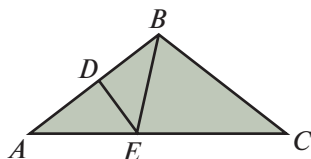


Рис. 19.5

14. В треугольнике ABC $AB = BC = 18$ см. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E (рис. 19.6). Точка E соединена с точкой A . Периметр треугольника AEC равен 27 см. Найдите сторону AC .

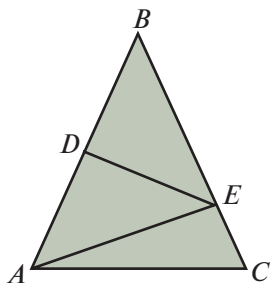


Рис. 19.6

- *15. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведённые из вершины острого угла, не совпадают.
- *16. Две окружности касаются внешним образом. Найдите геометрическое место точек, для которых отрезки касательных, проведённых из них к окружностям, равны.
- *17. Невдалеке от двух населённых пунктов проходит шоссе. В каком месте этого шоссе нужно построить автозаправочную станцию, чтобы расстояния от неё до обоих пунктов были одинаковыми?
- *18. Жители трёх домов решили совместными усилиями вырыть колодец. В каком месте следует расположить колодец, чтобы расстояния от него до домов были одинаковыми?

§ 20 Задачи на построение

Основными чертёжными инструментами, с помощью которых производятся геометрические построения, являются линейка и циркуль.

С помощью линейки через две заданные точки проводят прямую. С помощью циркуля проводят окружности с данным центром и данным радиусом. В частности, с помощью циркуля на луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному.

Рассмотрим некоторые задачи на построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки.

Задача 1. Построить серединный перпендикуляр к заданному отрезку.

Решение. Пусть AB — данный отрезок. Опишем окружности с центрами в точках A и B и радиусом, большим половины AB (рис. 20.1). Обозначим точки их пересечения, лежащие по разные стороны от прямой AB , через C и D . Точки C и D одинаково удалены от концов отрезка AB . Следовательно, они принадлежат серединному перпендикуляру, и, значит, прямая CD и будет искомым серединным перпендикуляром.

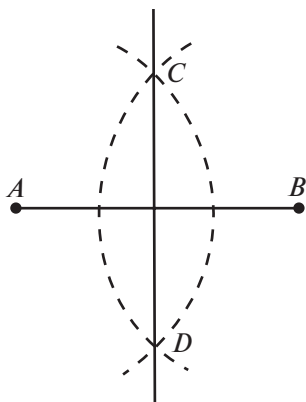


Рис. 20.1

Задача 2. Из данной точки, не принадлежащей данной прямой, опустить перпендикуляр на эту прямую.

Решение. Пусть C — данная точка, a — прямая (рис. 20.2). Отметим на этой прямой какую-нибудь точку A . Если отрезок CA перпендикулярен a , то он является искомым. В противном случае проведём окружность с центром в точке C и радиусом CA . Она пересечёт прямую a в точке A и некоторой точке B . Так как $AC = BC$, то точка C принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB . Поэтому искомым перпендикуляр CO будет лежать на середин-

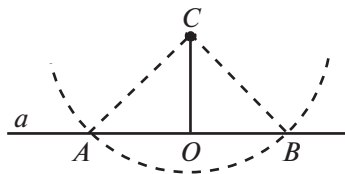


Рис. 20.2

ном перпендикуляре к отрезку AB . После этого можно или воспользоваться построением серединного перпендикуляра из предыдущей задачи, или поступить следующим образом. С центрами в точках A и B и радиусом AC проведём окружности и обозначим их точку пересечения, лежащую по другую сторону от точки C , через D . Тогда D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB . Проведём прямую CD и её точку пересечения с прямой a обозначим через O . Отрезок CO будет искомым перпендикуляром.

Задача 3. Построить биссектрису данного угла.

Решение. Опишем окружность с центром в вершине O данного угла, пересекающую стороны угла в точках A и B . Затем этим же раствором циркуля с центрами в точках A и B опишем ещё две окружности. Их точку пересечения, отличную от O , обозначим C и проведём луч OC . Треугольники OAC и OBC равны по третьему признаку равенства треугольников. Следовательно, $\angle AOC = \angle BOC$, т. е. луч OC является искомым биссектрисой (рис. 20.3).

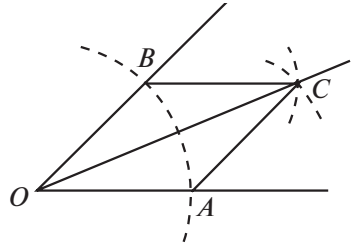


Рис. 20.3

Задача 4. Построить угол, равный данному, одна из сторон которого совпадает с данным лучом.

Решение. Пусть дан угол с вершиной в точке O и сторонами a, b . Построим угол, равный данному, с вершиной в данной точке O_1 и стороной a_1 (рис. 20.4). Для этого опишем окружность с центром в точке O , пересекающую лучи a и b в точках A и B соответственно. Затем этим же раствором циркуля опишем дугу окружности с центром в точке O_1

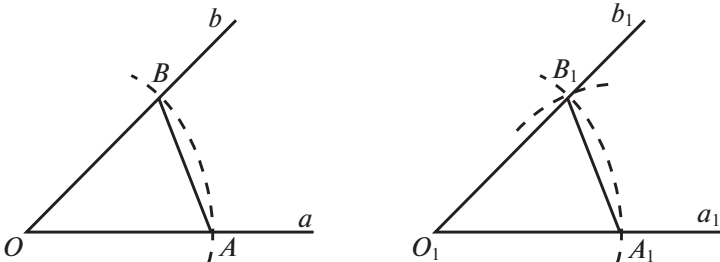


Рис. 20.4

и пересекающую луч a_1 в точке A_1 . Далее раствором циркуля, равным AB , опишем дугу окружности с центром в точке A_1 . Полученную точку пересечения двух дуг обозначим B_1 и проведём луч O_1B_1 . Тогда треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ равны по третьему признаку. Следовательно, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, т. е. угол $A_1O_1B_1$ является искомым.

Задача 5. Построить треугольник ABC с данными сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Решение. Заметим, что три отрезка будут служить сторонами треугольника, если каждый из них меньше суммы двух других. Пусть даны отрезки a , b и c , удовлетворяющие этому условию. Проведём прямую и отметим на ней точку A . Раствором циркуля величины c отложим на этой прямой отрезок AB , равный c . Раствором циркуля величины b опишем окружность с центром в точке A , раствором циркуля величины a опишем окружность с центром в точке B . Точку пересечения этих окружностей обозначим через C и соединим отрезками с точками A и B . Треугольник ABC будет искомым (рис. 20.5).

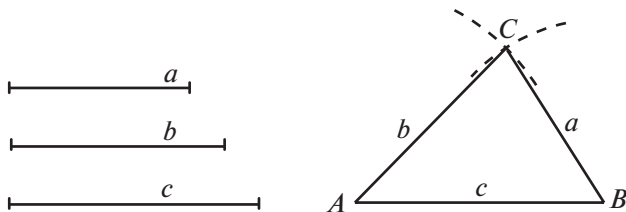


Рис. 20.5

ПРИМЕР. Построить касательные к данной окружности, проходящие через данную точку вне этой окружности.

Решение. Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R . Пусть A — точка вне этой окружности (рис. 20.6, а на с. 105). Допустим, мы построили касательную AB , B — точка касания. Эта касательная будет перпендикулярна радиусу OB . Продолжим OB и отложим отрезок $BC = OB$. Тогда касательная будет серединным перпендикуляром к отрезку OC . Таким образом, если мы сможем построить точку C , то сможем построить и касательную.

Точка C , с одной стороны, принадлежит окружности с центром O и радиусом $2R$, а с другой стороны, она принадлежит окружности с центром A и радиусом AO . Отсюда следует по-

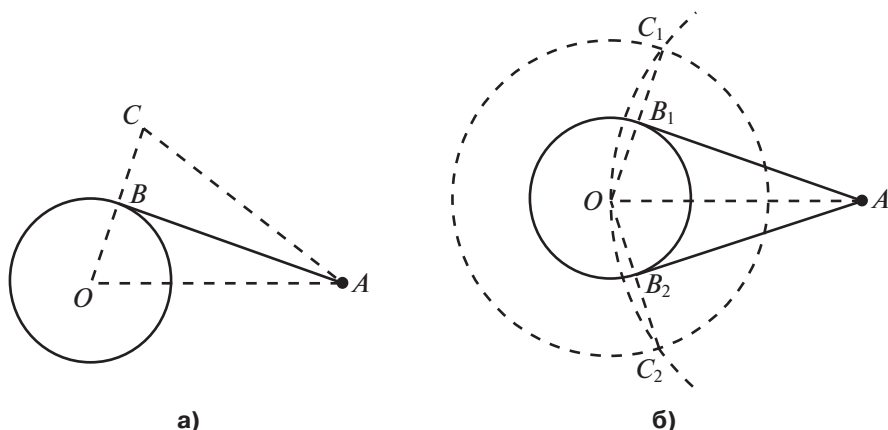


Рис. 20.6

строение точки C . Сначала строим окружность с центром O и радиусом $2R$ и окружность с центром A и радиусом AO . Эти окружности пересекаются в двух точках C_1 и C_2 (рис. 20.6, б). Затем соединяем эти точки с центром O и обозначаем точки пересечения отрезков C_1O , C_2O с окружностью B_1 и B_2 соответственно. Они и будут искомыми точками касания. Прямые AB_1 и AB_2 будут искомыми касательными.

Вопросы

1. Какие инструменты используются для построения геометрических фигур?
2. Какие построения производятся с помощью: а) линейки; б) циркуля?
3. Как построить серединный перпендикуляр к отрезку?
4. Как опустить перпендикуляр из данной точки на данную прямую?
5. Как построить биссектрису угла?
6. Как построить угол, равный данному?
7. Как построить треугольник по трём сторонам?

Задачи

1. Постройте середину заданного отрезка.
2. Данный отрезок разделите на четыре равные части.
3. В данном треугольнике постройте медиану.
4. Постройте высоту данного треугольника.

5. Через данную точку, принадлежащую данной прямой, проведите прямую, ей перпендикулярную.
6. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки. Сколько таких окружностей можно построить? Чему равен наименьший радиус такой окружности?
7. Данный угол разделите на четыре равные части.
8. Постройте углы 90° , 45° , $22^\circ 30'$.
9. Постройте угол вдвое больше данного.
10. В данном равнобедренном треугольнике постройте биссектрису угла при вершине, противоположащей основанию.
11. Постройте прямоугольный треугольник по заданным катетам.
12. Постройте треугольник со сторонами 2 см, 3 см и 4 см.
13. Постройте равносторонний треугольник со стороной 3 см.
14. Постройте равнобедренный треугольник с основанием 4 см и боковой стороной 5 см.
15. Дан треугольник ABC . Постройте треугольник ABD , равный данному.
16. На данной прямой найдите центр окружности, проходящей через две заданные точки.
17. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку этой окружности.
18. Постройте какую-нибудь окружность, касающуюся сторон данного угла.
- *19. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.
- *20. Постройте четырёхугольник со сторонами 1 см, 2 см, 3 см и 4 см.

КРИВЫЕ И ГРАФЫ*

§ 21* Парабола

Пусть на плоскости заданы прямая d и точка F , не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудалённых от прямой d и точки F , называется **параболой**. Прямая d называется **директрисой**, а точка F — **фокусом** параболы (рис. 21.1).

Для того чтобы нарисовать параболу, потребуются линейка, угольник, нить длиной, равной большему катету угольника, и кнопки. Прикрепим один конец нити к фокусу, а другой — к вершине меньшего угла угольника. Приложим линейку к директрисе и поставим на неё угольник меньшим катетом. Карандашом натянем нить так, чтобы его остриё касалось бумаги и прижималось к большему катету. Будем перемещать угольник и прижимать к его катету карандаш так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге параболу (рис. 21.2).

Осью параболы называется прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Точка пересечения параболы с её осью называется **вершиной** параболы.

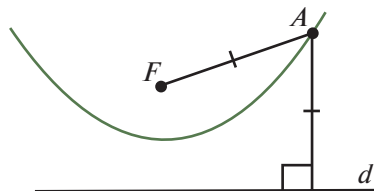


Рис. 21.1

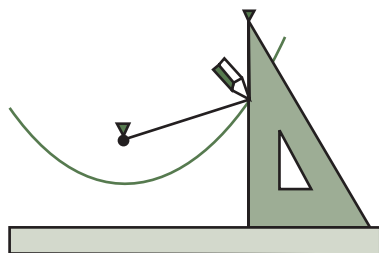


Рис. 21.2

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная её директрисе, называется **касательной** к параболе. Общая точка называется **точкой касания**.

Заметим, что ось параболы имеет с параболой одну общую точку, однако не является касательной, так как перпендикулярна директрисе.

ТЕОРЕМА

Пусть A — точка на параболе с фокусом F и директрисой d , AD — перпендикуляр, опущенный на директрису (рис. 21.3). Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A , будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD .

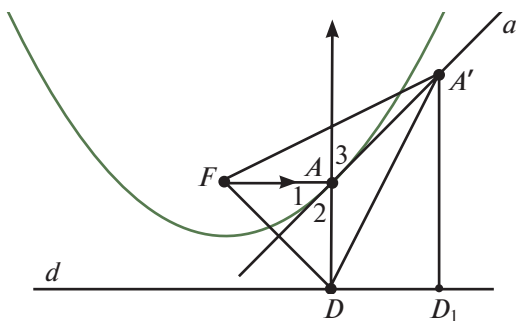


Рис. 21.3

Доказательство. Докажем, что прямая a , содержащая биссектрису угла FAD , будет касательной к параболе (см. рис. 21.3). Действительно, треугольник FAD равнобедренный. Следовательно, прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку FD . Для произвольной точки A' прямой a , отличной от A , опустим перпендикуляр $A'D'$ на прямую d . Тогда $A'F = A'D > A'D'$. Это означает, что точка A' не принадлежит параболы, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с параболой, т. е. является касательной.

Фокальное свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведённой в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F параболы, a — касательная, AD — прямая, перпендикулярная

директрисе (см. рис. 21.3 на с. 108). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла FAD . Углы 2 и 3 равны как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 1, то угол отражения будет равен углу 3, т. е. направление отражённого луча будет перпендикулярно директрисе.

Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.

Построение касательной к параболе. Пусть парабола задана фокусом F и директрисой d . Используя циркуль и линейку, построим касательную к параболе, проходящую через данную точку C .

С центром в точке C и радиусом CF проведём окружность и найдём её точки пересечения с директрисой d . Если расстояние от точки C до фокуса больше, чем расстояние до директрисы, то таких точек две (рис. 21.4). Обозначим их D_1 и D_2 . Проведём биссектрисы углов FCD_1 и FCD_2 соответственно. Прямые a_1 и a_2 , содержащие эти биссектрисы, являются серединными перпендикулярами к отрезкам FD_1 и FD_2 и, значит,

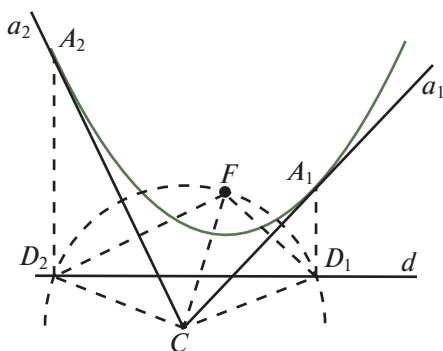


Рис. 21.4

будут искомыми касательными к параболе. Для построения точек касания через точки D_1 и D_2 проведём прямые, перпендикулярные директрисе, и найдём их точки пересечения A_1 и A_2 с прямыми a_1 и a_2 . Они и будут искомыми точками касания.

Может случиться, что расстояние от точки C до фокуса равно расстоянию до директрисы. В этом случае точка C будет лежать на параболе, окружность с центром в точке C и радиусом CF будет касаться директрисы в некоторой точке D и, следовательно, через точку C будет проходить одна касательная — биссектриса угла FCD .

В случае, если расстояние от точки C до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, точек пересечения окружности с директрисой нет и, следовательно, нет касательных к параболе, проходящих через эту точку.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Укажем способ получения параболы из листа бумаги. Возьмём лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большой стороны точку F . Сложим лист так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой D на большой стороне и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 21.5). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FD и, следовательно, касательной к параболе. Разогнём лист и снова согнём его, совместив точку F с другой точкой большой стороны. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к параболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму параболы.

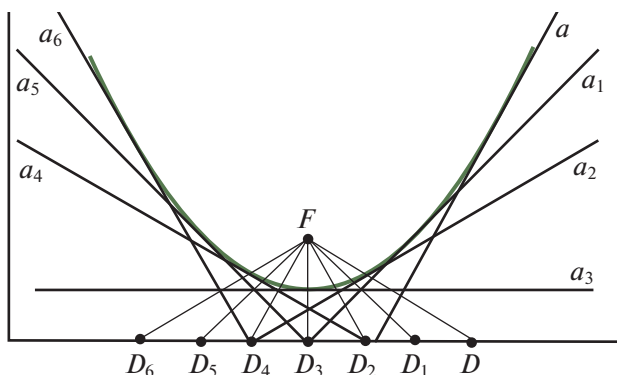


Рис. 21.5

Дополнительная литература

Смирнова И. М., Смирнов В. А. Кривые. — М.: Мнемозина, 2007.

Вопросы

1. Что называется параболой?
2. Что называется: а) директрисой; б) фокусом параболы?
3. Что называется: а) осью; б) вершиной параболы?
4. Что называется касательной к параболе?
5. Какая прямая является касательной к параболе?
6. В чём состоит фокальное свойство параболы?
7. Как построить касательную к параболе с помощью циркуля и линейки?
8. Как получить параболу на листе бумаги?

Задачи

1. Изготовьте прибор для построения параболы. Для заданных фокуса и директрисы постройте соответствующую им параболу.
2. Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек на параболы до директрисы? Укажите соответствующую точку на параболы.
3. Для точки F , не принадлежащей прямой d , найдите геометрическое место точек, расстояние от которых до точки F : а) меньше расстояния до прямой d ; б) больше расстояния до прямой d .
4. Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?
5. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, проходящую через данную точку: а) на параболы; б) вне параболы.
6. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, перпендикулярную оси параболы.
7. Докажите, что две касательные к параболы, проведённые из точки, принадлежащей директрисе, перпендикулярны.
8. Найдите геометрическое место точек, из которых параболы видна под прямым углом.
9. Для заданных фокуса и директрисы параболы с помощью циркуля и линейки постройте несколько точек параболы.
10. Даны фокус параболы и две касательные. Постройте директрису этой параболы.
11. Даны фокус, касательная и на ней точка касания. Постройте директрису параболы.
12. Даны директриса параболы и две касательные. Постройте фокус параболы.
13. Даны директриса, касательная и на ней точка касания. Постройте фокус.
14. Даны две пересекающиеся прямые. Нарисуйте какую-нибудь параболу, касающуюся этих прямых. Сколько таких парабол? Какие точки плоскости могут быть фокусами таких парабол?
15. Дана параболы. Укажите способ нахождения её фокуса и директрисы.

§ 22* Эллипс

Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 , F_2 есть величина постоянная, называется **эллипсом**. Точки F_1 , F_2 называются **фокусами** эллипса.

Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 сумма $AF_1 + AF_2$ постоянна и равна некоторому заданному отрезку c (рис. 22.1). Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть больше отрезка F_1F_2 .

Слово «фокус» в переводе с латинского языка означает «очаг», «огонь», и именно это послужило основанием для того, чтобы назвать точки F_1 и F_2 фокусами.

Ещё И. Кеплер обнаружил, что планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причём Солнце находится в фокусах этих эллипсов. Точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу, называется перигелий, а наиболее удалённая — афелий. Однако из-за того, что орбита Земли представляет собой очень мало сжатый эллипс, похожий на окружность, такое приближение и удаление от Солнца незначительно сказывается на температуре. Гораздо большее значение для температуры на поверхности Земли имеет угол падения солнечных лучей. Например, когда Земля бывает в перигелии, в нашем полушарии зима, а когда в афелии — в нашем полушарии лето. Луна, искусственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Для того чтобы нарисовать эллипс, потребуются нить и кнопки. Прикрепим концы нити к фокусам. Карандашом натянем нить так, чтобы его остриё касалось бумаги. Будем перемещать карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге эллипс (рис. 22.2).

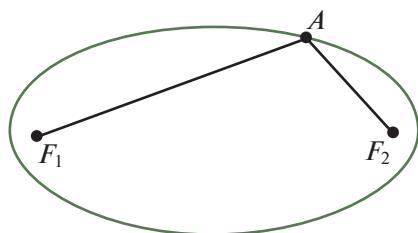


Рис. 22.1

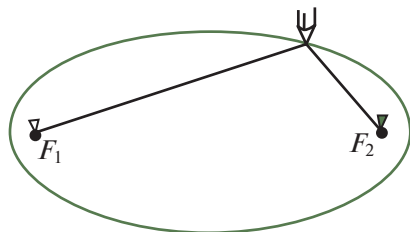


Рис. 22.2

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку. Общая точка называется **точкой касания**.

ТЕОРЕМА

Пусть A — произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2 . Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A , является прямая, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2 .

Доказательство. Докажем, что прямая a , содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2 , будет касательной к эллипсу (рис. 22.3). Рассмотрим на прямой F_1A точку F' , для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F' . Для произвольной точки A' прямой a , отличной от A , имеем:

$$A'F_2 = A'F'$$

и

$$A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = F_1A + AF_2 = c.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т. е. является касательной.

Фокальное свойство. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом его фокусе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведённой в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a — касательная (см. рис. 22.3). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_2AF' . Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдёт в направлении AF_2 .

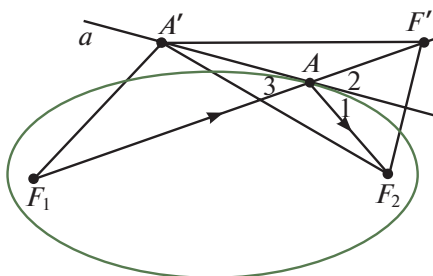


Рис. 22.3

Построение касательной к эллипсу. Пусть эллипс задан своими фокусами F_1 , F_2 и постоянной c . Используя циркуль и линейку, построим касательную к эллипсу, проходящую через данную точку C .

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведём окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведём другую окружность и найдём её точки пересечения с первой окружностью (рис. 22.4). Таких точек может быть две — F' , F'' , — одна или ни одной, в зависимости от расположения точки C . В первом случае проведём биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a' , a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$, $F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведём прямые F_1F' , F_1F'' и найдём их точки пересечения A' , A'' с касательными a' , a'' , соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведённые окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Укажем способ получения эллипса из листа бумаги. Вырежем из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставим точку F . Сложим круг так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности круга и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 22.5). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FF' и, следовательно,

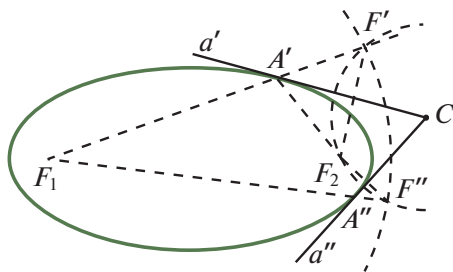


Рис. 22.4

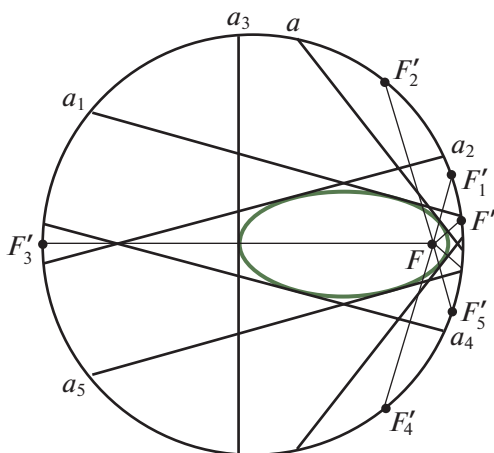


Рис. 22.5

касательной к эллипсу. Разогнём круг и снова согнём его, совместив точку с другой точкой окружности круга. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к эллипсу. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму эллипса.

Для другого способа получения эллипса потребуются сковорода и картонный круг, диаметром вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положив круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая остриё карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс.

Дополнительная литература

Смирнова И. М., Смирнов В. А. Кривые. — М.: Мнемозина, 2007.

Вопросы

1. Что называется эллипсом?
2. Какие точки называются фокусами эллипса?
3. Что называется касательной к эллипсу?
4. Какая прямая является касательной к эллипсу?
5. В чём состоит фокальное свойство эллипса?
6. Как построить касательную к эллипсу с помощью циркуля и линейки?
7. Как получить эллипс на листе бумаги?

Задачи

1. Нарисуйте эллипс с заданными фокусами F_1, F_2 . Сколько таких эллипсов?
2. Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и константой c . Найдите наибольшее расстояние между точками эллипса. Укажите эти точки.
3. Расстояние между фокусами эллипса равно 4 см. Константа c равна 6 см. Найдите наименьшее расстояние от точек эллипса до фокуса.
4. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и суммой радиусов.
5. Даны фокусы эллипса и сумма расстояний до них. С помощью циркуля постройте несколько точек этого эллипса.
6. Что будет происходить с эллипсом, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

7. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c постройте точки на эллипсе, равноудалённые от фокусов. Сколько таких точек?
8. Найдите геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1, F_2 : а) меньше заданной величины c ; б) больше заданной величины c .
9. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C , для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c .
10. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AD = BC$ и $AB = CD$ (рис. 22.6), сторона AD закреплена, а остальные подвижны. Найдите геометрическое место точек пересечения сторон AB и CD .
11. Пусть дан эллипс с центрами F_1, F_2 и константой c . Докажите, что окружность с центром в фокусе и радиусом $r = \frac{1}{2} \cdot (c - F_1F_2)$ лежит внутри эллипса. Нарисуйте эти эллипс и окружность.
12. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательные, перпендикулярные прямой F_1F_2 .
13. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательную, проходящую через заданную точку: а) на эллипсе; б) вне эллипса.
14. Даны фокусы F_1, F_2 эллипса и сумма расстояний до них c . Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к эллипсу. Найдите точку касания.
15. Даны два фокуса и касательная к эллипсу. Постройте постоянную c и нарисуйте эллипс.
16. Даны две касательные, фокус и постоянная c . Постройте второй фокус эллипса.
- *17. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, одна из которых содержится в другой, является эллипс. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.

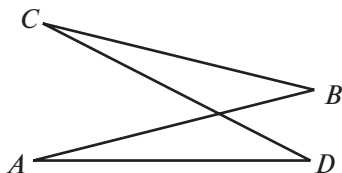


Рис. 22.6

§ 23* Гипербола

Геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется **гиперболой**. Точки F_1, F_2 называются **фокусами** гиперболы (рис. 23.1).

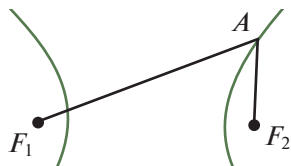


Рис. 23.1

Таким образом, для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется одно из равенств: $AF_1 - AF_2 = c$, $AF_2 - AF_1 = c$, где c — некоторый заданный отрезок.

Гипербола состоит из двух ветвей, для точек которых выполняется соответственно первое или второе равенство.

Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть меньше отрезка F_1F_2 .

Для того чтобы нарисовать гиперболу, потребуются линейка, нить, длина которой меньше длины линейки, а разность длин линейки и нити меньше, чем расстояние между фокусами. Прикрепим один конец нити к концу линейки, а второй конец — к фокусу. Второй конец линейки совместим со вторым фокусом. Натянем нить, прижав её к линейке остриём карандаша (рис. 23.2). Если поворачивать линейку вокруг фокуса, прижимая к ней карандаш и оставляя нить натянутой, то карандаш будет описывать гиперболу.

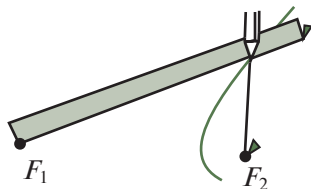


Рис. 23.2

Определим понятие касательной к гиперболе. Так же как и в случае с параболой, не любая прямая, имеющая с гиперболой только одну общую точку, будет касательной. Воспользуемся тем, что касательные к параболе и эллипсу лежат во внешних областях, и, основываясь на этом свойстве касательных, определим касательную к гиперболе.

Рассмотрим ветвь гиперболы, точки которой удовлетворяют равенству $AF_1 - AF_2 = c$. Она разбивает плоскость на две области — внешнюю, для точек A' которой выполняется неравенство $A'F_1 - A'F_2 < c$, и внутреннюю, для точек A'' которой выполняется неравенство $A''F_1 - A''F_2 > c$.

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат во внешней области, т. е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 - A'F_2 < c$, называется **касательной** к гиперболе. Точка A называется **точкой касания**.

Аналогичным образом определяется касательная для точки, лежащей на другой ветви гиперболы.

ТЕОРЕМА

Пусть A — точка гиперболы с фокусами F_1, F_2 . Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A , является прямая, содержащая биссектрису угла F_1AF_2 .

Доказательство. Докажем, что прямая a , содержащая биссектрису угла F_1AF_2 , будет касательной к гиперболе (рис. 23.3). Рассмотрим точку F' на прямой F_1A , для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F' . Для произвольной точки A' прямой a , отличной от A , имеем:

$$A'F_2 = A'F'$$

и

$$A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - A'F' < F_1F' = AF_1 - AF_2 = c.$$

Следовательно, прямая a является касательной.

Фокальное свойство гиперболы. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от неё, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 гиперболы, a — касательная (см. рис. 23.3). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла F_1AF_2 . Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдёт в направлении AF_2 .

Построение касательной к гиперболе. Пусть гипербола задана своими фокусами F_1, F_2 и постоянной c . Используя циркуль и линейку, построим касательную к гиперболе, проходящую через данную точку C .

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведём окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведём другую окружность и найдём её точки пересечения с первой окружностью (рис. 23.4 на с. 119). Таких точек может быть две —

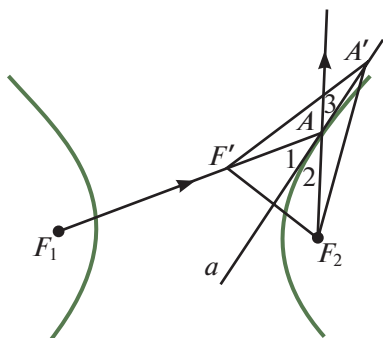


Рис. 23.3

F' , F'' , — одна или ни одной, в зависимости от расположения точки C . В первом случае проведём биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a' , a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$, $F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к гиперболе. Для построения точек касания проведём прямые F_1F' , F_1F'' и найдём их точки пересечения A' , A'' с касательными a' , a'' соответственно. Они и будут искомыми.

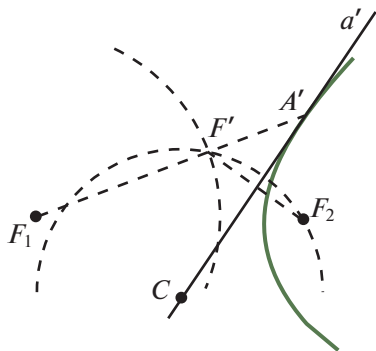


Рис. 23.4

Во втором случае, когда проведённые окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Укажем способ получения гиперболы из листа бумаги. Вырежем из листа бумаги круг и отметим точку F на оставшейся части листа. Сложим лист так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности вырезанного круга и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогнём лист и снова согнём его, совместив точку с другой точкой окружности. Сделаем так несколько раз. Линии сгибов будут касательными к гиперболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму гиперболы.

Дополнительная литература

Смирнова И. М., Смирнов В. А. Кривые. — М.: Мнемозина, 2007.

Вопросы

1. Что называется гиперболой?
2. Какие точки называются фокусами гиперболы?
3. Что называется касательной к гиперболе?
4. Какая прямая является касательной к гиперболе?
5. В чём состоит фокальное свойство гиперболы?
6. Как построить касательную к гиперболе с помощью циркуля и линейки?
7. Как получить гиперболу на листе бумаги?

Задачи

1. Изготовьте прибор для построения гиперболы. Нарисуйте гиперболу с заданными фокусами F_1, F_2 . Сколько таких гипербол?
2. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и разностью радиусов.
3. С помощью циркуля постройте несколько точек гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них.
4. Найдите геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек F_1, F_2 : а) меньше заданной величины c ; б) больше заданной величины c .
5. Расстояние между фокусами гиперболы равно 6 см, константа c равна 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек гиперболы до фокусов? Укажите соответствующие точки на гиперболе.
6. Что будет происходить с гиперболой, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?
7. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AB = CD$ и $AD = BC$, сторона AB закреплена, а остальные стороны подвижны (рис. 23.5). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AD и BC .
8. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.
9. Через точку гиперболы с заданными фокусами проведите касательную к гиперболе.
10. Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и разностью расстояний до них c найдите точки, касательные в которых перпендикулярны прямой F_1F_2 .
11. Через точку вне гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них проведите касательную к этой гиперболе.

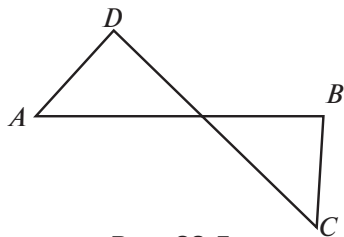


Рис. 23.5

12. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами в точках пересечения имеют перпендикулярные касательные.
13. Даны фокусы F_1 , F_2 гиперболы и разность расстояний до них s . Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом s серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к гиперболе, если он пересекается с прямой F_2C . Найдите точку касания.
14. Даны два фокуса и касательная к гиперболе. Постройте постоянную s и нарисуйте гиперболу.
15. Даны две касательные, фокус и постоянная s . Постройте второй фокус гиперболы.
16. Даны фокусы F_1 и F_2 гиперболы. Световой луч исходит из фокуса F_1 и отражается от гиперболы в точке A . Постройте отражённый луч.

§ 24* ГРАФЫ

Фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек, называется **плоским графом** или просто **графом** (рис. 24.1, а). Точки называются **вершинами**, а отрезки — **рёбрами** графа.

Вместо отрезков в качестве рёбер графов рассматриваются также кривые линии на плоскости (рис. 24.1, б).

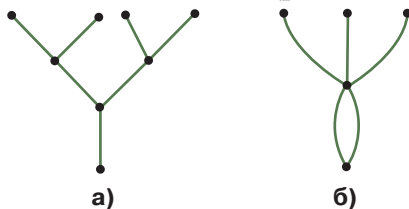


Рис. 24.1

Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы выставок и т. д.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад.

Одной из таких задач-головоломок была задача о кёнигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707—1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 года до конца жизни).

Задача. В городе Кёнигсберге (ныне Калининграде) было семь мостов через реку Прегель (рис. 24.2, где Л — левый берег, П — правый берег, А и Б — острова). Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?

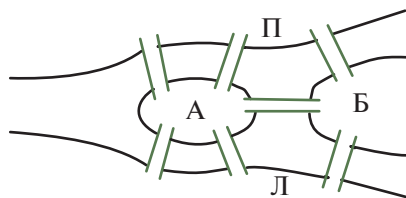


Рис. 24.2

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т. е. «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют так называемые *уникурсальные графы*.

Задаче о кёнигсбергских мостах Л. Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую академию наук.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера — одного из величайших математиков, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Л. Эйлер был действительным членом Петербургской академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и сыграл важную роль в деле подготовки кадров учёных-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие учёного. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причём последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжёлый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчёты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский учёный П. С. Лаплас сказал: «Читайте Эйлера, он — учитель всех нас».

На рисунке 24.3 изображён граф, соответствующий задаче о кёнигсбергских мостах. Выясним, является ли этот граф уникарсальным.

Для этого рассмотрим понятие *индекса вершины* — числа рёбер графа, сходящихся в данной вершине (рёбра с началом и концом в данной вершине считаются дважды), — и докажем, что имеет место следующая теорема.

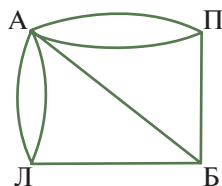


Рис. 24.3

ТЕОРЕМА

Для уникарсального графа число вершин нечётного индекса равно нулю или двум.

Доказательство. Действительно, если граф уникарсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют чётный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало и конец не совпадают, то они являются единственными вершинами нечётного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечётным индексом нет.

Приступим теперь к решению задачи. Определим чётность вершин графа на рисунке 24.3. Вершина А имеет индекс 5, Б — 3, П — 3 и Л — 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечётного индекса и, следовательно, данный граф не является уникарсальным. Отсюда получаем, что во время прогулки по городу нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.

Дополнительная литература

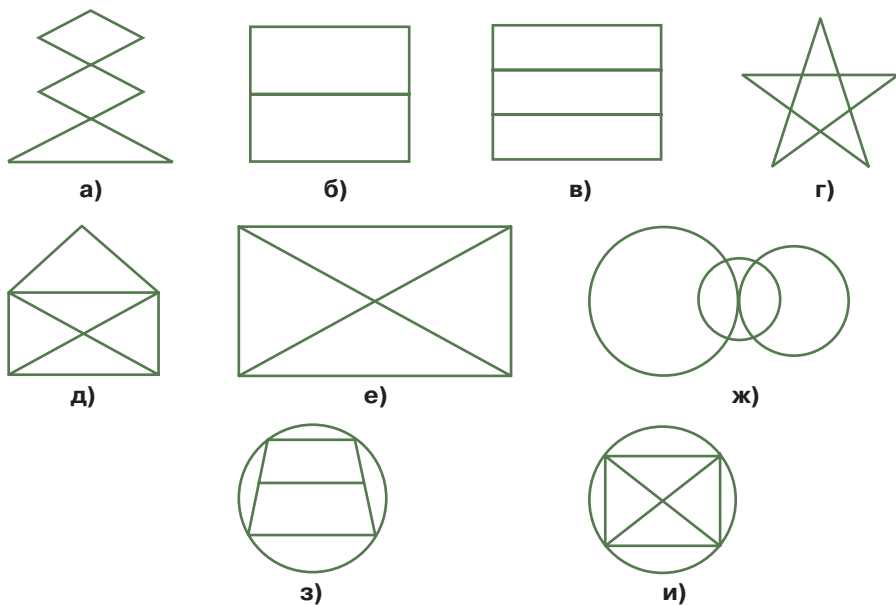
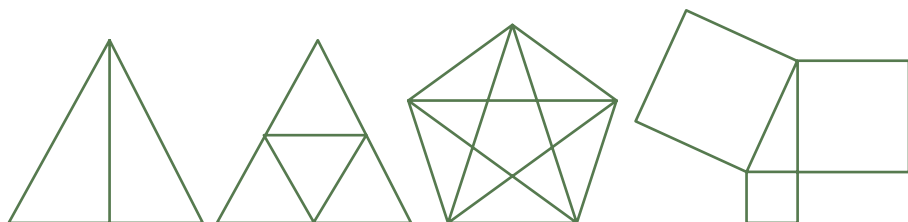
Березина Л. Ю. Графы и их применение. — М.: Просвещение, 1979.

Вопросы

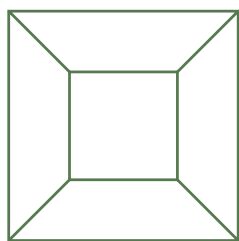
1. Какая фигура называется графом? Что называется: а) вершинами; б) рёбрами графа?
2. В чём состоит задача Эйлера о кёнигсбергских мостах?
3. Какой граф называется: а) плоским; б) уникарсальным?
4. Что такое индекс вершины графа?
5. Что можно сказать об индексах вершин уникарсального графа?

Задачи

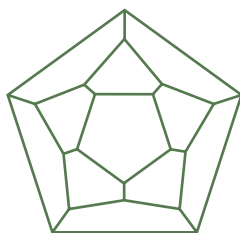
1. Нарисуйте графы, у которых имеются вершины индексов 1, 2, 3 и 4.
2. Нарисуйте граф, в котором каждая вершина имеет индекс, равный: а) двум; б) трём; в) четырём.
3. В графе 10 вершин, каждая из которых имеет индекс 3. Сколько у него рёбер? Нарисуйте такой граф.
4. В графе 5 вершин, каждая из которых имеет индекс 4. Сколько у него рёбер? Нарисуйте такой граф.
5. Определите, какие графы на рисунке 24.4 являются уникальными.
6. Нарисуйте одним росчерком фигуры, изображённые на рисунке 24.5.

**Рис. 24.4****Рис. 24.5**

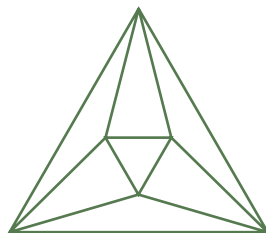
7. Может ли граф иметь только одну вершину нечётного индекса?
8. Докажите, что в любом графе сумма индексов всех его вершин — число чётное, равное удвоенному числу рёбер графа. Выведите из этого, что число вершин с нечётными индексами чётно.
9. Докажите, что во всяком графе, рёбрами которого являются отрезки, найдутся по крайней мере две вершины одинакового индекса.
10. Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придётся пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?
11. Докажите, что если в задаче о кёнигсбергских мостах добавить ещё один мост в любом месте реки Прегель, то полученный граф будет уникурсальным.
12. Какое наименьшее число рёбер придётся обвести дважды, чтобы нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, графы, изображённые на рисунке 24.6?
13. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале только один раз? Соответствующий граф приведён на рисунке 24.7. Вершины графа — это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрёстки, а рёбра — залы и ко-



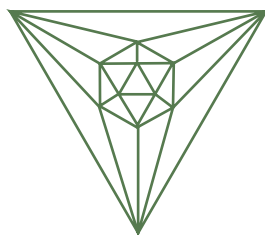
а)



в)



б)



г)

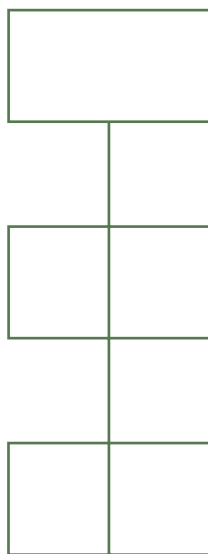


Рис. 24.7

Рис. 24.6

ридоры. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

14. Возьмите карту Санкт-Петербурга и определите, можно ли, прогуливаясь по городу, обойти все дворцовые мосты ровно по одному разу.
15. На рисунке 24.8 изображён план подземелья, в одной из комнат которого были скрыты богатства рыцаря. После его смерти наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причём в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

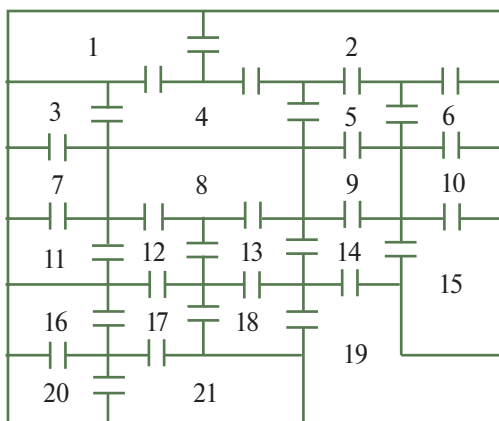


Рис. 24.8

16. Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить ломаной, состоящей из рёбер графа. Нарисуйте связные и несвязные графы.
17. Связный граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется **деревом**. Нарисуйте графы, являющиеся деревьями.
18. Докажите, что в графе, являющемся деревом, любые две вершины можно соединить только одной ломаной.
19. Докажите, что для любого дерева, имеющего V вершин и P рёбер, справедливо соотношение Эйлера: $V - P = 1$.

20. Приведите примеры графов, для которых $V - P \neq 1$.
21. Граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется *лесом*. Пусть лес состоит из n деревьев и имеет V вершин и P рёбер. Чему равно $V - P$?
22. Нарисуйте графы, для которых $V - P$ равно: а) 0; б) 1; в) 2; г) -1 ; д) -2 .

§ 25* Теорема Эйлера

Ещё одной задачей-головоломкой, связанной с графами и с именем Эйлера, является задача о трёх домах и трёх колодцах.

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу (рис. 25.1)?

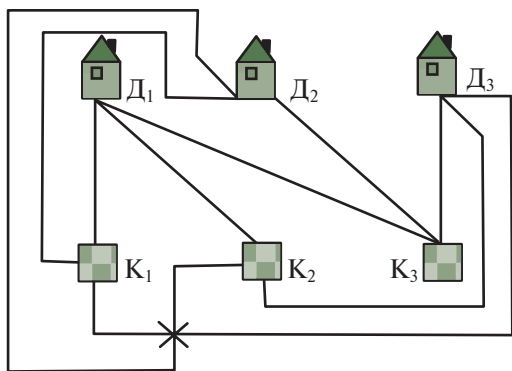


Рис. 25.1

Для решения этой задачи воспользуемся теоремой, доказанной Леонардом Эйлером в 1752 году.

ТЕОРЕМА

Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или имеют общие вершины, или имеют общие рёбра, то имеет место равенство

$$V - P + \Gamma = 1, \quad (*)$$

где V — общее число вершин, P — общее число рёбер, Γ — число многоугольников (граней).

Заметим, что соотношение Эйлера не зависит от формы многоугольников. Многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Соотношение Эйлера при этом не изменится.

Доказательство. Докажем, что равенство (*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике данного разбиения провести диагональ, возможно кривую, целиком в нём содержащуюся (рис. 25.2, а). Действительно, после проведения такой диагонали в новом разбиении будет B вершин, $P + 1$ рёбер и количество многоугольников увеличится на единицу. Следовательно, имеем:

$$B - (P + 1) + (\Gamma + 1) = B - P + \Gamma.$$

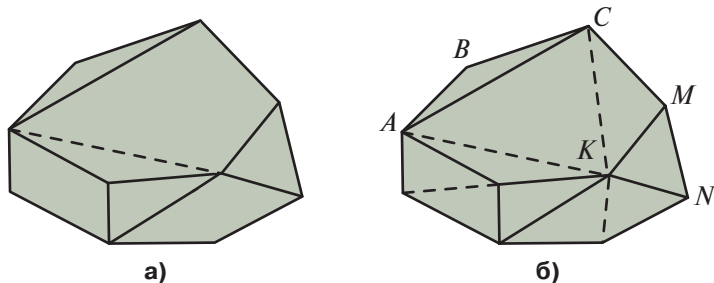


Рис. 25.2

Пользуясь этим свойством, проведём диагонали, разбивающие входящие многоугольники на треугольники, и для полученного разбиения покажем выполнимость соотношения (*) (рис. 25.2, б). Для этого будем последовательно убирать внешние рёбра, уменьшая количество треугольников. При этом возможны два случая:

- а) для удаления треугольника ABC требуется снять два ребра, в нашем случае AB и BC ;
- б) для удаления треугольника MKN требуется снять одно ребро, в нашем случае MN .

В обоих случаях равенство (*) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника граф будет состоять из $B - 1$ вершин, $P - 2$ рёбер и $\Gamma - 1$ многоугольника:

$$(B - 1) - (P - 2) + (\Gamma - 1) = B - P + \Gamma.$$

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет равенства (*). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придём к разбиению, состоящему из одного треугольника. Для такого разбиения $B = 3$, $P = 3$, $G = 1$ и, следовательно, $B - P + G = 1$. Значит, равенство (*) имеет место и для исходного разбиения, откуда окончательно получаем, что для данного разбиения многоугольника справедливо соотношение (*).

Приступим теперь к решению задачи о трёх домах и трёх колодцах.

Решение. Предположим, что это можно сделать. Обозначим домики точками D_1, D_2, D_3 , а колодцы — точками K_1, K_2, K_3 (рис. 25.1 на с. 127). Каждую точку-дом соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять рёбер, которые попарно не пересекаются.

Эти рёбра образуют на плоскости многоугольник, разделённый на более мелкие многоугольники. Поэтому для этого разбиения должно выполняться соотношение Эйлера $B - P + G = 1$. Добавим к рассматриваемым граням ещё одну — внешнюю часть плоскости по отношению к многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид $B - P + G = 2$, причём $B = 6$ и $P = 9$. Следовательно, $G = 5$. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество рёбер должно быть не меньше $(5 \cdot 4) : 2 = 10$, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу.

Вопросы

1. В чём состоит задача Эйлера о трёх домах и трёх колодцах?
2. Сформулируйте теорему Эйлера о числе вершин, рёбер и граней разбиения многоугольника.

Задачи

1. Укажите какое-нибудь разбиение выпуклого четырёхугольника на выпуклые четырёхугольники.

2. Докажите, что для произвольного разбиения четырёхугольника на четырёхугольники выполняется равенство $B - \Gamma = 3$.
3. Укажите какое-нибудь разбиение выпуклого пятиугольника на выпуклые пятиугольники.
4. Укажите какое-нибудь разбиение треугольника на семиугольники.
5. Два соседа имеют: а) три общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?
6. Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?
7. Внутри n -угольника взяты m точек. Эти точки и вершины многоугольника соединены отрезками так, что исходный многоугольник разбивается на треугольники. Докажите, что при этом число треугольников равно $n + 2m - 2$.
8. Многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что в каждой вершине сходится три ребра. Сколько при этом имеется вершин и граней, если число рёбер равно: а) 6; б) 12; в) 15? Нарисуйте такие разбиения.
9. Докажите, что для любого разбиения n -угольника на m -угольники выполняется равенство $2B + (2 - m)\Gamma = n + 2$.
10. В многоугольнике вырезали дырку в форме многоугольника. Оставшуюся часть разбили на многоугольники. Чему равно $B - P + \Gamma$ для этого разбиения?

§ 26* Проблема четырёх красок

Ещё одной проблемой, связанной с многоугольниками и графами, является проблема четырёх красок, имеющая почти 150-летнюю историю.

Задача заключается в том, чтобы раскрасить данную географическую карту (рис. 26.1, а на с. 131) так, чтобы пограничные страны (т. е. страны, имеющие общую граничную линию) были окрашены в разные цвета (непограничные страны можно окрашивать одним цветом), используя при этом наименьшее число красок.

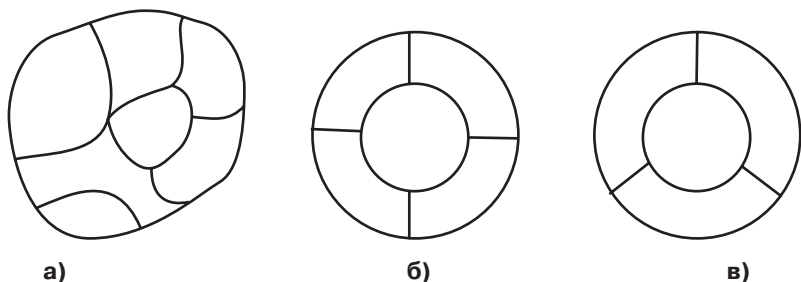


Рис. 26.1

На рисунке 26.1, б изображена карта, для раскраски которой требуется три цвета. На рисунке 26.1, в изображена карта, для раскраски которой трёх цветов недостаточно и требуется четыре цвета.

В 1850 году шотландский физик Фредерик Гутри обратил внимание на то, что задачи раскрашивания карт очень популярны среди студентов-математиков в Лондоне, а сформулировал проблему четырёх красок его брат Фрэнсис Гутри, который, раскрасив карту графств Англии четырьмя цветами, выдвинул гипотезу, что этого количества цветов достаточно для раскраски любой карты. Он привлёк к проблеме внимание своего преподавателя математики А. Де Моргана, а тот сообщил о ней своему другу В. Гамильтону и тем самым способствовал её широкому распространению.

Однако годом рождения проблемы четырёх красок считается 1878 год (в некоторых изданиях указывается 1879 год). Именно тогда на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик А. Кэли чётко сформулировал поставленную задачу: «Доказать, что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками». Раскраска карты называется правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в разные цвета. Именно с этого момента проблема привлекла к себе внимание многих крупных математиков.

В 1890 году английский математик П. Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Однако долгое время проблема четырёх красок не поддавалась решению. В 1968 году американские математики О. Оре и Г. Сتمпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время для решения этой проблемы используются компьютеры, что связано с выполнением огромного количества вычислений. В 1976 году американскими учёными К. Аппелем и В. Хакеном было получено первое машинное решение. С помощью машины они просматривали различные типы карт, и для каждого из них машина решала, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается в четыре цвета. Учёными было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ «нет», что и позволило объявить о машинном решении проблемы четырёх красок.

ТЕОРЕМА

(О двух красках.) Всякую карту на плоскости, образованную прямыми, можно раскрасить в два цвета.

Доказательство. Ясно, что карту, образованную одной прямой, можно раскрасить в два цвета (рис. 26.2, а). Докажем, что если карта, образованная прямыми, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из неё добавлением новой прямой, также может быть раскрашена в два цвета (рис. 26.2, б). Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причём к самой прямой примыкают пары областей, окрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты (рис. 26.2, в). Поскольку любую карту, образованную прямыми, можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета.

Аналогично любую карту, образованную окружностями, можно раскрасить в два цвета.

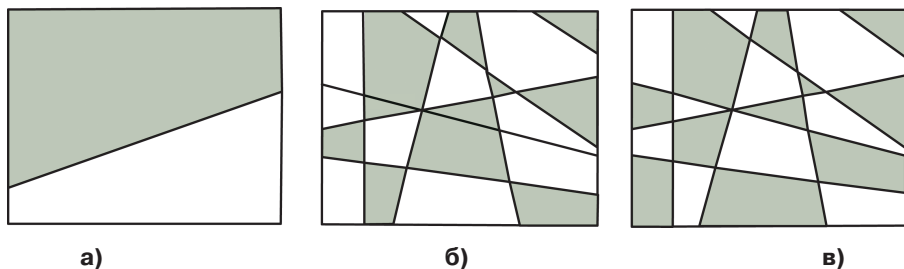


Рис. 26.2

Дополнительная литература

Смирнова И. М., Смирнов В. А. Кривые. — М.: Мнемозина, 2007.

Вопросы

1. В чём состоит задача о раскрашивании карт?
2. Какой год считается годом рождения проблемы четырёх красок?
3. Сколько красок достаточно для раскраски карты, образованной прямыми?

Задачи

1. Раскрасьте карту, изображённую на рисунке 26.1, а (см. с. 131). Какое минимальное число красок для этого потребуется?
2. Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими n перегородок (рис. 26.1, б, в)?
3. Докажите, что всевозможные карты на плоскости, образованные окружностями, могут быть раскрашены в два цвета.
4. Исследуйте вопрос о том, какие свойства прямых и окружностей используются при раскрашивании карт двумя цветами. Можно ли раскрасить двумя цветами карту, образованную: а) параболой; б) эллипсами?
5. Докажите, что если карту, заполняющую всю плоскость, можно раскрасить в два цвета, то она имеет вершины только чётного индекса.
6. Используя то, что любую карту на плоскости можно раскрасить в четыре цвета, докажите утверждение, сформулированное известным астрономом и геометром Августом Мёбиусом в 1840 году: на плоскости нельзя начертить пять областей так, чтобы каждые две из них имели общую границу.
7. Какое наибольшее число клеток в квадрате $n \times n$, нарисованном на бумаге в клетку, можно закрасить так, чтобы ни в одном квадрате 2×2 не оказалось трёх закрашенных клеток?
8. Можно ли закрасить на бумаге в клетку 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечётное число закрашенных соседних клеток? (Соседними считаются клетки, у которых есть общая сторона.)

9. На рисунке 26.3 изображена карта, раскрашенная в два цвета, полученная разбиением шестиугольника на треугольники. Треугольники, примыкающие к сторонам шестиугольника, окрашены в один цвет. Докажите, что карту, полученную разбиением десятиугольника на треугольники, нельзя раскрасить в два цвета так, чтобы треугольники, примыкающие к сторонам десятиугольника, были окрашены в один цвет.
10. Какое наименьшее число красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников (рис. 26.4), при которой соседние грани окрашиваются в разные цвета?

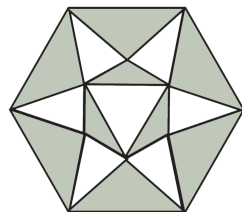


Рис. 26.3

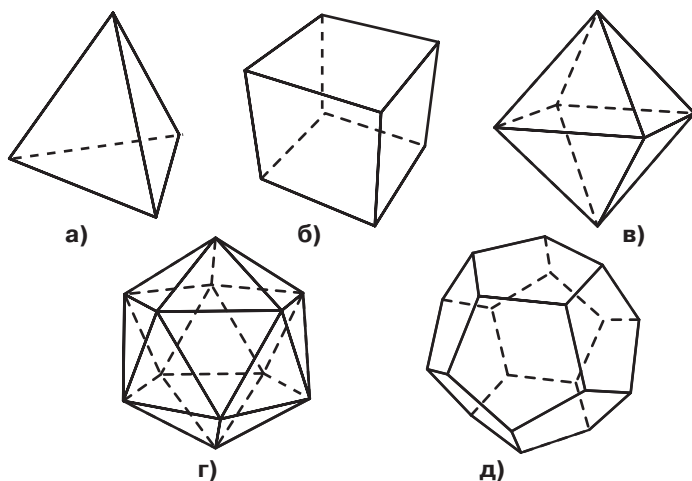


Рис. 26.4

- *11. Докажите, что если все вершины карты имеют чётный индекс, то её можно раскрасить в два цвета.
- *12. Приведите пример карты с двумя вершинами нечётного индекса, которую нельзя раскрасить в два цвета.
- *13. Приведите пример карты с четырьмя вершинами нечётного индекса, которую нельзя раскрасить в три цвета.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

§ 27 Параллельные прямые

Напомним, что две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются (рис. 27.1), т. е. не имеют общих точек.

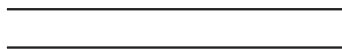


Рис. 27.1

Параллельность прямых обозначается знаком $\parallel$. Так, если прямые a и b параллельны, то пишут: $a \parallel b$.

Пусть a и b — две прямые и c — пересекающая их третья прямая, называемая **секущей**. Обозначим углы, образованные этими прямыми, цифрами 1, ..., 8, как показано на рисунке 27.2.

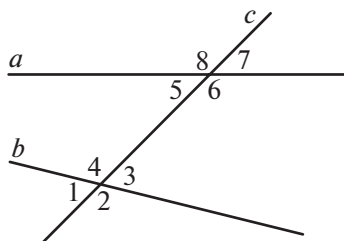


Рис. 27.2

Углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 называются *соответственными*; углы 3 и 5, 4 и 6 называются *внутренними накрест лежащими*; углы 4 и 5, 3 и 6 называются *внутренними односторонними*.

ТЕОРЕМА

(Признак параллельности двух прямых.) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются прямой c в точках A и B соответственно и образуют равные внутренние накрест лежащие углы. Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекутся в некоторой точке C (рис. 27.3). Для треугольника ABC угол 5 является внешним и, следовательно, должен быть больше внутреннего угла 3, что противоречит условию равенства этих углов. Значит, прямые a и b не могут пересекаться, т. е. они параллельны.

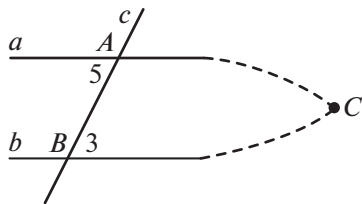


Рис. 27.3

Следствие 1. Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны.

Следствие 2. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы составляют в сумме 180° , то эти две прямые параллельны.

Следствие 3. Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то эти две прямые параллельны.

Действительно, в этих случаях внутренние накрест лежащие углы равны и поэтому прямые параллельны.

Основное свойство (аксиома) параллельных прямых состоит в следующем.

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Из сказанного выше следует, что через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Поэтому справедлива следующая теорема, обратная признаку параллельности двух прямых.

ТЕОРЕМА

Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Доказательство. Пусть a и b — параллельные прямые, пересечённые прямой c в точках A и B соответственно. Проведём через точку A прямую a_1 так, чтобы внутренние накрест лежащие углы, образованные прямыми a_1 , b и секущей c , были равны. Тогда по признаку параллельности прямые a_1 и b параллельны. А так как через точку A проходит единственная прямая, параллельная b , то прямая a совпадёт с прямой a_1 . Значит, внутренние накрест лежащие углы, образованные прямыми a , b и секущей c , равны.

Следствие 1. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны.

Следствие 2. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние односторонние углы составляют в сумме 180° .

Действительно, по доказанной теореме если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны. Из этого следует, что соответственные углы будут равны, а внутренние односторонние углы будут составлять 180° .

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Вопрос о количестве прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой, имеет давнюю и интересную историю. Среди аксиом в «Началах» Евклида пятый по счёту постулат по своему содержанию совпадает с аксиомой параллельности: «Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной этой прямой».

На протяжении двух тысячелетий после Евклида математики пытались доказать этот постулат, однако все их попытки заканчивались неудачей, рано или поздно в их рассуждениях обнаруживались ошибки. Лишь в 1826 году великий русский геометр Н. И. Лобачевский (1792—1856), профессор Казанского университета, предположил, что этот посту-

лат нельзя логически вывести из других постулатов (аксиом) Евклида, т. е. нельзя доказать. Поэтому его можно взять в качестве аксиомы, или в качестве аксиомы может быть взято другое свойство о существовании нескольких прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой. Положив в основу геометрии эту новую аксиому параллельности, Лобачевский создал совершенно новую, неевклидову геометрию, которая была названа геометрией Лобачевского.

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и настолько противоречили так называемому здравому смыслу, что их не поняли даже крупные математики того времени. Несмотря на это, Лобачевский не отказался от своих идей. Он не только был убеждён в логической непротиворечивости новой геометрии, но и твёрдо верил в её применимость к исследованию реального пространства. С этой целью он проводил сложнейшие астрономические наблюдения и измерения, однако недостаточная точность измерительных приборов не позволила ему подтвердить свою гипотезу.

Признание геометрии Лобачевского пришло только после его смерти. Работы Лобачевского были переведены на другие языки и изучались математиками всего мира. В настоящее время геометрия Лобачевского является неотъемлемой частью современной математики и находит применение во многих областях человеческого знания, способствует более глубокому пониманию окружающего нас мира.

ПРИМЕР 1. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов, образованных параллельными прямыми и секущей, равна 150° . Найдите эти углы.

Решение. Внутренние накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми и секущей, равны. Если их сумма равна 150° , то каждый из них равен 75° .

ПРИМЕР 2. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны прямой c . Если бы прямые a и b пересекались в точке C , то через эту точку проходили бы две прямые, параллельные прямой c , что

противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. параллельны.

Вопросы

1. Какая прямая называется секущей для двух данных прямых?
2. На рисунке 27.2 (см. с. 135) покажите соответственные, внутренние накрест лежащие и внутренние односторонние углы.
3. Какие прямые называются параллельными?
4. Сформулируйте признак параллельности двух прямых.
5. Сформулируйте аксиому параллельных.
6. Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку плоскости?

Задачи

1. Как могут располагаться на плоскости две прямые относительно друг друга?
2. При пересечении двух прямых третьей образуется 8 углов. Сколько из них могут оказаться тупыми?
3. Могут ли оба внутренних односторонних угла при пересечении двух прямых третьей быть тупыми?
4. Могут ли быть равны внутренние односторонние углы при пересечении двух прямых третьей?
5. Могут ли все углы, образованные при пересечении двух прямых третьей, быть равными между собой?
6. Найдите углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если: а) один из углов равен 150° ; б) один из углов на 70° больше другого.
7. Разность двух внутренних односторонних углов, образованных параллельными прямыми и секущей, равна 30° . Найдите эти углы.
8. Угол ABC равен 80° , а угол BCD равен 120° . Могут ли прямые AB и CD быть параллельными?
9. В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD . Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
10. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
11. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b . Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D . Докажите, что $CO = OD$.

12. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.
13. Докажите, что биссектрисы внутренних односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, перпендикулярны, т. е. лежат на перпендикулярных прямых.
14. Треугольники ABC и BAD равны. Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB . Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
15. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
16. Докажите, что если две прямые пересекаются, то любая третья прямая пересекает по крайней мере одну из этих прямых.
17. Две прямые касаются окружности в двух диаметрально противоположных точках. Каково взаимное расположение этих прямых?
18. Каково взаимное расположение прямых: а) a и b ; б) a и c ; в) b и c , если соответственно: а) $a \perp c$, $b \perp c$; б) $a \perp b$, $c \perp b$; в) $a \perp b$, $c \perp a$?
19. Противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны. Найдите величины углов и длины сторон этого четырёхугольника, если $\angle A = 30^\circ$, $AB = 2$ см, $BC = 4$ см.
20. Лучи AB и CD не пересекаются. Следует ли из этого, что они параллельны?
- *21. Докажите, что две прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.
- *22. Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы равны или в сумме составляют 180° .
- *23. Докажите, что если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы равны или в сумме составляют 180° .
- *24. Укажите способ построения прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку, с помощью циркуля и линейки.

§ 28 Сумма углов треугольника

Выясним, чему равна сумма углов треугольника.

ТЕОРЕМА

Сумма углов произвольного треугольника равна 180° .

Доказательство. Для произвольного треугольника ABC через вершину C проведём прямую, параллельную AB (рис. 28.1). Тогда $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$ как внутренние накрест лежащие углы. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 3 = 180^\circ$.

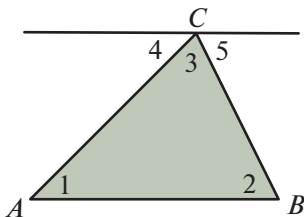


Рис. 28.1

Следствие 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

Доказательство. Обозначим внутренние углы треугольника ABC цифрами 1, 2 и 3 (рис. 28.2). Пусть 4 — внешний угол, не смежный с углами 1 и 3. Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ и $\angle 4 = 180^\circ - \angle 2 = \angle 1 + \angle 3$.

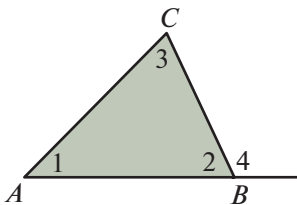


Рис. 28.2

Следствие 2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° .

ПРИМЕР 1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

Решение. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ADC , равный треугольнику ABC (рис. 28.3). Углы треугольника ABD равны 60° . Следовательно, этот треугольник равносторонний. Отрезок AC является его медианой. Значит, $BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$.

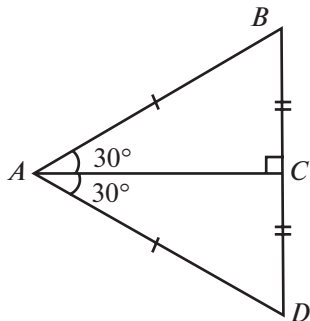


Рис. 28.3

ПРИМЕР 2. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник ($\angle C = 90^\circ$). Через середину D катета AC проведём серединный перпендикуляр к этому катету. Обозначим через E его точку пересечения с гипотенузой AB (рис. 28.4).

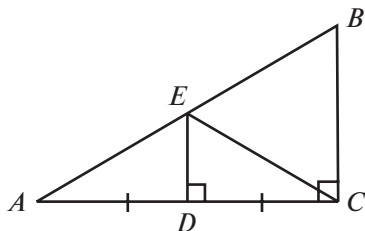


Рис. 28.4

Прямоугольные треугольники AED и CED равны по двум катетам. Следовательно, $AE = CE$, $\angle DAE = \angle DCE$. В треугольнике BCE выполняются равенства $\angle BCE = 90^\circ - \angle DCE = 90^\circ - \angle DAE = \angle CBE$. Значит, треугольник BCE равнобедренный и $CE = BE$. Таким образом, $AE = CE = BE$, следовательно, CE — медиана, равная половине гипотенузы AB .

Вопросы

1. Чему равна сумма углов треугольника?
2. Чему равен внешний угол треугольника?
3. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?

Задачи

1. Чему равны углы равностороннего треугольника?
2. Чему равны острые углы прямоугольного равнобедренного треугольника?
3. Один острый угол прямоугольного треугольника в два раза меньше другого. Найдите больший острый угол.
4. Два острых угла прямоугольного треугольника относятся как 2 : 3. Найдите меньший острый угол.
5. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите меньший из них.
6. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен 100° .
7. В треугольнике ABC угол A равен 40° , внешний угол при вершине B равен 102° . Найдите угол C .
8. В треугольнике ABC дано: $AC = BC$, угол C равен 52° . Найдите внешний угол при вершине B .
9. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 138° . Найдите угол C .

10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 34° . Найдите угол BCH .
11. В треугольнике ABC (угол B — тупой) угол A равен 30° , CH — высота, угол BCH равен 22° . Найдите угол ACB .
12. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 50° , угол CAD равен 28° . Найдите угол B .
13. В треугольнике ABC угол A равен 60° , BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE .
14. Острый угол прямоугольного треугольника равен 32° . Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника.
15. В треугольнике ABC угол C равен 60° , AD , BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB .
16. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла.

17. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 21° . Найдите меньший угол данного треугольника.

18. На рисунке 28.5 отрезки EC и BD пересекаются в точке A , $\angle C = \angle D$. Докажите, что $\angle B = \angle E$.

19. В треугольнике ABC (рис. 28.6) проведён отрезок MN таким образом, что $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

20. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

21. Докажите, что биссектриса CD внешнего угла при вершине C , противолежащей основанию AB равнобедренного треугольника ABC , параллельна этому основанию (рис. 28.7).

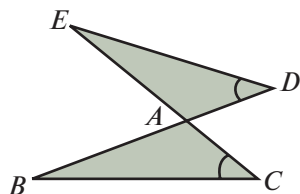


Рис. 28.5

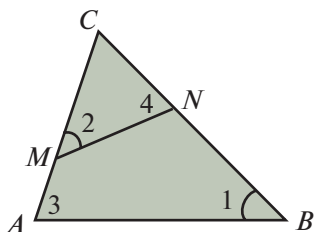


Рис. 28.6

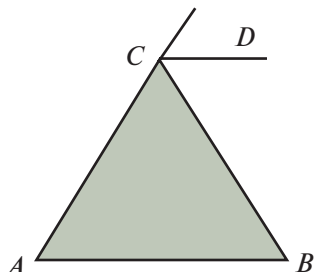


Рис. 28.7

22. В треугольнике ABC угол A равен 48° , угол B равен 56° . На продолжении стороны AC отложены отрезки $CE = BC$ и $AD = AB$ (рис. 28.8). Найдите углы треугольника DEB .

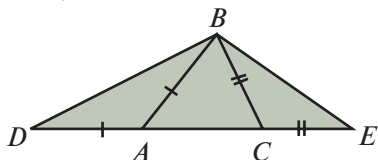


Рис. 28.8

- *23. Докажите, что если медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB , то угол C треугольника ABC равен 90° .
- *24. Острый угол прямоугольного треугольника равен 23° . Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.
- *25. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.
- *26. Докажите, что угол между медианой CM и биссектрисой CD , проведёнными из вершины C прямого угла треугольника ABC , равен углу между этой биссектрисой и высотой CH .
- *27. Чему равна сумма острых углов произвольной пятиконечной звёздочки (рис. 28.9)?

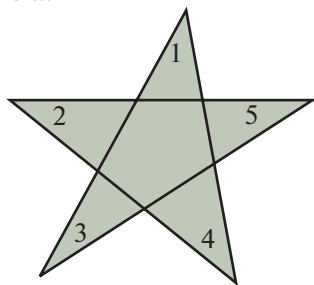


Рис. 28.9

§ 29 Сумма углов выпуклого многоугольника

Выясним, чему равна сумма углов выпуклого многоугольника.

Напомним, что многоугольник называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 29.1 на с. 145)

Выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали (рис. 29.2, а на с. 145).

Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 29.2, б на с. 145).

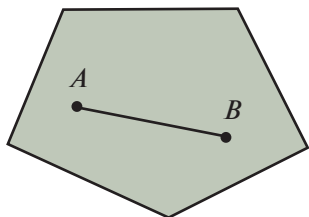


Рис. 29.1

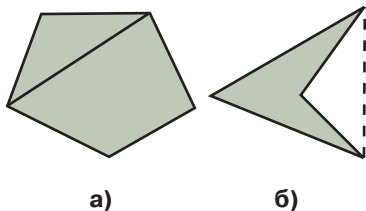


Рис. 29.2

ТЕОРЕМА

Сумма углов произвольного выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

Доказательство. Рассмотрим выпуклый n -угольник $A_1...A_n$. Из его вершины A_1 проведём все диагонали (рис. 29.3).

Так как данный многоугольник выпуклый, то эти диагонали разбивают его на $n - 2$ треугольника. В каждом треугольнике сумма углов равна 180° , и эти углы составляют углы многоугольника. Следовательно, сумма углов многоугольника равна $180^\circ(n - 2)$.

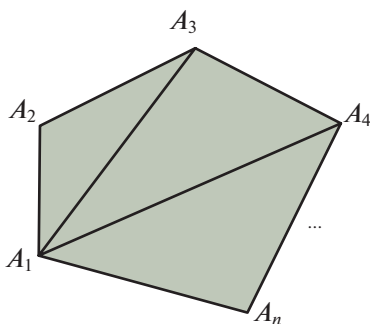


Рис. 29.3

ПРИМЕР 1. Чему равны углы правильного: а) треугольника; б) четырёхугольника; в) пятиугольника; г) шестиугольника; д) n -угольника?

Решение. По доказанной теореме сумма углов произвольного выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$. Так как в правильном n -угольнике все углы равны, то каждый из них должен равняться $\frac{180^\circ(n - 2)}{n}$. Подставляя вместо n различные значения, получим, что углы правильного треугольника равны 60° ; углы правильного четырёхугольника равны 90° ; углы правильного пятиугольника равны 108° ; углы правильного шестиугольника равны 120° .

ТЕОРЕМА

Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° .

Доказательство. Рассмотрим выпуклый n -угольник $A_1 \dots A_n$ (рис. 29.4).

Внешний угол при вершине A_1 равен $180^\circ - \angle A_1$, ..., внешний угол при вершине A_n равен $180^\circ - \angle A_n$. Сумма этих внешних углов равна

$$\begin{aligned} (180^\circ - \angle A_1) + \dots + (180^\circ - \angle A_n) &= \\ &= 180^\circ n - 180^\circ(n - 2) = 360^\circ. \end{aligned}$$

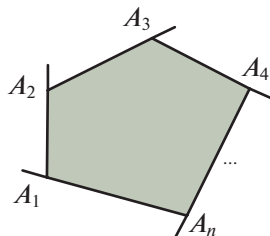


Рис. 29.4

ПРИМЕР 2. Докажите, что у выпуклого многоугольника не может быть более трёх острых углов.

Решение. По доказанной теореме сумма внешних углов произвольного выпуклого многоугольника равна 360° . Следовательно, у выпуклого многоугольника не может быть более трёх тупых внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Значит, у выпуклого многоугольника не может быть более трёх острых углов.

Вопросы

1. Какой многоугольник называется выпуклым?
2. Чему равна сумма углов выпуклого n -угольника?
3. Чему равна сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине?

Задачи

1. Три угла выпуклого четырёхугольника равны 60° , 80° и 100° . Найдите четвёртый угол этого четырёхугольника.
2. Углы выпуклого четырёхугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.
3. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900° . Сколько у него сторон?
4. Найдите угол правильного: а) восьмиугольника; б) десятиугольника; в) двенадцатиугольника.
5. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен: а) 36° ; б) 24° ?
6. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 105^\circ$. Найдите угол C .
7. Противоположные углы A и C , B и D выпуклого четырёхугольника $ABCD$ попарно равны. Докажите, что противоположные стороны этого четырёхугольника параллельны.
8. Для правильного пятиугольника $ABCDE$ (рис. 29.5) найдите угол между диагоналями: а) AC и AD ; б) AC и BE .

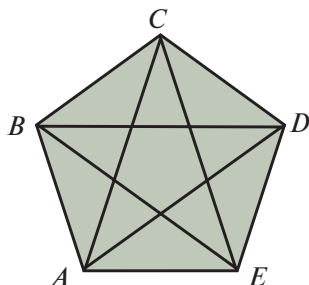


Рис. 29.5

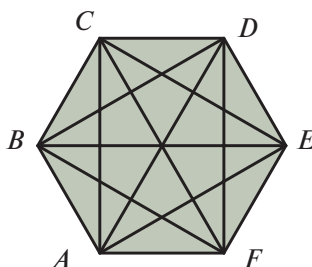


Рис. 29.6

- *9. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника ограничивают правильный пятиугольник.
- *10. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 29.6) найдите угол между диагоналями: а) AC и AD ; б) AC и AE ; в) AC и BE ; г) AD и BE .
- *11. Докажите, что для правильного шестиугольника $ABCDEF$ треугольник ACE является правильным.
- *12. Докажите, что диагонали AC , BD , CE , DF , EA , FB правильного шестиугольника $ABCDEF$ ограничивают правильный шестиугольник.
- *13. Докажите, что для правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$ (рис. 29.7) четырёхугольник $ACEG$ является квадратом.
- *14. Докажите, что сумма углов невыпуклого четырёхугольника равна 360° .
- *15. Найдите сумму углов шестиугольника, изображённого на рисунке 29.8.
- *16. Найдите сумму углов восьмиугольника, изображённого на рисунке 29.9.

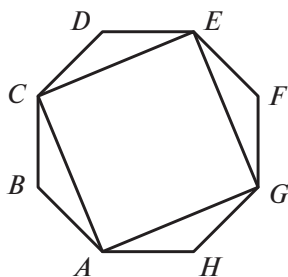


Рис. 29.7

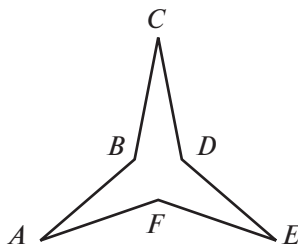


Рис. 29.8

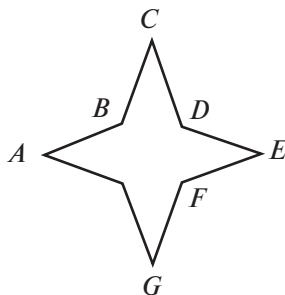
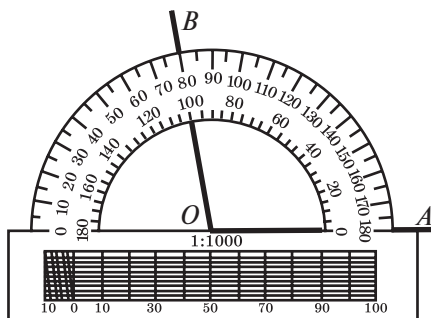


Рис. 29.9

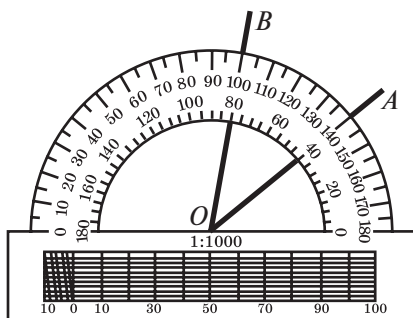
ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ

1. ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН УГЛОВ

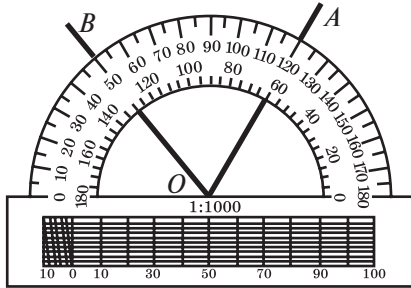
1. Найдите величину угла AOB , изображённого на рисунке.



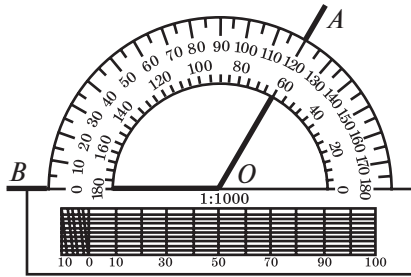
2. Найдите величину угла AOB , изображённого на рисунке.



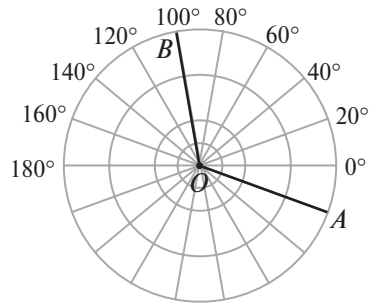
3. Найдите величину угла AOB , изображённого на рисунке.



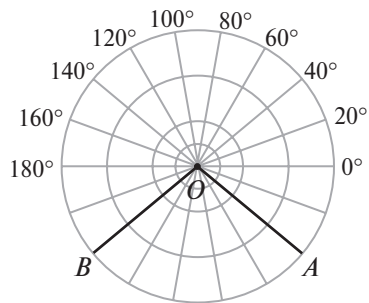
4. Найдите величину угла AOB , изображённого на рисунке.



5. Найдите величину угла AOB , изображённого на рисунке.



6. Найдите величину угла AOB , изображённого на рисунке.



7. Колесо имеет 10 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.
8. Колесо имеет 12 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.
9. Колесо имеет 18 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.
10. Колесо имеет 20 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.
11. Угол AOB равен 38° . Чему равен смежный с ним угол?
12. Угол AOB равен 114° . Чему равен смежный с ним угол?
13. Разность двух смежных углов равна 60° . Найдите больший из этих углов.
14. Разность двух смежных углов равна 120° . Найдите меньший из этих углов.
15. Один из смежных углов в три раза больше другого. Найдите больший из этих углов.
16. Один из смежных углов в четыре раза меньше другого. Найдите меньший из этих углов.
17. Луч OC лежит внутри угла AOB , равного 60° . Найдите угол AOC , если он на 30° больше угла BOC .
18. Луч OC лежит внутри угла AOB , равного 45° . Найдите угол AOC , если он в два раза больше угла BOC .
19. Луч OC лежит внутри угла AOB , равного 120° . Найдите угол AOC , если он на 40° меньше угла BOC .
20. Луч OC лежит внутри угла AOB , равного 160° . Найдите угол BOC , если он в три раза больше угла AOC .
21. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, равен 45° . Найдите больший из оставшихся углов.
22. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, в три раза меньше другого. Найдите меньший из этих углов.

23. Найдите больший из углов, образованных при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 90° .

24. Найдите меньший из углов, образованных при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 200° .

25. Сумма трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306° . Найдите больший из них.

26. Сумма трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 300° . Найдите меньший из них.

27. Сумма трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 210° . Найдите больший из них.

28. Сумма трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 280° . Найдите меньший из них.

29. Найдите больший из углов, образованных при пересечении трёх прямых в одной точке, если два из них равны 40° и 60° .

30. Найдите меньший из углов, образованных при пересечении трёх прямых в одной точке, если два из них равны 50° и 100° .

2. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки E и D так, что $AE = AD$. Докажите, что $BD = CE$.

2. На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD . Точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D . Докажите, что $\angle OEC = \angle OED$.

3. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B принадлежит стороне AC , а точка E — стороне AD , причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle ABD = \angle AEC$.

4. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O , $OA = OB$ и $OC = OD$. Докажите, что $AD = BC$.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = DC$ и $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

6. На сторонах AB , BC и CA правильного треугольника ABC последовательно отложены равные отрезки AD , BE , CF . Докажите, что стороны треугольника DEF равны.

7. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки соответственно E и D так, что $AE = AD$. Докажите, что $\angle ABD = \angle ACE$.

8. На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD . Точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D . Докажите, что $EC = ED$.

9. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B принадлежит стороне AC , а точка E — стороне AD , причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle ACE = \angle ADB$.

10. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O , $AC = BD$ и $\angle OCD = \angle ODC$. Докажите, что $AD = BC$.

11. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = CD$ и $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что $\angle ACB = \angle CAD$.

12. Треугольники ABD_1 и ABD_2 равны. Точка C принадлежит продолжению стороны AB . Докажите, что треугольники BCD_1 и BCD_2 тоже равны.

13. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки соответственно E и D так, что $AE = AD$. Докажите, что $\angle ADB = \angle AEC$.

14. На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD . Точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D . Докажите, что $\angle OCE = \angle ODE$.

15. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B принадлежит стороне AC , а точка E — стороне AD , причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $BD = EC$.

16. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O , $AC = BD$ и $\angle OAB = \angle OBA$. Докажите, что $\angle ABC = \angle BAD$.

17. В треугольниках ABC и ABD вершины C и D лежат по одну сторону от прямой AB , $BC = AD$, $\angle ABC = \angle BAD$. Докажите, что $AC = BD$.

18. На продолжении сторон AB , BC и CA правильного треугольника ABC последовательно отложены равные отрезки BD , CE , AF . Докажите, что стороны треугольника DEF равны.

19. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки соответственно E и D так, что $AE = AD$. Докажите, что $\angle BEC = \angle BDC$.

20. На сторонах OA и OB угла AOB отложены равные отрезки соответственно OC и OD . Точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D . Докажите, что $\angle ACE = \angle BDE$.

21. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B принадлежит стороне AC , а точка E — стороне AD , причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CED = \angle DBC$.

22. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O , $AD = BC$ и $\angle BAD = \angle ABC$. Докажите, что $AC = BD$.

23. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = DC$ и $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что $BC = AD$.

24. Треугольники ABD_1 и ABD_2 равны. Точка C принадлежит продолжению стороны AB . Докажите, что треугольники ACD_1 и ACD_2 тоже равны.

3. ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle DAC = \angle BCA$. Докажите, что $AB = CD$.

2. Стороны AC и DF треугольников ABC и DEF имеют общий отрезок CD . Вершины B и E лежат по разные стороны от прямой AF , $AD = CF$, $\angle BAC = \angle EDF$, угол BCF равен внешнему углу при вершине F треугольника DEF . Докажите, что $AB = DE$.

3. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O , $AO = OC$ и $\angle OAB = \angle OCD$. Докажите, что $OB = OD$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle DAB = \angle CBA$ и диагонали AC и BD образуют со стороной AB равные углы. Докажите, что $AC = BD$.

5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. На сторонах AB и A_1B_1 взяты точки соответственно D и D_1 так, что $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Докажите, что $AD = A_1D_1$.

6. Отрезки AE и BD пересекаются в точке C , $BC = CD$, $\angle CBA = \angle CDE$. Докажите, что $AC = CE$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle DAC = \angle BCA$. Докажите, что $AD = BC$.

8. Стороны AC и DF треугольников ABC и DEF имеют общий отрезок CD . Вершины B и E лежат по разные стороны от прямой AF , $AD = CF$, $\angle BAC = \angle EDF$, угол BCF равен внешнему углу при вершине F треугольника DEF . Докажите, что $BC = EF$.

9. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O , $AO = OC$ и $\angle OAB = \angle OCD$. Докажите, что $AB = CD$.

10. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle DAB = \angle CBA$ и диагонали AC и BD образуют со стороной AB равные углы. Докажите, что $BC = AD$.

11. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. На сторонах AB и A_1B_1 взяты точки соответственно D и D_1 так, что $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Докажите, что $CD = C_1D_1$.

12. Отрезки AE и BD пересекаются в точке C , $BC = CD$, $\angle CBA = \angle CDE$. Докажите, что $AB = ED$.

13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle DAC$ и $\angle BCA = \angle DCA$. Докажите, что $AB = AD$.

14. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , $OB = OC$ и $\angle ABD = \angle ACD$. Докажите, что $AO = DO$.

15. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O , внешний угол при вершине C треугольника AOC равен внешнему углу при вершине D треугольника BOD , $OC = OD$. Докажите, что $OA = OB$.

16. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle DAB = \angle CBA$ и диагонали AC и BD образуют со стороной AB равные углы. Докажите, что $\angle ADB = \angle BCA$.

17. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. На сторонах AB и A_1B_1 взяты точки соответственно D и D_1 так, что $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Докажите, что $\angle CDB = \angle C_1D_1B_1$.

18. Отрезки AE и BD пересекаются в точке C , $BC = CD$, $\angle CBA = \angle CDE$. Докажите, что $\angle CAB = \angle CED$.

19. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle DAC$ и $\angle BCA = \angle DCA$. Докажите, что $BC = DC$.

20. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , $OB = OC$ и $\angle ABD = \angle ACD$. Докажите, что $AC = BD$.

21. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O , внешний угол при вершине C треугольника AOC равен внешнему углу при вершине D треугольника BOD , $OC = OD$. Докажите, что $AC = BD$.

22. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O , $AO = OC$ и $\angle OAB = \angle OCD$. Докажите, что $\angle OBA = \angle ODC$.

23. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. На сторонах AB и A_1B_1 взяты точки соответственно D и D_1 так, что $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Докажите, что $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$.

24. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle DAC = \angle BCA$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.

4. ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите, что $\angle A = \angle C$.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AD = BC$ и $AC = BD$. Докажите, что $\angle ABC = \angle BAD$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AC = BD$ и $AD = BC$. Докажите, что $\angle ADC = \angle BCD$.

4. Стороны AC и DF треугольников ABC и DEF имеют общий отрезок CD . Вершины B и E лежат по одну сторону от прямой AF , $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что $\angle ACB = \angle FDE$.

5. Вершины B и D треугольников ABC и ACD лежат по разные стороны от прямой AC , $AB = AD$, $CB = CD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

6. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: CM и C_1M_1 — медианы, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$. Докажите, что $\angle A = \angle A_1$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AD = BC$ и $AC = BD$. Докажите, что $\angle ABD = \angle BAC$.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AC = BD$ и $AD = BC$. Докажите, что $\angle ACD = \angle BDC$.

10. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $\angle ABD = \angle CBD$.

11. Стороны AC и DF треугольников ABC и DEF имеют общий отрезок CD . Вершины B и E лежат по одну сторону от прямой AF , $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что $\angle BCF = \angle EDA$.

12. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: CM и C_1M_1 — медианы, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$. Докажите, что $\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$.

13. Стороны AC и DF треугольников ABC и DEF имеют общий отрезок CD . Вершины B и E лежат по одну сторону от прямой AF , $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что $\angle A = \angle F$.

14. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AD = BC$ и $AC = BD$. Докажите, что $\angle DAC = \angle CBD$.

15. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CDB$.

16. Вершины B и D треугольников ABC и ACD лежат по разные стороны от прямой AC , $AB = AD$, $CB = CD$. Докажите, что $\angle BCA = \angle DCA$.

17. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: CM и C_1M_1 — медианы, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$. Докажите, что $\angle ACM = \angle A_1C_1M_1$.

18. Стороны AC и DF треугольников ABC и DEF имеют общий отрезок CD . Вершины B и E лежат по одну сторону от прямой AF , $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что $\angle B = \angle E$.

19. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $\angle A = \angle C$.

20. Вершины B и D треугольников ABC и ACD лежат по разные стороны от прямой AC , $AB = AD$, $CB = CD$. Докажите, что $\angle BAC = \angle DAC$.

21. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: CM и C_1M_1 — медианы, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CM = C_1M_1$. Докажите, что $\angle BCM = \angle B_1C_1M_1$.

22. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: CM и C_1M_1 — медианы, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Докажите, что $CM = C_1M_1$.

23. В четырёхугольнике равны все стороны и равны все диагонали. Докажите, что он правильный.

24. В пятиугольнике равны все стороны и равны все диагонали. Докажите, что он правильный.

5. РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. Стороны AD и BC треугольников ABD и ABC пересекаются в точке O , $BO = AO$, $\angle DBC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle CAB = \angle DBA$.

2. Стороны BE и CD треугольников ABE и ACD имеют общий отрезок BC , $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $BD = CE$.

3. В треугольнике ABC дано: $AB = BC$. Докажите, что внешние углы при вершинах A и C треугольника ABC равны.

4. Точка D , лежащая внутри треугольника ABC , соединена отрезками с его вершинами, $CD = BD$, $\angle ACD = \angle ABD$. Докажите, что $\angle ACB = \angle ABC$.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = BC$, $\angle BCD = \angle BAD$. Докажите, что $AD = CD$.

6. Боковые стороны AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ продолжены до пересечения в точке E . Докажите, что $AE = BE$.

7. Стороны BD и CE треугольников ABD и ACE имеют общий отрезок DE , $AB = AC$ и $\angle BAE = \angle CAD$. Докажите, что $\angle BDA = \angle CEA$.

8. Стороны BE и CD треугольников ABE и ACD имеют общий отрезок BC , $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $AB = AC$.

9. Внешние углы при вершинах A и C треугольника ABC равны. Докажите, что $AB = BC$.

10. Точка D , лежащая внутри треугольника ABC , соединена отрезками с его вершинами, $CD = BD$, $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

11. В четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AD = CD$, $\angle BCD = \angle BAD$. Докажите, что $AB = BC$.

12. Боковые стороны AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ продолжены до пересечения в точке E . Докажите, что $CE = DE$.

13. Стороны BD и CE треугольников ABD и ACE имеют общий отрезок DE , $AB = AC$ и $\angle ADB = \angle AEC$. Докажите, что $\angle BAE = \angle CAD$.

14. Стороны BE и CD треугольников ABE и ACD имеют общий отрезок BC , $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ACB$.

15. В треугольнике ABC дано: $AB = BC$. Докажите, что угол C равен углу, вертикальному углу A .

16. Точка B , лежащая внутри треугольника ACD , соединена отрезками с его вершинами, $\angle ABC = \angle ABD$, $\angle CAB = \angle DAB$. Докажите, что $\angle BCD = \angle BDC$.

17. В четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AD = CD$, $AB = BC$. Докажите, что $\angle BCD = \angle BAD$.

18. Стороны AD и BC четырёхугольника $ABCD$ продолжены до пересечения в точке E , $\angle EAB = \angle EBA$, $\angle EDC = \angle ECD$. Докажите, что $AD = BC$.

19. Стороны BD и CE треугольников ABD и ACE имеют общий отрезок DE , $\angle BAE = \angle CAD$, $\angle CEA = \angle BDA$. Докажите, что $AC = AB$.

20. Стороны BE и CD треугольников ABE и ACD имеют общий отрезок BC , $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $\angle ABD = \angle ACE$.

21. Угол C треугольника ABC равен углу, вертикальному углу A . Докажите, что $AB = BC$.

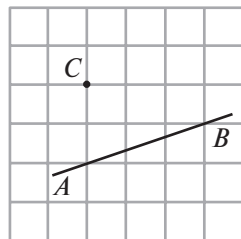
22. Точка B , лежащая внутри треугольника ACD , соединена отрезками с его вершинами, $\angle ABC = \angle ABD$, $\angle BCD = \angle BDC$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BAD$.

23. В четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AD = CD$, $\angle BCA = \angle BAC$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

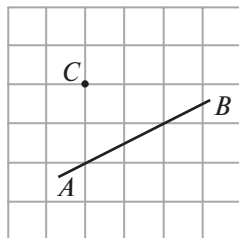
24. Стороны AD и BC четырёхугольника $ABCD$ продолжены до пересечения в точке E , $AD = BC$, $ED = EC$. Докажите, что $\angle EAB = \angle EBA$.

6. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

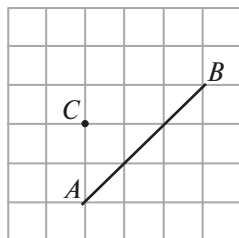
1. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB .



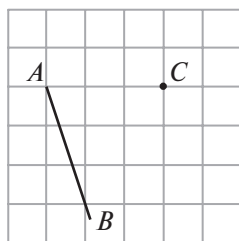
2. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB .



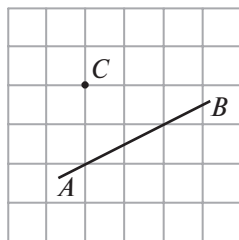
3. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB .



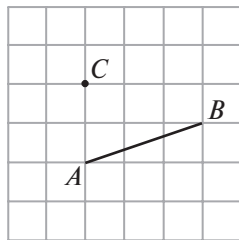
4. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB .



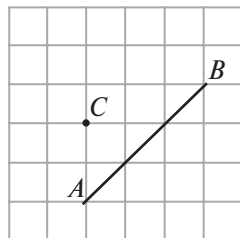
5. Через точку C проведите прямую, перпендикулярную прямой AB .



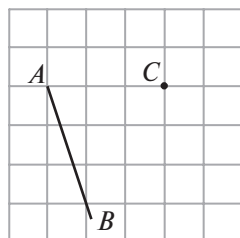
6. Через точку C проведите прямую, перпендикулярную прямой AB .



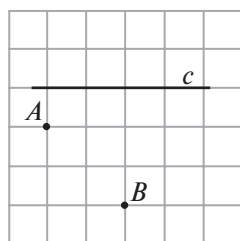
7. Через точку C проведите прямую, перпендикулярную прямой AB .



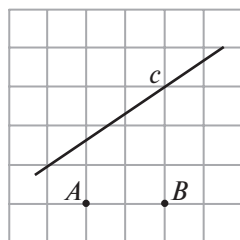
8. Через точку C проведите прямую, перпендикулярную прямой AB .



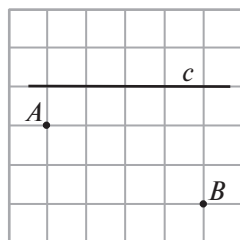
9. На прямой c отметьте точку C , равноудалённую от точек A и B .



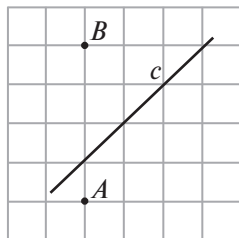
10. На прямой c отметьте точку C , равноудалённую от точек A и B .



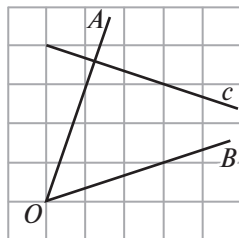
11. На прямой c отметьте точку C , равноудалённую от точек A и B .



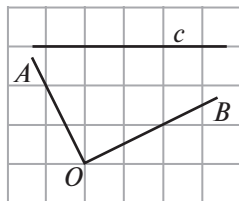
12. На прямой c отметьте точку C , равноудалённую от точек A и B .



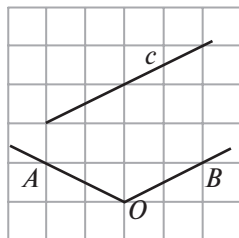
13. На прямой c отметьте точку C , равноудалённую от сторон угла AOB .



14. На прямой c отметьте точку C , равноудалённую от сторон угла AOB .

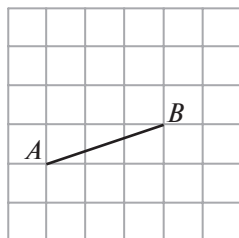


15. На прямой c отметьте точку C , равноудалённую от сторон угла AOB .

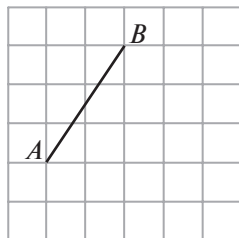


7. ТРЕУГОЛЬНИКИ

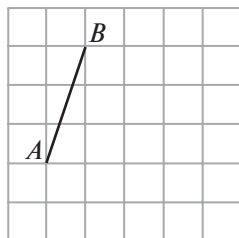
1. Изобразите равнобедренный треугольник, боковой стороной которого является отрезок AB , а вершина C находится в одном из узлов сетки.



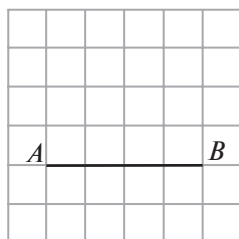
2. Изобразите равнобедренный треугольник, боковой стороной которого является отрезок AB , а вершина C находится в одном из узлов сетки.



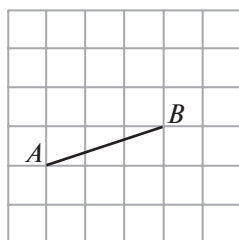
3. Изобразите равнобедренный треугольник, боковой стороной которого является отрезок AB , а вершина C находится в одном из узлов сетки.



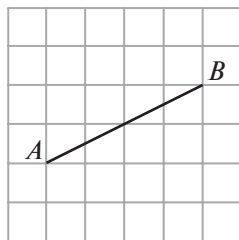
4. Изобразите прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является отрезок AB , а вершина C находится в одном из узлов сетки.



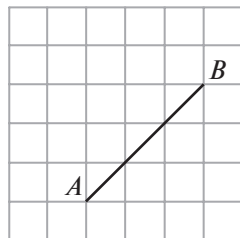
5. Изобразите прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является отрезок AB , а вершина C находится в одном из узлов сетки.



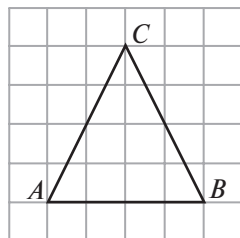
6. Изобразите прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является отрезок AB , а вершина C находится в одном из узлов сетки.



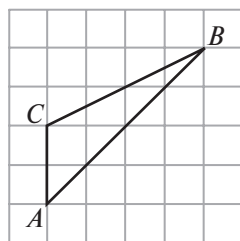
7. Изобразите прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является отрезок AB , а вершина C находится в одном из узлов сетки.



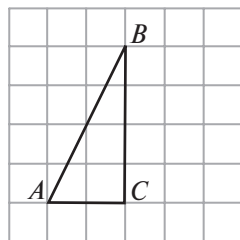
8. Изобразите точку пересечения медиан треугольника ABC .



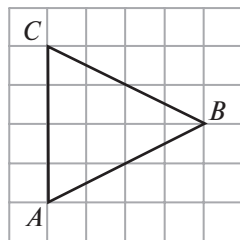
9. Изобразите точку пересечения медиан треугольника ABC .



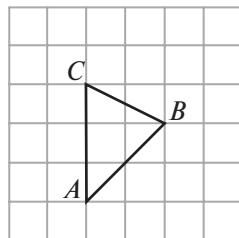
10. Изобразите точку пересечения медиан треугольника ABC .



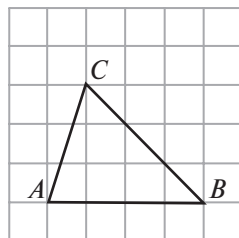
11. Изобразите точку пересечения медиан треугольника ABC .



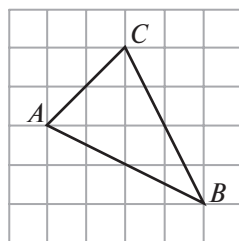
12. Изобразите точку пересечения высот треугольника ABC .



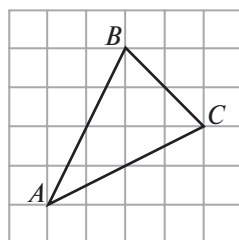
13. Изобразите точку пересечения высот треугольника ABC .



14. Изобразите точку пересечения высот треугольника ABC .



15. Изобразите точку пересечения высот треугольника ABC .



8. СУММА УГЛОВ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Один острый угол прямоугольного треугольника на 32° больше другого острого угла. Найдите больший острый угол.

2. Один острый угол прямоугольного треугольника на 34° меньше другого острого угла. Найдите меньший острый угол.

3. Один острый угол прямоугольного треугольника в 2 раза меньше другого острого угла. Найдите больший острый угол.
4. Разность двух острых углов прямоугольного треугольника равна 50° . Найдите больший острый угол.
5. В треугольнике ABC угол A равен 40° . Внешний угол при вершине B равен 68° . Найдите угол C .
6. В треугольнике ABC угол B равен 40° , внешний угол при вершине A равен 80° . Найдите угол C .
7. В треугольнике ABC угол C равен 64° , внешний угол при вершине B равен 104° . Найдите угол A .
8. В треугольнике ABC угол A равен 38° , $AC = BC$. Найдите угол C .
9. В треугольнике ABC угол C равен 118° , $AC = BC$. Найдите угол A .
10. В треугольнике ABC угол B равен 36° , $AC = BC$. Найдите угол C .
11. В треугольнике ABC угол C в 2 раза больше угла A , $AC = BC$. Найдите угол A .
12. В треугольнике ABC угол B в 4 раза меньше угла C , $AC = BC$. Найдите угол C .
13. В треугольнике ABC внешний угол при вершине B равен 130° , $AC = BC$. Найдите угол C .
14. В треугольнике ABC внешний угол при вершине B равен 140° , $AB = AC$. Найдите угол A .
15. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 52° . Найдите внешний угол при вершине B .
16. Один угол равнобедренного треугольника на 90° больше другого. Найдите меньший угол.
17. Один острый угол прямоугольного треугольника в 4 раза больше другого. Найдите больший острый угол.

18. Углы треугольника относятся как $2:3:4$. Найдите меньший из них.

19. Углы треугольника относятся как $1:2:3$. Найдите больший из них.

20. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 50° , угол CAD равен 28° . Найдите угол B .

21. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 30° , угол BAD равен 22° . Найдите угол ADB .

22. В треугольнике ABC $AC = BC$, AD — высота, угол BAD равен 24° . Найдите угол C .

23. В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90° , угол B равен 56° . Найдите угол ACD .

24. Один острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла.

25. Один острый угол прямоугольного треугольника равен 23° . Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.

26. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.

27. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 40° . Найдите больший из острых углов этого треугольника.

28. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 21° . Найдите меньший угол данного треугольника.

29. Острый угол прямоугольного треугольника равен 32° . Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника.

30. В треугольнике ABC угол A равен 60° , BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE .

31. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF — его биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF .

32. В треугольнике ABC CH — высота, AD — биссектриса, угол BAD равен 24° . Найдите угол ACH .

33. В треугольнике ABC угол B равен 70° . AD , BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOC .

34. Сумма трёх углов выпуклого четырёхугольника равна 300° . Найдите его четвёртый угол.

35. Три угла выпуклого четырёхугольника равны 60° , 85° и 100° . Найдите четвёртый угол четырёхугольника.

36. Углы выпуклого четырёхугольника относятся как $1 : 2 : 2 : 4$. Найдите меньший угол четырёхугольника.

37. Найдите внешний угол правильного пятиугольника.

38. Найдите внешний угол правильного шестиугольника.

39. Найдите внешний угол правильного восьмиугольника.

40. Найдите внешний угол правильного десятиугольника.

- Аксиома** 9
— параллельных прямых 136
Астролябия 34
- Биссектриса**
— треугольника 46
— угла 29
Боковая сторона равнобедренного треугольника 59
- Вершина**
— графа 121
— ломаной 39
— луча 13
— многоугольника 39
— параболы 107
— треугольника 46
— угла 25
Внешний угол треугольника 66
Второй признак равенства треугольников 54
Высота треугольника 47
- Гексаэдр** 5
Геометрическое место точек 97
Геометрия 3
Гипербола 117
Гипотенуза 74
Градусная величина угла 33
Граф 121
— плоский 121
— связный 126
— уникурсальный 122
- Дерево** 126
Диагональ многоугольника 40
Диаметр
— круга 84
— окружности 84
- Директриса параболы** 107
Длина
— ломаной 39
— отрезка 18
Додекаэдр 5
Доказательство 9
- Единичный отрезок** 18
- Задачи на построение** 102
- Икосаэдр** 5
Индекс вершины графа 123
- Касательная прямая к**
— гиперболы 118
— окружности 87
— параболы 108
— эллипсу 113
Катет 74
Концы отрезка 13
Круг 83
Куб 5
- Ломаная** 39
— замкнутая 39
— простая 39
Луч 13
- Медиана треугольника** 46
Метр 20
Многоугольник 39
— выпуклый 40
— правильный 40
- Наклонная** 78
Начало луча 13
Неравенство треугольника 70
- Окружности**
— касательные 92
— concentрические 92
— пересекающиеся 92

- Окружность 83
Октаэдр 5
Основание
— наклонной 78
— перпендикуляра 77
— равнобедренного треуголь-
ника 59
Ось параболы 107
Отрезок 13
- Парабола** 107
Пентаграмма 4
Первый признак равенства
треугольников 50
Периметр
— многоугольника 39
— треугольника 46
Перпендикуляр 77
Планиметрия 3
Плоскость 8
Полуплоскость 25
Полупрямая 13
Признак
— параллельности прямых 136
— равнобедренного треуголь-
ника 60
Проблема четырёх красок 130
Проекция наклонной 78
Прямая 8
Прямые
— параллельные 10, 135
— пересекающиеся 10
— перпендикулярные 29
- Равные**
— отрезки 14
— треугольники 47
— углы 26
Радиус
— круга 83
— окружности 83
- Расстояние**
— между точками 19
— от точки до прямой 78
Ребро графа 121
- Секущая** 135
Середина отрезка 15
Серединный перпендикуляр 98
Стереометрия 3
Сторона
— ломаной 39
— многоугольника 39
— треугольника 46
— угла 25
- Сумма**
— углов выпуклого
многоугольника 145
— углов треугольника 141
- Теодолит** 36
Теорема 9
— Эйлера 127
Тетраэдр 5
Точка 8
— внутренняя 25
— касания 87
- Третий признак равенства**
треугольников 62
Треугольник 40
— остроугольный 73
— прямоугольный 74
— равнобедренный 58
— равносторонний 59
— разносторонний 58
— тупоугольный 74
- Угол** 25
— внешний 66
— внутренний 66
— между прямыми 29
— многоугольника 39
— острый 28

Угол прямой 28

— развёрнутый 26

— тупой 28

Углы

— вертикальные 26

— внутренние накрест лежа-
щие 136

— внутренние односторон-
ние 136

— смежные 26

— соответственные 136

Фокальное свойство

— гиперболы 118

— параболы 108

— эллипса 113

Фокус

— гиперболы 117

— параболы 107

— эллипса 112

Хорда

— круга 84

— окружности 84

Центр

— круга 83

— окружности 83

Эллипс 112

ОТВЕТЫ

§ 1

1. Одну. 2. Нет. 3. Три. 4. а) Одна, если точки принадлежат одной прямой; три, если они не принадлежат одной прямой; б) одна, если все точки принадлежат одной прямой; четыре, если три точки принадлежат одной прямой; шесть, если никакие три точки не принадлежат одной прямой. 5. Пять прямых, десять точек попарных пересечений. 6. Все точки принадлежат одной прямой. 7. Все прямые пересекаются в одной точке.

14. Четыре. 15. Три, четыре, пять или шесть. 16. $\frac{n(n-1)}{2}$. 17. а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. 20. а), б) Да.

§ 2

2. а) Две; б) три; в) четыре; г) $n + 1$. 3. Два. 4. Два луча могут не иметь общих точек, иметь общую вершину, или один из них может целиком содержать другой. 5. AB и AC , BA и BC . 7. OA , OB , OC , OD . 8. 6. 9. AB . 10. C . 15. а), б), в), г) Отрезки равны.

§ 3

1. а) 6 см; б) 7,7 дм; в) 18,1 м. 2. а) 20,5 см; б) 8 см; в) 4,5 см; г) 12,5 см. 3. B . 4. Нет. 5. Нет. 6. $AB = 2CD$. 9. а) 9 м и 6 м; б) 10 м и 5 м; в) 6 м и 9 м. 11. 6 см. 12. 6 см. 13. 8,5 см. 14. а) 40 мм; б) 80 мм; в) 20 мм. 16. $a + b - c$. 17. 4 см, 8 см и 16 см. 20. В любом месте между вторым и третьим домами.

§ 4

1. Точки A и E , A и B , B и E , C и D лежат по одну сторону; точки A и C , A и D , B и C , B и D , E и C , E и D лежат по разные стороны. 2. а) 4; б) 7; в) 11. 4. а), г), е) Да; б), в), д) нет. 5. а) 6; б) 4. 8. 12. 9. а) AOB , BOC , COD ; б) AOC ; в) AOD , BOD . 10. Два. 11. а), в) Нет; б) да. 12. а) AOB и EOD , AOF и DOC , BOC и EOF , BOF и COE ; б) AOB и BOD , AOB и AOE , AOF и AOC , AOF и FOD , BOC и BOF , BOC и COE . 14. $\angle 3 = \angle 4$. 15. Развёрнутый. 17. $(\angle AOB + \angle BOC) : 2$. 21. В 3 часа и в 9 часов. 22. 24.

§ 5

4. а) 110° ; б) 137° ; в) 179° . 5. а) Да; б), в) нет. 6. а) 45° и 15° ; б) 40° и 20° ; в) 24° и 36° . 7. 142° . 8. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{4}{5}$; е) $\frac{5}{3}$. 9. 120° и 60° . 10. а) 105° и 75° ; б) 110° и 70° ; в) 45° и 135° ; г) 90° и 90° . 11. а) 72° и 108° ; б) 54° и 126° ; в) 55° и 125° ; г) 88° и 92° . 12. 30° , 150° , 150° . 13. 144° и 36° . 15. Нет. 16. 135° и 45° . 17. $\varphi + \psi - \gamma$. 18. а) 90° ; б) 180° ; в) 270° ; г) 150° . 19. а) 120° ; б) 60° . 20. а) 60° ; б) $7^\circ 30'$; в) $0^\circ 15'$. 21. $22^\circ 30'$.

§ 6

1. 9. 2. 20. 3. 1, 2, 3, 5, 7. 6. Внутри лежат точки B , D и F , снаружи — A , C и E . 9. Многоугольники изображены на рисунках б) и г). 10. Число вершин равно числу сторон. 11. г) $n - 2$. 12. а) 9; б) $\frac{n(n-3)}{2}$. 13. а), в) Нет; б) да. 14. а) Да, пятиугольник; б) да, четырёхугольник; в) да, многоугольник с числом сторон, бóльшим пяти. 16. а) 1; б) 5; в) $\frac{n(n-3)}{2}$. 18. Да. 19. Нет.

§ 7

1. ABC , ADC , BDC , BDE , CDE . 2. а), б), в) 3. 3. Да. 4. Нет. 8. а), б) Нет; в) да. 9. $EF = 5$ см, $FG = 6$ см, $EG = 7$ см. 10. $\angle E = 40^\circ$, $\angle F = 60^\circ$, $\angle G = 80^\circ$. 11. $PQ = XY = 5$ см, $BC = YZ = 6$ см, $AC = PR = 7$ см. 12. 75 см. 13. 17,3 см и 12,7 см. 14. 12 см, 18 см и 24 см. 15. 49 см.

§ 8

1. Да. 2. $\triangle KLN = \triangle NMK$. 3. $\triangle AHB = \triangle CHB$. 4. 10 м. 9. 96° . 11. $\triangle ABD = \triangle CBE$.

§ 9

1. Да. 2. Нет. 6. $AB = 11$ см; $BC = 19$ см. 9. 13 см. 16. а) ABC и ADC ; б) ABD и CDB ; в) ABD и CBE ; г) AOD и BOC , ACB и BDA , ACD и BDC ; д) ACD и BCE , ABE и BAD , AOE и BOD ; е) AOD и BOC , ABD и BAC .

§ 10

1. 0,8 м. 2. 3,5 м. 3. а) 3,2 м; 6,2 м; 6,2 м; б) 7,2 м; 4,2 м; 4,2 м. 4. 6 см; 16 см; 16 см. 5. 15 м.

§ 11

1. Да. 2. а) ADC и BDC ; б) EFH и GFH ; в) KLN и MNL ; г) POR и QOR , POS и QOS , PRS и QRS ; д) AOD и BOC , ABD и BAC , ACD и BDC ; е) KLS и NMS , KMS и NLS ; ж) $AOB = BOC = COD = AOD$; $ABD = BCD = ADC = DAB$. 3. Да. 13. Нет. 14. Нет.

§ 12

1. а), б) Да. 2. а), б) Наибольшая. 3. а), б) A ; в) B . 4. а) $BC > AC > AB$; б) $BC > AC = AB$. 5. а) Равнобедренный; б) равносторонний. 6. а), б) Нет. 10. Нет. 12. а), б) Нет; в) да. 13. Тупые. 14. а) A и B ; б) острым, прямым или тупым. 21. Нет.

§ 13

1. а), б) Нет. 2. а), б), в) Нет. 3. 10 см. 4. а) 6 см; б) 8 см. 5. 29 см. 6. 4 см, 8 см и 8 см. 8. 11 см, 7 см, 7 см. 11. Нет. 13. Нет. 15. $2a < p < 2(a + b)$, где $a \geq b$. 16. 4 см. 20. В точке пересечения диагоналей четырёхугольника.

§ 14

2. Да. 3. Да. 4. Нет. 5. Нет. 6. Нет. 7. а) Да; б) нет. 8. 5 см. 16. CBD . 17. AE .

§ 15

1. Две или ни одной. 2. Нет. 8. а), б) AB_1 . 22. Через середину отрезка AB . 23. Через середины двух сторон треугольника, вершинами которого служат данные населённые пункты. 24. Решение аналогично решению задачи Архимеда.

§ 16

1. а) $AO \leq R$; б) $AO > R$. 2. Бесконечно много. 3. Бесконечно много. 4. 110 мм. 5. 10 см. 6. 1 см. 7. Нет. 9. $d + R$. 10. $R - d$ и $d + R$. 11. 15 см. 12. 12 см. 18. 29 см.

§ 17

2. Бесконечно много. 3. Одну. 4. а) Ни одной; б) две. 5. Бесконечно много. 6. Бесконечно много. 7. Две. 8. Нет. 9. а) Не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются. 10. $d + R$.

§ 18

2. 2 см. 3. а) Касаются внешним образом; б) не имеют общих точек. 4. а) Касаются внутренним образом; б) не имеют общих точек, одна лежит внутри другой. 5. а) 10 см; б) 2 см. 6. Окружность. 7. Прямую. 8. 36 см и 84 см. 9. 8 см и 12 см. 10. 25 см и 10 см. 14. $d + R_1 + R_2$. 15. $R_1 - d - R_2$ и $R_1 + d + R_2$. 18. а) 0,5; 1,5; 3,5; 4,5; б) 1; 2; 3; 4; в) 1; 2; 3; 6. 22. Да. 23. Нет. 24. Нет. 25. а) 2; б) 6; в) 12; г) $n(n - 1)$. 26. а) 4; б) 8; в) 14.

§ 19

1. а) ГМТ, состоящее из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними; б) ГМТ, состоящее из данной точки прямой и всех точек, лежащих от неё по одну сторону; в) ГМТ плоскости, удалённых от точки O на расстояние, не превосходящее R ; г) ГМТ плоскости, удалённых от точки O на расстояние, большее или равное R_1 и не превосходящее R_2 . 2. а) Две концентрические окружности радиусами $R_1 + R_2$ и $R_2 - R_1$; б) одна окружность радиусом $2R_1$; в) две концентрические окружности радиусами $R_1 + R_2$ и $R_1 - R_2$. 3. Серединный перпендикуляр к отрезку, соединя-

юшему две данные точки. 4. Серединный перпендикуляр к отрезку AB без его середины. 5. а) Полуплоскость, определяемая серединным перпендикуляром к отрезку AB , содержащая точку A ; б) внутренность круга с центром в точке A и радиусом AB . 6. Точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в точке C и радиусом R . 7. Точки пересечения прямой a и окружности с центром в точке C и радиусом R . Получаются две, одна или ни одной точки в зависимости от того, расстояние от точки C до прямой a меньше R , равно R или больше R соответственно. 8. Часть прямой c , лежащая внутри полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром к отрезку AB и точкой A . Если прямая c целиком лежит в полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром и точкой B , то таких точек нет. 9. а) Точки, принадлежащие биссектрисам четырёх углов, образованных данными прямыми; б) внутренности двух вертикальных углов, образованных биссектрисами. 10. а) Угол ACB и вертикальный с ним угол; б) угол ACB ; в) часть угла ACB , лежащая в полуплоскости, определяемой прямой AB по другую сторону от точки C . 11. Точка пересечения данной прямой с биссектрисой данного угла. 12. Точка пересечения серединного перпендикуляра к MN с биссектрисой угла. 13. 26 см. 14. 9 см. 16. Общая касательная, проходящая через точку касания окружностей, без самой точки касания. 17. В точке пересечения шоссе с серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему два населённых пункта. 18. В точке пересечения серединных перпендикуляров к двум отрезкам, соединяющим населённые пункты.

§ 20

6. Бесконечно много. Наименьший радиус равен половине отрезка, соединяющего данные точки. 16. Точка пересечения данной прямой и серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему данные точки.

△

2. 2 см. 3. а) Точки, расположенные внутри параболы; б) точки, расположенные вне параболы. 4. а) Ветви параболы расширяются; б) ветви параболы сжимаются. 8. Директриса. 15. Построим две перпендикулярные касательные. Точка их пересечения будет принадлежать директрисе. Аналогично строим вторую точку, принадлежащую директрисе, и проводим через них прямую. Она и будет директрисой параболы. С центрами в каких-нибудь двух точках параболы и радиусами, равными расстояниям от этих точек до директрисы, проводим окружности. Фокус параболы будет точкой пересечения этих окружностей.

§ 22*

2. c ; точки пересечения эллипса с прямой, проходящей через фокусы. 3. 1 см. 4. Эллипс. 6. а) Эллипс приближается к окружности; б) эллипс растягивается вдоль прямой, проходящей через фокусы, и сжимается вдоль перпендикулярной ей прямой. 7. Две точки. 8. а) Точки внутри эллипса;

б) точки вне эллипса. **9.** Эллипс с фокусами A и B , за исключением двух точек, принадлежащих прямой AB . **10.** Эллипс.

§ 23*

2. Гипербола. **4.** а) Точки, расположенные между ветвями гипербола; б) точки, расположенные внутри ветвей гипербола. **5.** 1 см. **6.** а) Ветви гипербола сжимаются; б) ветви гипербола расширяются. **7.** Гипербола. **10.** Точки пересечения прямой F_1F_2 с гиперболой.

§ 24*

1. Пересекаться или быть параллельными. **2.** Четыре. **3.** Да. **4.** Да. **5.** Да. **6.** а) 150° , 30° ; б) 55° , 125° . **7.** 75° , 105° . **8.** Нет. **17.** Параллельны. **18.** а), б), в) Параллельны. **19.** $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle D = 150^\circ$; $CD = 2$ см, $AD = 4$ см. **20.** Нет.

§ 25*

1. 60° . **3.** 100° , 40° , 40° . **4.** 20° , 70° , 90° . **5.** 25° и 17° . **12.** 24° , 38° , 118° . **13.** 36° , 72° , 108° , 144° . **14.** 7. **17.** а) 10; б) 15. **20.** 180° .

§ 26*

1. 9. **2.** 3. **3.** 10 см и 15 см. **4.** 150° , 30° , 150° . **5.** Параллелограммом. **6.** Нет. **7.** а) 40° , 140° , 40° , 140° ; б) 50° , 130° , 50° , 130° ; в) 80° , 100° , 80° , 100° . **8.** а) 70° , 110° , 70° , 110° ; б) 30° , 150° , 30° , 150° . **9.** 54° , 126° , 54° , 126° . **10.** 60° , 120° , 60° , 120° . **11.** 60° , 90° , 120° , 90° . **12.** Перпендикулярны. **13.** Параллельны. **14.** Да. **15.** а), б) Нет; в), г) да. **16.** а) 11 см, 13 см, 11 см, 13 см; б) 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см, 8 см, 16 см. **17.** 0,6 м, 0,8 м, 0,6 м, 0,8 м. **18.** 3 см и 4 см. **19.** 10 м.

§ 27

1. Да. **2.** Нет. **3.** Нет. **5.** R . **9.** Да. **10.** Да. **11.** Да. **13.** Да. **14.** Одна сторона в два раза больше другой. **15.** Параллелограмм.

§ 28

1. 60° . **2.** 45° . **3.** 60° . **4.** 36° . **5.** 40° . **6.** 40° , 40° , 100° . **7.** 62° . **8.** 116° . **9.** 69° . **10.** 34° . **11.** 38° . **12.** 74° . **13.** 120° . **14.** 61° . **15.** 120° . **16.** 5° . **17.** 24° . **22.** 24° , 28° , 128° . **24.** 44° . **25.** 15° . **27.** 180° .

§ 29

1. 120° . **2.** 36° , 72° , 108° , 144° . **3.** 7. **4.** а) 135° ; б) 144° ; в) 150° . **5.** а) 10; б) 15. **6.** 90° . **8.** а) 36° ; б) 72° . **10.** а) 30° ; б) 60° ; в) 90° ; г) 60° . **15.** 720° . **16.** 1080° .

Обобщающее повторение

1. Измерение величин углов

1. 100° . 2. 40° . 3. 70° . 4. 120° . 5. 120° . 6. 100° . 7. 36° . 8. 30° . 9. 20° .
10. 18° . 11. 142° . 12. 66° . 13. 120° . 14. 30° . 15. 135° . 16. 36° . 17. 45° .
18. 30° . 19. 40° . 20. 120° . 21. 135° . 22. 45° . 23. 135° . 24. 80° . 25. 126° .
26. 60° . 27. 150° . 28. 80° . 29. 80° . 30. 30° .

2. Первый признак равенства треугольников

1. Треугольники ABD и ACE равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$, $AD = AE$, угол A — общий). Следовательно, равны соответствующие стороны BD и CE этих треугольников.

2. Треугольники OCE и ODE равны по первому признаку равенства треугольников ($OC = OD$, $\angle COE = \angle DOE$, сторона OE — общая). Следовательно, равны соответствующие углы OEC и OED этих треугольников.

3. Треугольники ABD и AEC равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = AC$, $AB = AE$, угол A — общий). Следовательно, равны соответствующие углы ABD и AEC этих треугольников.

4. Треугольники AOD и BOC равны по первому признаку равенства треугольников ($OA = OB$, $OD = OC$, $\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные). Следовательно, равны соответствующие стороны AD и BC этих треугольников.

5. Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = CD$, AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$). Следовательно, равны соответствующие углы B и D этих треугольников.

6. Из равенства сторон правильного треугольника и равенства отрезков AD , BE и CF следует равенство отрезков AF , CE и BD . Треугольники ADF , BED и CFE равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = BE = CF$, $AF = BD = CE$, $\angle A = \angle B = \angle C$). Следовательно, равны соответствующие стороны DF , ED и FE этих треугольников.

7. Треугольники ABD и ACE равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$, $AD = AE$, угол A — общий). Следовательно, равны соответствующие углы ABD и ACE этих треугольников.

8. Треугольники OCE и ODE равны по первому признаку равенства треугольников ($OC = OD$, $\angle COE = \angle DOE$, сторона OE — общая). Следовательно, равны соответствующие стороны EC и ED этих треугольников.

9. Треугольники AEC и ABD равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = AD$, $AE = AB$, угол A — общий). Следовательно, равны соответствующие углы ACE и ADB этих треугольников.

10. Треугольники ACD и BDC равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = BD$, сторона DC — общая, $\angle ACD = \angle BDC$). Следовательно, равны соответствующие стороны AD и BC этих треугольников.

11. Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = CD$, AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$). Следовательно, равны соответствующие углы ACB и CAD этих треугольников.

12. Из равенства треугольников ABD_1 и ABD_2 следует равенство соответствующих сторон BD_1 и BD_2 , а также равенство соответствующих углов ABD_1 и ABD_2 . Из равенства указанных углов следует равенство смежных с ними углов соответственно CBD_1 и CBD_2 . Треугольники BCD_1 и BCD_2 равны по первому признаку равенства треугольников ($BD_1 = BD_2$, BC — общая сторона, $\angle CBD_1 = \angle CBD_2$).

13. Треугольники ABD и ACE равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$, $AD = AE$, угол A — общий). Следовательно, равны соответствующие углы ADB и AEC этих треугольников.

14. Треугольники OCE и ODE равны по первому признаку равенства треугольников ($OC = OD$, $\angle COE = \angle DOE$, сторона OE — общая). Следовательно, равны соответствующие углы OCE и ODE этих треугольников.

15. Треугольники ABD и AEC равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = AC$, $AB = AE$, угол A — общий). Следовательно, равны соответствующие стороны BD и EC этих треугольников.

16. Треугольники ACB и BDA равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = BD$, сторона AB — общая, $\angle BAC = \angle ABD$). Следовательно, равны соответствующие углы ABC и BAD этих треугольников.

17. Треугольники ABC и BAD равны по первому признаку равенства треугольников (AB — общая сторона, $BC = AD$, $\angle ABC = \angle BAD$). Следовательно, равны соответствующие стороны AC и BD этих треугольников.

18. Из равенства сторон правильного треугольника ABC и равенства отрезков BD , CE и AF следует равенство отрезков AD , BE и CF . Из равенства углов правильного треугольника ABC следует равенство углов FAD , DBE и ECF . Треугольники ADF , BED и CFE равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = BE = CF$, $AF = BD = CE$, $\angle FAD = \angle DBE = \angle ECF$). Следовательно, равны соответствующие стороны DF , ED и FE этих треугольников.

19. Треугольники ABD и ACE равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$, $AD = AE$, угол A — общий). Следовательно, равны соответствующие углы ADB и AEC этих треугольников. Значит, равны смежные с ними углы соответственно BDC и BEC .

20. Треугольники OCE и ODE равны по первому признаку равенства треугольников ($OC = OD$, $\angle COE = \angle DOE$, сторона OE — общая). Следовательно, равны соответствующие углы OCE и ODE этих треугольников. Значит, равны смежные с ними углы соответственно ACE и BDE .

21. Треугольники ABD и AEC равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = AC$, $AB = AE$, угол A — общий). Следовательно, равны соответствующие углы ABD и AEC этих треугольников. Значит, равны смежные с ними углы соответственно DBC и CED .

22. Треугольники ABD и BAC равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = BC$, сторона AB — общая, $\angle BAD = \angle ABC$). Следовательно, равны соответствующие стороны BD и AC этих треугольников.

23. Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = CD$, AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$). Следовательно, равны соответствующие стороны BC и DA этих треугольников.

24. Из равенства треугольников ABD_1 и ABD_2 следует равенство соответствующих сторон AD_1 и AD_2 , а также равенство соответствующих углов BAD_1 и BAD_2 . Треугольники ACD_1 и ACD_2 равны по первому признаку равенства треугольников ($AD_1 = AD_2$, AC — общая сторона, $\angle CAD_1 = \angle CAD_2$).

3. Второй признак равенства треугольников

1. Треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$). Следовательно, равны их соответствующие стороны AB и CD .

2. Из равенства угла BCF и внешнего угла при вершине F треугольника DEF следует равенство смежных с ними углов соответственно ACB и DFE . Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и DF . Треугольники ACB и DFE равны по второму признаку равенства треугольников ($AC = DF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ACB = \angle DFE$). Следовательно, равны их соответствующие стороны AB и DE .

3. Треугольники AOB и COD равны по второму признаку равенства треугольников ($AO = CO$, $\angle OAB = \angle OCD$, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные). Следовательно, равны их соответствующие стороны OB и OD .

4. Треугольники ABC и BAD равны по второму признаку равенства треугольников (AB — общая сторона, $\angle ABC = \angle BAD$, $\angle BAC = \angle ABD$). Следовательно, равны соответствующие стороны AC и BD этих треугольников.

5. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство соответствующих сторон BC и B_1C_1 , а также соответствующих углов B и B_1 . Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$). Следовательно, равны соответствующие стороны BD и B_1D_1 этих треугольников. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство соответствующих сторон AB и A_1B_1 . Следовательно, имеет место равенство отрезков AD и A_1D_1 .

6. Углы ACB и ECD равны как вертикальные. Треугольники ABC и EDC равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = DC$, $\angle ABC = \angle EDC$, $\angle ACB = \angle ECD$). Следовательно, равны соответствующие стороны AC и EC этих треугольников.

7. Треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$). Следовательно, равны их соответствующие стороны BC и DA .

8. Из равенства угла BCF и внешнего угла при вершине F треугольника DEF следует равенство смежных с ними углов соответственно ACB и DFE . Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и DF . Треугольники ACB и DFE равны по второму признаку равенства треугольников ($AC = DF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ACB = \angle DFE$). Следовательно, равны их соответствующие стороны BC и EF .

9. Треугольники AOB и COD равны по второму признаку равенства треугольников ($AO = CO$, $\angle OAB = \angle OCD$, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные). Следовательно, равны их соответствующие стороны AB и CD .

10. Треугольники ABC и BAD равны по второму признаку равенства треугольников (AB — общая сторона, $\angle ABC = \angle BAD$, $\angle BAC = \angle ABD$). Следовательно, равны соответствующие стороны BC и AD этих треугольников.

11. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство углов B и B_1 и равенство сторон BC и B_1C_1 . Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$). Следовательно, равны соответствующие стороны CD и C_1D_1 этих треугольников.

12. Углы ACB и ECD равны как вертикальные. Треугольники ABC и EDC равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = DC$, $\angle ABC = \angle EDC$, $\angle ACB = \angle ECD$). Следовательно, равны соответствующие стороны AB и ED этих треугольников.

13. Треугольники ABC и ADC равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle BCA = \angle DCA$). Следовательно, равны их соответствующие стороны AB и AD .

14. Треугольники AOC и DOB равны по второму признаку равенства треугольников ($OC = OB$, $\angle ACO = \angle DBO$, $\angle AOC = \angle DOB$ как вертикальные). Следовательно, равны их соответствующие стороны AO и DO .

15. Из равенства внешних углов следует равенство смежных с ними углов ACO и BDO . Треугольники ACO и BDO равны по второму признаку равенства треугольников ($CO = DO$, $\angle ACO = \angle BDO$, $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные). Следовательно, равны соответствующие стороны OA и OB этих треугольников.

16. Треугольники BAD и ABC равны по второму признаку равенства треугольников (AB — общая сторона, $\angle BAD = \angle ABC$, $\angle ABD = \angle BAC$). Следовательно, равны соответствующие углы ADB и BCA этих треугольников.

17. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство углов B и B_1 и равенство сторон BC и B_1C_1 . Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$). Следовательно, равны соответствующие углы CDB и $C_1D_1B_1$ этих треугольников.

18. Углы ACB и ECD равны как вертикальные. Треугольники ABC и EDC равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = DC$, $\angle ABC = \angle EDC$, $\angle ACB = \angle ECD$). Следовательно, равны соответствующие углы A и E этих треугольников.

19. Треугольники ABC и ADC равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle BCA = \angle DCA$). Следовательно, равны их соответствующие стороны BC и DC .

20. Треугольники AOC и DOB равны по второму признаку равенства треугольников ($OC = OB$, $\angle ACO = \angle DBO$, $\angle AOC = \angle DOB$ как вертикальные). Следовательно, равны их соответствующие стороны AC и DB .

21. Из равенства внешнего угла при вершине C треугольника AOC и внешнего угла при вершине D треугольника BOD следует равенство смежных с ними углов соответственно ACO и BDO . Треугольники ACO и BDO равны по второму признаку равенства треугольников ($CO = DO$, $\angle ACO = \angle BDO$, $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные). Следовательно, равны соответствующие стороны AC и BD этих треугольников.

22. Треугольники AOB и COD равны по второму признаку равенства треугольников ($AO = CO$, $\angle OAB = \angle OCD$, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные). Следовательно, равны их соответствующие углы B и D .

23. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство соответствующих сторон BC и B_1C_1 , а также соответствующих углов B и B_1 . Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$). Следовательно, равны соответствующие углы BDC и $B_1D_1C_1$ этих треугольников. Значит, имеет место равенство смежных с ними углов ADC и $A_1D_1C_1$ соответственно.

24. Треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$). Следовательно, равны их соответствующие углы B и D .

4. Третий признак равенства треугольников

1. В четырёхугольнике $ABCD$ проведём диагональ BD . Треугольники ABD и CDB равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $AD = CB$, BD — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы A и C этих треугольников.

2. Треугольники ABC и BAD равны по третьему признаку равенства треугольников ($BC = AD$, $AC = BD$, AB — общая сторона). Следовательно, равны их соответствующие углы ABC и BAD .

3. Треугольники ACD и BDC равны по третьему признаку равенства треугольников ($AC = BD$, $AD = BC$, CD — общая сторона). Следовательно, равны их соответствующие углы ADC и BCD .

4. Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и FD . Треугольники ABC и FED равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = FE$, $BC = ED$, $AC = FD$). Следовательно, равны соответствующие углы ACB и FDE этих треугольников.

5. Треугольники ABC и ADC равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = AD$, $CB = CD$, AC — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы B и D этих треугольников.

6. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников ($AM = A_1M_1$, $AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$). Следовательно, равны их соответствующие углы A и A_1 .

7. В четырёхугольнике $ABCD$ проведём диагональ AC . Треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $CB = AD$, AC — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы B и D этих треугольников.

8. Треугольники ABD и BAC равны по третьему признаку равенства треугольников ($AD = BC$, $BD = AC$, AB — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы ABD и BAC этих треугольников.

9. Треугольники ACD и BDC равны по третьему признаку равенства треугольников ($AC = BD$, $AD = BC$, CD — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы ACD и BDC этих треугольников.

10. Треугольники ABD и CBD равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CB$, $AD = CD$, BD — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы ABD и CBD этих треугольников.

11. Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и FD . Треугольники ABC и FED равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = FE$, $BC = ED$, $AC = FD$). Следовательно, равны соответствующие углы ACB и FDE этих треугольников, значит, равны и смежные с ними углы BCF и EDA соответственно.

12. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников ($AM = A_1M_1$, $AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$). Следовательно, равны их соответствующие углы AMC и $A_1M_1C_1$.

13. Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и FD . Треугольники ABC и FED равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = FE$, $BC = ED$, $AC = FD$). Следовательно, равны соответствующие углы A и F этих треугольников.

14. Треугольники ADC и BCD равны по третьему признаку равенства треугольников ($AD = BC$, $AC = BD$, CD — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы DAC и CBD этих треугольников.

15. Треугольники ABD и CBD равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CB$, $AD = CD$, BD — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы ADB и CDB этих треугольников.

16. Треугольники ABC и ADC равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = AD$, $BC = DC$, AC — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы BCA и DCA этих треугольников.

17. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников ($AM = A_1M_1$, $AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$). Следовательно, равны их соответствующие углы ACM и $A_1C_1M_1$.

18. Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и FD . Треугольники ABC и FED равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = FE$, $BC = ED$, $AC = FD$). Следовательно, равны соответствующие углы B и E этих треугольников.

19. Треугольники ABD и CBD равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CB$, $AD = CD$, BD — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы A и C этих треугольников.

20. Треугольники ABC и ADC равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = AD$, $BC = DC$, AC — общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы BAC и DAC этих треугольников.

21. Треугольники BCM и $B_1C_1M_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников ($BM = B_1M_1$, $BC = B_1C_1$, $CM = C_1M_1$). Следовательно, равны соответствующие углы BCM и $B_1C_1M_1$ этих треугольников.

22. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$). Следовательно, равны соответствующие углы A и A_1 этих треугольников. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, $\angle A = \angle A_1$). Следовательно, равны соответствующие стороны CM и C_1M_1 этих треугольников.

23. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник. Докажем, что угол A равен углу B . Действительно, треугольники ABD и BCA равны по трём

сторонам. Следовательно, равны их соответствующие углы. В частности, угол A равен углу B . Аналогично доказывается, что равны и остальные углы. Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ равны все стороны и равны все углы. Следовательно, он правильный.

24. Пусть $ABCDE$ — данный пятиугольник. Докажем, что угол A равен углу B . Действительно, треугольники ABE и BCA равны по трём сторонам. Следовательно, равны их соответствующие углы. В частности, угол A равен углу B . Аналогично доказывается, что равны и остальные углы. Таким образом, в пятиугольнике $ABCDE$ равны все стороны и равны все углы. Следовательно, он правильный.

5. Равнобедренные треугольники

1. Треугольник ABO — равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = \angle OBA$. Учитывая равенство углов DAC и DBC , получаем равенство углов CAB и DBA .

2. Треугольник ADE — равнобедренный. Следовательно, $\angle D = \angle E$. Треугольники ACD и AEB равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = AE$, $\angle D = \angle E$, $\angle CAD = \angle BAE$). Следовательно, равны соответствующие стороны CD и BE этих треугольников. Значит, равны и отрезки BD и CE .

3. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC . Следовательно, $\angle A = \angle C$. Значит, равны и смежные с ними внешние углы при вершинах A и C треугольника ABC .

4. Треугольник BCD — равнобедренный ($CD = BD$). Следовательно, $\angle DCB = \angle DBC$, $\angle ACB = \angle ABC$.

5. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$. Из этого равенства и равенства углов BAD и BCD следует равенство углов DAC и DCA . Значит, треугольник DAC — равнобедренный с основанием AC , следовательно, $AD = CD$.

6. Углы A и B при основании AB равнобедренной трапеции $ABCD$ равны. Следовательно, треугольник ABE — равнобедренный, значит, $AE = BE$.

7. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$). Следовательно, $\angle B = \angle C$. Треугольники ACD и AEB равны по второму признаку равенства треугольников ($AC = AB$, $\angle CAD = \angle BAE$, $\angle C = \angle B$). Следовательно, равны соответствующие стороны AD и AE этих треугольников. Треугольник AED — равнобедренный с основанием DE . Следовательно, $\angle BDA = \angle CEA$.

8. Треугольник ADE — равнобедренный ($AD = AE$). Следовательно, $\angle D = \angle E$. Из равенства углов CAD и BAE следует равенство углов DAB

и EAC . Треугольники DAB и EAC равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = AE$, $\angle D = \angle E$, $\angle DAB = \angle EAC$). Следовательно, равны соответствующие стороны AB и AC этих треугольников.

9. Из равенства внешних углов при вершинах A и C треугольника ABC следует равенство углов BAC и BCA . Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC , $AB = BC$.

10. Треугольники ACD и ABD равны по первому признаку равенства треугольников ($CD = BD$, $\angle ADC = \angle ADB$, AD — общая сторона). Следовательно, равны их соответствующие стороны AC и AB , значит, треугольник ABC — равнобедренный с основанием BC .

11. Треугольник ACD — равнобедренный ($AD = CD$). Следовательно, $\angle DAC = \angle DCA$. Из этого равенства и равенства углов BAD и BCD следует равенство углов BAC и BCA . Значит, треугольник BAC — равнобедренный с основанием AC , следовательно, $AB = BC$.

12. Углы A и B при основании AB равнобедренной трапеции $ABCD$ равны. Следовательно, треугольник EAB — равнобедренный, $BE = AE$. Из этого равенства и равенства $BC = AD$ следует равенство $CE = DE$.

13. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$). Следовательно, $\angle B = \angle C$. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, то из равенства углов ADB и AEC и равенства углов C и B следует равенство углов CAD и BAE .

14. Треугольник ADE — равнобедренный ($AD = AE$). Следовательно, $\angle D = \angle E$. Из равенства углов CAD и BAE следует равенство углов DAB и EAC . Треугольники DAB и EAC равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = AE$, $\angle D = \angle E$, $\angle DAB = \angle EAC$). Следовательно, равны соответствующие стороны AB и AC этих треугольников. Значит, треугольник ABC — равнобедренный с основанием BC , следовательно, $\angle ABC = \angle ACB$.

15. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Следовательно, $\angle A = \angle C$. Угол A равен вертикальному с ним углу. Значит, угол C равен углу, вертикальному углу A .

16. Треугольники ABC и ABD равны по второму признаку равенства треугольников (AB — общая сторона, $\angle ABC = \angle ABD$, $\angle BAC = \angle BAD$). Следовательно, равны соответствующие стороны BC и BD этих треугольников. Треугольник BCD — равнобедренный с основанием CD , значит, $\angle BCD = \angle BDC$.

17. Треугольник ACD — равнобедренный ($AD = CD$). Следовательно, $\angle DCA = \angle DAC$. Треугольник BAC — равнобедренный ($AB = BC$). Следовательно, $\angle BCA = \angle BAC$. Из этих равенств следует равенство углов BCD и BAD .

18. Из равенства углов EAB и EBA следует, что треугольник EAB — равнобедренный с основанием AB , значит, $EA = EB$. Из равенства углов EDC и ECD следует, что треугольник EDC — равнобедренный с основанием CD , значит, $ED = EC$. Из этих равенств следует равенство $AD = BC$.

19. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, то из равенства углов BAE и CAD и равенства углов CEA и BDA следует равенство углов B и C . Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный с основанием BC , значит, $AB = AC$.

20. Треугольник ADE — равнобедренный ($AD = AE$). Следовательно, $\angle D = \angle E$. Из равенства углов CAD и BAE следует равенство углов DAB и EAC . Треугольники DAB и EAC равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = AE$, $\angle D = \angle E$, $\angle DAB = \angle EAC$). Следовательно, равны соответствующие углы ABD и ACE этих треугольников.

21. Из равенства угла C треугольника ABC и вертикального углу A следует равенство углов A и C треугольника ABC . Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC , значит, $AB = BC$.

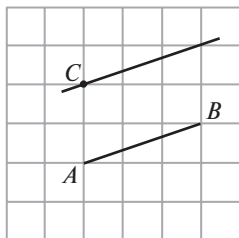
22. Из равенства углов BCD и BDC следует, что треугольник BCD — равнобедренный с основанием CD , значит, $BC = BD$. Треугольники ABC и ABD равны по первому признаку равенства треугольников (AB — общая сторона, $BC = BD$, $\angle ABC = \angle ABD$). Следовательно, равны соответствующие углы BAC и BAD этих треугольников.

23. Треугольник ACD — равнобедренный ($AD = CD$). Следовательно, $\angle DAC = \angle DCA$. Из этого равенства и равенства углов BAC и BCA следует равенство углов BAD и BCD .

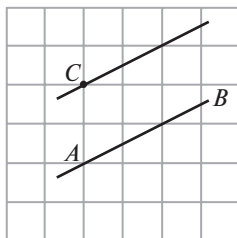
24. Из равенства отрезков AD и BC , ED и EC следует равенство отрезков AE и BE . Следовательно, треугольник EAB — равнобедренный с основанием AB , значит, $\angle EAB = \angle EBA$.

6. Параллельность и перпендикулярность

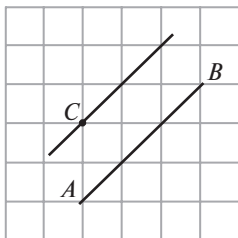
1.



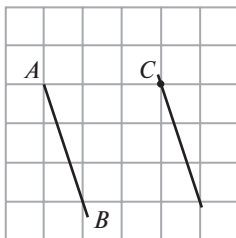
2.



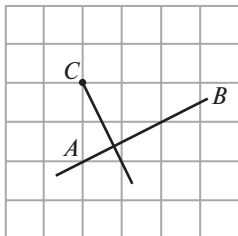
3.



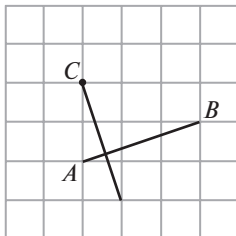
4.



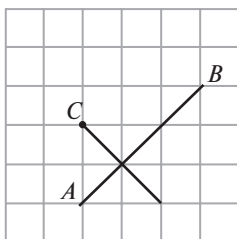
5.



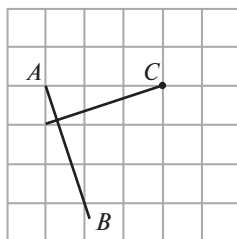
6.



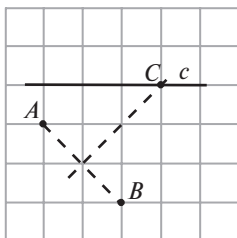
7.



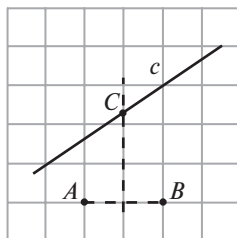
8.



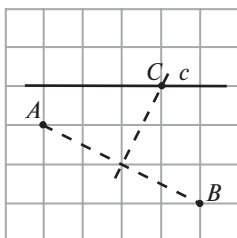
9.



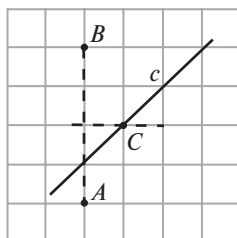
10.



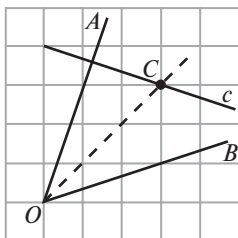
11.



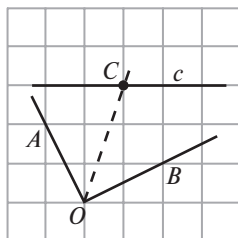
12.



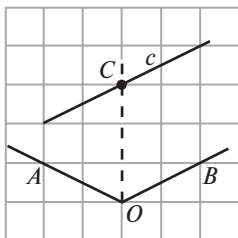
13.



14.

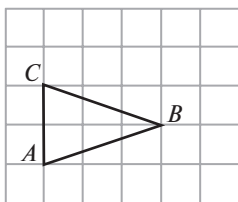


15.

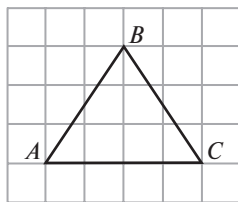


7. Треугольники

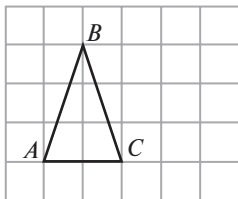
1.



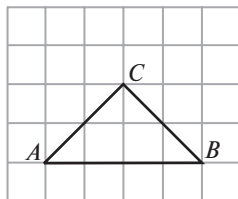
2.



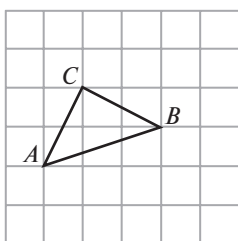
3.



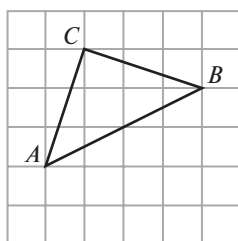
4.



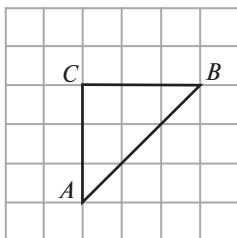
5.



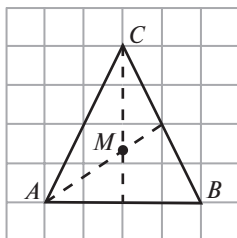
6.



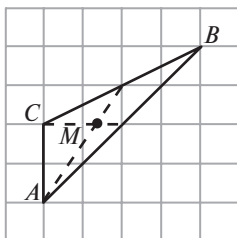
7.



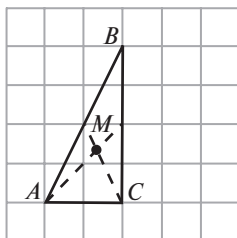
8.



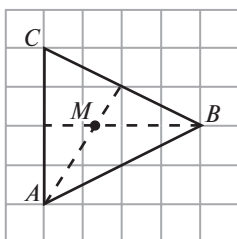
9.



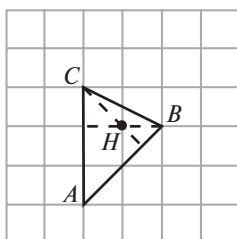
10.



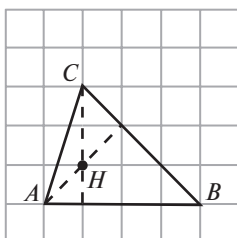
11.



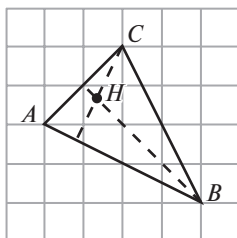
12.



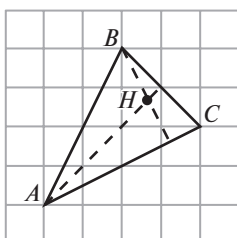
13.



14.



15.



8. Сумма углов многоугольника

1. 61° . 2. 28° . 3. 60° . 4. 70° . 5. 28° . 6. 40° . 7. 40° . 8. 104° . 9. 31° . 10. 108° .
 11. 45° . 12. 120° . 13. 80° . 14. 100° . 15. 116° . 16. 30° . 17. 72° . 18. 40° . 19. 90° .
 20. 74° . 21. 52° . 22. 48° . 23. 34° . 24. 15° . 25. 44° . 26. 15° . 27. 65° . 28. 24° .
 29. 61° . 30. 120° . 31. 49° . 32. 42° . 33. 110° . 34. 60° . 35. 115° . 36. 40° . 37. 72° .
 38. 60° . 39. 45° . 40. 36° .

Введение	3
ГЛАВА I. НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ	
§ 1. Основные геометрические фигуры	8
§ 2. Отрезок и луч	13
§ 3. Измерение длин отрезков	18
§ 4. Полуплоскость и угол	24
§ 5. Измерение величин углов	33
§ 6. Ломанные и многоугольники	39
ГЛАВА II. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ	
§ 7. Треугольники	46
§ 8. Первый признак равенства треугольников	50
§ 9. Второй признак равенства треугольников	54
§ 10. Равнобедренные треугольники	58
§ 11. Третий признак равенства треугольников	62
§ 12. Соотношения между сторонами и углами треугольника ...	66
§ 13. Соотношения между сторонами треугольника	70
§ 14. Прямоугольные треугольники	73
§ 15. Перпендикуляр и наклонная	77
ГЛАВА III. ОКРУЖНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК	
§ 16. Окружность и круг	83
§ 17. Взаимное расположение прямой и окружности	87
§ 18. Взаимное расположение двух окружностей	92
§ 19. Геометрические места точек	97
§ 20. Задачи на построение	102
ГЛАВА IV. КРИВЫЕ И ГРАФЫ*	
§ 21*. Парабола	107
§ 22*. Эллипс	112
§ 23*. Гипербола	117
§ 24*. Графы	121
§ 25*. Теорема Эйлера	127
§ 26*. Проблема четырёх красок	130
ГЛАВА V. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ	
§ 27. Параллельные прямые	135
§ 28. Сумма углов треугольника	141
§ 29. Сумма углов выпуклого многоугольника	144
ГЛАВА VI. ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ	
Предметный указатель	169
Ответы	172

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна,
Смирнов Владимир Алексеевич

ГЕОМЕТРИЯ

7 класс

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для общеобразовательных организаций

Редакторы *В. В. Черноруцкий, И. В. Рекман*

Оформление и художественное редактирование: *Е. А. Адамов*

Технический редактор *О. Б. Резникова*

Корректоры *В. И. Антонов, С. В. Никитина*

Компьютерная вёрстка и графика: *А. В. Челюканов*

Формат 60×90¹/16.

Гарнитура «Newton». Усл. печ. л. 12.

Издательство «Мнемозина».

111033, Москва, ул. Волочаевская, 40г.

Тел.: 8 (495) 181 6888.

E-mail: ioc@mnemozina.ru

www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.

Тел.: 8 (495) 640 9399.

www.shop.mnemozina.ru