И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

УРОКИ ГЕОМЕТРИИ

8 КЛАСС

2013

Пособие содержит подробные конспекты уроков по геометрии для 8-ых классов общеобразовательных учреждений. Оно соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту второго поколения, Примерной программе основного общего образования. Помимо теоретического материала в пособие включены математические диктанты, индивидуальные задания по карточкам, устные упражнения, самостоятельные и контрольные работы, материал для проведения занимательных моментов уроков.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии содержится учебный материал для проведения уроков по геометрии в 8 классе. Оно рассчитано на учебник геометрии Смирновой И. М., Смирнова В. А. для 7-9 классов общеобразовательных учреждений (М.: Мнемозина). Вместе с тем, оно может быть использовано при обучении по любому другому учебнику геометрии, входящему в Федеральный перечень учебной литературы.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) ***в направлении личностного развития*****:**

– формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

– развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

– формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

– воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

– формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

– развитие интереса к математике;

– развитие математических способностей;

2) ***в метапредметном направлении*****:**

– развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

– формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) ***в предметном направлении*****:**

– овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

– создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

Содержание пособия разбито на отдельные параграфы, а каждый параграф – на пункты. Название каждого пункта соответствует учебнику. В первых двух параграфах представлены особенности преподавания геометрии в условиях модернизации школьного образования; даны два варианта программы изучения учебного материала (с учетом дополнительного необязательного материала и без него) и тематическое планирование.

Далее идут подробные конспекты уроков по основным темам курса геометрии 8 класса (без дополнительного материала). Приводится анализ содержания учебного материала, его распределение по урокам, методические особенности изучения. В ряде случаев дается избыточный объем содержания. Это делается специально, чтобы учитель мог по собственному усмотрению, вкусу выбрать учебный материал. В пособие, помимо вопросов теории, включены математические диктанты, вопросы для учащихся по теории, индивидуальные задания по карточкам, задачи для самостоятельной работы, устные упражнения, контрольные работы, приводятся решения и ответы к задачам. Конспектам посвящен третий параграф пособия.

В названном учебнике часть параграфов отмечена звездочкой (*). Это необязательный дополнительный учебный материал для воспитания и развития учащихся. В четвертом параграфе пособия даются конспекты уроков по дополнительным параграфам учебника.

Далее (параграф 5 пособия) предлагаются учебные материалы для проведения итогового повторения курса геометрии 8 класса. Здесь дается перечень основных изученных понятий и теорем, а также список соответствующих упражнений по основным темам.

Завершается пособие ответами к контрольным работам.

В конце книги приведен авторский список литературы, который использовался при разработке данных методических рекомендаций.

§ 1. ПРОГРАММА ИЗУЧЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА
8 класс

Вариант I программы – 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант II программы составлен с учётом дополнительного материала, 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант III программы составлен для классов с углублённым изучением математики, 3 часа в неделю, всего 102 часа за год.

Параграф учебника	Содержание	Количество часов		
		I	II	III
27	Параллельные прямые	3	2	3
28	Сумма углов многоугольника	2	2	3
	Контрольная работа № 1	1	1	2
29	Параллелограмм	2	2	3
30	Признаки параллелограмма	2	2	3
31	Прямоугольник, ромб, квадрат	3	2	3
32	Средняя линия треугольника	2	2	3
33	Трапеция	3	2	3
34	Теорема Фалеса	2	2	3
	Контрольная работа № 2	1	1	2
35	Углы, связанные с окружностью	2	2	3
36	Многоугольники, вписанные в окружность	2	2	3
37	Многоугольники, описанные около окружности	2	2	3
38	Замечательные точки в треугольнике	2	2	3
	Контрольная работа № 3	1	1	2
39	Центральная симметрия	2	2	3
40	Поворот. Симметрия n-го порядка	2	2	3
41	Осевая симметрия	2	2	3
42	Параллельный перенос	2	2	3
43	Движение. Равенство фигур	2	2	3
44*	Паркеты	-	2	3
	Контрольная работа № 4	1	1	2
45	Подобие треугольников. Первый признак подобия треугольников	2	2	3
46	Второй и третий признаки подобия треугольников	3	2	3
47	Подобие фигур. Гомотетия	2	2	2
48*	Золотое сечение	-	2	3
49	Теорема Пифагора	2	2	3

	Контрольная работа № 5	1	1	2
50	Тригонометрические функции острого угла	2	2	2
51	Тригонометрические тождества	2	2	2
52	Тригонометричские функции тупого угла	2	2	2
53	Теорема косинусов	2	2	3
54	Теорема синусов	2	2	3
55	Длина окружности	2	2	2
56*	Циклоидальные кривые	-	2	3
	Контрольная работа № 6	1	1	2
	Итоговое повторение	4	2	5

§ 2. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
8 класс
Вариант I (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
5. Параллельность (21 ч)	
Параллельные прямые. Признаки параллельных прямых. Аксиома параллельных прямых. Свойства параллельных прямых. Исторические сведения. Сумма углов треугольника. Сумма углов выпуклого n-угольника. Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. Их свойства. Признаки параллелограмма. Средняя линия треугольника. Трапеция. Равнобедренная и прямоугольная трапеции. Средняя линия трапеции. Теорема Фалеса.	Формулировать определение параллельных прямых и аксиому параллельных. Распознавать на рисунках и изображать параллельные прямые. Называть углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей. Приводить исторические сведения об аксиоме параллельных и Н.И. Лобачевском. Формулировать и доказывать теоремы о сумме углов треугольника и выпуклого n-угольника. Распознавать, формулировать определение и изображать: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапецию, равнобедренную и прямоугольную трапеции. Формулировать и доказывать свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата. Формулировать определение и изображать среднюю линию: треугольника, трапеции. Формулировать и доказывать теоремы о срединих линиях треугольника и трапеции, теорему Фалеса.

	Решать задачи на построение, доказательство и вычисление.
6. Многоугольники и окружность (9 ч)	
Углы, связанные с окружностью. Многоугольники, вписанные в окружность. Многоугольники, описанные около окружности. Вписанная и описанная окружности правильного многоугольника. Замечательные точки треугольника.	Формулировать определения и изображать углы, связанные с окружностью. Формулировать и доказывать теоремы об углах, связанных с окружностью. Решать задачи на нахождение углов, связанных с окружностью. Формулировать определения и изображать многоугольники, вписанные в окружность и описанные около окружности. Формулировать и доказывать теоремы о вписанной и описанной окружностях треугольника и правильного многоугольника. Изображать замечательные точки треугольника. Формулировать и доказывать теоремы о замечательных точках треугольника.
7. Движение (11 ч)	
Понятие движения и его свойства. Центральная симметрия. Центрально-симметричные фигуры. Поворот. Симметрия n-го порядка. Осевая симметрия. Фигуры, симметричные относительно некоторой оси. Параллельный перенос. Равенство фигур.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие: движения, центральной симметрии, поворота, симметрии n-го порядка, осевой симметрии, параллельного переноса. Приводить примеры симметричных фигур. Изображать фигуры, симметричные данным. Формулировать определение равенства фигур. Решать задачи на нахождение элементов симметрии и установление равенства фигур.
8. Подобие (10 ч)	

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников. Подобие фигур. Гомотетия. Теорема Пифагора.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие подобия треугольников. Распознавать подобные треугольники на рисунках. Формулировать и доказывать признаки подобия треугольников. Решать задачи на нахождение элементов подобных треугольников. Формулировать определения подобия и гомотетии. Изображать фигуры, подобные и гомотетичные данным. Формулировать и доказывать теорему Пифагора. Применять её при решении задач. Приводить исторические сведения о Пифагоре. Решать задачи с практическим содержанием с использованием подобия и теоремы Пифагора.
9. Элементы тригонометрии (13 ч)	
Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника: синус, косинус, тангенс, котангенс. Тригонометрические тождества. Тригонометрические функции тупого угла. Теорема косинусов. Теорема синусов. Длина окружности. Число π. Длина дуги окружности.	Формулировать определения и иллюстрировать понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника. Выражать тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника через его стороны. Формулировать и доказывать тригонометрические тождества. Формулировать определения и выражать тригонометрические функции тупого угла через тригонометрические функции острых углов. Формулировать и доказывать теоремы косинусов и синусов.

	Решать задачи на нахождение тригонометрических функций и сторон треугольника. Формулировать определения длины окружности. Указывать приближённые значения числа π. Устанавливать соответствие между величиной центрального угла и длиной дуги окружности. Решать задачи на нахождение длины дуги окружности.
Итоговое повторение (4 ч)	

Вариант II (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
5. Параллельность (18 ч)	
Параллельные прямые. Признаки параллельных прямых. Аксиома параллельных прямых. Свойства параллельных прямых. Исторические сведения. Сумма углов треугольника. Сумма углов выпуклого *n*-угольника. Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. Их свойства. Признаки параллелограмма. Средняя линия треугольника. Трапеция. Равнобедренная и прямоугольная трапеции. Средняя линия трапеции. Теорема Фалеса.	Формулировать определение параллельных прямых и аксиому параллельных. Распознавать на рисунках и изображать параллельные прямые. Называть углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей. Приводить исторические сведения об аксиоме параллельных и Н.И. Лобачевском. Формулировать и доказывать теоремы о сумме углов треугольника и выпуклого *n*-угольника. Распознавать, формулировать определение и изображать: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапецию, равнобедренную и прямоугольную трапеции. Формулировать и доказывать свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата. Формулировать определение и изображать среднюю линию: треугольника, трапеции. Формулировать и доказывать теоремы о срединих линиях треугольника и трапеции, теорему Фалеса. Решать задачи на построение, доказательство и вычисление.
6. Многоугольники и окружность (9 ч)	

Углы, связанные с окружностью. Многоугольники, вписанные в окружность. Многоугольники, описанные около окружности. Вписанная и описанная окружности правильного многоугольника. Замечательные точки треугольника.	Формулировать определения и изображать углы, связанные с окружностью. Формулировать и доказывать теоремы об углах, связанных с окружностью. Решать задачи на нахождение углов, связанных с окружностью. Формулировать определения и изображать многоугольники, вписанные в окружность и описанные около окружности. Формулировать и доказывать теоремы о вписанной и описанной окружностях треугольника и правильного многоугольника. Изображать замечательные точки треугольника. Формулировать и доказывать теоремы о замечательных точках треугольника.
7. Движение (13 ч)	
Понятие движения и его свойства. Центральная симметрия. Центрально-симметричные фигуры. Поворот. Симметрия *n*-го порядка. Осевая симметрия. Фигуры, симметричные относительно некоторой оси. Параллельный перенос. Равенство фигур.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие: движения, центральной симметрии, поворота, симметрии *n*-го порядка, осевой симметрии, параллельного переноса. Приводить примеры симметричных фигур. Изображать фигуры, симметричные данным. Формулировать определение равенства фигур. Решать задачи на нахождение элементов симметрии и установление равенства фигур. *Формулировать определение и изображать паркеты на плоскости. *Выполнять проекты на составление паркетов.

8. Подобие (11 ч)	
Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников. Подобие фигур. Гомотетия. *Золотое сечение. Теорема Пифагора.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие подобия треугольников. Распознавать подобные треугольники на рисунках. Формулировать и доказывать признаки подобия треугольников. Решать задачи на нахождение элементов подобных треугольников. Формулировать определения подобия и гомотетии. Изображать фигуры, подобные и гомотетичные данным. *Формулировать определения и изображать золотое сечение, золотые прямоугольники и золотые треугольники. Формулировать и доказывать теорему Пифагора. Применять её при решении задач. Приводить исторические сведения о золотом сечении и Пифагоре. Решать задачи с практическим содержанием с использованием подобия и теоремы Пифагора. Выполнять проекты на тему *золотого сечения и теоремы Пифагора.
9. Элементы тригонометрии (15 ч)	
Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника: синус, косинус, тангенс, котангенс. Тригонометрические тождества. Тригонометрические функции тупого угла. Теорема косинусов. Теорема синусов. Длина окружности. Число π. Длина дуги	Формулировать определения и иллюстрировать понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника. Выражать тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника через его стороны.

окружности. *Циклоидальные кривые.	Формулировать и доказывать тригонометрические тождества. Формулировать определения и выражать тригонометрические функции тупого угла через тригонометрические функции острых углов. Формулировать и доказывать теоремы косинусов и синусов. Решать задачи на нахождение тригонометрических функций и сторон треугольника. Формулировать определение длины окружности. Указывать приближённые значения числа π. Устанавливать соответствие между величиной центрального угла и длиной дуги окружности. Решать задачи на нахождение длины дуги окружности. *Формулировать определения и изображать циклоидальные кривые.
Итоговое повторение (2 ч)	

Вариант III (3 ч в неделю, всего 102 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
5. Параллельность (28 ч)	
Параллельные прямые. Признаки параллельных прямых. Аксиома параллельных прямых. Свойства параллельных прямых. Исторические сведения. Сумма углов треугольника. Сумма углов выпуклого n-угольника. Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. Их свойства. Признаки параллелограмма. Средняя линия треугольника. Трапеция. Равнобедренная и прямоугольная трапеции. Средняя линия трапеции. Теорема Фалеса.	Формулировать определение параллельных прямых и аксиому параллельных. Распознавать на рисунках и изображать параллельные прямые. Называть углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей. Приводить исторические сведения об аксиоме параллельных и Н.И. Лобачевском. Формулировать и доказывать теоремы о сумме углов треугольника и выпуклого n-угольника. Распознавать, формулировать определение и изображать: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапецию, равнобедренную и прямоугольную трапеции. Формулировать и доказывать свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата. Формулировать определение и изображать среднюю линию: треугольника, трапеции. Формулировать и доказывать теоремы о срединих линиях треугольника и трапеции, теорему Фалеса. Решать задачи на построение, доказательство и вычисление.
6. Многоугольники и окружность (14 ч)	

Углы, связанные с окружностью. Многоугольники, вписанные в окружность. Многоугольники, описанные около окружности. Вписанная и описанная окружности правильного многоугольника. Замечательные точки треугольника.	Формулировать определения и изображать углы, связанные с окружностью. Формулировать и доказывать теоремы об углах, связанных с окружностью. Решать задачи на нахождение углов, связанных с окружностью. Формулировать определения и изображать многоугольники, вписанные в окружность и описанные около окружности. Формулировать и доказывать теоремы о вписанной и описанной окружностях треугольника и правильного многоугольника. Изображать замечательные точки треугольника. Формулировать и доказывать теоремы о замечательных точках треугольника.
7. Движение (20 ч)	
Понятие движения и его свойства. Центральная симметрия. Центрально-симметричные фигуры. Поворот. Симметрия *n*-го порядка. Осевая симметрия. Фигуры, симметричные относительно некоторой оси. Параллельный перенос. Равенство фигур.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие: движения, центральной симметрии, поворота, симметрии *n*-го порядка, осевой симметрии, параллельного переноса. Приводить примеры симметричных фигур. Изображать фигуры, симметричные данным. Формулировать определение равенства фигур. Решать задачи на нахождение элементов симметрии и установление равенства фигур. *Формулировать определение и изображать паркеты на плоскости. *Выполнять проекты на составление паркетов.

8. Подобие (16 ч)	
Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников. Подобие фигур. Гомотетия. *Золотое сечение. Теорема Пифагора.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие подобия треугольников. Распознавать подобные треугольники на рисунках. Формулировать и доказывать признаки подобия треугольников. Решать задачи на нахождение элементов подобных треугольников. Формулировать определения подобия и гомотетии. Изображать фигуры, подобные и гомотетичные данным. *Формулировать определения и изображать золотое сечение, золотые прямоугольники и золотые треугольники. Формулировать и доказывать теорему Пифагора. Применять её при решении задач. Приводить исторические сведения о золотом сечении и Пифагоре. Решать задачи с практическим содержанием с использованием подобия и теоремы Пифагора. Выполнять проекты на тему *золотого сечения и теоремы Пифагора.
9. Элементы тригонометрии (19 ч)	
Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника: синус, косинус, тангенс, котангенс. Тригонометрические тождества. Тригонометрические функции тупого угла. Теорема косинусов. Теорема синусов. Длина окружности. Число π. Длина дуги	Формулировать определения и иллюстрировать понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника. Выражать тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника через его стороны.

окружности. *Циклоидальные кривые.	Формулировать и доказывать тригонометрические тождества. Формулировать определения и выражать тригонометрические функции тупого угла через тригонометрические функции острых углов. Формулировать и доказывать теоремы косинусов и синусов. Решать задачи на нахождение тригонометрических функций и сторон треугольника. Формулировать определение длины окружности. Указывать приближенные значения числа π. Устанавливать соответствие между величиной центрального угла и длиной дуги окружности. Решать задачи на нахождение длины дуги окружности. *Формулировать определения и изображать циклоидальные кривые. *Выполнять проекты на построение кривых как траекторий движения точек.
Итоговое повторение (5 ч)	

§ 3. КОСПЕКТЫ УРОКОВ
8 класс

27. Параллельные прямые
(уроки 1, 2, 3)

Замечание. Номера (с 27 по 56) пунктов соответствуют параграфам названного учебника. Номера 1 – 26 представлены в аналогичном методическом пособии для 7 класса тех же авторов.

Цель – повторить определение параллельных прямых, данное в курсе 7 класса, вспомнить классификацию взаимного расположения двух прямых на плоскости; ввести названия углов, которые образуются при пересечении двух прямых третьей – секущей; рассмотреть основное свойство (аксиому) параллельных прямых; доказать признак двух параллельных прямых на плоскости и научиться применять его при решении задач.

Урок 1

I. Устная работа на повторение

1) Как переводятся термины «Геометрия», «Планиметрия», «Стереометрия» с греческого языка?

2) Как возникла геометрия?

3) Когда существовала Древняя Греция?

4) Назовите известных ученых Древней Греции.

5) Какие фигуры являются плоскими, неплоскими? Приведите примеры.

6) Какие геометрические фигуры отнесены к основным?

7) Сколько прямых можно провести через одну точку?

8) На сколько частей делят плоскость две прямые?

9) Прямая делит плоскость на две части. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

10) Можно ли провести прямую через две точки, одна из которых находится на полу, а другая на потолке комнаты?

Ответы. 8) На 3 (параллельные прямые), на 4 (пересекающиеся прямые). 9) Нет, например, окружность делит плоскость на две части. 10) Да.

II. Новый материал

Возьмем на плоскости две прямые a и b.

Вопрос

- Как они могут располагаться относительно друг друга?

В процессе обсуждения ответа на этот вопрос вспоминаем схему взаимного расположения двух прямых на плоскости (схема 1) и определение параллельных прямых.

Определение. Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Схема 1

Две прямые

Имеют общую точку (пересекаются) | Не имеют общих точек (параллельны)

Изображаем на доске и в тетрадях две прямые: а) пересекающиеся; б) параллельные (с помощью линейки и угольника); делаем соответствующие записи: а) $a \cap b = O$; б) $a || b$.

Теперь изображаем две произвольные прямые (рис. 1) и третью, их пересекающую, она называется ***секущей***.

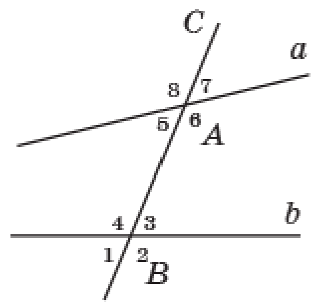


Рис. 1

Вопросы

- Сколько углов образовалось при этом?
- Сравните пары углов: а) 1 и 5, 4 и 8; б) 1 и 8, 4 и 5; в) 1 и 7, 4 и 6.

Вводим наименования углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей:

Углы 1 и 5 называются ***соответственными***.

Углы 3 и 5 называются ***внутренними накрест лежащими***.

Углы 1 и 7 называюся ***внешними накрест лежащими***.

Углы 3 и 6 называются ***внутренними односторонними***.

Углы 1 и 8 называются ***внешними односторонними***.

Теперь полезно составить следующую таблицу пар углов.

Соответственные: (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8).

Внутренние накрест лежащие: (3, 5), (4, 6).

Внешние накрест лежащие: (1, 7), (2, 8).

Внутренние односторонние: (3, 6), (4, 5).

Внешние односторонние: (1, 8), (2, 7).

Задания

1) На рисунке 2 $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что: а) $\angle 3 = \angle 4$; б) $\angle 1 + \angle 4 = 180°$.

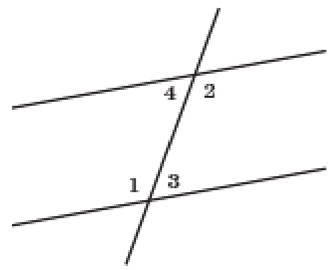


Рис. 2

2) Докажите, что если $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ на рисунке 2, то: а) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$; б) $\angle 1 = \angle 2$; в) $\angle 3 = \angle 4$.

3) Постройте (с помощью линейки и транспортира) две прямые a и c, пересекающиеся под углом α, например $\alpha = 50°$ (рис. 3). Отметьте на прямой c точку B и проведите через нее прямую b, пересекающую прямую c под тем же углом α. Сравните внутренние накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c. Сделайте предположение о взаимном расположении относительно друг друга прямых a и b.

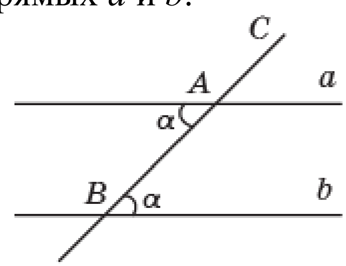


Рис. 3

После выполнения этого задания учащимся предлагается соответствующая теорема.

Теорема. (Признак параллельности двух прямых.) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются прямой c в точках A и B соответственно и образуют равные внутренние накрест лежащие углы. Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекутся в некоторой точке C (рис. 4). Для треугольника ABC угол DAB является внешним и, следовательно, должен быть больше внутреннего угла ABE, что противоречит условию равенства этих углов. Следовательно, прямые a и b не могут пересекаться, значит, они параллельны.

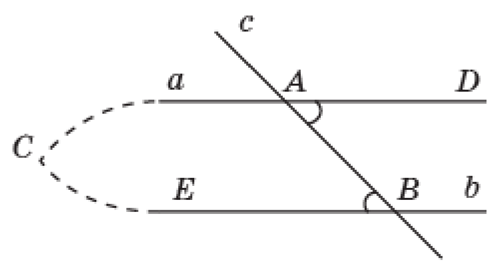


Рис. 4

III. Закрепление нового материала

Рассматриваем следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны.

Следствие 2. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°, то эти две прямые параллельны.

Следствие 3. Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то эти две прямые параллельны.

Действительно, в этих случаях внутренние накрест лежащие углы равны, и поэтому прямые по доказанной теореме параллельны.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (параграф 27 учебника, будем здесь и далее сокращенно писать п. 27): знать названия углов, которые образуются при пересечении двух прямых третьей, теорему – признак параллельности двух прямых и следствия из нее.

2. Решить задачи.

1) Изобразите две прямые *AB*, *CD* и их секущую *EF*, где точки *E*, *F* принадлежат соответственно первой и второй названным прямым. Запишите, какие углы являются: а) внешними накрест лежащими; б) внутренними односторонними. Сколько пар таких углов получилось?

2) На рисунке 5 $\angle 1 = 69°30'$, $\angle 2 = 68°$. Как расположены относительно друг друга прямые *m* и *n*?

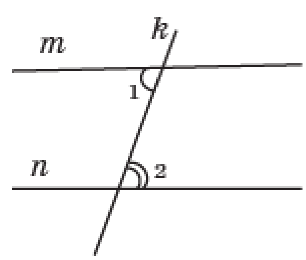


Рис. 5

3) На рисунке 6 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 2=\angle 3$. Какие прямые параллельны?

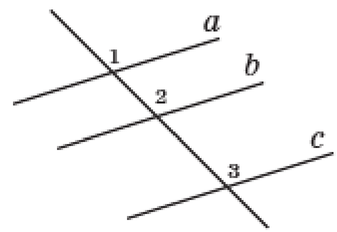


Рис. 6

4*) Ученик шел по дороге MN, в точке N повернул направо и пошел по дороге NK под углом $135°$ к первой дороге, затем в точке K опять повернул направо и пошел по шоссе KL, расположенном под углом $45°$ ко второй дороге. Сможет ли он, двигаясь по KL, выйти на MN? Почему?

Замечание. Задачи, помеченные звездочкой (*), не являются обязательными.

Урок 2

I. Математический диктант

Замечание. Напоминаем, что, как известно, математические диктанты являются одной из форм письменной работы. Они весьма продуктивны, активизируют деятельность учащихся, индивидуализируют ее, развивают слуховую память, внимание. Это хорошее мобилизирующее начало урока. В методику проведения математического диктанта (назовем МД) входят следующие вопросы:

1) Цель проведения МД на данном уроке.

2) Содержание МД.

3) Место МД на уроке, его продолжительность.

4) Перечень знаний, умений и навыков учащихся, необходимых для выполнения МД.

5) Способ проведения.

6) Способ проверки.

7) Оценка работы учащихся.

Математический диктант имеет свои специфические особенности. Прежде всего, задания воспринимаются учащимися на слух, поэтому они должны воспроизводиться четко, громко. Существует практика записи содержания диктантов по вариантам на два голоса (мужского и женского). Включаемые в диктант задания должны быть ясными и краткими, ребята пишут только ответ (как правило, продолжают начатую фразу). Продолжительность не должна не должна превышать десяти минут. Удобно математический диктант проводить в специальной тетради или на отдельных листочках с копировальной бумагой. Ребята сдадут задание, а по копиям проверят решения. Важно проверить диктант сразу после его окончания. Это удобно сделать с помощью кодоскопа или проектора, заранее подготовив материал. Нужно четко договориться с учащимися, как будет оцениваться математический диктант.

Вариант 1

1. Две прямые на плоскости называются параллельными, если…

2. Прямая называется секущей, если…

3. Внутренними накрест лежащими углами при пересечении двух прямых a и b секущей c (рис. 1) являются углы …

Внешними односторонними являются углы…

4. Признак параллельности двух прямых заключается в следующем: …

5. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы в сумме составляют 180°, то…

Вариант 2

1. Две прямые на плоскости называются непараллельными, если …

2. Параллельность прямых обозначается …

3. Внешними накрест лежащими углами при пересечении двух прямых a и b секущей c (рис. 1) являются углы…

Внутренними односторонними являются углы…

4. Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то….

5. Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны, то…

II. Проверка математического диктанта

После окончания математического диктанта учащиеся сдают первые экземпляры работы, а копии оставляют себе для проверки, которую организуем через кодоскоп или проектор.

III. Новый материал

Изобразим прямую a и точку B, не принадлежащую прямой a. Нужно построить прямую b, проходящую через точку B и параллельную прямой a.

Устно проводим анализ задачи, т. е. предполагаем, что задача решена. Если теперь провести через данную точку B секущую прямых a и b, например, под прямым углом к данной прямой a, то, имея перед глазами такой чертеж, намечаем план решения задачи, а именно:

а) через точку B проводим (с помощью линейки и угольника) прямую c, перпендикулярную прямой a;

б) через ту же точку B проводим прямую b, перпендикулярную прямой c, c – искомая прямая.

Доказательство следует из признака параллельности двух прямых.

Вопросы

- Всегда ли данная задача имеет решение?

- Сколько можно провести прямых через точку B, параллельных прямой a?

Ответы. Первый вопрос. Да, это следует из построения. При ответе на второй вопрос формулируем *основное свойство* (*аксиому*) *параллельных прямых*, которая состоит в следующем:

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Из сказанного следует, что через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Поэтому справедлива следующая теорема, обратная признаку параллельности прямых.

Теорема. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Доказательство. Пусть a и b – параллельные прямые, пересеченные прямой c в точках A и B соответственно. Проведем через точку A прямую a_1 так, чтобы внутренние накрест лежащие углы, образованные прямыми a_1, b и секущей c были равны. Тогда по признаку параллельности прямые a_1 и b параллельны, а так как через точку A проходит единственная прямая, параллельная b, то прямая a совпадет с прямой a_1. Значит, внутренние накрест лежащие углы, образованные прямыми a, b и секущей c, равны.

IV. Закрепление нового материала

1. Предложите другой способ построения прямой, параллельной данной и проходящей через точку, не принадлежащую данной прямой.

Второй способ решения задачи отличается от рассмотренного тем, что секущая проводится не под прямым углом к данной прямой, а под произвольным.

2. Докажите, что если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то: а) соответственные углы равны; б) внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°.

3*. Прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c. Докажите, что прямая a параллельна прямой c.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 27 учебника): аксиому параллельных прямых, теорему, обратную признаку параллельности прямых, и ее следствия.

2. Решить задачи.

1) Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Один из: а) внутренних углов равен 72°; б) внешних углов равен 124°. Найдите остальные семь углов.

Ответ. а) 4 угла по 72° и 4 угла по 108°; б) 4 угла по 124° и 4 угла по 56°.

2) Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. При этом: а) внутренние односторонние углы относятся как 2:7; б) один из внешних односторонних углов меньше другого на 23°. Найдите все полученные углы.

Ответ. а) 4 угла по 40° и 4 угла по 140°; а) 4 угла по 78°30’ и 4 угла по 101°30’.

3) Докажите, что две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.

4*) Предложите способ построения прямой, параллельной данной и проходящей через точку, не принадлежащую данной прямой, с помощью циркуля и линейки.

Построение показано на рисунке 7.

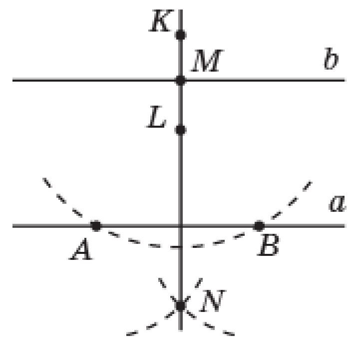


Рис. 7

Сначала из данной точки M проводим прямую, перпендикулярную данной прямой a. Для этого проводим окружность с центром в точке M, пересекающую прямую a в точках A и B. Затем проводим две равные окружности с центрами в точках A и B, радиусом больше половины отрезка AB, точку их пересечения назовем N, прямая MN перпендикулярна прямой a. Теперь через точку M проведем прямую b, перпендикулярную MN. Для этого на MN откладываем равные отрезки MK и ML и поступаем аналогично предыдущему построению, получим искомую прямую b.

3*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «История V постулата Евклида». (Учебник - «Исторические сведения» из параграфа 27.)

Урок 3

I. Проверка домашнего задания

Шесть учеников приглашаются за первые парты (специально освобождены) для опроса по теории.

Задания 1, 3, 5

1) Сформулируйте основное свойство (аксиому) параллельных прямых.

2) Сформулируйте и докажите теорему, обратную признаку параллельности прямых.

Задания 2, 4, 6

1) Как переводится термин "аксиома"? Зачем нужны аксиомы?

2) Сформулируйте и докажите теорему – признак параллельности двух прямых.

Четырем (или пяти, шести, по усмотрению учителя) учащимся предлагаются индивидуальные задания. Они даются на отдельных карточках и выполняются на своих местах. При этом разрешается пользоваться тетрадями. Задания могут оцениваться отметкой или знаками "+", "-" и т. п.

Карточка

1) Найдите все углы, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей, если разность двух внутренних односторонних углов равна 32°.

2) На рисунке 8 $\angle 1 = \angle 2$. Найдите угол 4, если $\angle 3 = 113°30'$.

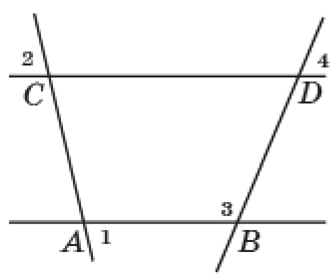


Рис. 8

3*) В треугольнике ABC $\angle A = 27°$, $\angle B = 63°$. Найдите $\angle C$.

Ответы. 1) 4 угла по 74° и 4 угла по 106°. 2) $\angle 4 = 66°30'$. 3) $\angle C = 90°$.

Задание для класса

1. Сумма трех внутренних углов из восьми углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, оказалась равной 210°. Найдите каждый из восьми углов.

2. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, параллельны, т.е. лежат на параллельных прямых.

3*. Противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ попарно параллельны. Найдите величины углов и длины сторон этого четырехугольника, если $\angle A = 30°$, $AB = 2$ см, $BC = 4$ см.

Ответы. **1.** 4 угла по 30° и 4 угла по 150°. **2.** На рисунке 9 $a||b$, c – их секущая, AE и BF – биссектрисы внутренних накрест лежащих углов. Поскольку они равны, $\angle 1 = \angle 2$. Значит, внутренние накрест лежащие углы прямых AE, BF и секущей c равны. Следовательно, по признаку параллельных прямых $AE||BF$. **3*.** $\angle C = 30°$, $\angle B = \angle D = 150°$, $CD = 2$ см, $AD = 4$ см.

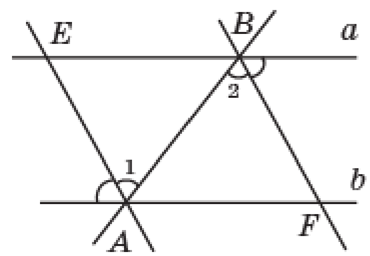


Рис. 9

К доске вызываем трех учащихся (назовем их $У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение домашней задачи 2 (см. этап V урока 2).

Дополнительные вопросы для учеников, работающих у доски (такие вопросы могут задавать и учащиеся класса)

- Какие прямые называются пересекающимися?
- Какие прямые называются параллельными?
- Какие две прямые не будут параллельными?

II. Устная работа

Замечание. Устная работа является важным этапом, или дидактическим моментом, урока, так как выполняет существенные функции, такие, как подготовка учащихся к работе на уроке, в частности, к восприятию нового материала; систематическое повторение пройденного; развитие учащихся, - остаются не менее актуальной для старшеклассников. Кроме этого, устная работа активизирует учебную деятельность учащихся. Это связано как с содержанием, так и с формой проведения. В содержание устной работы включаем упражнения четырех типов: на закрепление и отработку текущего материала; на повторение; упражнения с элементами творчества, это может быть, например, задача с новой для учащихся пространственной ситуацией или элементами подготовки к восприятию нового материала; упражнения развивающего, занимательного характера.

При планировании устной работы необходимо иметь в виду, что ее продолжительность не должна превышать 10 минут (оптимально 7-8 минут). Начинать устную работу, желательно, с легкого задания, чтобы не подавить инициативу ребят, постепенно повышая трудность задач и вводя элементы творчества. Устная работа – это хорошее активное мобилизующее, настраивающее на работу начало урока. Для стимулирования активности и инициативы учащихся, возможности себя проявить мы ввели следующую систему оценок во время устной работы: за каждый ответ учащийся получает "+", "-" или "$\pm$", "$\mp$". Если учащийся (может быть за несколько уроков) набрал пять представленных знаков, например, все "+", то он получает оценку - "5", за четыре "+" и один "-" - оценку "4" и т.д., учитываются все возможные комбинации сочетания четырех знаков. Личный опыт работы показывает, что такая система оценок с успехом принимается учащимися и нравится им. Причины этого заключаются в том, что она позволяет довольно гибко реагировать на ответы, ребята могут проявить себя, сами добиться хорошей оценки.

В устной работе особенно ярко проявляется еще один аспект современного обучения - возможность для формирования и развития диалоговой культуры учащихся.

Упражнения

1) На рисунке 10 укажите параллельные прямые, если равны углы: а) 1 и 5; б) 2 и 8; в) 4 и 6; г) 9 и 10 и они прямые; д) 2 и 6. Ответ обоснуйте.

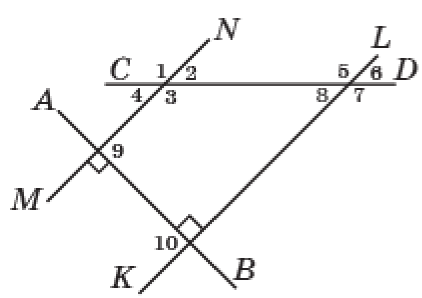


Рис. 10

2) При пересечении двух прямых третьей образуется 8 углов. Сколько из них может оказаться тупыми?

3) Один из углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей, в четыре раза меньше одного из остальных. Найдите все углы.

4) Какие прямые на рисунке 11 параллельны, если равны углы 1 и 2, 3 и 4?

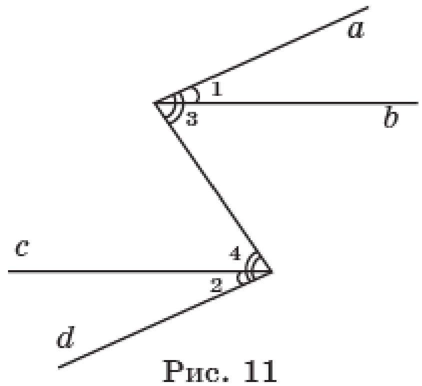


Рис. 11

5) Как практически проверить, параллельны ли две данные прямые?

6) Как проверить, что края линейки параллельны?

Ответы. 2) 4. 3) 4 угла по 36° и 4 угла по 144°. 4) $a||d$, $b||c$. 5) Пересечь их третьей прямой и воспользоваться признаком параллельных прямых или одним из его следствий. 6) Обвести края линейки и проверить, получились ли параллельные прямые (см. решение предыдущей задачи).

III. Сообщение на тему «История V постулата Евклида».

Индивидуальное задание из домашнего задания (см. задание 3* из этапа V урока 2).

IV. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Докажите, что прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника и пересекающая его боковые стороны, отсекает равнобедренный треугольник.

2. Один из внутренних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 136°. Под какими углами его биссектриса пересекает другую параллельную прямую?

3*. К данной окружности проведите касательную, параллельную данной прямой.

Вариант 2

1. Докажите, что прямая, параллельная боковой стороне равнобедренного треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает равнобедренный треугольник.

2. Биссектриса одного из внутренних углов, получающихся при пересечении двух параллельных прямых секущей, образует со второй параллельной прямой углы, которые относятся как 1:3. Найдите все углы, образованные при пересечении данных параллельных прямых секущей.

3*. Задача 3* из первого варианта.

Ответы. *Вариант 1*. 2. 68° и 112°. 3*. Через центр данной окружности провести прямую, перпендикулярную данной прямой. Через точки ее пересечения с окружностью провести перпендикулярные ей прямые, которые и будут искомыми. *Вариант 2*. 2. 8 углов по 90°. 3*. См. решение задачи 3* из первого варианта.

V. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 27 учебника).

2. Решить задачи.

1) Разность двух внутренних односторонних углов, образованных параллельными прямыми и секущей, равна 40°. Найдите эти углы.

Ответ. 4 угла по 70° и 4 угла по 110°.

2) Докажите, что биссектрисы внутренних односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, перпендикулярны, т.е. лежат на перпендикулярных прямых.

Ответ. На рисунке 12 $a||b$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. Таким образом, $\angle 5=\angle 4=\angle 3$, значит, треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC, AH – его биссектриса, следовательно, и высота, т. е. $AH\perp BH$.

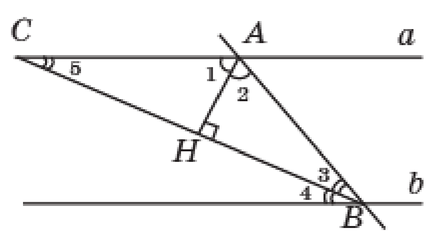


Рис. 12

3) Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы равны или в сумме составляют 180°.

Решение. На рисунке 13 $O_1A_1||O_2A_2$ и $O_1B_1||O_2B_2$. Возможны следующие случаи: а) $\angle 1 = \angle 2$, так как $\angle 1 = 180° – (\angle 3+\angle 4) = 180° – (\angle 5+\angle 6) = \angle 2$; б)

$\angle 1+\angle CO_2B_2 = 180^o$, так как $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 2+\angle CO_2B_2 = 180^o$; в) $\angle 1 = \angle 7$, так как $\angle 1 = \angle 2 = \angle 7$.

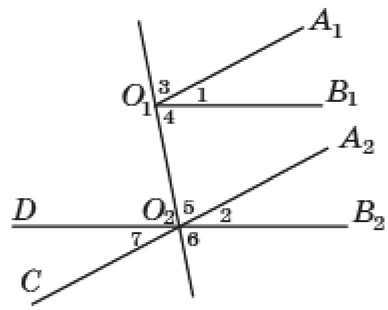


Рис. 13

4*) Найдите наибольшее число прямых, которые можно провести через: а) 2 точки; б) 3 точки; в) 4 точки; г) 5 точек; д) n точек?

Ответ. а) 1 прямая; б) 3 прямые; в) 6 прямых; г) 10 прямых; д) наибольшее число прямых получится, если никакие три точки не принадлежат одной прямой, тогда из каждой точки можно провести n-1 прямую. Учитывая, что имеется n точек и каждую прямую подсчитываем дважды, окончательно получаем $\frac{n(n-1)}{2}$ прямых.

28. Сумма углов многоугольника
(уроки 4, 5)

Цель – изучить теоремы о сумме углов треугольника и многоугольника и научиться применять их при решении задач.

Урок 4

I. Устная работа

1) При каком положении секущей ее отрезок, заключенный между параллельными прямыми, имеет наименьшую длину?

2) Два отрезка *EF* и *PH* пересекаются в точке *M* и делятся в ней пополам (рис. 14). Есть ли на рисунке параллельные прямые?

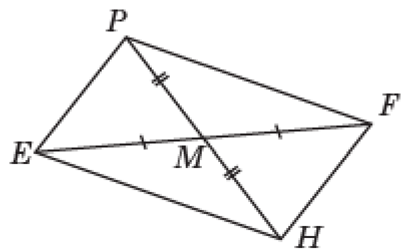


Рис. 14

3) На рисунке 15 $BC \| AD$ и $AO=OD$. Найдите равные треугольники.

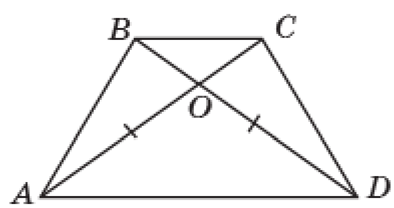


Рис. 15

4) На рисунке 16 $OC=OD$ и $AB \| CD$. Найдите равные отрезки.

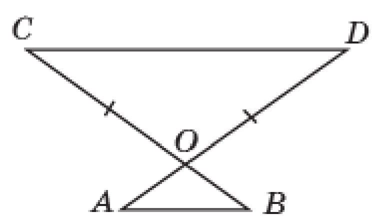


Рис. 16

5) В треугольнике *MKN* $MK=MN$ (рис. 17), $GH \| KN$. Определите вид изображенных треугольников.

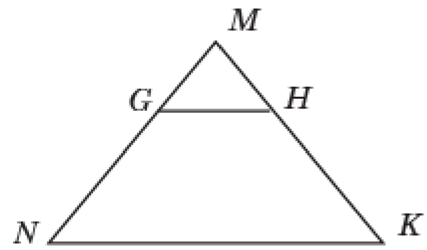


Рис. 17

Ответы. 1) Секущая перпендикулярна данным параллельным прямым. 2) *EH*||*PF*, *EP*||*HF*. 3) *ABC* и *DBC*; *ABD* и *DCA*; *AOB* и *DOC*, *ACD* и *AOB*, *DOC*. 4) *AO*=*BO*, *AD*=*BC*. 5) Треугольники *MKN* и *MGH* – равнобедренные.

II. Новый материал

Ученикам предлагается изобразить треугольник *ABC* и обозначить его углы как показано на рисунке 18. Затем через вершину *C* проведем прямую, параллельную стороне *AB*, и обозначим соответствующим образом углы.

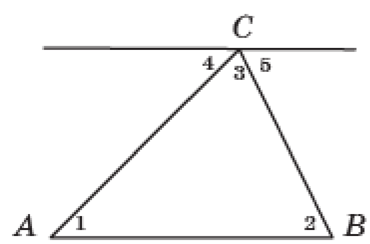


Рис. 18

Вопросы

- Какие углы оказались равны? Почему?
- Какова сумма углов 3, 4, 5 и 1, 2, 3?

После обсуждения ответов на поставленные вопросы формулируем и доказываем теорему о сумме углов треугольника.

Теорема. Сумма углов произвольного треугольника равна 180°.

Доказательство. Для произвольного треугольника *ABC* через вершину *C* проведем прямую, параллельную *AB* (рис. 18). Тогда $\angle 1=\angle 4$, $\angle 2=\angle 5$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых *AB*, *CD* и секущих *AC* и *BC* соответственно. Следовательно, $\angle 1+\angle 2+\angle 3 = \angle 4+\angle 3+\angle 5 = 180^{\circ}$.

Вопросы

- Как выразить внешние углы треугольника, например, *MAC* и *NBC* треугольника *ABC* (рис. 18) через его внутренние углы? Какой вывод можно сделать?

- В треугольнике ABC $\angle C=90^\circ$. Чему равна сумма углов A и B? Какой вывод можно сделать?

После обсуждения ответов формулируем и записываем следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, несмежных с ним.

Следствие 2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Задания

1) Изобразите произвольный выпуклый многоугольник, например, шестиугольник, и разбейте его на треугольники диагоналями, выходящими из одной вершины. На сколько треугольников разбился многоугольник?

Решение показано на рисунке 19. Получилось 4 треугольника.

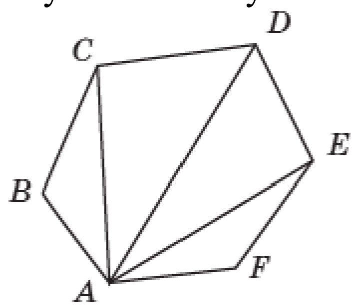


Рис. 19

2) Найдите сумму внутренних углов выпуклого шестиугольника.

Ответ. $180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$.

После обсуждения решения формулируем и доказываем теорему о сумме внутренних углов выпуклого n-угольника.

Теорема. Сумма углов произвольного выпуклого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Доказательство. Из какой-нибудь вершины выпуклого многоугольника проведем все его диагонали (рис. 19). Тогда многоугольник разобьется на $n-2$ треугольника. В каждом треугольнике сумма углов равна 180°, и эти углы составляют углы многоугольника. Следовательно, сумма углов многоугольника равна $180^\circ(n-2)$.

III. Закрепление нового материала

1. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 40°. Найдите два других его угла.

2. В треугольнике ABC проведена высота BH. Найдите углы, которые она образует со сторонами треугольника, выходящими из вершины B, если $\angle A = 72^\circ$, $\angle C = 55^\circ$.

3. Найдите сумму углов выпуклого семиугольника.

4*. Предложите другой способ разбиения выпуклого многоугольника на треугольники и докажите, что при этом справедлива соответствующая формула для суммы его углов.

Ответы. **1.** 40°, 100°. **2.** 18°, 35°. **3.** 900°. **4*.** Решение показано на рисунке 20, искомая сумма при этом будет равна $180°n - 360° = 180°(n\text{-}2)$.

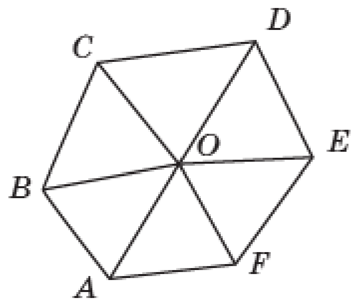


Рис. 20

IV. Задание на дом

1. Разобрать теорию (п. 28 учебника): выучить теоремы о сумме углов треугольника и выпуклого n-угольника.

2. Решить задачи.

1) Найдите углы треугольника, если они относятся как 2:3:5.

Ответ. 36°, 54°, 90°.

2) Найдите внутренний угол правильного двенадцатиугольника. Напишите формулу для определения внутреннего угла правильного n-угольника.

Ответ. 150°; $\frac{180°(n-2)}{n}$.

3) Сумма углов выпуклого n-угольника равна 1440°. Найдите n.

Ответ. 10.

4*) Найдите сумму углов произвольной пятиконечной звезды.

Ответ. На рисунке 21 изображена произвольная пятиконечная звезда, нужно найти сумму $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$.

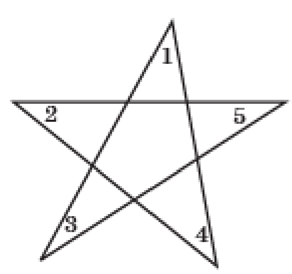


Рис. 21

Обозначим углы выпуклого пятиугольника 6, 7, 8, 9, 10. Тогда имеем: $\angle 1+\angle 4+\angle 10=180^o$, $\angle 2+\angle 5+\angle 6=180^o$, $\angle 1+\angle 3+\angle 7=180^o$, $\angle 2+\angle 4+\angle 8=180^o$, $\angle 3+\angle 5+\angle 9=180^o$. Значит $2(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5)+180^o\cdot 3=180^o\cdot 5$. Таким образом, $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=180^o$.

Урок 5

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаются шестеро учащихся для опроса по теории.

Задания 1, 3, 5

1. Формулировка, доказательство, следствия теоремы о сумме углов треугольника.

2. Найдите внутренний угол правильного десятиугольника.

Ответ. 144°.

Задания 2, 4, 6

1. Формулировка, доказательство теоремы о сумме углов выпуклого n-угольника.

2. Найдите внутренний угол правильного девятиугольника.

Ответ. 140°.

Четверо (шестеро) учащихся получают индивидуальные задания по карточкам для работы на местах.

Карточка

1) Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен $104_{\circ}$.

2) Найдите сумму углов выпуклого девятиугольника.

3) Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна 2160°. Найдите n.

Ответы. 1) 38°, 38°. 2) 1260°. 3) 14.

Задание для класса

1. Один острый угол прямоугольного треугольника составляет $\frac{2}{3}$ другого острого угла. Найдите все углы треугольника.

2. Найдите сумму внешних углов выпуклого n-угольника (берем по одному углу при каждой вершине).

3*. Докажите, что сумма внутренних углов невыпуклого n-угольника равна $180^{\circ}(n-2)$.

Ответы. **1.** 36°, 54°, 90°. **2.** 360°. **3*.** Нужно разбить многоугольник на треугольники диагоналями, которые выходят из вершин невыпуклых углов.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение домашней задачи 3 (см. этап IV урока 4).

Дополнительные вопросы

- Какая фигура называется треугольником?
- Какая фигура называется многоугольником?
- Как найти внутренний угол правильного многоугольника?

II. Устная работа

1) Могут ли любые три угла, сумма которых равна 180°, быть углами треугольника?

2) Могут ли две стороны треугольника быть перпендикулярными к третьей его стороне?

3) Какие углы образуются при пересечении двух медиан равностороннего треугольника?

4) Какой вид имеет треугольник, если один из его углов: а) равен сумме двух других углов; б) больше суммы двух других углов?

5) Найдите углы четырехугольника, если известно, что они пропорциональны числам 1, 2, 3 и 4.

6) Внутри угла, равного 70°, взята точка, из которой на стороны угла опущены перпендикуляры. Найдите углы образовавшегося четырехугольника.

Ответы. 1) Да. 2) Нет. 3) Два по 60° и два по 120°. 4) а) Прямоугольный; б) тупоугольный. 5) 36°, 72°, 108°, 144°. 6) 70°, 90°, 90°, 110°.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Разность двух односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, равна 38°. Найдите все углы.

2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен 36°?

3. Найдите геометрическое место: а) концов отрезков, идущих от данной прямой и делящихся в данной точке, не принадлежащей этой прямой, пополам; б) вершин треугольников, имеющих общую сторону и длину высоты, проведенной к этой стороне; в) центров окружностей, касающихся двух данных параллельных прямых.

4*. Докажите, что все углы, образованные сторонами и наименьшими диагоналями правильного n - угольника, кратны $\frac{180°}{n}$.

Ответы. **1.** 4 угла по 71° и 4 угла по 109°. **2.** 10. **3.** а) Прямая, параллельная данной прямой и отстоящая от нее на расстояние, вдвое большее, чем данная точка; б) две параллельные прямые, отстоящие от данной прямой на длину данной высоты; в) прямая, параллельная данным и отстоящая от них на расстояние, вдвое меньшее, чем расстояние между ними.

4*. Действительно, такие углы равны каждый $\frac{180° - \frac{180°(n-2)}{n}}{2} = \frac{180°}{n}$.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап IV урока 4).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 27, п. 28 учебника).

2. Решить задачи.

1) Две прямые касаются окружности в двух диаметрально противоположных точках. Определите взаимное расположение этих прямых?

Ответ. Параллельны.

2) Углы выпуклого четырехугольника относятся как 3:7:11:15. Найдите их.

Ответ. 30°, 70°, 110°, 150°.

3) Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, параллельна основанию.

Решение. На рисунке 22 AN – биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника ABC с основанием BC. Тогда $\angle ACB = \frac{180° - \angle BAC}{2}$ и $\angle NAC = \frac{180° - \angle BAC}{2}$. Таким образом, $\angle ACB = \angle NAC$, значит, внутренние накрест лежащие углы при прямых BC, MN и секущей AC равны. Следовательно, по признаку параллельных прямых $AN||BC$.

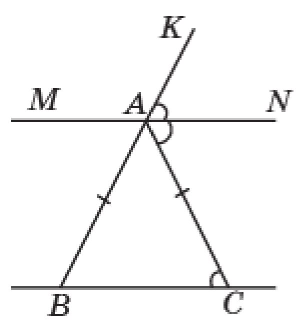


Рис. 22

4*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провели $CE||AB$ и $CE=AB$, $CF||AD$ и $CF=AD$ (рис. 23, а). Докажите, что углы при вершине C равны углам данного четырехугольника.

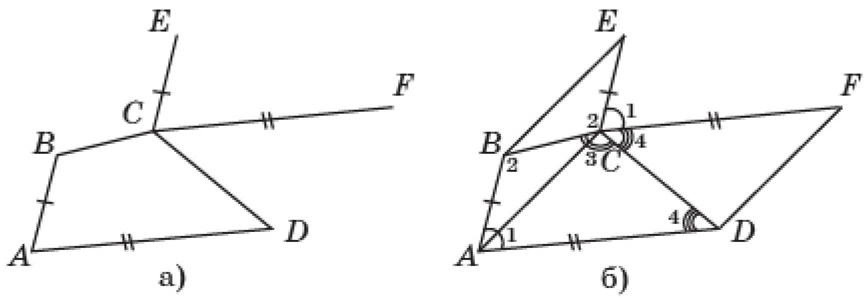


Рис. 23

Решение. См. рисунок 23, б.

5*) Даны две параллельные прямые a, b и точка M. Проведите через M прямую c таким образом, чтобы ее отрезок, заключенный между данными прямыми, равнялся k.

Решение. Пусть расстояние между данными прямыми меньше k. Берем произвольную точку $O \in a$, проводим окружность с центром в точке O и радиусом k, она пересечет прямую b в точках K и N. Проводим через M прямые, параллельные OK и ON, которые и будут искомыми. Если расстояние между данными параллельными прямыми: а) равно k, то одно решение – это прямая, проходящая через M и перпендикулярная данным прямым; б) больше k, то решения нет.

Урок 6

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Сумма двух внутренних углов из восьми углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равна 80°. Найдите каждый из восьми углов.

2. Угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей его основанию, равен 30°. Найдите угол между высотой, опущенной на боковую сторону треугольника, и его основанием.

3. Углы треугольника относятся как 2:3:4. Найдите углы данного треугольника и определите его вид.

4. В данном десятиугольнике все внутренние углы равны между собой. Найдите его внешний угол.

5*. Найдите геометрическое место таких точек, чтобы сумма их расстояний от двух данных параллельных прямых имела бы данную величину a.

Вариант 2

1. Сумма трех внутренних углов из восьми углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 290°. Найдите каждый из восьми углов.

2. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 65°. Найдите угол, образованный его боковой стороной и высотой, опущенной на другую боковую сторону.

3. Углы треугольника относятся как 3:2:1. Найдите углы данного треугольника и определите его вид.

4. Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если сумма его внутренних углов равна 2520°.

5*. Найдите геометрическое место таких точек, чтобы разность их расстояний от двух данных параллельных прямых имела бы данную величину b.

29. Параллелограмм
(уроки 7, 8)

Цель – сформировать понятие параллелограмма, рассмотреть его свойства, научиться применять их при решении задач.

Урок 7

I. Анализ контрольной работы № 1

II. Новый материал

Проведем две параллельные прямые a, b и две параллельные прямые c, d, секущие их (рис. 24), получили четырехугольник $ABCD$, который называется параллелограммом. Предлагаем учащимся определить это понятие.

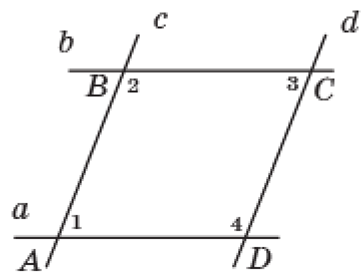


Рис. 24

Определение. ***Параллелограммом*** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Вопросы

- Чему равна сумма углов: а) $\angle 1+\angle 2$; б) $\angle 2+\angle 3$; в) $\angle 3+\angle 4$; г) $\angle 4+\angle 1$?
- Есть ли в параллелограмме равные: а) углы; б) стороны?

После обсуждения ответов на эти вопросы формулируем следующие свойства параллелограмма:

Свойство 1. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

Доказательство. Углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма, являются внутренними односторонними при двух параллельных прямых и секущей. Следовательно, их сумма равна 180°.

Свойство 2. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – параллелограмм (рис. 25). Диагональ AC разбивает его на два треугольника ABC и CDA, которые равны по второму признаку равенства треугольников (AC - общая сторона, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$, как внутренние накрест лежащие углы при соответственно параллельных прямых AD, BC, секущей AC и AB, CD, секущей AC). Поэтому $AB=CD$, $BC=AD$ и $\angle B=\angle D$. Кроме этого, $\angle A=\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4=\angle C$.

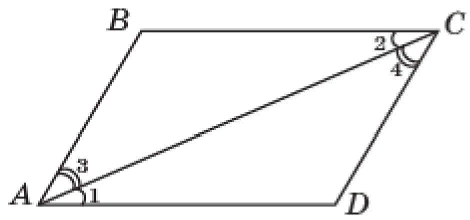


Рис. 25

Задания

1) У параллелограмма две стороны равны 17 см и 5,5 см. Чему равен периметр параллелограмма?

2) Один из углов параллелограмма равен 72°. Чему равны остальные его углы?

Ответы. 1) 45 см. 2) 72°, 108°, 108°.

Вопросы

- Сколько диагоналей у параллелограмма?
- На рисунке 26 *ABCD* – параллелограмм. Какие отрезки равны?

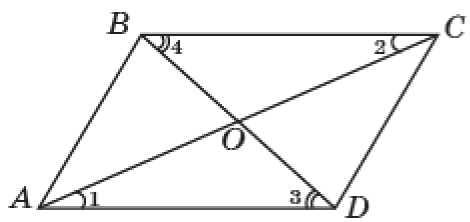


Рис. 26

- В каком отношении делятся диагонали параллелограмма точкой их пересечения?

После обсуждения ответов формулируем и доказываем соответствующее свойство параллелограмма.

Свойство 3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Пусть точка *O* – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD* параллелограмма *ABCD* (рис. 26). Треугольники *AOD* и *COB* равны по второму признаку равенства треугольников ($AD=BC$ по свойству 2, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$, как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому $AO=OC$ и $BO=OD$.

III. Закрепление нового материала

1. Два угла параллелограмма относятся друг к другу как 2:3. Найдите его углы.

2. Две стороны параллелограмма относятся как 5:11, его периметр равен 96 см. Найдите все стороны параллелограмма.

3. В параллелограмме $ABCD$ проведены отрезки BE и DF, где точки E и F – середины соответственно сторон AD и BC. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ – параллелограмм.

4*. В условиях предыдущей задачи 3 обозначим точки пересечения диагонали AC с BE и DF соответственно M и N. Определите, в каком отношении точки M и N делят диагональ AC.

Ответы. **1.** 2 угла по 36° и 2 угла по 144°. **2.** 2 стороны равны по 15 см и две стороны равны по 33 см. **3.** $ED||BF$, так как $AD||BC$; $\Delta BEF=\Delta DFE$ (по двум сторонам и углу между ними), откуда $\angle BEF=\angle DFE$, значит, $BE||DF$ (по признаку параллельности двух прямых), следовательно, $BEDF$ – параллелограмм по определению. **4*.** $AM=MN=NC$, так как $AM = \frac{2}{3}AO$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, $AO = CO$, $CN = \frac{2}{3}CO$, M и N – центроиды треугольников соответственно ABD и BCD.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 29 учебника): знать определение параллелограмма, уметь формулировать и доказывать его свойства.

2. Решить задачи.

1) Найдите углы параллелограмма, если: а) сумма двух из них равна 126°; б) один из его углов больше другого в 3 раза.

Ответ. а) 2 угла по 63° и 2 угла по 117°; б) 2 угла по 45° и 2 угла по 135°.

2) Как расположены биссектрисы углов параллелограмма: а) прилежащих к одной стороне; б) противолежащих друг другу (смежные стороны параллелограмма не равны)?

Ответ. а) Перпендикулярны; б) параллельны.

3) Найдите стороны параллелограмма, периметр которого равен 180 см, если: а) одна сторона на 15 см меньше другой; б) разность двух сторон равна 36 см.

Ответ. а) 2 стороны по 37,5 см и 2 стороны по 52,5 см; б) 2 стороны по 27 см и 2 стороны по 63 см.

4*) Постройте параллелограмм по стороне (a), сумме диагоналей (d) и углу (α) между ними.

Построение. Построим треугольник AOB, у которого $AB = a$, $\angle AOB = \alpha$ и $AO+BO = \frac{d}{2}$. Для этого строим треугольник ABK по $AB = a$, $\angle AKB = \frac{\alpha}{2}$ и $BK = \frac{d}{2}$. Через середину стороны BK восстанавливаем перпендикуляр до пересечения со стороной AK, точку пересечния называем O, ΔAOB – искомый. Теперь продолжаем его стороны AO и BO за вершину O и отложим соответственно равные им отрезки, получим соответственно точки C и D. Четырехугольник $ABCD$ - искомый параллелограмм.

Урок 8

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – приглашаем шестерых учащихся за первые парты.

Задания 1, 3, 5

1. Определение параллелограмма.
2. Свойство 1 (формулировка, доказательство).

Задания 2, 4, 6

1. Свойство 2 (формулировка, доказательство).
2. Свойство 3 (формулировка, доказательство).

Индивидуальные задания по карточкам выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Найдите углы параллелограмма, если известно, что один из них больше другого на 50°.

2) Две стороны параллелограмма относятся как 4:7. Найдите все его стороны, если его периметр равен 187 см.

Ответы. 1) 2 угла по 65° и 2 угла по 115°. 2) 2 стороны по 34 см и 2 стороны по 59,5 см.

Задание для класса

1. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 42° и 39°. Найдите углы параллелограмма.

2. В параллелограмме *ABCD* из вершины тупого угла *B* опущены перпендикуляры (высоты параллелограмма) *BE* и *BF* на стороны *AD* и *CD* соответственно. Его острый угол равен 72°. Найдите углы образовавшегося четырехугольника *BFDE*.

3. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что ее отрезок, заключенный между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.

4*. Постройте параллелограмм по двум диагоналям (d_1, d_2) и перпендикуляру (h), опущенному из вершины угла параллелограмма на его сторону (высоте параллелограмма).

Ответы. **1.** 2 угла по 81° и 2 угла по 99°. **2.** 72°, 90°, 90°, 108°. **3.** *Указание*. Следует из рассмотрения соответствующих равных треугольников. **4*.** *Построение*. Строим треугольник *AOD*, по двум сторонам $AO = \frac{d_1}{2}$, $DO = \frac{d_2}{2}$ и высоте $OH = \frac{h}{2}$ (строим отрезок $OH = \frac{h}{2}$, проводим через *H* прямую *a*, перпендикулярную *OH*, из точки *O*, как из центра, проводим две окружности радиусов $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_2}{2}$, точки их пересечения с прямой a обозначаем соответственно A и D), затем откладываем на прямых AO и DO (в одной полуплоскости относительно прямой a) соответственно отрезки OC и OB, равные им. Четырехугольник $ABCD$ – искомый параллелограмм.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$ и $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 2 из домашнего задания (см. этап IV урока 7).

Дополнительные вопросы

- Какие две прямые называются параллельными?
- В чем заключается признак параллельности двух прямых на плоскости?
- Какими свойствами обладает параллелограмм?

II. Устная работа

1) На рисунке 27 $ABCD$ – параллелограмм, $BE \parallel DF$. Какой фигурой является четырехугольник $BFDE$?

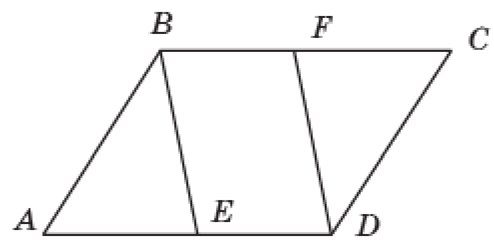


Рис. 27

2) На рисунке 28 $EFGH$ – параллелограмм, $EK \perp FH$, $GL \perp FH$. Какой фигурой является четырехугольник $EKGL$?

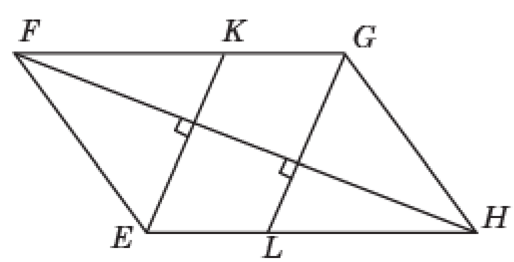


Рис. 28

3) Из двух противоположных вершин параллелограмма $KLMN$ (рис. 29) проведены биссектрисы KP и MR. Будет ли четырехугольник $KPMR$ параллелограммом?

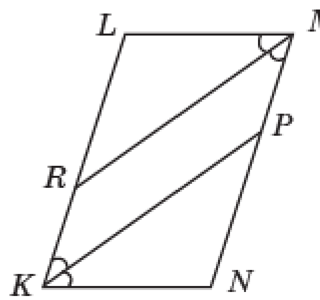


Рис. 29

4) Дан параллелограмм *TUVW* (рис. 30), *MN* – произвольный отрезок, проведенный через *O* – точку пересечения диагоналей параллелограмма. Найдите равные отрезки (не рассматривайте стороны и диагонали параллелограмма).

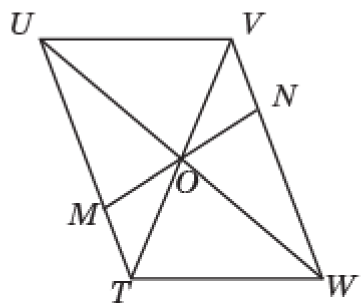


Рис. 30

5) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне (рис. 31). Как связаны между собой стороны данного параллелограмма?

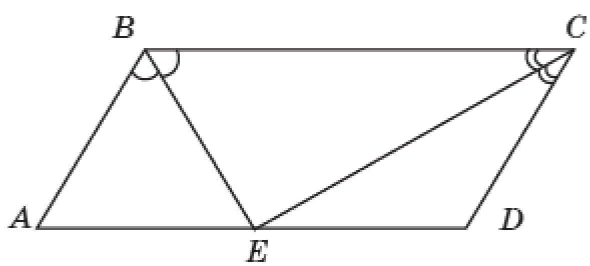


Рис. 31

Ответы. 1) Параллелограммом. 2) Параллелограммом. 3) Да. 4) $MO = NO$, $MU = NW$, $MT = NV$. 5) Одна сторона меньше своей смежной стороны в 2 раза.

III. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап IV урока 7).

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 29 учебника).

2. Решить задачи.

1) В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр (высота), опущенный из вершины B, делит сторону AD пополам. Найдите стороны данного параллелограмма, если его периметр равен 76 см и больше периметра треугольника BCD на 20 см.

Ответ. 2 стороны по 18 см и 2 стороны по 20 см.

2) Из точки, взятой на основании равнобедренного треугольника, проведены прямые, параллельные его боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника, если каждая боковая сторона равна 57 дм.

Ответ. 114 дм.

3) Постройте параллелограмм $ABCD$ по диагоналям $AC = d_1$, $BD = d_2$ и перпендикуляру $AH = h$, опущенному из вершины A на диагональ BD.

Построение. Строим прямоугольный треугольник AHO по гипотенузе $AO = \frac{d_1}{2}$ и катету $AH = h$. Продолжаем отрезок AO и строим отрезок $OC=AO$, продолжаем отрезок HO за точку O и строим отрезок $OD = \frac{d_2}{2}$, продолжаем отрезок OH за точку H и строим отрезок $OB = \frac{d_2}{2}$. $ABCD$ – искомый параллелограмм.

4*) Через точку, данную внутри угла, проведите отрезок с концами на сторонах угла, делящийся в этой точке пополам.

Построение. Пусть дан угол AOB и точка M внутри него (рис. 32).

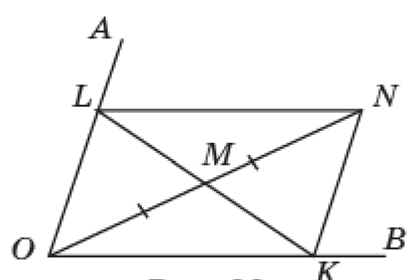


Рис. 32

Проводим луч OM и откладываем отрезок $MN = OM$. Через точку N проводим прямую, параллельную любой стороне угла, например, проводим $NK||OA$, где $K \in OB$. Проводим прямую KM, которая пересечет OA в точке L. KL – искомый отрезок, так как $KM = LM$, это следует из равенства треугольников KMN и LMO (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

30. Признаки параллелограмма (уроки 9, 10)

Цель – сформулировать и доказать два признака (достаточные условия) параллелограмма; научиться различать определение, свойства, признаки параллелограмма и применять их при решении задач.

Урок 9

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 100°, поэтому образовавшиеся тупые углы равны …

2. Четырехугольником называется …

3. Сумма углов параллелограмма равна …

4. В параллелограмме противоположные стороны …

5. Диагонали параллелограмма точкой пересечения …

6. Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми, при этом образовалось … параллелограммов.

Ответ. 9

Вариант 2

1. Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 200°, поэтому образовавшиеся острые углы равны …

2. Параллелограммом называется …

3. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна …

4. В параллелограмме противоположные углы …

5. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна …

6. К двум параллельным прямым проведены четыре общих перпендикуляра, при этом образовалось … параллелограммов.

Ответ. 6.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Построим две параллельные прямые a, b и на них отложим соответственно два равных отрезка AD и BC (рис. 33).

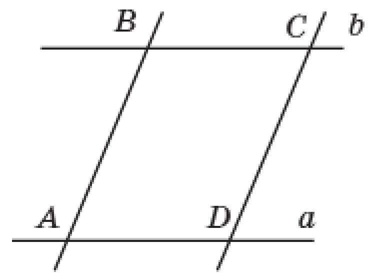


Рис. 33

Проведем секущие AB и CD, получим четырехугольник $ABCD$, у которого две противоположные стороны AD и BC равны и параллельны.

Вопросы

- Будет ли образовавшийся четырехугольник $ABCD$ являться параллелограммом?

- Всегда ли четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны и параллельны, является параллелограммом?

После обсуждения ответов на данные вопросы делаем соответствующее предположение и доказываем теорему.

Теорема. (Первый признак параллелограмма.) Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник - параллелограмм.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC равны и параллельны. Проведем диагональ AC (рис. 34).

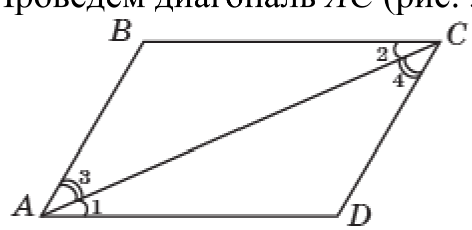


Рис. 34

Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников (AC – общая сторона, $AD = BC$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AD, BC и секущей AC). Отсюда следует, что $\angle 3 = \angle 4$, эти углы являются внутренними накрест лежащими углами при прямых AB, CD и секущей AC. Следовательно, прямые AB и CD параллельны. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны и $ABCD$ – параллелограмм.

Задания

1) В четырехугольнике $ABCD$ $AB=CD$ и $AB||CD$. Докажите, что $AD=BC$.

2) Сформулируйте утверждение, обратное следующему: «В параллелограмме противоположные стороны равны».

Замечание. Если в некоторой теореме условие сделать заключением, а заключение условием, то получится новая теорема, которая называется *обратной теоремой* по отношению к первой теореме.

После выполнения предложенных заданий формулируем и доказываем следующую теорему.

Теорема. (Второй признак параллелограмма.) Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник - параллелограмм.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ имеют место равенства $AB=CD$, $BC=AD$. Одна из диагоналей разбивает его на два треугольника. Пусть, например, это диагональ AC (рис. 35).

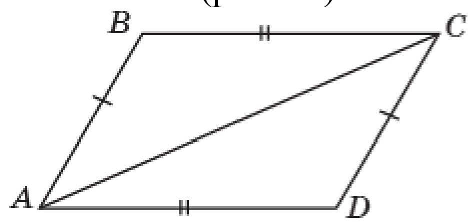


Рис. 35

Тогда треугольники ABC и CDA равны (по третьему признаку равенства треугольников, по сторонам). Следовательно, $\angle CAB = \angle ACD$ и, значит, прямые AB и CD параллельны. Аналогично, $\angle ACB = \angle CAD$ и, значит, прямые BC и AD параллельны. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны, и $ABCD$ – параллелограмм.

IV. Закрепление нового материала

1. В параллелограмме $ABCD$ точка E - середина стороны BC, а F - середина стороны AD. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ - параллелограмм, опираясь на: а) определение параллелограмма; б) первый признак параллелограмма; в) второй признак параллелограмма.

2. На рисунке 36 схематично изображен шлагбаум на железнодорожном переезде, к которому в точках K и L прикреплены равные стержни KN и LM, шарнирно соединенные с брусом шлагбаума в точках K и L.

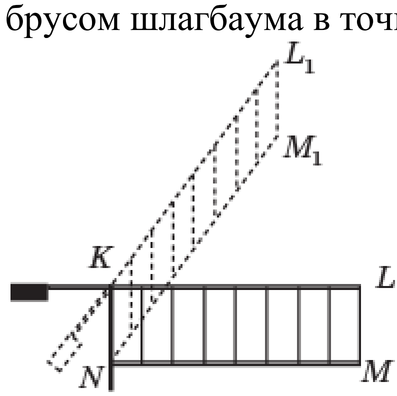


Рис. 36

В точках M и N шарнирно прикреплен стержень $MN=KL$. Объясните, почему во всех положениях шлагбаума $MN||KL$.

3. На продолжении противоположных сторон параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AE, CF (рис. 37) и проведены отрезки BE, DF. Докажите, что полученный четырехугольник $BEDF$ – параллелограмм, используя; а) первый признак параллелограмма; б) второй признак параллелограмма.

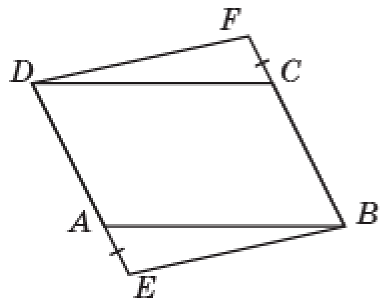


Рис. 37

4*. Постройте параллелограмм по двум диагоналям d_1, d_2 и стороне a.

Построение. Строим треугольник AOB по трем сторонам $AB=a$, $AO=\frac{d_1}{2}$, $BO=\frac{d_2}{2}$. Продолжаем стороны AO и BO за вершину O и откладываем соответствующие отрезки $OC=AO$, $OD=BO$. $ABCD$ – искомый параллелограмм.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 30 учебника): формулировки и доказательства первого и второго признаков параллелограмма.

2. Решить задачи.

1) На рисунке 38 четырехугольник $EFGH$ - параллелограмм, $EU=GV$. Докажите, что точки F, V, H, U являются вершинами параллелограмма.

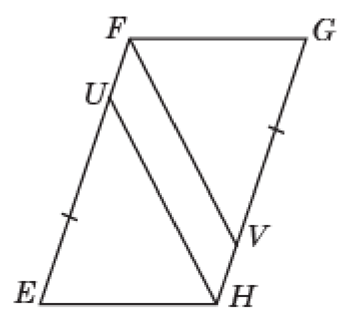


Рис. 38

2) Дан параллелограмм *ABCD* (рис. 39). *E*, *F*, *G*, *H* – середины его сторон. Будет ли четырехугольник *EFGH* параллелограммом? Почему?

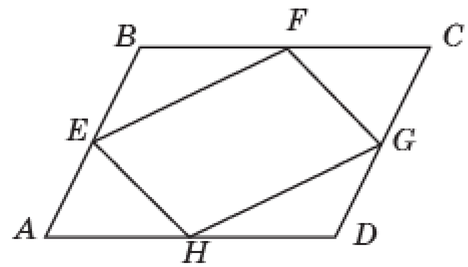


Рис. 39

3) Докажите, что прямая, на которой лежит биссектриса внешнего угла параллелограмма, вместе с его сторонами (или их продолжениями), не проходящими через вершину этого угла, образуют равнобедренный треугольник, сумма боковых сторон которого равна периметру параллелограмма.

Решение. См. рисунок 40, где *DE* – биссектриса внешнего угла при вершине *D* параллелограмма *ABCD*.

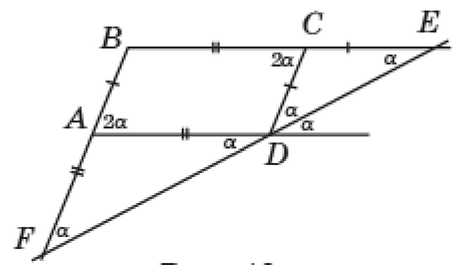


Рис. 40

4*) Биссектрисы углов параллелограмма *ABCD* (рис. 41) пересекают его стороны в точках *K*, *L*, *M* и *N*. Определите вид четырехугольника *KLMN*.

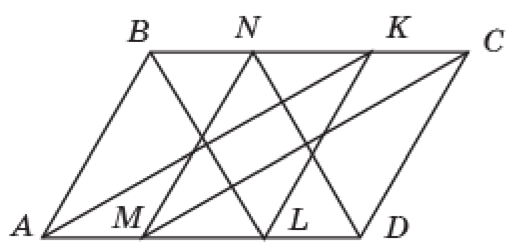


Рис. 41

Решение. Поскольку биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны (задача 2 этапа IV урока 7), четырехугольники *AKCM* и *BNDL* – параллелограммы, значит, *AM*=*CK*, *BN*=*DL*, *ML*=*AD* – (*AM*+*DL*) = *BC* – (*CK*+*BN*) = *KN*. Следовательно, *KLMN* – параллелограмм (по первому признаку параллелограмма).

Урок 10

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаются шестеро учащихся – опрос по теории.

Задания 1, 3, 5

1. Определение параллельных прямых.
2. Первый признак параллелограмма (формулировка, доказательство).

Задания 2, 4, 6

1. Определение параллелограмма.
2. Второй признак параллелограмма (формулировка, доказательство).

Несколько человек (4-6) получают индивидуальные задания по карточкам для работы на своих местах.

Карточка

1) В четырехугольнике $EFGH$ $\angle GEF = \angle EGH$ и $\angle GEH = \angle EGF$. Докажите, что данный четырехугольник является параллелограммом.

2) В параллелограмме $KLMN$ на равных сторонах отложены равные отрезки KP и MH. Докажите, что четырехугольник $LHNP$ является параллелограммом.

Задание для класса

1. Диагонали выпуклого четырехугольника в точке пересечения делятся пополам. Докажите, что данный четырехугольник является параллелограммом. Можно ли это утверждение принять за третий признак параллелограмма?

2. Дан параллелограмм $CDEF$, у которого O – точка пересечения его диагоналей. Точки P, Q, R, S – середины соответственно отрезков CO, DO, EO, FO. Докажите, что четырехугольник $PQRS$ является параллелограммом.

3. На прямой a дан отрезок AB и дана точка M, не принадлежащая прямой a. Постройте параллелограмм, у которого отрезок AB является одной из его сторон, а другая сторона в точке M делится пополам.

4*. Разделите данный отрезок пополам с помощью линейки без делений, ширина которой меньше длины отрезка.

Ответы. **1.** Да, можно. **3.** *Построение*. Через точку M проводим прямую, параллельную a, и на ней откладываем отрезки $MC = MD = \frac{AB}{2}$. Четырехугольник $ACDB$ – искомый параллелограмм. **4*.** Через концы отрезка нужно провести две пары параллельных прямых (рис. 42), которые образуют параллелограмм. Точка пересечения его диагоналей разделит данный отрезок пополам.

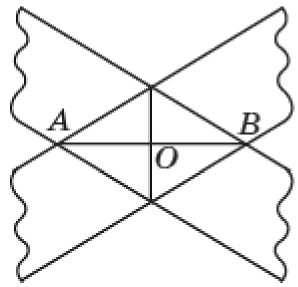


Рис. 42

К доске вызываем трех учащихся (У$_1$, У$_2$, У$_3$).

У$_1$ – решает вместе с классом задачу 1.

У$_2$ – самостоятельно решает классную задачу 2.

У$_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашней работы (см. этап V урока 9).

Дополнительные вопросы

- Какой четырехугольник называется параллелограммом?
- В чем заключается признак параллельности двух прямых?
- Назовите свойства параллелограмма?

II. Устная работа

1) Могут ли два различных параллелограмма иметь по равной стороне и по равной диагонали?

2) Почему одна диагональ параллелограмма всегда больше другой?

3) Могут ли углы треугольника быть равными трем углам какого-нибудь параллелограмма?

4) Сумма двух углов параллелограмма равна 156^o. Найдите его углы.

5) Можно ли параллелограмм разрезать на: а) 4 равных параллелограмма; б) 5 равных параллелограммов; в) 4 равных треугольника; г) 6 равных треугольников?

Ответы. 1) Да. 2) На основании следующей теоремы: «Если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника, а третьи стороны не равны, то та из них больше, которая лежит против большего угла». 3) Нет. 4) 2 угла по 78^o и 2 угла по 102^o. 5) а), б) в), г) Да, см. соответственно рисунки 43, а, б, в, г.

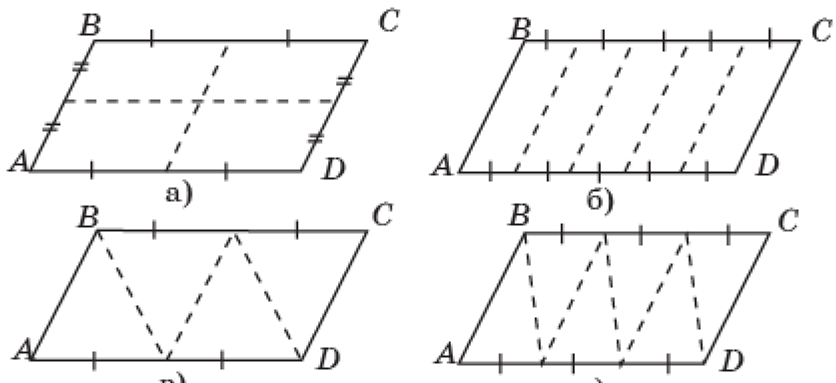


Рис. 43

III. Занимательный момент урока

Решение задач 4* из домашних работ уроков 8 и 9 (см. этап IV урока 8 и этап V урока 9).

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 30 учебника).

2. Решить задачи.

1) В параллелограмме биссектриса одного из его углов делит противоположную сторону на отрезки, равные 5 см и 1,5 дм. Найдите периметр данного параллелограмма.

Ответ. 5 дм или 7 дм.

2) В параллелограмме *ABCD* из вершин тупых углов *B* и *D* опущены перпендикуляры *BE* и *DF* на диагональ *AC*. Докажите, что четырехугольник *BFDE* является параллелограммом, используя: а) первый признак параллелограмма; б) второй признак параллелограмма.

3) Восстановите параллелограмм по трем точкам – серединам его сторон.

Решение. Пусть надо восстановить параллелограмм *ABCD* по серединам *E*, *F*, *G* его сторон соответственно *AB*, *BC*, *CD*. Проводим отрезок *EG*, делим его пополам, проводим через точку *F* прямую, параллельную *EG*, и откладываем на ней от точки *F* два равных отрезка *FB* и *FC*, каждый из которых равен половине отрезка *EG*. Проводим прямые *BE* и *CG*, на которых откладываем отрезки *EA*=*EB* и *GD*=*GC*. *ABCD* – искомый параллелограмм.

4*) Наибольшее число прямых, которое провели через *n* точек равно 45. Найдите число точек.

Решение. Наибольшее число прямых, которые можно провести через *n* точек, равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит, в данном случае $n(n\text{-}1) = 90$. Два последовательных натуральных числа, произведение которых равно 90. равны 10 и 9. Таким образом, нужно взять 10 точек, никакие три из которых не принаждежат одной прямой.

31. Прямоугольник, ромб, квадрат (уроки 11, 12, 13)

Цель – сформировать понятия прямоугольника, ромба, квадрата, в неявном виде указывая род и видовой признак, дать соответсnвующую классификацию параллелограммов; сформулировать и доказать теоремы – признаки прямоугольника и ромба; научиться применять их при решении задач.

Урок 11

I. Устная работа

1) Существует ли параллелограмм, у которого сторона и диагонали равны соответственно: а) 6 см, 10 см, 18 см; б) 3 дм, 8 см, 2,4 дм?

2) Даны два равных и параллельных отрезка. Их концы соединены непересекающимися отрезками. Верно ли, что получившийся четырехугольник является параллелограммом? Почему?

3) Является ли равенство двух противоположных углов четырехугольника признаком параллелограмма?

4) Две стороны четырехугольника параллельны, а две другие равны. Верно ли утверждение о том, что этот четырехугольник является параллелограммом?

5) В параллелограмме один угол прямой. Найдите остальные его углы.

6) Всегда ли параллелограмм является выпуклой фигурой?

Ответы. 1) а) Да; б) нет. 2) Да. 3) Нет. 4) Нет. 5) Каждый из углов равен $90_{\circ}$. 6) Да.

II. Новый материал

Изобразим параллелограмм *ABCD*, у которого все углы прямые.

Вопрос

- Как называется такой параллелограмм?

После обсуждения ответа даем определение.

Определение. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется ***прямоугольником***.

Замечание. Параллелограмм общего типа будем называть просто параллелограммом.

Вопросы

- Обладает ли прямоугольник всеми свойствами параллелограмма? Почему?

- Перечислите свойства параллелограмма?

- Как вы думаете, какими дополнительными свойствами обладает прямоугольник по сравнению с параллелограммом?

Свойство прямоугольника. Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство. Пусть дан прямоугольник *ABCD*. Рассмотрим прямоугольные треугольники *ABC* и *BAD*. Они равны по двум катетам, следовательно, их гипотенузы *BD* и *AC* тоже равны. Таким образом, диагонали прямоугольника равны.

Задания

- В четырехугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *BD* равны. Будет ли данный четырехугольник параллелограммом; б) прямоугольником?

- В параллелограмме *ABCD* диагонали *AC* и *BD* равны. Будет ли он прямоугольником?

После решения формулируем и доказываем теорему – признак прямоугольника.

Теорема (Признак прямоугольника.) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Доказательство. Пусть *ABCD* – параллелограмм и *AC* = *BD* (рис. 44, а). Тогда треугольники *ABC* и *BAD* равны (по третьему признаку равенства треугольников, по сторонам, так как *AB* – общая сторона, *AC*=*BD*, *BC*=*AD*). Следовательно, $\angle ABC=\angle BAD$. Но эти углы в сумме составляют 180º. Значит, каждый из них равен 90º. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то и остальные его углы также равны 90º. Таким образом, *ABCD* – прямоугольник (рис. 44, б).

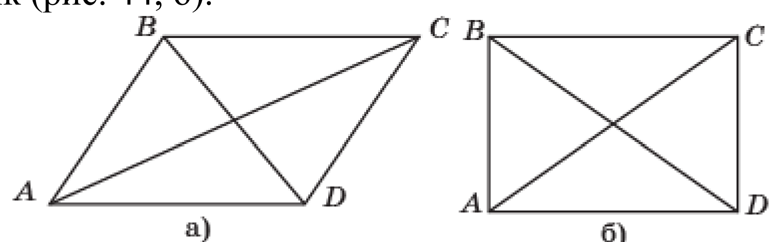


Рис. 44

Вопросы

- Будет ли четырехугольник прямоугольником, если его диагонали равны?

Ответ. Не обязательно, см. рисунок 45, где *AC*=*BD*, но *ABCD* не является прямоугольником.

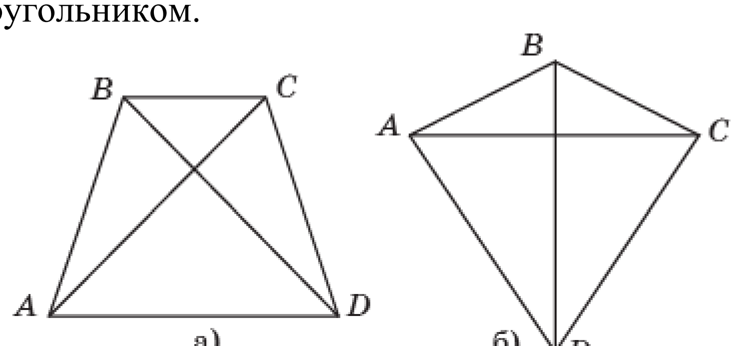


Рис. 45

- Как изменить предыдущий вопрос, чтобы в ответе был всегда прямоугольник?

Ответ. Слово «четырехугольник» заменить на слово «параллелограмм».

Задание

Изобразите параллелограмм $ABCD$, у которого смежные стороны равны, $AB=AD$. Как называется такой четырехугольник?

Даем определение.

Определение. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ***ромбом***.

Конечно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Выясним, а какими дополнительными свойствами обладает ромб.

Свойства ромба. Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Доказательство. Пусть дан ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Рассмотрим треугольник ABC, он равнобедренный, так как $AB=BC$, BO – его медиана, проведенная к основанию AC, следовательно, высота и биссектриса. Аналогично, рассматривая равнобедренные треугольники ABD, BCD, ADC, докажем, что AO, CO, DO являются биссектрисами соответствующих углов ромба. Таким образом, диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

III. Закрепление нового материала

1. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см, диагонали пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали прямоугольника.

2. Верно ли утверждение о том, что если в четырехугольнике один угол прямой, а диагонали равны, то он является прямоугольником?

3. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4:5. Найдите углы ромба.

4*. Постройте прямоугольник по стороне a и сумме диагоналей.

Ответы. **1.** 10 см. **2.** Нет. **3.** 2 угла по 80° и 2 угла по 100°. **4*.** *Построение*. Обозначим сумму двух диагоналей через $2d$ и построим равнобедренный треугольник AOB по трем сторонам $AB = a$, $AO = BO = \frac{d}{2}$. Затем продолжим отрезки AO и BO и отложим соответственно равные отрезки $OC=AO$ и $OD=BO$. $ABCD$ – искомый прямоугольник.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 31 учебника): определения прямоугольника и ромба, формулировку и доказательство теоремы – признака прямоугольника, свойства прямоугольника и ромба.

2. Решить задачи.

1) Найдите диагонали прямоугольника, если его периметр равен 34 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 30 см.

Ответ. 13 см и 13 см.

2) В прямоугольнике острый угол между его диагоналями равен $50°$. Найдите углы, которые образуют диагонали со сторонами прямоугольника.

Ответ. 65^{o} и 25^{o}.

3) Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.

4*) Постройте прямоугольник по стороне a и сумме другой стороны с диагональю $b+d$.

Построение. Построим прямой угол с вершиной A, отложим на его сторонах отрезки $AB=a$ и $AE=b+d$. Проведем отрезок BE и найдем его середину – точку M, через M проведем прямую, перпендикулярную BE, точку ее пересечения с AE назовем D. Из D восстановим перпендикуляр к AE и отложим на нем $DC=a$, причем AB и DC находятся в одной полуплоскости относительно AE. $ABCD$ – искомый прямоугольник.

Урок 12

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Параллелограммом называется…
2. В параллелограмме противоположные стороны … и противоположные углы …
3. Прямоугольником называется …
4. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется …
5. Первый признак параллелограмма заключается в том, что …
6. Признак прямоугольника заключается в том, что …

Вариант 2

1. Четырехугольник называется параллелограммом, если…
2. В параллелограмме диагонали в точке пересечения …
3. Ромбом называется …
4. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется …
5. Второй признак параллелограмма заключается в том, что …
6. Если в параллелограмме равны диагонали, то …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Вопрос

- Могут ли в параллелограмме диагонали быть перпендикулярными?

Попробуем изобразить такой параллелограмм.

Затем формулируем и доказываем следующую теорему.

Теорема. (Признак ромба.) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, диагонали AC и BD перпендикулярны, O – точка их пересечения (рис. 46).

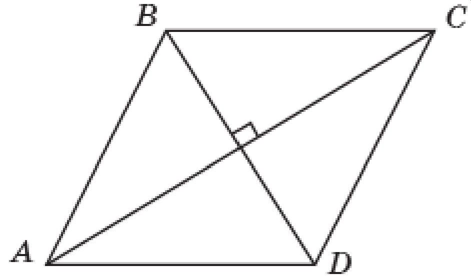


Рис. 46

Тогда прямоугольные треугольники AOB и AOD равны (по двум катетам: AO – общий, $OB=OD$). Следовательно, $AB=AD$. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то и остальные его стороны равны. Таким образом, $ABCD$ – ромб.

Вопросы

- Могут ли в прямоугольнике все стороны быть равными?
- Могут ли в ромбе быть прямые углы?
- Могут ли в параллелограмме все стороны быть равными и все углы быть равными?

Изобразим эти ситуации.

- Какая фигура получилась? Как она называется?

Дадим определения квадрата через понятие прямоугольника и через понятие ромба.

Определение. Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется ***квадратом***.

Определение. Ромб, у которого все углы прямые, называется ***квадратом***.

Конечно, квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Подводя общий итог, систематизируя рассмотренные четырехугольники, можно предложить учащимся соответствующую диаграмму (рис. 47).

Рис. 47

Таким образом, все указанные фигуры обладают свойствами параллелограмма, прямоугольник и ромб обладают своими дополнительными свойствами. Квадрат имеет все свойства и параллелограмма, и дополнительные свойства прямоугольника и ромба.

IV. Закрепление нового материала

1. Докажите, что если у выпуклого четырехугольника все стороны равны, то он является ромбом.

2. Постройте ромб по двум диагоналям d_1 и d_2.

3. Дайте определение квадрата через понятие параллелограмма.

4. Из листа фанеры выпилили квадрат. Как проверить, что полученный четырехугольник действительно является квадратом?

5*. Для того чтобы проверить, имеет ли салфетка форму квадрата, поступили следующим образом: перегнули ее по каждой диагонали, в обоих случаях треугольники совместились. Верно ли при этом утверждение о том, что салфетка имеет форму квадрата?

Ответы. **1.** Во-первых, он является параллелограммом (второй признак параллелограмма), во-вторых, ромбом по определению. **2.** Строим прямоугольный треугольник AOB по катетам $AO = \frac{d_1}{2}$ и $BO = \frac{d_2}{2}$, затем продолжаем катеты AO и BO за вершину O на отрезки $OC=OA$ и $OD=OB$. $ABCD$ – искомый ромб. **3.** *Определение*. Параллелограмм, у которого равны все стороны и один из углов прямой, называется ***квадратом***. **4.** Например, убедиться, что его диагонали равны и перпендикулярны. **5*.** Нет, этого недостаточно.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап IV урока 11).

VI. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 31 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте ромб по его стороне a и диагонали d.

Указание. Сначала постройте треугольник по трем сторонам, равным a, a и d.

2) Найдите угол между: а) диагоналями квадрата: б) диагональю и стороной квадрата.

Ответ. а) 90°; б) 45°.

3) Сформулируйте какой-нибудь признак квадрата.

Ответ. Если в параллелограмме диагонали равны и перпендикулярны, то он является квадратом.

4) На сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$ (рис. 48).

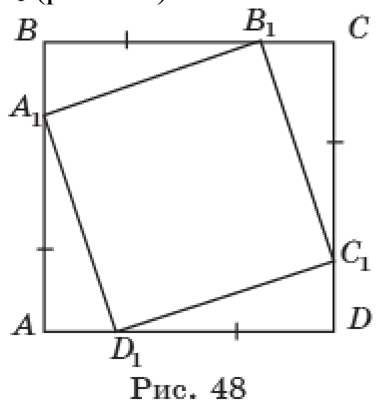


Рис. 48

Определите вид четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

Ответ. Квадрат.

5*) Определите вид четырехугольника, который образуют при пересечении биссектрисы углов параллелограмма.

Решение. Прямоугольник. Обратимся к рисунку 49, $ABCD$ – параллелограмм, биссектрисы его углов $AE||CG$ и $BF||DH$ (задача 2 этапа IV урока 7), следовательно, четырехугольник $KLMN$ является параллелограммом. Кроме этого, у него все углы прямые, например, $\angle KLM = \angle ALB = 90^o$. Значит, $KLMN$ – прямоугольник.

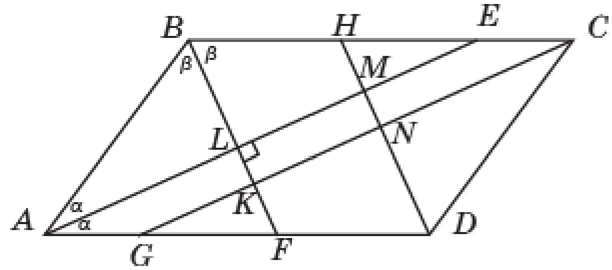


Рис. 49

Урок 13

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаются шестеро учащихся – опрос по теории.

Задания 1, 3, 5

1. Определение прямоугольника.
2. Определение квадрата через понятие ромба.
3. Признак ромба (формулировка, доказательство).

Задания 2, 4, 6

1. Определение ромба.
2. Определение квадрата через понятие прямоугольника.
3. Признак прямоугольника (формулировка, доказательство).

Несколько человек (4-6) получают индивидуальные задания по карточкам для работы на своих местах.

Карточка

1) В ромбе одна из диагоналей равна его стороне. Найдите углы ромба.

2) Через середину гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные его катетам. Определите вид получившегося четырехугольника и найдите его периметр, если один из катетов треугольника равен 9 см.

Ответы. 1) 2 угла по 60° и 2 угла по 120°. 2) Квадрат, 18 см.

Задание для класса

1. В ромбе одна из диагоналей равна его стороне. Найдите углы, образованные диагоналями ромба с его сторонами.

2. Два равных равносторонних треугольника приложены один к другому сторонами таким образом, что эти стороны совместились. Определите вид полученного четырехугольника.

3. В квадрате $ABCD$ диагональ BD разделена на три равные части точками E и F, считая от вершины B. Определите вид четырехугольника $AECF$.

4*. Докажите, что если в шестиугольнике ($ABCDEF$) противоположные стороны равны и параллельны, то три его диагонали (AD, BE, CF) пересекаются в одной точке.

Ответы. **1.** 30°, 60°. **2.** Ромб. **3.** Ромб. **4*.** На рисунке 50 изображен шестиугольник $ABCDEF$, у которого противоположные стороны AF и CD, AB и DE, BC и EF равны и параллельны. Тогда четырехугольники $ACDF$ и $ABDE$

– параллелограммы (по первому признаку параллелограмма), значит, AD и CF, AD и BE в точке пересечения делятся пополам. Таким образом, AD, CF и BE пересекаются в одной точке.

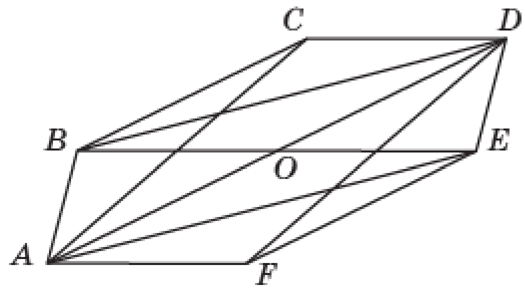


Рис. 50

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – решает вместе с классом задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно решает классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 4 из домашней работы (см. этап VI урока 12).

Дополнительные вопросы

- Определение ромба.
- Определение параллелограмма.
- Определение прямоугольника.

II. Устная работа

1) Существует ли на плоскости точка, которая была бы одинаково удалена от: а) вершин; б) сторон прямоугольника?

2) Где на прямоугольном дачном участке нужно поставить столб для фонаря, чтобы все его углы были одинаково освещены?

3) В прямоугольной стальной пластине надо просверлить отверстие, одинаково удаленное от равных сторон прямоугольника. В каком месте нужно наметить центр отверстия?

4) Как проверить, будет ли ромбом четырехугольник, вырезанный из: а) картона; б) материи?

5) Может ли диагональ ромба равняться его удвоенной стороне?

6) Равны ли два: а) ромба; б) прямоугольника; в) квадрата, если их соответственные диагонали равны.

7) Могут ли прямоугольник и квадрат иметь равные периметры?

8) Как иначе назвать следующие фигуры: а) равносторонний четырехугольник; б) равноугольный четырехугольник; в) прямоугольный параллелограмм; г) прямоугольный ромб?

Ответы. 1) а) Да, это точка пересечения его диагоналей; б) нет. 2) В точке пересечения диагоналей данного прямоугольника. 3) Центр отверстия будет находиться в любой точке отрезка, соединяющего середины двух других сторон данного прямоугольника. 4) а) Нужно измерить все его стороны: если они равны, то данный четырехугольник является ромбом; б) нужно перегнуть его по одной диагонали и затем по другой: если противоположные вершины совместятся, то вырезанный четырехугольник будет ромбом. 5) Нет. 6) а) Да; б) нет; в) да. 7) Да. 8) а) Ромб; б), в) прямоугольник; г) квадрат.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Докажите, что если в четырехугольнике диагонали равны между собой и являются биссектрисами углов четырехугольника, то он является квадратом.

2. Из вершины прямоугольника на его диагональ опущен перпендикуляр, основание которого делит ее в отношении 1:3. Точка пересечения диагоналей находится от большей стороны прямоугольника на расстоянии 12 см. Найдите диагонали прямоугольника.

3*. Постройте прямоугольник по стороне a и углу $\boldsymbol{\alpha}$ между диагоналями.

Вариант 2

1. Докажите, что если в четырехугольнике обе диагонали являются биссектрисами его углов, то четырехугольник является ромбом.

2. В прямоугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на части в отношении 1:3. Найдите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю данного прямоугольника.

3*. Постройте ромб по углу $\boldsymbol{\alpha}$ и диагонали d, проходящей через вершину этого угла

Ответы. *Вариант 1*. 2. 48 см и 48 см. 3*. *Указание*. Постройте сначала треугольник AOB по стороне $AB=a$ и углам ABO и BAO, каждый из которых равен $\frac{180°-\alpha}{2}$. *Вариант 2*. 2. 45°. 3*. *Указание*. Постройте сначала треугольник ABD по стороне $BD=d$ и двум углам ABD и ADB, каждый из которых равен $\frac{\alpha}{2}$.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 31 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных их точки пересечения диагоналей ромба на его стороны, являются вершинами прямоугольника.

Указание. Воспользуйтесь признаком прямоугольника.

2) В прямоугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны BC, отрезки EA и ED перпендикулярны. Найдите стороны данного прямоугольника, если его периметр равен 108 см.

Ответ. 2 стороны по 18 см и 2 стороны по 36 см.

3) Постройте квадрат по его диагонали d. Предложите несколько способов построения.

Указание. *1-й способ*. Сначала постройте прямоугольный треугольник AOB по двум катетам $AO = BO = \frac{d}{2}$. *2-й способ*. Постройте два перпендикулярных отрезка, равных каждый d и пересекающихся в своих серединах. *3-й способ*. Постройте прямоугольный треугольник ABD по гипотенузе $BD = a$ и острому углу в 45°.

4*) На сторонах параллелограмма, вне его, построены квадраты. Какой четырехугольник образуют центры этих квадратов?

Решение. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм. P, Q, R, S – центры соответствующих квадратов (рис. 51).

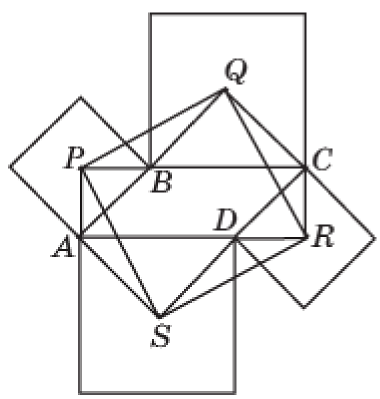


Рис. 51

Треугольники APS, BPQ, CQR, DRS равны, так как $AP=BP=CR=DR$; $AS=BQ=CQ=DS$ и $\angle PAS=\angle PBQ=\angle QCR=\angle RDS$. Стороны PQ, QR, RS и SP лежат в этих треугольниках против равных углов и, следовательно, равны. Кроме этого, $\angle PQR=\angle BQC+\angle PQB-\angle RQC=\angle BQC=90°$. Аналогично $\angle QRS=\angle RSP=\angle SPQ=90°$. Таким образом, центры квадратов сами образуют квадрат $PQRS$.

32. Средняя линия треугольника
(уроки 14, 15)

Цель – сформировать понятие средней линии треугольника, изучить ее свойства, научиться применять их при решении задач.

Урок 14

I. Устная работа

1) Может ли треугольник быть невыпуклым?

2) Где расположена точка пересечения высот прямоугольного треугольника?

3) Периметр треугольника равен 54 см. Его стороны относятся как 2:3:4. Найдите его стороны.

4) Периметр равнобедренного треугольника равен 40 см, боковая сторона составляет $\frac{3}{8}$ периметра. Найдите основание треугольника.

5) Может ли проходить вне треугольника его: а) медиана; б) биссектриса; в) высота?

6) По рисунку 52 найдите сумму углов 1 и 2, 3 и 4, если $\angle 5 = 55^{\circ}$.

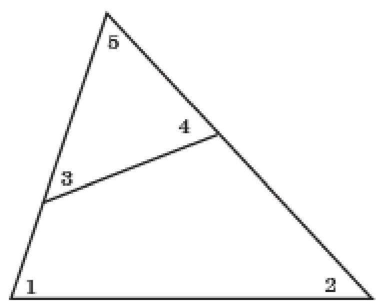


Рис. 52

7) Определите вид треугольника, у которого: а) один угол равен сумме двух других углов; б) один угол больше суммы двух других; в) больший угол меньше суммы двух других углов.

8) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен 30°. Определите острые углы данного треугольника.

Ответы. 1) Нет. 2) В вершине прямого угла. 3) 12 см, 18 см, 24 см. 4) 10 см. 5) а), б) Нет; в) да. 6) 125°. 7) а) Прямоугольный; б) тупоугольный; в) остроугольный. 8) 15°, 75°.

II. Новый материал

Изобразим треугольник ABC (рис. 53), найдем середины M и N его сторон соответственно AB и BC. Отрезок MN является средней линией треугольника ABC.

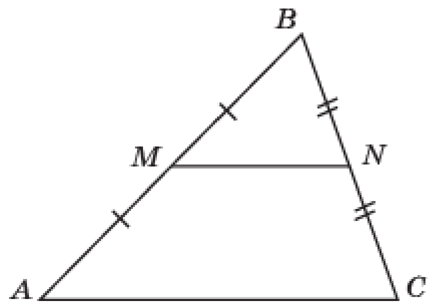


Рис. 53

Вопросы

- Как определить среднюю линию треугольника?
- Сколько средних линий у треугольника?

Определение. ***Средней линией*** треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

- Какими свойствами обладает средняя линия треугольника? Выскажите предположение. Например, как на рисунке 53 средняя линия MN треугольника ABC расположена относительно его стороны AC?

Задание

Измерьте в треугольнике ABC сторону AC и среднюю линию MN. Как связаны их длины? Выскажите предположение.

После этого формулируем и доказываем теорему о свойствах средней линии треугольника.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине.

Доказательство. Пусть DE – средняя линия треугольника ABC (рис. 54).

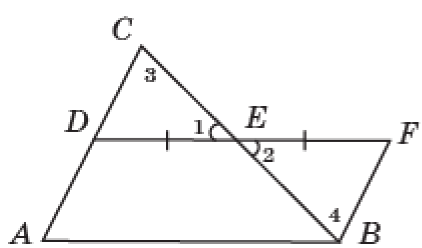


Рис. 54

Докажем, что DE параллельна стороне AB и равна ее половине. Для этого отложим на прямой DE отрезок EF=DE и соединим отрезком точки B и F.

Треугольники ECD и EBF равны по первому признаку равенства треугольников ($CE=BE$ по условию, $DE=FE$ по построению, $\angle 1 = \angle 2$, как вертикальные). Следовательно, $BF=CD$ и, значит, $BF=AD$. Угол 3 равен углу 4, и, значит, прямые AC и BF параллельны. Таким образом, по признаку параллелограмма четырехугольник $ABFD$ – параллелограмм. Итак, сторона AB параллельна и равна стороне DF. Средняя линия DE равна половине DF и, следовательно, половине AB.

III. Закрепление нового материала

1. Периметр равностороннего треугольника равен 132 см. Найдите его среднюю линию.

2. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. Предложите два способа решения.

3. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

4*. Одна из вершин треугольника не уместилась на рисунке. Постройте его медианы или их части.

Ответы. **1.** 22 см. **2.** 15 см. **3.** *Указание*. Проведите в четырехугольнике диагональ и рассмотрите среднии линии получившихся треугольников, параллельных ей. **4*.** *Построение*. Решение показано на рисунке 55.

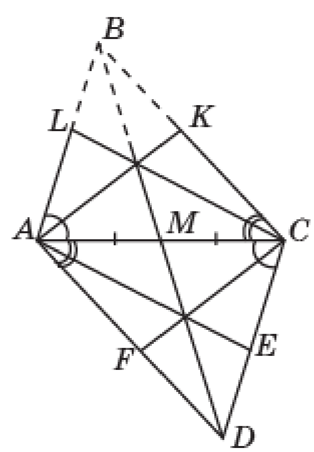


Рис. 55

Вершина B треугольника ABC не уместилась на нем. Точка M – середина стороны AC. Из точек A и C проведем прямые, параллельные соответственно CB и AB, D – точка их пересечения. Треугольники ADC и CBA равны ($ABCD$ – параллелограмм, AC - его диагональ). Проводим медианы AE, CF и DM треугольника ADC. Медианы данного треугольника $AK||CF$, $CL||AE$, BM является продолжением DM.

IV. Занимательный момент

Решение задач 5* и 4* из домашних работ уроков соответственно 12 и 13 (см. этап VI урока 12 и этап V урока 13).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 32 учебника).

2. Решить задачи.

1) Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.

Ответ. 6 см, 5 см, 5 см.

2) Докажите, что каждый треугольник можно разрезать на две части, из которых можно составить параллелограмм.

Указание. Разрежьте по средней линии треугольника.

3) У данного четырехугольника диагонали равны d_1 и d_2. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четрехугольника.

Ответ. d_1+d_2.

4*) Постройте прямоугольный треугольник по катету a и разности острых углов $\beta - \alpha$.

Построение. Сначала строим прямоугольный треугольник BCD по катету и острому углу, $\angle C = 90^\circ$, $CB = a$ и $\angle CBD = \beta - \alpha$. На CD откладываем $DA=BD$, треугольник ABC – искомый.

Урок 15

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглаашаются шестеро учащихся – опрос по теории.

Задание 1, 3, 5

1. Определение средней линии треугольника.
2. Определение прямоугольника, признак прямоугольника.

Задание 2, 4, 6

1. Определение параллельных прямых.
2. Теорема о средней линии треугольника.

Индивидуальные задания для учащихся по карточкам (выполняются на местах).

Карточка

1) Периметр треугольника равен 60 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от данного какой-нибудь его средней линией.

2) Средняя линия отсекает от данного треугольника равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите углы данного треугольника.

3) Стороны треугольника равны 13 см, 24 см и 17 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Ответы. 1) 30 см. 2) 90°, 45°, 45°. 3) 27 см.

Задание для класса

1. Стороны треугольника относятся как 3:4:5, периметр его равен 144 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

2. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.

3. В прямоугольнике меньшая сторона равна 20 см и образует с диагональю угол в 60°. Середины сторон прямоугольника последовательно соединены. Определите вид получившегося четырехугольника и найдите его периметр.

4*. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой. Как будет расположена прямая, равноудаленная от этих точек? Сколько существует таких прямых?

Ответы. **1.** 18 см, 24 см, 30 см. **3.** Ромб, 80 см. **4*.** Три прямые, которые содержат средние линии треугольника с вершинами в данных точках.

К доске приглашаются четверо учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$).

$У_1$ – решает вместе с классом задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$, $У_4$ – воспроизводят решения домашних задач 2 и 3 (см. этап V урока 14).

Дополнительные вопросы

- Определите ромб через понятие параллелограмма.
- Определите прямоугольник через понятие четырехугольника.
- Определите понятие средней линии треугольника.
- В чем заключается теорема о средней линии треугольника?

II. Устная работа

Стороны данного четырехугольника разделили пополам и точки деления соединили отрезками. Определите вид получившегося четырехугольника, если данный четырехугольник является: а) параллелограммом; б) прямоугольником; в) ромбом; г) квадратом?

Ответ. а) Параллелограмм; б) ромб; в) прямоугольник; г) квадрат.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Средняя линия отсекает от данного треугольника равносторонний треугольник. Определите вид данного треугольника.

2. Как можно воспользоваться свойствами средней линии треугольника для измерения расстояния между двумя пунктами на местности, если они разделены препятствием?

3*. Каждая из сторон треугольника разделена на три равных отрезка и точки деления соединены отрезками. Найдите периметр образовавшейся при этом фигуры (рис. 56), если периметр исходного треугольника равен *p*.

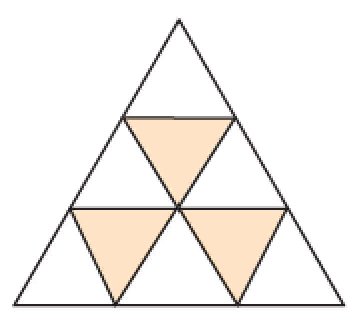


Рис. 56

Вариант 2

1. Дан треугольник, периметр которого равен 8,3 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от данного одной из его средних линий.

2. Как можно воспользоваться свойствами средней линии треугольника для построения на местности прямой, параллельной данной прямой и проходящей через точку, не принадлежащую данной прямой?

3*. См. задачу 3* из первого варианта.

Ответы. *Вариант 1*. 1. Равносторонний. 2. См. рисунок 57, расстояние между пунктами A и C равно удвоенному расстоянию между точками M и N. 3*. p.

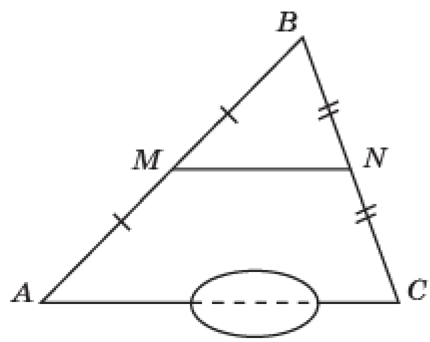


Рис. 57

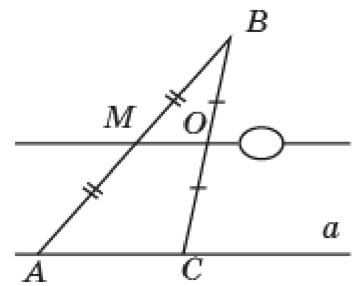


Рис. 58

Вариант 2. 1. 4,15 см. 2. См. рисунок 58, где O – данная точка, a – данная прямая, OC - произвольный отрезок, строим $OB = OC$, проводим произвольный отрезок BA, точка M – середина отрезка BA, MO – искомая прямая. 3*. p.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* и домашней работы (см. этап V урока 14).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 32 учебника).

2. Решить задачи.

1) В прямоугольнике меньшая сторона равна 96 см и образует с диагональю угол в 60°. Середины сторон прямоугольника последовательно соединены. Найдите периметр полученного четырехугольника.

Ответ. 384 см.

2) Докажите, что вершины треугольника находятся на равном расстоянии от прямой, на которой лежит средняя линия этого треугольника.

Указание. Пусть дан треугольник ABC, MN – его средняя линия, параллельная стороне AC. Через B проведите прямую a, параллельную AC, из M опустите перпендикуляры MH и MP на AC и проведенную прямую a.

3) Восстановите ромб по точке пересечения его диагоналей и серединам двух смежных сторон.

Указание. Пусть даны точки M, N – середины двух смежных сторон ромба и O – точка пересечения его диагоналей. Проведите OM и ON, через точки M и N проведите прямые, соответственно параллельные ON и OM, точка, где они пересекутся, будет одной из вершин искомого ромба. Через точку O проведите прямую, параллельную MN.

4*) Каждую из сторон треугольника, периметр которого равен 42 см, разделили на четыре равные части и точки деления соединили так, как показано на рисунке 59. Найдите периметр получившейся фигуры.

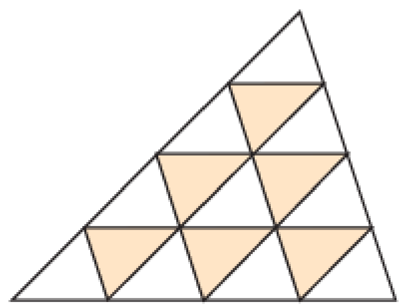


Рис. 59

Ответ. 63 см.

п. 33. Трапеция
(уроки 16, 17, 18)

Цель – сформировать понятия трапеции, ее элементов, частных видов (равнобедренной и прямоугольной), средней линии трапеции, рассмотреть свойства средней линии трапеции, научиться использовать их при решении задач.

Урок 16

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Средней линией треугольника называется …
2. Средняя линия треугольника параллельна …
3. В равностороннем треугольнике со стороной *a*, средние линии равны …
4. Средние линии треугольника делят его на …
5. Середины сторон прямоугольника являются вершинами …

Вариант 2

1. В треугольнике … средних линий.
2. Средняя линия треугольника равна …
3. Периметр треугольника, образованного средними линиями треугольника, имеющего периметр *P,* равен …
4. Чтобы из треугольника составить параллелограмм, нужно разрезать его по …
5. Середины сторон ромба являются вершинами …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Изобразим два параллельных, но не равных, отрезка и соединим их концы непересекающимися отрезками.

Вопрос

- Будет ли получившийся четырехугольник параллелограммом? Почему?

Даем определение трапеции.

Определение. ***Трапецией*** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются ее ***основаниями***, а непараллельные – ***боковыми сторонами***.

Задания

1) Изобразите трапецию и запишите ее основания и боковые стороны.

2) Постройте трапецию $ABCD$ с основаниями AD, BC и равными боковыми сторонами AB и CD. Как можно назвать такую трапецию по аналогии с треугольником?

Определение. Трапеция называется ***равнобедренной***, если ее боковые стороны равны.

Вопросы

- Могут ли в трапеции быть равными: а) основания; б) три стороны; в) четыре стороны?

Ответ. а) Нет; б) да; в) нет.

- Чему равна сумма внутренних углов трапеции?

- Может ли в трапеции один из углов быть прямым? Как назвать такую трапецию по аналогии с треугольником?

Определение. Трапеция называется ***прямоугольной***, если один из ее углов прямой.

Задание

Изобразите прямоугольную трапецию. Запишите ее основания и боковые стороны.

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите углы трапеции, если два противоположных ее угла равны 45^{o} и 112^{o}. Сделайте вывод.

2. Найдите сумму противоположных углов равнобедренной трапеции. Сделайте вывод.

3. Найдите углы равнобедренной трапеции, если один из них равен 77^{o}. Сделайте вывод об углах равнобедренной трапеции.

4. Сколько прямых углов может иметь трапеция?

5*. Постройте трапецию по четырем сторонам a, b, c, d (a, c – боковые стороны и $d>b$).

Ответы. **1.** 135^{o} и 68^{o}. *Вывод*. Сумма внутренних углов трапеции, прилежащих к одной боковой стороне, равна 180^{o}. **2.** 180^{o}. *Вывод*. Сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180^{o}. **3.** 77^{o}, 103^{o}, 103^{o}. *Вывод*. Углы равнобедренной трапеции, прилегающие к одному основанию, равны. **4.** 2 прямых угла, это прямоугольная трапеция. **5*.** *Построение*. Сначала построим треугольник ECD по трем сторонам $EC = a$, $CD = c$ и $ED = d - b$ (рис. 60). Через C проведем прямую, параллельную ED, отложим $CB = b$, $EA = b$. $ABCD$ – искомая трапеция.

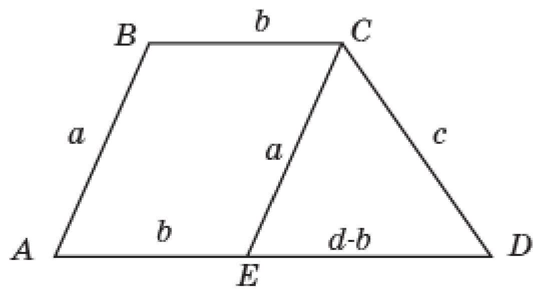


Рис. 60

V. Занимательный момент

Решение задач 3 и 4* из домашней работы (см. этап VI урока 15).

VI. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 33 учебника).

2. Решить задачи.

1) Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 3 см (рис. 61), отсекает треугольник, периметр которого равен 15 см. Найдите периметр трапеции.

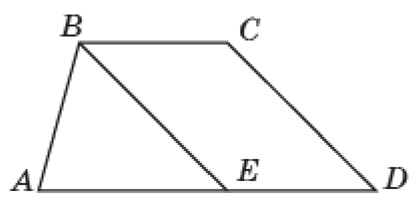


Рис. 61

Ответ. 21 см.

2) Найдите углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°.

Ответ. 2 угла по 70° и 2 угла по 110°.

3) Постройте трапецию *ABCD* по боковым сторонам *AB* = *a*, *CD* = *c*, основанию *BC* = *b* и ∠*A* = α.

Построение. Сначала построим треугольник *ABC* по двум сторонам *AB* = *a*, *BC* = *b* и ∠*B* = 180° – α (рис. 62).

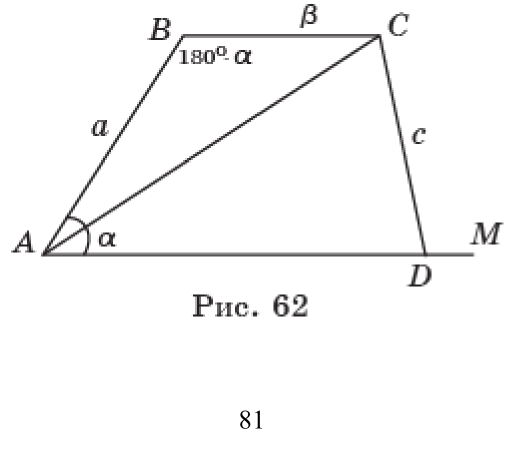


Рис. 62

Затем отложим $\angle BAM = \alpha$. Проведем окружность с центром в точке C и радиусом, равным c, точку, где она пересечет AM, назовем D. $ABCD$ – искомая трапеция.

4*) В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD||BC$) острый угол ADC равен 45^{o}, сторона AD = 24 см. Из середины M стороны CD восстановлен к ней перпендикуляр, который пересекает продолжение стороны AB в точке N. Найдите BN.

Ответ. 24 см. Решение показано на рисунке 63.

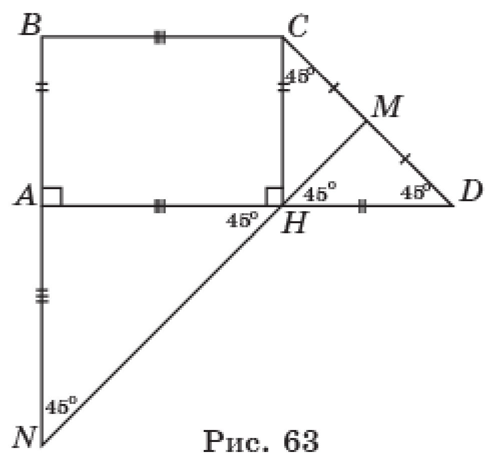


Рис. 63

Урок 17

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Трапецией называется …
2. Боковыми сторонами трапеции называются …
3. Трапеция называется прямоугольной, если …
4. Сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна …
5. Если середины сторон произвольной трапеции соединить отрезками, то полученный четырехугольник будет являться …
6. Средняя линия треугольника равна …

Вариант 2

1. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется …
2. Основаниями трапеции называются …
3. Трапеция называется равнобедренной, если …
4. Сумма углов трапеции, прилежащих к одной боковой стороне, равна …
5. Если середины сторон равнобедренной трапеции соединить отрезками, то полученный четырехугольник будет являться …
6. Средняя линия треугольника параллельна …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Изобразим трапецию $ABCD$, у которой $BC||AD$, разделим боковые стороны AB и CD пополам, точки M и N – соответственно их середины. Проведем отрезок MN.

Вопрос

- Как можно назвать этот отрезок, проведя аналогию с треугольником?

Определение. ***Средней линией*** трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Вспоминаем свойства средней линии треугольника и делаем соответствующее предположение о свойствах средней линии трапеции.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть MN – средняя линия трапеции $ABCD$ ($BC||AD$). Проведем прямую BN и ее точку пересечения с прямой AD обозначим E (рис. 64).

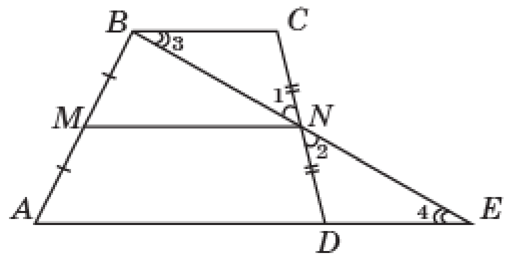


Рис. 64

Треугольники BNC и END равны по второму признаку равенства треугольников ($CN = DN$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$, как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BE). Из равенства этих треугольников следует, что $BC = ED$ и $BN = EN$. Таким образом, MN - средняя линия треугольника ABE. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что $MN||AE$ и $MN = \frac{1}{2}AE$. Поскольку $AD||BC$, то MN будет параллельна обоим основаниям трапеции и, кроме того, $MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD+DE) = \frac{1}{2}(AD+BC)$.

Следствие. Прямая, проходящая через середину боковой стороны трапеции и параллельная основаниям, делит вторую боковую сторону пополам.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – трапеция ($AD||BC$), $AM = MB$, $MN||AD$ (рис. 64). Так как средняя линия этой трапеции проходит через точку M и параллельна AD, то (в силу аксиомы параллельных) средняя линия содержится в MN, и, значит, прямая MN делит вторую боковую сторону CD трапеции пополам.

IV. Закрепление нового материала

1. Основания трапеции равны a и b. Найдите ее среднюю линию.

2. Основания трапеции относятся как 5:2, а их разность равна 18 см. Найдите среднюю линию трапеции.

3. Периметр равнобедренной трапеции равен 116 см, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону данной трапеции.

4*. В четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, P и Q являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что отрезки MP и QN в точке пересечения делятся пополам.

Ответы. **1.** $\frac{a+b}{2}$. **2.** 21 см. **3.** 29 см. **4*.** Четырехугольник $MNPQ$ – параллелограмм (см. задачу 3 этапа IV урока 14), MP и QN – его диагонали, в точке пересечения они делятся пополам.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 16).

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 33 учебника).

2. Решить задачи.

1) Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трепеции.

Ответ. 5 см, 9 см.

2) Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на отрезки, равные a и b. Найдите основания трапеции.

Ответ. $2a$ и $2b$.

3) Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла равнобедренной трапеции (высота трапеции), делит большее основание на части, имеющие длины 5 см и 2 см. Найдите среднюю линию этой трапеции.

Ответ. 5 см.

4*) Середины сторон AB и CD, BC и ED выпуклого пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Середины H и K полученных отрезков снова соединены. Докажите, что отрезок HK параллелен отрезку AE и равен $\frac{1}{4}AE$.

Ответ. См. рисунок 65, где M, N, P, R, L – середины соответствующих отрезков.

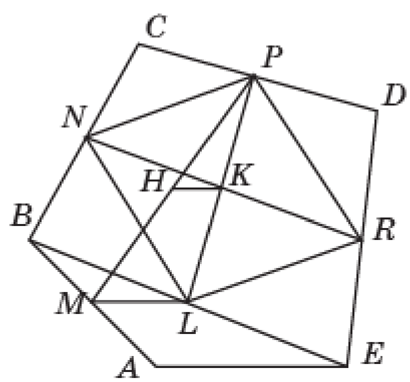


Рис. 65

Тогда четырехугольник $LNPR$ – параллелограмм (см. задачу 3 этапа III урока 14), K - точка пересечения его диагоналей, т. е. $LK = KP$, тогда HK – средняя линия треугольника MPL, значит, $HK || ML$ и $HK = \frac{1}{2}ML$, но ML – средняя линия треугольника ABE, значит, $ML || AE$ и $ML = \frac{1}{2}AE$. Таким образом, $HK || AE$ и $HK = \frac{1}{4}AE$.

Урок 18

I. Проверка домашнего задания

Шестерых учащихся приглашаем за первые парты – опрос по теории.

Задания 1, 3, 5

1. Определения трапеции, оснований трапеции, прямоугольной трапеции.

2. Формулировка и доказательство теоремы о средней линии трапеции (без следствия).

Задания 2, 4, 6

1. Определения боковых сторон трапеции, равнобедренной трапеции, средней линии трапеции.

2. Формулировка и доказательство следствия из теоремы о средней линии трапеции.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Противоположные углы трапеции равны 107° и 44°. Найдите остальные углы трапеции.

2) Периметр трапеции равен 60 см, непараллельные стороны равны 12 см и 16 см. Найдите среднюю линию трапеции.

3) В равнобедренной трапеции основания равны 11 см и 6 см, тупой угол равен 135₀. Найдите ее среднюю линию и перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на основание (высота трапеции).

Ответы. 1) 73° и 136°. 2) 16 см. 3) 8,5 см; 2,5 см.

Задание для класса

1. Найдите углы прямоугольной трапеции, если известно, что два ее угла относятся как 1:3.

2. Постройте равнобедренную трапецию по основаниям, равным a и b ($a<b$), и острому углу α.

3. Докажите, что в трапеции, диагонали которой лежат на биссектрисах углов при одном из оснований, три стороны равны между собой.

4*. Биссектрисы углов параллелограмма образуют четырехугольник. Найдите его диагонали, если несмежные стороны данного параллелограмма равны a и b ($a>b$).

Ответы. **1.** 90°, 90°, 45°, 135°. **2.** *Построение*. Строим прямоугольный треугольник ABH, $\angle AHB = 90°$, по катету $AH = \frac{b-a}{2}$ и $\angle BAH = \alpha$ (рис. 66), через точку B проводим прямую, параллельную AH, и откладываем на ней $BC = a$, на прямой AH откладываем $AD = b$, $ABCD$ – искомая трапеция.

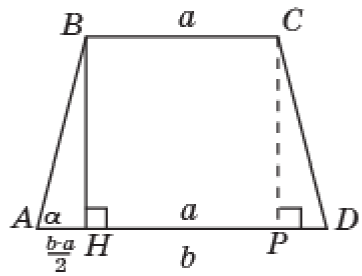


Рис. 66

4*. См. задачу 5* из этапа VI урока 12, рисунок 49. Полученный четырехугольник $KLMN$ является прямоугольником. Треугольник ABE – равнобедренный, BL – высота и биссектриса, значит, и медиана, т. е. $AL = LE$. Аналогично, рассматривая треугольник CDG, придем к выводу, что $CN = NG$. Тогда в параллелограмме $AECG$ $LN = CE$, но $CE = BC - BE = BC - AB$. Таким образом, диагонали прямоугольника $KLMN$ равны разности несмежных сторон параллелограмма, в нашем случае $LN = KM = a - b$.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – решает классную задачу 2.

$У_2$ – решает классную задачу 3.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашней работы (см. этап VI урока 17).

Дополнительные вопросы

- Определение параллелограмма.
- Определение прямоугольника.
- Определение ромба.

II. Устная работа

1) На рисунке 67 изображен параллелограмм $QRST$. Найдите его периметр.

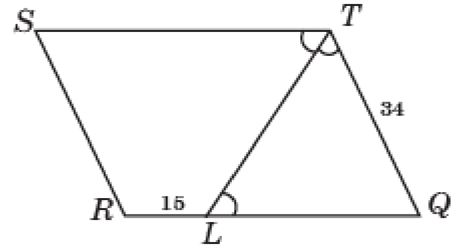


Рис. 67

2) Докажите, что параллелограмм *KLMN*, изображенный на рисунке 68, является ромбом.

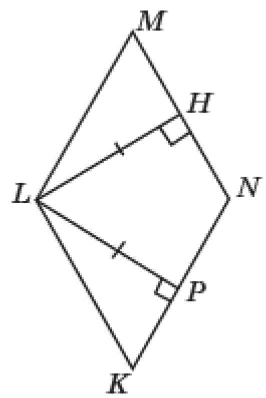


Рис. 68

3) На рисунке 69 *ABCD* – прямоугольник. Определите вид четырехугольника *EFGH*.

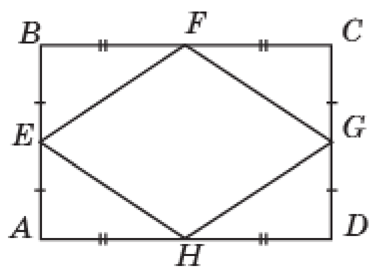


Рис. 69

4) Найдите углы ромба *IJKL*, изображенного на рисунке 70.

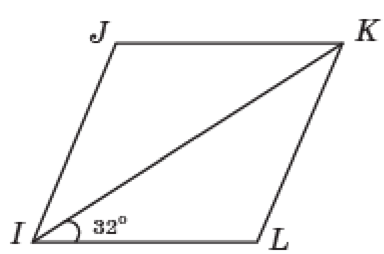


Рис. 70

5) *TUVW* на рисунке 71 – квадрат. Определите вид четырехугольника *ABCD*.

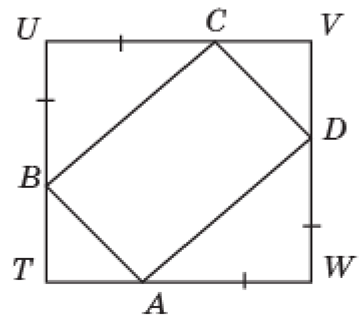


Рис. 71

Ответы. 1) 166. 3) Ромб. 4) 64°, 64°, 116°, 116°. 5) Прямоугольник.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Сторона ромба образует с продолжениями диагоналей углы, отношение которых равно $\frac{7}{8}$. Найдите углы ромба.

2. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Расстояние между основаниями равно 24 см. Найдите среднюю линию трапеции.

3*. Постройте трапецию *ABCD* по основаниям $BC = a$, $AD = b$ и диагоналям $AC = k$, $BD = l$.

Ответы. **1.** 108°, 108°, 72°, 72°, на рисунке 72 *ABCD* – ромб, $(\angle 1+\angle 3) + (\angle 2+\angle 4) = 360^{\circ}$, но $\angle 3 + \angle 4 = 90^{\circ}$, значит, $\angle 1+\angle 2=270^{\circ}$, откуда $\angle 1 = \frac{270^{\circ}}{15} \cdot 7 = 126^{\circ}$, $\angle 2 =\frac{270^{\circ}}{15} \cdot 8 = 144^{\circ}$, таким образом, $\angle 3 = 54^{\circ}$ и $\angle 4 = 36^{\circ}$. Следовательно, углы ромба равны 108°, 108°, 72°, 72°.

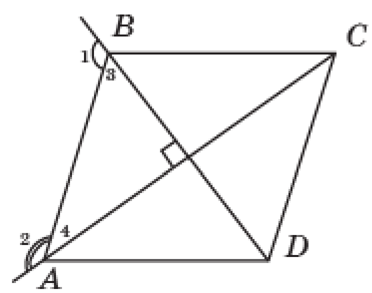


Рис. 72

2. На рисунке 73 *ABCD* – равнобедренная трапеция ($AD||BC$), $AC\perp BD$. Проведем через *O* – точку пересечения диагоналей трапеции, $PH\perp AD$, $PH\perp BC$, по условию $PH = 24$ см. Треугольники *AOD* и *BOC* – прямоугольные равнобедренные, откуда следует, что $OH = \frac{1}{2}AD$, $OP = \frac{1}{2}BC$. Следовательно, средняя линия равна *PH*, т. е. 24 см.

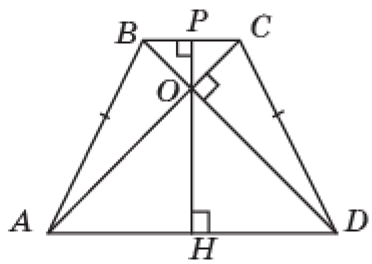


Рис. 73

3*. *Построение*. Строим треугольник ACB_1 по трем сторонам $AC = k$, $AB_1 = a + b$, $CB_1 = l$ (рис. 74). Откладываем $B_1D = a$. Через точки C и D проводим прямые, параллельные соответственно AD и CB_1, точку их пересечения называем B, $ABCD$ – искомая трапеция.

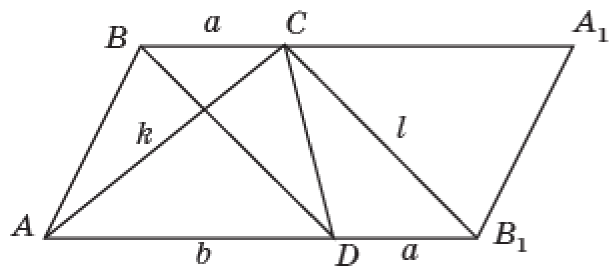


Рис. 74

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 17).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 29 - п. 33 учебника).

2. Решить задачи.

1) На противоположных сторонах параллелограмма $KLMN$ отложены равные отрезки: $KA = MB$ и $KC = MD$. Будет ли четырехугольник $ACBD$ параллелограммом? Докажите, что точки пересечения диагоналей $KLMN$ и $ACBD$ совпадают.

Ответ. Да (по признаку параллелограмма, противоположные стороны равны, что следует из равенства соответствующих треугольников).

2) Углы, которые образуют диагонали ромба с одной из его сторон, относятся как 7:11. Найдите углы ромба.

Ответ. 70°, 70°, 110°, 110°.

3) В равнобедренной трапеции перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла (высота трапеции), делит основание на отрезки 5 см и 23 см. Найдите ее среднюю линию

Ответ. 23 см.

4*) Дан четырехугольник $ABCD$, точки E, F – середины его диагоналей соответственно AC, BD. Докажите, что точкой пересечения отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, является середина отрезка EF.

Решение. K, L, M, N – середины сторон данного четырехугольника (рис. 75), которые являются вершинами параллелограмма, диагонали которого KM и LN пересекаются в точке O и в ней делятся пополам.

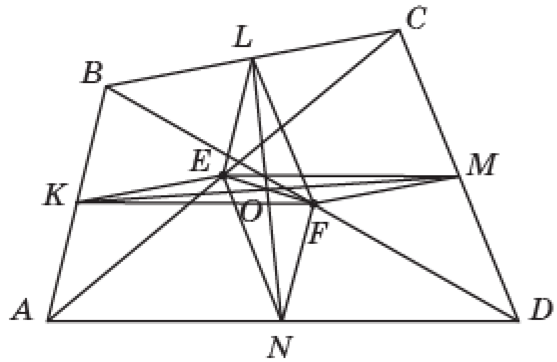


Рис. 75

Теперь рассмотрим четырехугольник $ELFN$ (или $EKFM$), который тоже является параллелограммом (по признаку параллелограмма, $EL = \frac{1}{2}AB = FN$, $EL||AB||FN$) (аналогично $EKFM$ тоже является параллелограммом). Диагонали LN и EF (KM и EF) пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, но серединой LN (KM) является точка O. Таким образом, O – середина EF.

5*) Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ и отрезку $EF = m$, где точки E, F – середины диагоналей соответственно AC, BD.

Построение. Строим параллелограмм $ELFN$ (рис. 75) по сторонам $EL = FN = \frac{a}{2}$, $EN = LF = \frac{c}{2}$ и диагонали $EF = m$. Строим параллелограмм $EKFM$ по сторонам $EK = FM = \frac{b}{2}$, $EM = KF = \frac{d}{2}$ и диагонали $EF = m$. Соединим последовательно точки K, L, M, N. Теперь через точки E и F проведем прямые, параллельные соответственно KL и LM, и отложим на них соответственно равные отрезки, а именно, $EA = EC = KL$, $FB = FD = LM$. Четырехугольник $ABCD$ – искомый.

Урок 19

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Периметр ромба равен 16 см. Перпендикуляр, проведенный из его тупого угла, равен 2 см. Определите углы ромба.

2. В параллелограмме *ABCD* из вершин тупых углов *B* и *D* на диагональ *AC* опущены перпендикуляры *BE* и *DF*. Докажите, что четырехугольник *BEDF* – параллелограмм.

3. Стороны треугольника равны 2 см, 3 см и 4 см. Его вершины являются серединами сторон другого треугольника. Найдите периметр большого треугольника.

4. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Определите углы данной трапеции.

5*. Постройте ромб, если даны его сторона a и сумма диагоналей d_1+d_2.

Вариант 2

1. Перпендикуляр, проведенный из вершины тупого угла ромба, делит его сторону пополам. Определите углы ромба.

2. В параллелограмме *ABCD* из вершин тупых углов *B* и *D* проведены биссектрисы *BE* и *DF*. Точки *E* и *F* принадлежат диагонали *AC*. Докажите, что четырехугольник *BFDE* – параллелограмм.

3. Периметр треугольника равен 27 см, стороны относятся как 3:2:4. Найдите стороны треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

4. Определите углы равнобедренной трапеции, если одно из ее оснований в два раза больше другого, а боковые стороны равны меньшему основанию.

5*. Постройте ромб, если даны его сторона a и разность диагоналей d_1-d_2.

34. Теорема Фалеса
(уроки 20, 21)

Цель – сформулировать и доказать теорему Фалеса и теорему о пропорциональных отрезках; научиться делить отрезок на *n* равных частей.

Урок 20

I. Анализ контрольной работы № 2

II. Устная работа

1) Найдите угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.

2) Найдите углы между биссектрисами двух углов треугольника, если третий угол равен 40°.

3) Найдите углы между биссектрисами острых углов тупоугольного треугольника, если его тупой угол равен 130°.

4) Почему биссектрисы двух углов треугольника не могут быть параллельными?

5) Определите вид треугольника, если одна из его медиан равна половине стороны, к которой она проведена.

6) Найдите углы параллелограмма, если один угол составляет 80% другого.

7) Найдите основания и среднюю линию трапеции, если одно основание составляет 40% от другого и меньше его на 24 см.

Ответы. 1) 45°. 2) 70°. 3) 25°. 4) Если бы эти биссектрисы были параллельны, то сумма внутренних односторонних углов, которые образуют биссектрисы с соответствующей стороной треугольника, должна была бы равняться 180°, а она меньше 180°. 5) Прямоугольный. 6) 2 угла по 80° и 2 угла по 100°. 7) Основания равны 16 см и 40 см, средняя линия равна 28 см.

III. Новый материал

Изобразим угол AOB. На одной из его сторон, например OA, отложим равные отрезки, а именно, $OA_1=A_1A_2$. Через точки A_1 и A_2 проведем параллельные прямые таким образом, чтобы они пересекли вторую сторону данного угла, точки пересечения назовем соответственно B_1 и B_2. Измерим отрезки OB_1 и B_1B_2. На OA отложим отрезок $A_2A_3=A_1A_2$ и через точку A_3 проведем прямую, параллельную проведенным прямым, например A_2B_2. Точку пересечения с OB назовем B_3. Измерим получившийся отрезок B_2B_3. Какое предположение можно сделать? Доказываем следующую теорему.

Теорема. (Фалеса.) Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3 – точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла; B_1, B_2, B_3 – соответствующие точки пересечения параллельных прямых с другой стороной угла (рис. 76).

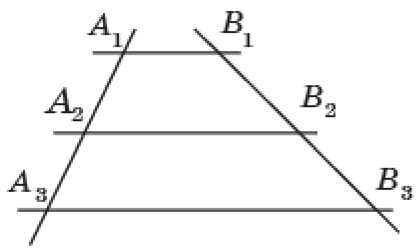


Рис. 76

Если $A_1A_2=A_2A_3$, то A_2B_2 – средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$ (следствие из теоремы о средней линии трапеции), и, следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Задание

Теорему Фалеса можно применять для деления отрезка на n равных частей. Например, разделим отрезок AB на 3 равные части. Через точку A проведем прямую a, отличную от AB, и отложим на ней равные отрезки $AA_1=A_1A_2=A_2A_3$ (рис. 77).

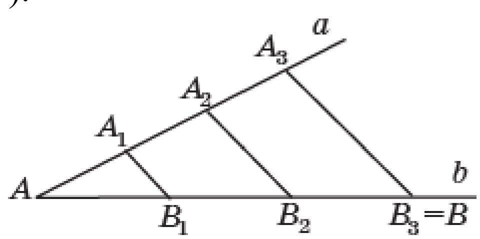


Рис. 77

Соединим отрезком точки A_3 и B. Через точки A_1, A_2 проведем прямые, параллельные A_3B, и их точки пересечения с отрезком AB обозначим B_1, B_2. По теореме Фалеса $AB_1=B_1B_2=B_2B$.

Вопрос

- Что означает запись $\frac{AB}{CD}$, где AB и CD данные отрезки?

Отношением $\frac{AB}{CD}$ двух отрезков AB и CD называется число, показывающее сколько раз отрезок CD и его части укладываются в отрезке AB. Если отрезок CD принять за единичный, то отношение $\frac{AB}{CD}$ будет равно длине отрезка AB. Отношение отрезков AB и CD обозначается также $AB:CD$.

IV. Закрепление нового материала

1. Разделите данный отрезок на 5 равных частей.

2. Данный отрезок разделите на два отрезка, длины которых пропорциональны числам 1, 2.

3. В треугольнике *ABC* стороны *BC*=20 см и *AC*=36 см. Сторона *AB* разделена на 4 равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне *BC*. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, и отрезки, полученные на стороне *AC*.

4*. Объясните по рисунку 78, каким образом полосу шириной *CD* делят на пять равных по ширине полос.

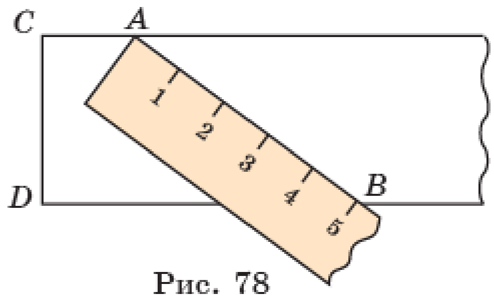


Рис. 78

Ответы. **2.** *Указание*. Данный отрезок разделите на три равные части. **3.** 5 см, 10 см, 15 см; 4 отрезка по 9 см. **4*.** Проводят отрезок с концами на прямых, определяющих полосу, и отмечают на нем 4 точки, соответствующие делениям линейки, таким образом, отрезок разделен на 5 равных частей. Теперь через точки деления достаточно провести прямые, параллельные краям полосы. По теореме Фалеса отрезок *AB* при этом разделится на 5 равных отрезков, и вся полоса разделится на пять равных полос.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 34 учебника).

2. Решить задачи.

1) Разделите данный отрезок на 6 равных частей.

2) Данный отрезок разделите на два отрезка, длины которых пропорциональны числам 2, 3.

Указание. Данный отрезок разделите на 5 равных частей.

3) Дан параллелограмм *ABCD*, точки *E* и *F* – середины его сторон соответственно *BC* и *AD*. Докажите, используя теорему Фалеса, что отрезки *BF* и *DE* делят диагональ *AC* на три равные части.

Указание. *BEDF* – параллелограмм, значит, $BF||DE$, нужно рассмотреть углы *BCA* и *DAC*.

4*) Постройте трапецию *ABCD* по основанию $AD = d$, расстоянию h между основаниями и диагоналям $AC = k$ и $BD = l$.

Построение. Строим прямоугольный треугольник *BHD* по гипотенузе *BD=l* и катету *BH=h* (рис. 79), продолжаем катет *DH* и откладываем *DA=d*, через точку *B* проводим прямую, параллельную *AD*, *C* – точка пересечения этой прямой с окружностью с центром в точке *A* и радиусом, равным *k*, *ABCD* – искомая трапеция.

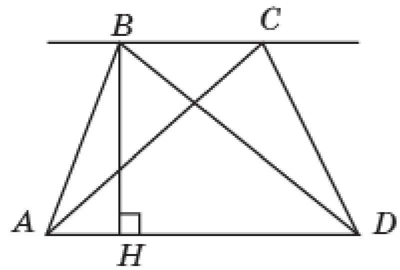


Рис. 79

3*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «Жизнь и творчество Фалеса». Литература: Учебник, параграф 34, раздел «Исторические сведения»; Болгарский Б.В. Очерки по истории математики. – Минск: Вышэйшая школа, 1979, с. 45; Волошинов А.В. Пифагор. – М.: Просвещение, 1993, с. 25.

Урок 21

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Теорема Фалеса заключается в том, что …
2. Отношение двух отрезков MN и KL обозначается …
3. Чтобы отрезок KL разделить на 3 равные части, нужно …
4. Свойства средней линии треугольника заключаются в том, что…

Вариант 2

1. Теорема Фалеса является обобщением …
2. Отношением двух отрезков AB и CD называется …
3. Чтобы отрезок EF разделить на 4 равные части, нужно …
4. Свойства средней линии трапеции заключаются в том, что…

II. Проверка математического диактанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Изобразим отрезки AB = 6 см, CD = 4 см, A_1B_1= 3 см, C_1D_1 = 2 см.

Вопрос

- Возьмите различные отношения построенных отрезков. Есть ли среди них равные?

Ответ. Например, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = 2$.

Говорят, что отрезки AB, CD пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1, если равны их отношения, т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = k$. Число k называется ***коэффициентом пропорциональности***.

Теорема. (О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Доказательство. Пусть стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и E, F (рис. 80).

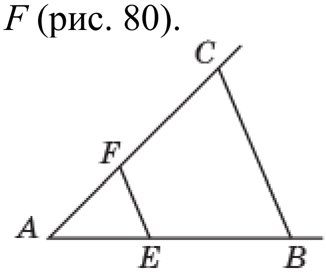


Рис. 80

Докажем, что имеет место равенство $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$. Заметим, что отношение $\frac{AB}{AE}$ показывает сколько раз отрезок AE укладывается в отрезке AB, а отношение $\frac{AC}{AF}$ показывает сколько раз отрезок AF укладывается в отрезке AC. Теорема Фалеса позволяет установить соответствие между процессами измерения отрезков AB и AC. Действительно, прямые, параллельные BC, переводят равные отрезки на прямой AB в равные отрезки на прямой AC. Отрезок AE переходит в отрезок AF. Одна десятая часть отрезка AE переходит в одну десятую часть отрезка AF и т. д. Поэтому, если отрезок AE и его части укладываются в отрезке AB k раз, то отрезок AF и его части будут укладываться в отрезке AC также k раз, т.е. $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = k$.

Следствие. Если стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и E, F (рис. 80), то имеет место равенство $\frac{EB}{AE} = \frac{FC}{AF}$.

Доказательство. Заметим, что $AB = AE + EB$ и $AC = AF + FC$. Подставляя эти выражения в равенство $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$, получим равенство

$$1 + \frac{EB}{AE} = 1 + \frac{FC}{AF}.$$

Следовательно, выполняется требуемое равенство.

IV. Закрепление нового материала

1. Среди отрезков a, b, c, d, e выберите пары пропорциональных отрезков, если a = 2 см, b = 17,5 см, c = 16 см, d = 35 см, e = 4 см.

2. Даны три отрезка: a, b и c. Какова должна быть длина четвертого отрезка d, чтобы из них можно было образовать две пары пропорциональных отрезков, если a = 6 см, b = 3 см, c = 4 см и отрезок d больше каждого из этих отрезков.

3. На одной из сторон угла расположены два отрезка 3 см и 4 см. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Больший из отрезков равен 6 см. Найдите другой отрезок.

4*. Даны два отрезка длины a и b. Постройте отрезок длины ab.

Ответы. **1.** Например, $\frac{a}{e} = \frac{b}{d}$. **2.** D = 8 см. **3.** 4,5 см. **4*.** На одной стороне угла O строим последовательно единичный отрезок OE и отрезок $EA = a$ (рис. 81), на другой соответственно отрезок $OB = b$, соединяем точки E и B, проводим через точку A прямую, параллельную EB, точку ее пересечения с OB называем C, $BC = ab$ – искомый отрезок.

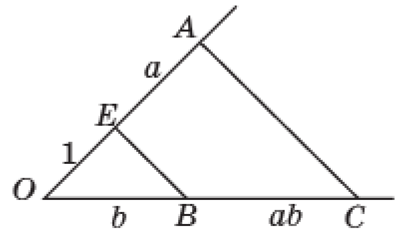


Рис. 81

V. Индивидуальное задание

Сообщение на тему «Исторические сведения о жизни и творчестве Фалеса» (см. задание **3*** из домашней работы – этап V урока 20).

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 34 учебника).

2. Решить задачи.

1) Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми AC и BD в точках A, B и C, D соответственно. Найдите: а) CD, если $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см; б) OC и OD, если $OA:OB = 3:5$ и $OD - OC = 8$ см.

Ответ. а) 2 см; б) 12 см, 20 см.

2) Проекции двух сторон остроугольного треугольника ABC на прямую AC имеют длины 6 см и 4 см. Какую длину имеют проекции медиан этого треугольника на ту же прямую?

Ответ. См. рисунок 82, где AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, проекции которых на AC соответственно равны $PA = 10 - 2 = 8$ (см), $HB_1 = 1$ см, $QC = 7$ см.

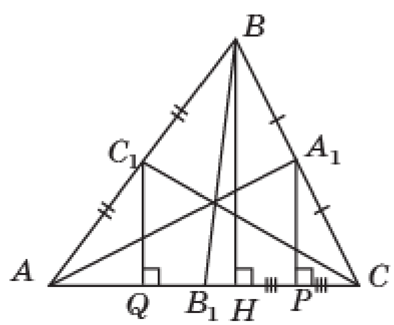


Рис. 82

3) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E, причем $AD = \frac{3}{4}AB$, $AE = \frac{3}{4}AC$. Найдите отрезок DE, если отрезок BC равен 5 см.

Ответ. 3,75 см.

4*) Даны два отрезка длины a и b. Постройте отрезок длины $\frac{a}{b}$.

Решение. На одной стороне угла O строим последовательно отрезок $OB = b$ и отрезок $BA = a$ (рис. 83), на другой соответственно единичный отрезок OE, соединяем точки E и B, проводим через точку A прямую, параллельную EB, точку ее пересечения с OE называем C, $EC = \frac{a}{b}$ – искомый отрезок.

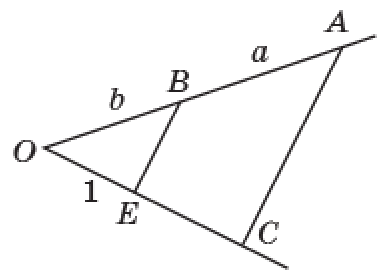


Рис. 83

35. Углы, связанные с окружностью
(уроки 22, 23)

Цель – сформировать понятия центрального и вписанного углов, сформулировать и доказать теорему о вписанном угле; научиться применять ее при решении задач.

Урок 22

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаем шестерых учащихся – опрос по теории.

Задание 1, 3, 5

1. Определение отношения двух отрезков.
2. Формулировка и доказательство теоремы Фалеса.

Задания 2, 4, 6

1. Определение пропорциональных отрезков.
2. Формулировка и доказательство теоремы о пропорциональных отрезках.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих на местах.

Карточка

1) Определите, пропорциональны ли отрезки a и b, m и n, если $a = 6$ см, $b = 18$ см, m=12 см, n=36 см.

2) Среди отрезков c, d, k, l выберите пары пропорциональных отрезков, если $c = 42$ см, $d = 3{,}9$ см, $k = 1{,}3$ см, $l = 14$ см.

3) Разделите отрезок XY на два отрезка, длины которых пропорциональны числам 1 и 3.

Ответы. 1) Да. 2) Например, $\frac{c}{l} = \frac{d}{k}$.

Задание для класса

1. Определите, пропорциональны ли отрезки a и b, m и n, если: а) a=5 см, $b = 10$ см, $m = 15$ см, $n = 20$ см; б) $a = 48$ см, $b = 1{,}6$ см, $m = 3$ см, $n = 90$ см.

2. Среди отрезков c, d, k, l выберите пары пропорциональных отрезков, если: а) $c = 1{,}5$ см, $d = 20$ см, $k = 15$ см, $l = 2$ см; б) $c = 144$ дм, $d = 2$ дм, $k = 12$ дм, $l = 24$ дм.

3. Разделите отрезок EF на семь равных частей.

4. Разделите отрезок XY на два отрезка, длины которых пропорциональны числам 2 и 3.

5*. Постройте отрезок длины $\frac{c}{d}$, если даны два отрезка длины c и d.

Ответы. **1.** а) Нет; б) да. **2.** Например: а) $\frac{d}{l} = \frac{k}{c}$; б) $\frac{c}{l} = \frac{k}{d}$. **5*.** Решение аналогично решению задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 21), только вместо a и b берем c и d.

К доске приглашаем четверых учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$).

$У_1$ – решает классную задачу 3.

$У_2$ –решает классную задачу 4.

$У_3$, $У_4$ – воспроизводят решения задач 2 и 3 из домашнего задания (см. этап VI урока 21).

Дополнительные вопросы

- Какая трапеция называется равнобедренной?
- Какая трапеция называется прямоугольной?
- Какими свойствами обладает средняя линия треугольника?
- Какими свойствами обладает средняя линия трапеции?

II. Новый материал

Рассмотрим рисунок 84. На нем изображены окружность и углы.

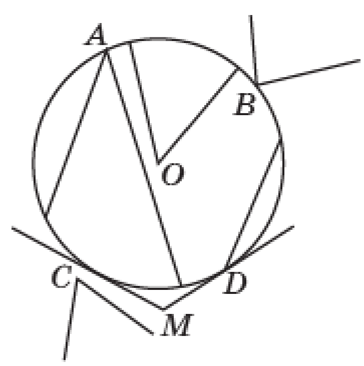


Рис. 84

Вопросы

- Как эти углы связаны с данной окружностью?
- Чем они отличаются?
- Какой из данных углов можно назвать: а) центральным; б) вписанным?

Определение. Угол с вершиной в центре окружности называется ***центральным***.

Определение. Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется ***вписанным***.

Каждый центральный и вписанный углы данной окружности определяют ***дуги*** окружности, которые состоят из точек окружности, принадлежащих этим углам. При этом говорят, что углы опираются на соответствующие дуги окружности.

Задание

По рисунку 85 запишите, какие углы являются: а) центральными; б) вписанными. Запишите дуги, на которые они опираются.

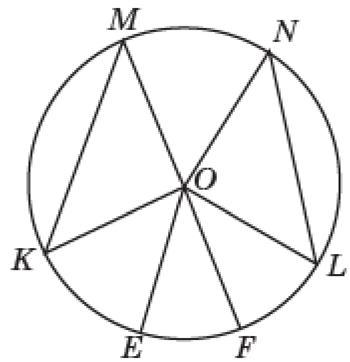


Рис. 85

Вопросы

- Как может располагаться центр окружности относительного вписанного угла?

Рассмотрим рисунок 86. Найдите на нем центральный угол и вписанный угол.

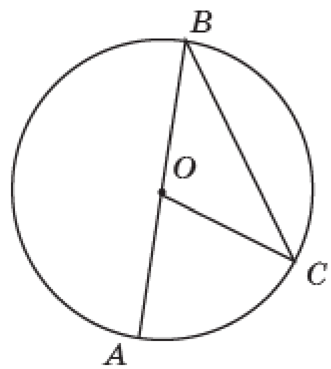


Рис. 86

- На какие дуги они опираются?
- Как связаны величины этих углов?

Выскажите соответствующее предположение.

Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Доказательство. Пусть угол ABC вписан в окружность с центром в точке O. Рассмотрим случай, когда одна из сторон угла, например AB, проходит через центр O окружности (рис. 86). Треугольник BOC - равнобедренный и, следовательно, $\angle B = \angle C$. Угол AOC – внешний угол треугольника BOC и, следовательно, равен сумме углов B и C. Таким образом, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

В случае, если центр O окружности лежит внутри угла ABC (рис. 87), проведем диаметр BD и рассмотрим углы ABD и DBC. По доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD$, $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle DOC$. Следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

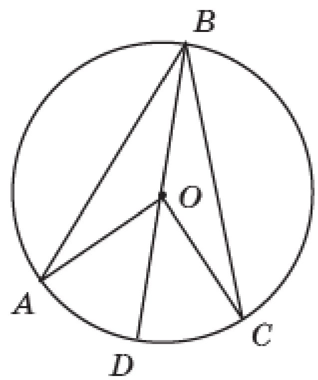


Рис. 87

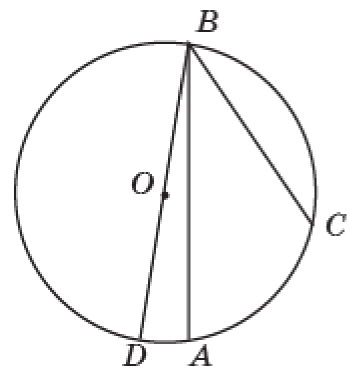


Рис. 88

В случае, если центр O окружности лежит вне угла ABC (рис. 88), проведем диаметр BD и рассмотрим углы DBC и DBA. По доказанному $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle DOC$, $\angle DBA = \frac{1}{2}\angle DOA$. Следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

Вопрос

- Есть ли на рисунке 89 равные углы?

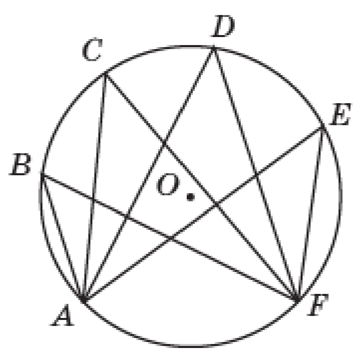


Рис. 89

Следствие. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны.

Доказательство. Действительно, если вписанные углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу AB (рис. 90), то у них один и тот же центральный угол AOB. По доказанной теореме данные вписанные углы равны половине центрального угла AOB и, следовательно, равны между собой.

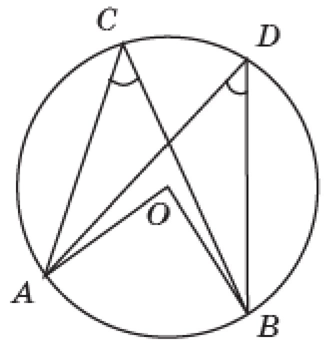


Рис. 90

Дуги окружности измеряются соответствующими центральными углами. Поэтому теорему о вписанном угле можно переформулировать следующим образом: «*Вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается*».

III. Закрепление нового материала

1. Найдите вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности.

2. Центральный угол на 65° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Найдите каждый из этих углов.

3. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет: а) $\frac{1}{6}$ окружности; б) 10 % окружности.

4. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 4:5. Под какими углами видна эта хорда из точек окружности?

5*. Для данных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых угол ACB острый.

Ответы. **1.** 90°. **2.** Вписанный угол равен 65°, центральный – 130°. **3.** а) 30°; б) 18°. **4.** См. рисунок 91, дуги ACB и ADB равны соответственно 160° и 200°, следовательно, искомые углы равны 80° и 100°.

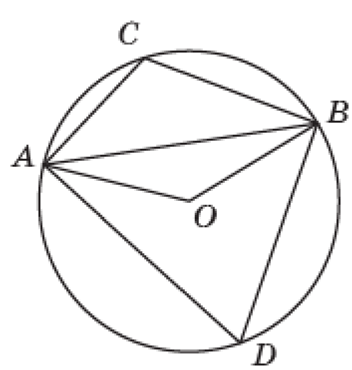


Рис. 91

5*. Все точки плоскости, лежащие вне окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре, и не принадлежащие прямой AB (рис. 92), $\angle AEB = 90^\circ$ и является внешним по отношению к треугольнику BEC, следовательно, $\angle ACB < \angle AEB$, т. е. $\angle ACB$ – острый.

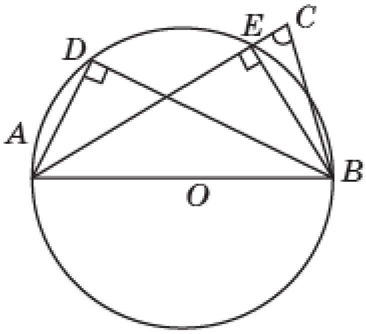


Рис. 92

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 35 учебника).

2. Решить задачи.

1) Под каким углом из точки дуги видна стягивающая ее хорда, если дуга составляет: а) 40°; б) 154°; в) $\frac{1}{9}$ окружности?

Ответ. а) 160°; б) 103°; в) 160°.

2) Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят эту окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 2:3:7. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ. 30°, 45°, 105°.

3) С помощью угольника найдите центр данной окружности.

Решение показано на рисунке 93, вершину прямого угла дважды совмещаем с точками, принадлежащими окружности, и обводим стороны каждого угла, получаем два диаметра данной окружности, точка их пересечения – ее центр.

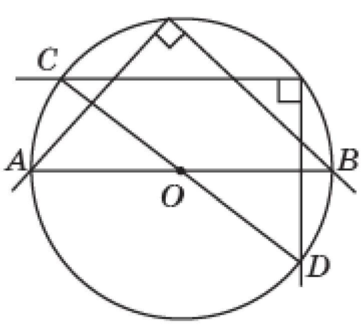


Рис. 93

4*) Для данных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых угол ACB тупой.

Ответ. Все точки плоскости, лежащие внутри окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре, и не принадлежащие отрезку AB (рис. 94), $\angle AEB = 90^{\circ}$, угол ACB является внешним по отношению к треугольнику BEC, следовательно, $\angle ACB > \angle AEB$, т. е. $\angle ACB$ – тупой.

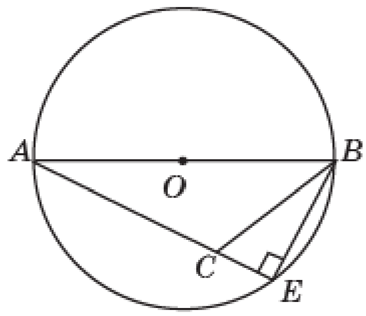


Рис. 94

5*) К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C - точки касания). Докажите, что угол BAC - прямой.

Решение. Проведем общую касательную через точку A, она пересечет BC в точке M (рис. 95), тогда $MB=MA=MC$. Проведем окружность с центром в точке M и радиусом MA, она пройдет через точки A, B, C, BC – ее диаметр. Следовательно, угол BAC – прямой.

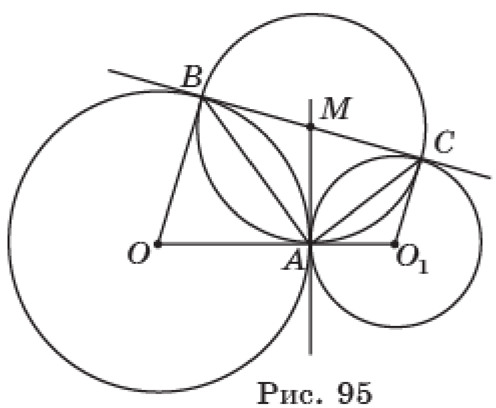


Рис. 95

Урок 23

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Центральным углом называется …
2. Следствие из теоремы о вписанном угле заключается в том, что …
3. Дуга вписанного угла определяется …
4. Хорда окружности, равная ее радиусу, видна из центра окружности под углом …
5. Вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, связаны так, что …

Вариант 2

1. Вписанным углом называется …
2. Теорема о вписанном угле заключается в том, что …
3. Дуга центрального угла определяется …
4. Хорда окружности, равная ее радиусу, видна из произвольной точки окружности, отличной от ее концов, под углом …
5. Дугой окружности называется …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Решение задач

1. Через концы дуги в $60°$ проведены касательные. Найдите угол между ними.

2. Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла. Рассмотрите случай, когда данный угол: а) прямой; б) острый.

3. Докажите, что угол, вершина которого лежит внутри окружности, а стороны пересекаются с окружностью, измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между его сторонами, а другая – между их продолжениями.

4*. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, т. е. таких точек C, для которых угол ACB равен данному углу α. Рассмотрите случай, когда дан острый угол.

Ответы. **1.** 120^o. **2.** Рассмотрим рисунок 96, где MN касательная к окружности с центром в точке O, K – точка касания, KL – диаметр: а) тогда угол LKN – прямой и, следовательно, равен 90^o, что составляет половину дуги

KAL; б) рассмотрим острый угол *AKN*, $\angle AKN = \angle LKN - \angle LKA$, но $\angle LKN$ измеряется по доказанному в первом случае половиной дуги *KAL*, $\angle LKA$ измеряется половиной дуги *AL*, как вписанный. Значит, $\angle AKN$ измеряется разностью половин дуг *KAL* и *AL*, т.е. половиной дуги *KA*.

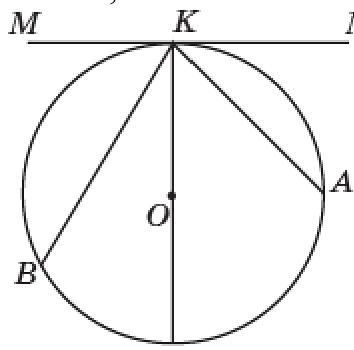


Рис. 96

3. Рассмотрим угол *AMB* на рисунке 97. Он является внешним по отношению к треугольнику *ADM*, значит, $\angle AMB = \angle ADM + \angle DAM$, но эти два последних угла, как вписанные, измеряются половинами соответственно дуг *AB* и *CD*. Следовательно, угол *AMB* измеряется полусуммой дуг *AB* и *CD*.

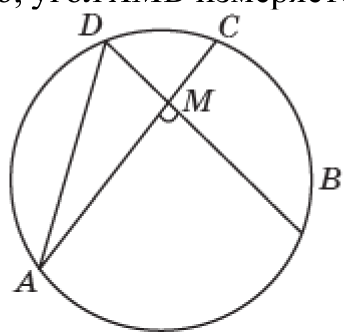


Рис. 97

4*. *Построение*. Строим серединный перпендикуляр *a* данного отрезка *AB* (рис. 98).

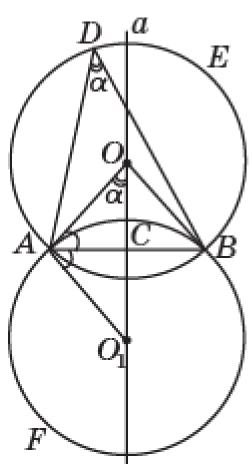


Рис. 98

Откладываем $\angle CAO = 90^{\circ} - \alpha$, O – точка пересечения стороны угла и проведенного перопендикуляра, проводим окружность с центром в точке O и радиусом OA, она пройдет через точку B. Точки дуги AEB без точек A и B будут принадлежать искомому геометрическому месту. Аналогично, построим окружность с центром в точке O_1 и ее дугу AFB. Итак, дуги AEB и AFB без точек A и B будут искомым геометрическим местом.

IV. Занимательный момент

Решения задачи 4* и задач 4*, 5* из домашних работ уроков 21 и 22 (см. соответственно этап VI урока 21 и этап IV урока 22).

V. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 35 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла. Рассмотрите случай, когда данный угол тупой. (Случаи прямого и острого углов рассмотрены на данном уроке, см. этап III, задача 2.)

Решение. Обратимся к рисунку 96, угол BKN – тупой и равен сумме углов BKL и LKN, которые измеряются половинами дуг соответственно BL и KAL, следовательно, угол BKN измеряется половиной дуги $BLAK$.

2) Докажите, что угол, вершина которого лежит вне окружности, а стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

Решение. На рисунке 99 $\angle AMB = \angle ADB - \angle MAD$, так как угол ADB является внешним по отношению к треугольнику AMD. Поскольку вписанные углы $\angle ADB$ и $\angle MAD$ измеряются половинами дуг соответственно AB и CD, интересующий нас угол AMB измеряется полуразностью этих дуг.

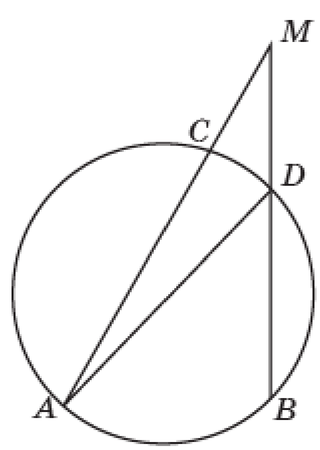


Рис. 99

3) Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне окружности.

Построение. Даны окружность с центром в точке O и точка M вне этой окружности (рис. 100). Проведем отрезок OM и построим на нем, как на диаметре, окружность (C – середина OM). Обозначим точки пересечения проведенной и данной окружностей через A и B. MA и MB – искомые касательные.

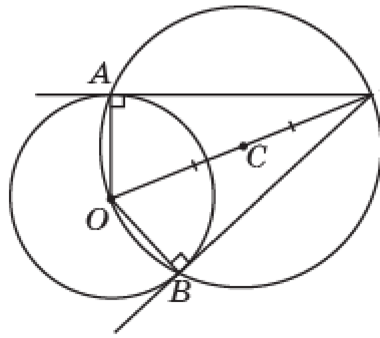


Рис. 100

4*) Дан отрезок AB и прямая c, ему параллельная. Найдите точку C на прямой c, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Решение. На рисунке 101 точка H – середина отрезка AB, C – искомая точка, где $HC \perp AB$. Действительно, возьмем точку D, принадлежащую прямой c, проведем окружность через точки A и B, которая касается данной прямой c в точке C, AD пересекает эту окружность в точке E. Тогда $\angle AEB = \angle ACB$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу AB). Угол AEB является внешним углом треугольника EDB, следовательно, $\angle AEB > \angle ADB$. Значит, $\angle ACB > \angle ADB$, т. е. $\angle ACB$ – искомый.

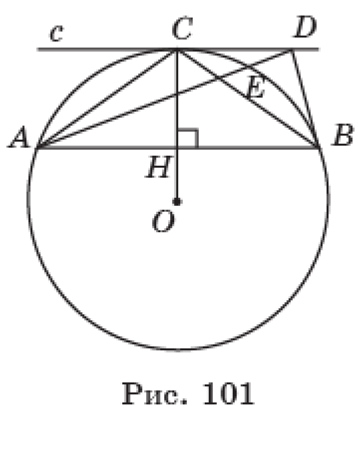


Рис. 101

36. Многоугольники, вписанные в окружность (уроки 24, 25)

Цель – сформировать представления о многоугольнике, вписанном в окружность и окружности, описанной около многоугольника; сформулировать и доказать теоремы о том, что около любого треугольника и около любого правильного многоугольника можно описать окружность; научиться использовать их при решении задач.

Урок 24

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаем шестерых учащихся – опрос по теории.

Задание 1, 3, 5

1. Определение центрального угла.

2. Формулировка и доказательство теоремы о вписанном угле (без следствия).

Задания 2, 4, 6

1. Определение вписанного угла.

2. Формулировка и доказательство следствия из теоремы о вписанном угле.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих на местах.

Карточка

1) Под каким углом из точки дуги видна стягивающая ее хорда, если дуга составляет: а) 100°; б) 218°; в) $\frac{11}{18}$ окружности?

2) Окружность разделена на три части в отношении 7:13:20. Найдите углы, образованные хордами, проведенными через точки деления.

Ответы. 1) а) 130°; б) 71°; в) 70°. 2) 31°30′, 58°30′, 90°.

Задание для класса

1. На радиусе окружности, как на диаметре, построена окружность. Докажите, что любая хорда большей окружности, проведенная из их общей точки, делится меньшей окружностью пополам.

2. Окружность разделена точками E и F на две части. Одна из них точкой M делится пополам, а на другой взяты точки K и L. Докажите, что угол, образованный прямыми EK и ML, равен углу, образованному прямыми FL и MK.

3*. Пусть AC – диаметр окружности с центром O. Из произвольной точки M окружности проведена к ней касательная и из точки A опущен на нее перпендикуляр AH. Докажите, что AM – биссектриса угла HAC.

Ответы. **1.** Решение показано на рисунке 102, M – точка касания окружностей, угол OBM – прямой, как опирающийся на диаметр меньшей окружности, следовательно, OB – серединный перпендикуляр отрезка AM, и $AB=BM$.

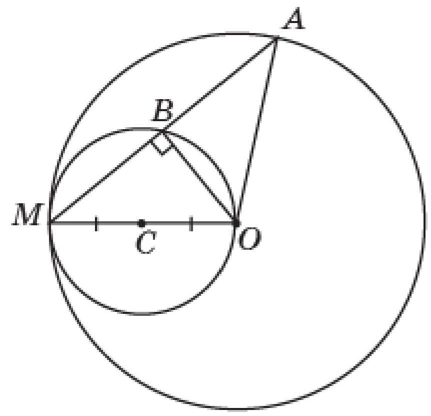


Рис. 102

2. Углы равны, так как измеряются равными дугами. **3*.** $\angle HAM = 90° - \angle HMA = 90° - \angle ACM$, так как углы HMA и ACM равны (они опираются на одну и ту же дугу MA, рисунок 103), но $\angle CAM = 90° - \angle ACM$, следовательно, $\angle HAM = \angle CAM$, т. е. AM – биссектриса угла HAC.

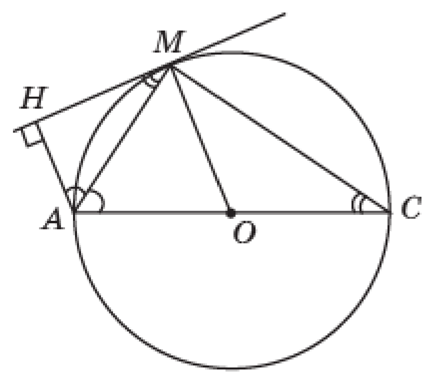


Рис. 103

К доске приглашаем четверых учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

$У_3$, $У_4$ – воспроизводят решения задач 2 и 3 из домашнего задания (см. этап V урока 23).

Дополнительные вопросы

- Как измеряется центральный угол?
- Как измеряется вписанный угол?
- Как измеряется угол, вершина которого находится во внутренней точке окружности?
- Как измеряется угол, вершина которого находится во внешней точке окружности?

II. Устная работа

Найдите угол *X* по рисунку:

1) 104; 2) 105; 3) 106;

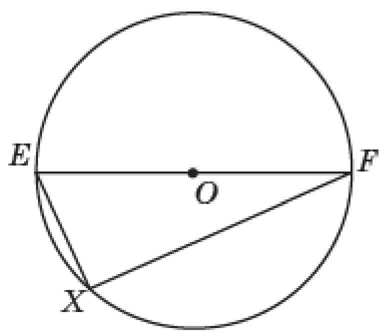


Рис. 104

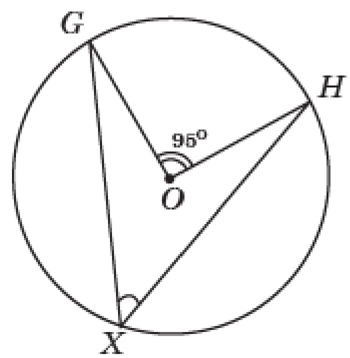


Рис. 105

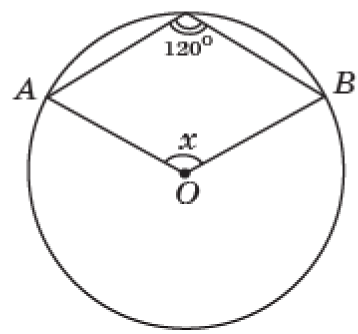


Рис. 106

4) 107; 5) 108.

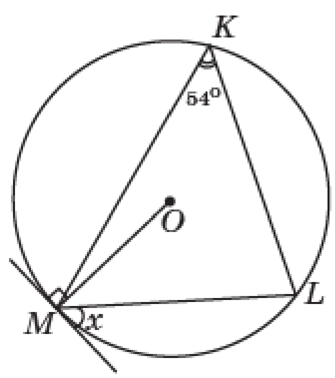


Рис. 107

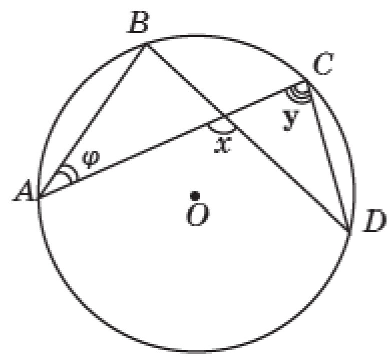


Рис. 108

Ответы. 1) 90°; 2) 47°30′; 3) 120°; 4) 54°; 5) $(\varphi + \psi)/2$.

III. Новый материал

Обратимся к рисункам 109, а-г.

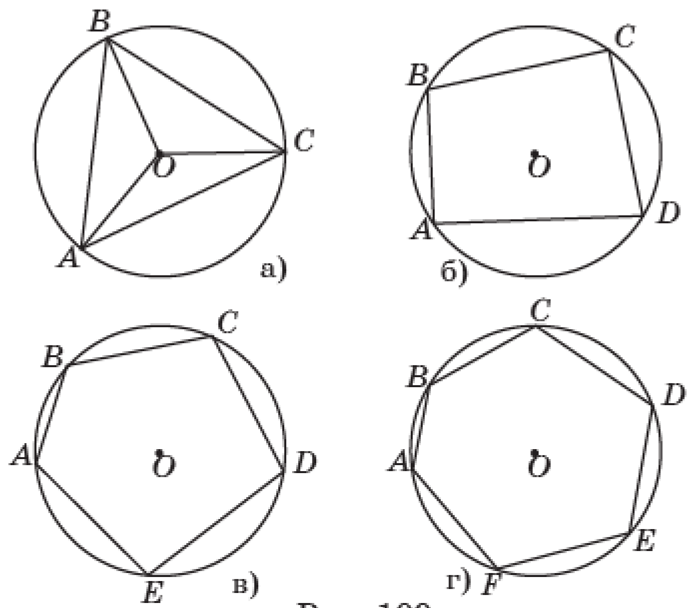


Рис. 109

Вопросы

- Как расположены изображенные на них многоугольники по отношению к окружности?

- Что можно сказать о расстояниях от вершин этих многоугольников до центра соответствующей окружности?

Определение. Многоугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется ***описанной*** около многоугольника.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Около всякого треугольника можно описать окружность. Ее центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. К сторонам AB и AC проведем серединные перпендикуляры c и b соответственно (рис. 110).

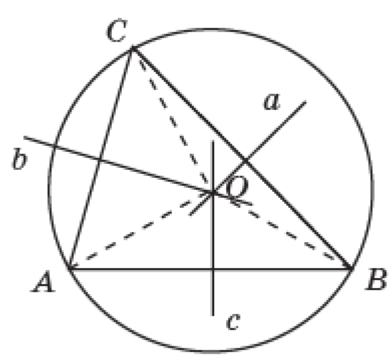


Рис. 110

Докажем, что точка O их пересечения является центром описанной окружности. Для этого достаточно проверить, что выполняются равенства $OA=OB=OC$. Действительно, так как точка O принадлежит серединному перпендикуляру c отрезка AB, то она одинаково удалена от вершин A и B, т.е. $OA=OB$. Так как точка O принадлежит серединному перпендикуляру b отрезка AC, то она одинаково удалена от вершин A и C, т.е. $OA=OC$. Следовательно, точка O одинаково удалена от вершин A, B, C треугольника ABC, т.е. $OA=OB=OC$. Заметим, что из равенства $OB=OC$ следует, что точка O принадлежит серединному перпендикуляру a к стороне BC. Таким образом, все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке O. Окружность с центром в этой точке и радиусом $R=OA=OB=OC$ будет искомой описанной окружностью.

(*) Используя аксиому параллельных, докажем, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника действительно пересекаются. Пусть ABC – треугольник, c и b – серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC (рис. 111).

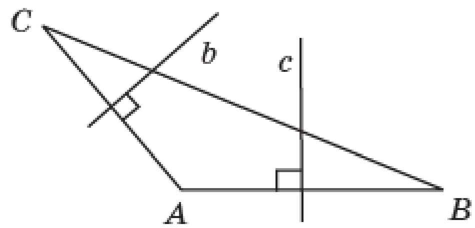


Рис. 111

Предположим, что прямые b и c не пересекаются, значит, они параллельны. Прямая AB перпендикулярна прямой c. Прямая AC перпендикулярна прямой b, а значит, и параллельной ей прямой c. Таким образом, прямые AB и AC перпендикулярны одной прямой c. Поэтому они должны или быть параллельными, или совпадать. Но эти прямые пересекаются. Следовательно, неверным было наше предположение о параллельности прямых b и c. Значит, они пересекаются.

IV. Закрепление нового материала

1. Нарисуйте три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Опишите около них соответствующие окружности. Сделайте вывод о положении центра окружности, описанной около: а) остроугольного; б) прямоугольного; в) тупоугольного треугольника.

2. Докажите, что через любые три точки, не принадлежащие одной прямой (другими словами, через вершины соответствующего треугольника), проходит единственная окружность.

3*. Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, сторона которого равна 5 см.

Ответы. **1.** Центр окружности, описанной около треугольника, лежит: а) внутри треугольника; б) в середине гипотенузы треугольника; б) вне треугольника. **2.** Обратимся к рисунку 110 доказанной выше теоремы. Поскольку серединные перпендикуляры b и c к сторонам AC и AB треугольника соответственно могут пересечься только в одной точке, то центр окружности может быть только один и длина ее радиуса может быть только одна. Следовательно, искомая окружность - единственная. **3*.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на данном уроке (п. 36 учебника).

2. Решить задачи.

1) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 1 дм. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ. 5 см.

2) Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в $24°51'$.

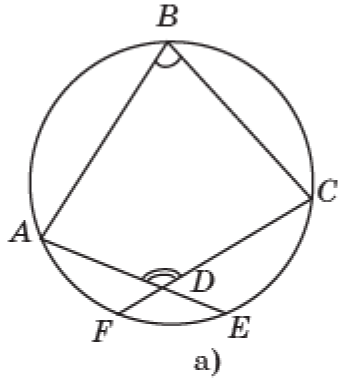
Ответ. $12°25'30''$, $12°25'30''$, $155°9'$.

3) Докажите, что если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

Решение. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, около которого описана окружность. Докажем, что $\angle B+\angle D = 180°$. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг ADC и ABC, которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной дуги окружности, т.е. их сумма равна $180°$, и $\angle A+\angle C = 180°$.

4*) Докажите, что если сумма противоположных углов четырехугольника равна $180°$, то около него можно описать окружность.

Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B+\angle D = 180°$ и $\angle A+\angle C = 180°$. Опишем окружность около треугольника ABC, тогда точка D может находиться либо внутри окружности, либо вне окружности, либо принадлежать окружности. Докажем, что первые два случая невозможны. Действительно, если точка D находится внутри описанной окружности (рис. 112, а), то $\angle B+\angle D > 180°$ (так как угол B измеряется половиной дуги $AFEC$, угол D измеряется полусуммой дуг ABC и EF). Если точка D находится вне проведенной окружности (рис. 112, б), то $\angle B+\angle D < 180°$ (так как угол B измеряется половиной дуги $AEFC$, угол D измеряется полуразностью дуг ABC и EF). Таким образом, для точки D остается третья возможность, а именно, она принадлежит проведенной окружности.



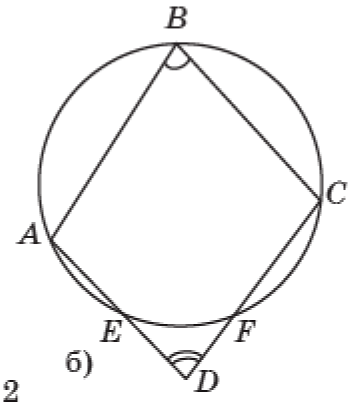


Рис. 112

Урок 25

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Многоугольник называется вписанным в окружность, если …
2. Теорема о вписанном треугольнике заключается в том, что …
3. Центром окружности, описанной около правильного треугольника, является …
4. Большая сторона прямоугольного треугольника стягивает дугу описанной около него окружности в …
5. Центр окружности, описанной около квадрата, находится …

Вариант 2

1. Окружность называется описанной около многоугольника, если …
2. Центром окружности, описанной около треугольника, является …
3. Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, находится на …
4. Сторона равностороннего треугольника стягивает дугу описанной около него окружности в …
5. Центр окружности, описанной около прямоугольника, находится …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Вопросы

- Можно ли описать окружность около правильного треугольника?
- Можно ли описать окружность около правильного четырехугольника – квадрата?

Теорема. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

Доказательство. Пусть $A_1…A_n$ – правильный n-угольник. Опишем около треугольника $A_1A_2A_3$ окружность с центром в точке O и радиусом R. Докажем, что следующая вершина A_4 также принадлежит этой окружности. Для этого достаточно проверить, что $OA_4=R$. Имеем OA_1A_2 и OA_2A_3 – равные равнобедренные треугольники. Поэтому их углы при основаниях равны и составляют половину угла данного n-угольника. Значит, угол OA_3A_4 также составляет половину угла n-угольника. Треугольники OA_3A_2 и OA_3A_4 равны по двум сторонам и углу между ними ($A_2A_3=A_3A_4$, OA_3 – общая, $\angle OA_3A_2=\angle OA_3A_4$). Следовательно, $OA_2=OA_4=R$. Аналогично показывается, что следующие вершины A_5 и т.д. принадлежат данной окружности. Таким образом, эта окружность является искомой описанной окружностью. Ее центром является точка пересечения биссектрис углов многоугольника.

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите сторону правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R?

2. Постройте правильный: а) шестиугольник; б) треугольник, вписанный в данную окружность.

3*. В окружность впишите правильный восьмиугольник.

Ответы. **1.** R. **2.** Впишите в окружность правильный шестиугольник (у него сторона равна радиусу данной окружности), теперь соедините любые три его вершины через одну, они образуют правильный треугольник, вписанный в данную окружность. **3*.** Впишите в окружность квадрат (проведите два взаимно перпендикулярных диаметра, их концы будут являться вершинами квадрата), теперь соедините середины его противоположных сторон и продолжите каждый отрезок до пересечения с окружностью, получим четыре точки, которые вместе с вершинами квадрата образуют вершины вписанного правльного восьмиугольника.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 24).

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 36 учебника).

2. Решить задачи.

1) Периметр правильного вписанного в окружность шестиугольника равен 9,6 дм. Найдите диаметр окружности.

Ответ. 3,2 дм.

2) Найдите диаметр окружности, описанной около равнобедренного треугольника с углом 120° и боковой стороной 12 см.

Ответ. 12 см.

3) Докажите, что любая вписанная в окружность трапеция будет равнобедренной.

Ответ. У такой трапеции углы, прилежащие к одному основанию, равны, следовательно, она является равнобедренной.

4*) В окружность вписан равносторонний треугольник. Докажите, что хорда, соединяющая середины дуг, отсекаемых двумя сторонами треугольника, делится ими на три равные части.

Решение. На рисунке 113 ABC – равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Дуги MA, MB, NB и NC равны. Тогда $\angle BME=\angle MBE$, значит, треугольник MEB – равнобедренный и $ME=BE$. Аналогично $\angle BNF=\angle NBF$, треугольник NFB – равнобедренный и $NF=BF$. Треугольник

BEF – равносторонний, следовательно, *BE*=*EF*=*BF*. Таким образом, *ME*=*EF*=*NF*.

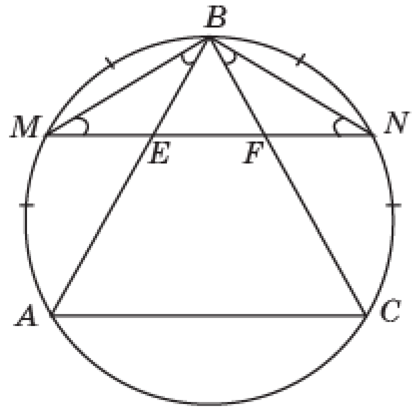


Рис. 113

37. Многоугольники, описанные около окружности (уроки 26, 27)

Цель – сформировать представления о многоугольнике, описанном около окружности и окружности, вписанной в многоугольник; сформулировать и доказать теоремы о том, что в любой треугольник и в любой правильный многоугольник можно вписать окружность; научиться использовать их при решении задач.

Урок 26

I. Устная работа

1) Около треугольника описана окружность. Назовите вид треугольника в случае, если ее центр находится: а) внутри треугольника; в) на одной из его сторон; в) вне треугольника.

2) Какой вид имеет треугольник, если расстояние от его ортоцентра (точка пересечения высот) до центра описанной окружности больше радиуса этой окружности?

3) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите радиус описанной окружности.

4) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15 см. Найдите расстояние между ортоцентром треугольника и центром описанной окружности.

5) Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 80^o и 60^o. Найдите два других угла четырехугольника.

6) Найдите внутренний, внешний и центральный углы правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) шестиугольника; г) восьмиугольника.

Ответы. 1) а) Остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. 2) Тупоугольный. 3) 5 см. 4) 7,5 см. 5) 100^o и 120^o. 6) а) 60^o, 120^o, 120^o; б) 90^o, 90^o, 90^o; в) 120^o, 60^o, 60^o; г) 135^o, 45^o, 45^o.

II. Новый материал

Обратимся к рисунку 114.

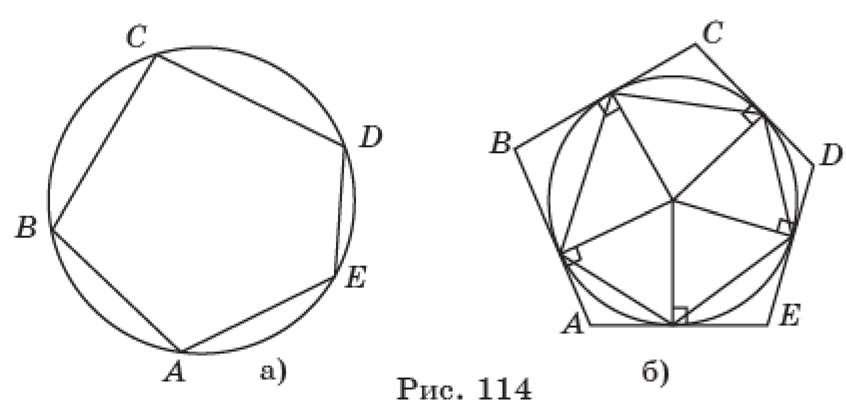


Рис. 114

Вопросы

- Как расположены изображенные на них многоугольники по отношению к окружности?

- Чем отличается это расположение?

- Что можно сказать о расстояниях от сторон многоугольника, изображенного на рисунке 114, б, до центра соответствующей окружности?

Определение. Многоугольник называется ***описанным*** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Сама окружность при этом называется ***вписанной*** в многоугольник.

Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность. Ее центром будет точка пересечения биссектрис этого треугольника.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и из его вершин A и B проведем биссектрисы a и b соответственно (рис. 115).

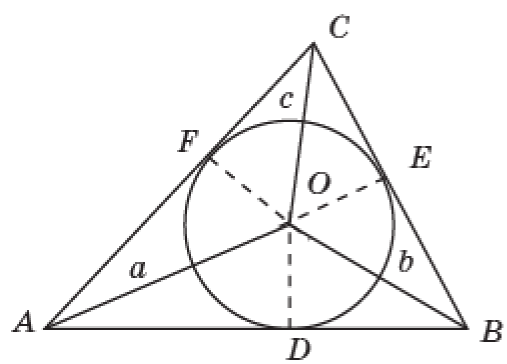


Рис. 115

Докажем, что точка O их пересечения является центром вписанной окружности. Для этого достаточно проверить равенство перпендикуляров OD, OE и OF, опущенных из точки O на стороны треугольника ABC, или, что то же самое, доказать, что точка O одинаково удалена от сторон треугольника ABC. Действительно, так как точка O принадлежит биссектрисе a, то она одинаково удалена от сторон AB и AC. Так как точка O принадлежит биссектрисе b, то она одинаково удалена от сторон AB и BC. Значит, точка O одинаково удалена от всех сторон треугольника ABC. Заметим, что из того, что точка O одинаково удалена от сторон BC и AC, следует, что она принадлежит биссектрисе c угла C, т.е. все три биссектрисы пересекаются в одной точке O. Окружность с центром в этой точке и радиусом $r=OD=OE=OF$ будет искомой вписанной окружностью.

Вопрос

- Сколько окружностей можно вписать в треугольник?

Ответ. Одну, так как две биссектрисы углов треугольника пересекаются только в одной точке, а из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр.

Теорема. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть $A_1 \ldots A_n$ – правильный n-угольник. Как было доказано выше (см. этап III урока 25), около этого многоугольника можно описать окружность, и ее центром O является точка пересечения биссектрис углов многоугольника. Точка пересечения биссектрис одинаково удалена от всех сторон многоугольника. Обозначим это расстояние через r. Окружность с центром в точке O и радиусом r будет касаться всех сторон многоугольника, т.е. будет искомой вписанной окружностью.

III. Закрепление нового материала

1. Нарисуйте окружность и описанный около нее треугольник.

2. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, которые равны 4 см и 3 см, считая от основания. Определите периметр треугольника.

3. Постройте правильный: а) треугольник; б) четырехугольник; в) шестиугольник, описанный около данной окружности.

4*. Определите вид четырехугольника, если центр вписанной в него окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей.

Ответы. **2.** 22 см. **4*.** Ромб.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 25).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 36 учебника), выучить теорию, разобранную на уроке (п. 37 учебника).

2. Решить задачи.

1) В равнобедренном треугольнике боковые стороны делятся точками касания вписанной в треугольник окружности в отношении 7:5, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника, если его основание равно 10 см.

Ответ. 34 см.

2) Докажите, что разность между суммой катетов и гипотенузой прямоугольного треугольника равна диаметру вписанной окружности.

Решение. На рисунке 116 точка O – центр окружности, вписанный в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $OK=OL=OM=r$ – радиусы одной окружности, тогда четырехугольник $OKCL$ – квадрат и $AK = AM = b - r$, $BL = BM = a - r$, откуда $c = (a - r)+(b - r)$, или $2r = (a+b) - c$.

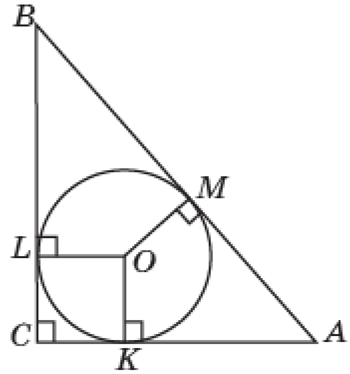


Рис. 116

3) Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 18 см. Найдите ее среднюю линию.

Ответ. У четырехугольника, описанного около окружности, равны суммы противоположных сторон, значит, в данном случае сумма оснований трапеции равна 9 см, а ее средняя линия равна 4,5 см.

4*) Докажите, что если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB+CD = BC+AD$. Проведем окружность, которая будет касаться трех его сторон AB, BC и CD. Допустим, что эта окружность не будет касаться AD (рис. 117), тогда из точки A проведем касательную AD_1 к окружности, которая будет расположена, например, как показано на рисунке.

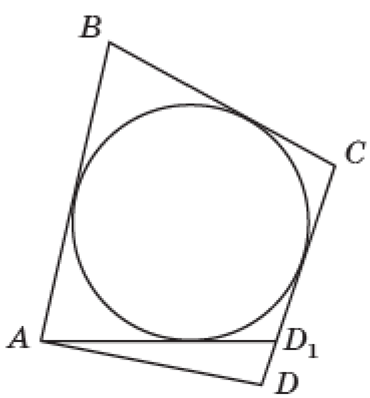


Рис. 117

Получим описанный четырехугольник, у которого должно быть $AB + CD_1 = BC+AD_1$. Вычитая это равенство почленно из данного равенства, получим $CD - CD_1 = AD - AD_1$, или $DD_1 = AD - AD_1$, чего не может быть в силу неравенства треугольника. Следовательно, проведенная окружность касается и стороны AD данного четырехугольника, т. е. в него можно вписать окружность.

Урок 27

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задание 1, 3, 5

1. Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность.

2. Докажите, что в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Задание 2, 4, 6

1. Докажите, что в любой треугольник можно вписать окружность.

2. Докажите, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются на местах.

Карточка

1) Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, описанный около данной окружности.

2) Два равных равнобедренных треугольника имеют общее основание и расположены по разные стороны от него. Можно ли в образованный ими выпуклый четырехугольник вписать окружность? Если да, где будет ее центр?

Ответ. Да, треугольники образуют ромб, центр окружности находится в середине общего основания данных треугольников.

Задание для класса

1. В трапецию, периметр которой равен 56 см, вписана окружность. Три последовательные стороны трапеции относятся как 2:7:12. Найдите стороны трапеции.

2. Сторона ромба равна 4 см, острый угол – 30°. Найдите радиус вписанной окружности.

3*. Докажите, что если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, касаются другой окружности, концентрической с первой, то этот многоугольник – правильный.

Ответы. **1.** 4 см, 14 см, 24 см, 14 см. **2.** 1 см. **3*.** Решение представлено на рисунке 118, у данного многоугольника равны все углы и равны все стороны, следовательно, он является правильным.

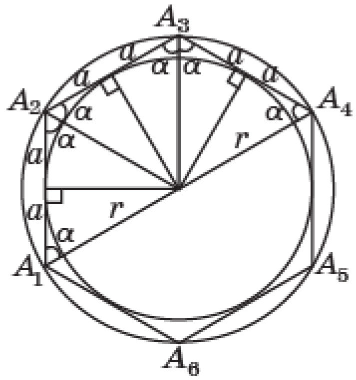


Рис. 118

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 2 из домашнего задания (см. этап V урока 26).

Дополнительные вопросы

- Какой многоугольник называется описанным около окружности?
- Каким свойством обладает четырехугольник, если около него можно описать окружность?
- Где находится центр окружности, вписанной в треугольник?

II. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, если его катеты равны 8 см и $4\sqrt{5}$ см, а гипотенуза равна 12 см.

2. Около окружности описана равнобедренная трапеция, имеющая угол 150°, ее средняя линия равна 20 дм. Найдите радиус окружности.

3*. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются точки касания сторон ромба и вписанной в него окружности. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника, если один из углов ромба равен 30°.

Вариант 2

1. В прямоугольном треугольнике сумма катетов равна 7 см, гипотенуза – 5 см. Найдите радиусы описанной и вписанной в него окружностей.

2. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 68 см. Найдите среднюю линию данной трапеции.

3*. В ромб вписана окружность. Отношение дуг между точками касания равно $\frac{2}{7}$. Определите углы ромба.

Ответы. *Вариант 1*. 1. 6 см и $2(\sqrt{5}$-1) см. 2. 5 см. 3*. Прямоугольник, 150°. *Вариант 2*. 1. 2,5 см и 1 см. 2. 17 см. 3*. Два угла по 40° и два угла по 140°.

III. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 26).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 36 и п. 37 учебника).

2. Решить задачи.

1) Углы A, B и C четырехугольника $ABCD$ относятся как 2:3:4. Найдите угол D, если около данного четырехугольника можно описать окружность.

Ответ. 90°.

2) Три последовательные стороны четырехугольника, в который можно вписать окружность, равны 6 см, 8 см и 9 см. Найдите четвертую сторону и периметр этого четырехугольника.

Ответ. 7 см, 30 см.

3) Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и радиусу r вписанной в него окружности.

Построение. Построим треугольник ABD $\angle D = 45°$, $AD = 2r+c$ и $AB = c$. Из вершины B опустим высоту BC, где точка C принадлежит AD. ABC – искомый треугольник.

4*) Докажите, что если из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, опустить перпендикуляры на его стороны или их продолжения, то основания этих перпендикуляров будут принадлежать одной прямой (***прямая Симсона***).

Решение. Возьмем на окружности, описанной около треугольника ABC, точку P и опустим из нее на его стороны или их продолжения перпендикуляры PE, PF и PD (рис. 119). Заметим, что в случае, если AP проходит через центр окружности, точки D и F совпадают с вершинами треугольника соответственно B и C. В противном случае один из углов, ABP или ACP, острый, а другой – тупой. Из этого следует, что точки D и F лежат по разные стороны от прямой BC, и для того, чтобы доказать, что точки D, E, F принадлежат одной прямой, достаточно проверить, что $\angle CEF = \angle BED$. Опишем окружность на CP как на диаметре. Поскольку $\angle CFP = \angle CEP = 90°$, то точки E и F принадлежат этой окружности, $\angle CEF = \angle CPF$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. $\angle CPF = 90° -$

$\angle PCF = 90^{\circ} - \angle DBP = \angle BPD$. Опишем окружность на BP как на диаметре. Поскольку $\angle BEP = \angle BDP = 90^{\circ}$, то точки E и D принадлежат этой окружности, поэтому $\angle BPD = \angle BED$. Следовательно, $\angle CEF = \angle BED$, и точки D, E, F принадлежат одной прямой.

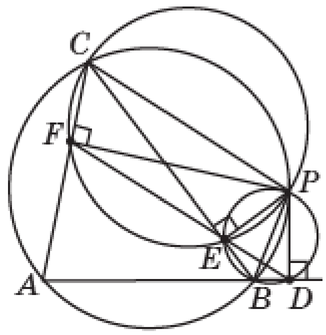


Рис. 119

38. Замечательные точки в треугольнике (уроки 28, 29)

Цель – рассмотреть точки пересечения биссектрис, медиан, высот или их продолжений треугольника, а также серединных перпендикуляров его сторон; научиться использовать их при решении задач.

Урок 28

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Биссектрисой треугольника называется …
2. Высотой треугольника называется …
3. Если точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника находится вне его, то …
4. Треугольник имеет … медиан.

Вариант 2

1. Медианой треугольника называется …
2. Серединным перпендикуляром стороны треугольника называется …
3. Если точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника находится на его стороне, то …
4. Треугольник имеет … биссектрис.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Изобразим треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. Проведем все его высоты. Сделаем соответствующее предположение и докажем следующую теорему.

Теорема. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (***ортоцентре*** треугольника).

Доказательство. Через вершины данного треугольника ABC проведем прямые, параллельные противоположным сторонам (рис. 120). Эти прямые образуют новый треугольник DEF, для которого A, B и C служат серединами сторон. В самом деле, $CE=AB$ и $AB=CD$ как противоположные стороны параллелограммов $AECB$ и $ACDB$. Следовательно, $EC=CD$. Точно так же $FB=BD$, $FA=AE$. Отсюда следует, что высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами сторон треугольника DEF, а поэтому пересекаются в одной точке.

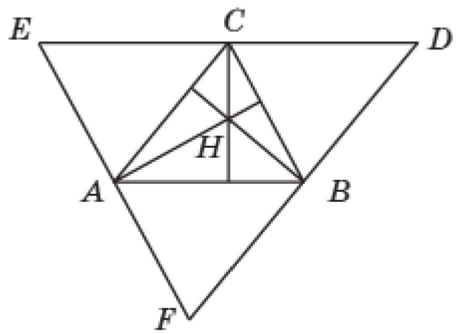


Рис. 120

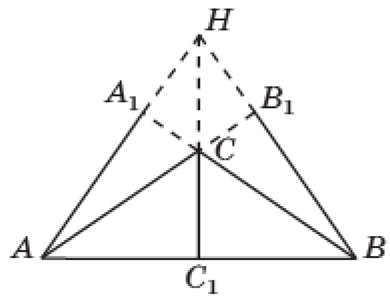


Рис. 121

Заметим, что высоты треугольника могут не пересекаться. На рисунке 121 изображен тупоугольный треугольник ABC, в котором продолжения высот AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке H, а сами высоты не пересекаются.

Задание

Изобразим треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. Проведем все его медианы. Сделаем соответствующее предположение о том, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке. Теперь измерим все медианы от вершины до точки пересечения всех медиан и от этой точки до соответствующей стороны. Сделаем предположение об отношении, в котором делит каждую медиану точка их пересечения, и докажем следующую теорему.

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке (***центроиде*** треугольника) и делятся в этой точке в отношении 2:1, считая от вершин.

Доказательство. В треугольнике ABC проведем медианы AD и BE и их точку пересечения обозначим через O (рис. 122).

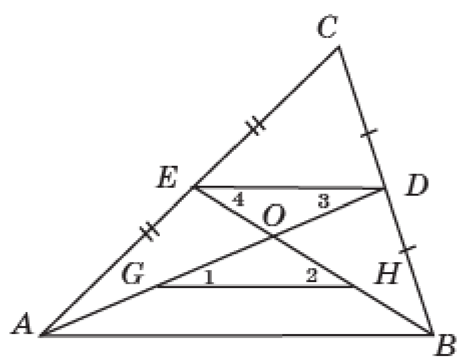


Рис. 122

Отрезок ED будет средней линией треугольника ABC. Проведем среднюю линию HG в треугольнике ABO. Треугольники HGO и EDO равны (по второму признаку равенства треугольников). Следовательно, $HO = OE$ и $GO = OD$. Таким образом, имеем $AG = GO = OD$, $BH = HO = OE$, т. е. медианы AD и BE в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины. Медиана, проведенная из вершины C, также должна делить медиану AD в отношении 2:1. Следовательно, она будет проходить через точку O, т.е. все три медианы будут пересекаться в одной точке.

IV. Закрепление нового материала

1. Пусть $ABCD$ - параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и DCA принадлежат диагонали BD и делят ее на три равные части.

2. Пусть H - точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что A - точка пересечения продолжения высот треугольника BHC.

3*. Пусть в треугольнике ABC точка C_1 обозначает середину его стороны AB; H – его ортоцентр; C_2 – основание высоты, опущенной из вершины C; A_3, B_3, C_3 – середины отрезков соответственно AH, BH и CH (рис. 123). Докажите, что точки C_1, C_2, A_3, B_3 и C_3 принадлежат одной окружности.

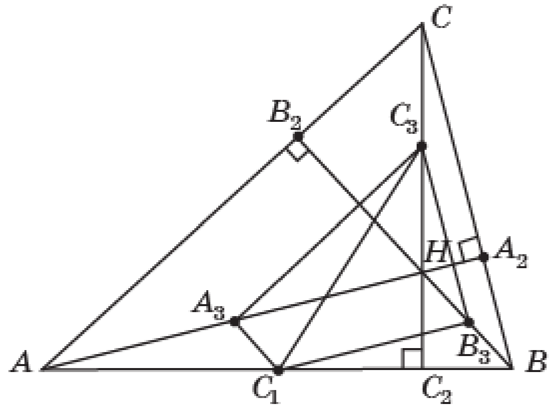


Рис. 123

Решения. **1.** Пусть O - точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 124).

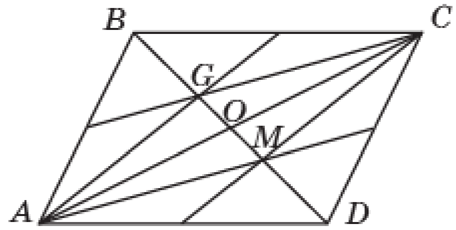


Рис. 124

Тогда BO и DO – медианы данных треугольников, значит, точки соответственно G и M пересечения их медиан принадлежат диагонали BD параллелограмма и $BG:GO = DM:MO = 2:1$. Учитывая, что $BO = DO$, имеем, что $BG = GM = MD = \frac{1}{3}BD$. **2.** Поскольку высоты треугольника пересекаются, то дан остроугольный треугольник, решение показано на рисунке 125.

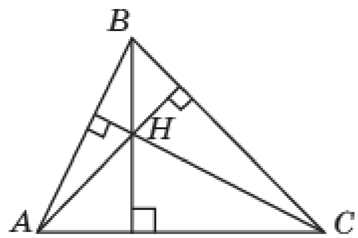


Рис. 125

3*. Построим окружность на C_1C_3 как на диаметре, тогда ей будет принадлежать точка C_2, так как $\angle C_1C_2C_3 = 90^{\circ}$. B_3C_3 и B_3C_1 – средние линии треугольников соответственно BHC и BHA, значит, $B_3C_3 \| BC$ и $B_3C_1 \| AH$, поскольку $BC \perp AH$, то $\angle C_1B_3C_3 = 90^{\circ}$ и, таким образом, точка B_3 также принадлежит проведенной окружности. Аналогично, рассмотрев соответствующие треугольники, можно показать, что точка A_3 принадлежит этой окружности.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из необязательной части домашнего задания (см. этап V урока 27).

VI. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 38 учебника).

2. Решить задачи.

1) Разделите данный отрезок на три равные части, не пользуясь построением параллельных прямых.

Ответ. На данном отрезке нужно построить два равных треугольника, чтобы они образовали параллелограмм, диагональю которого он и является (рис. 124, BD – данный отрезок). Затем провести другую диагональ параллелограмма и в получившихся треугольниках провести медианы, точки их пересечения разобьют данный отрезок на три равные части (см. решение задачи 1 из этапа IV данного урока 28).

2) Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите углы ACO и BCO, если $\angle AOB = 136°$.

Ответ. 46° и 46°.

3) Пусть CC_1, CC_2, CC_3 - соответственно высота, биссектриса и медиана, выходящие из вершины C треугольника ABC. Луч CC_2 пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Докажите, что DC_3 параллельна CC_1.

Решение. Обратимся к рисунку 126.

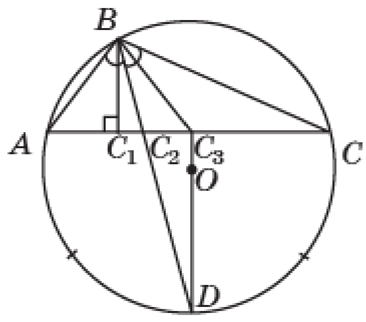


Рис. 126

Поскольку CC_2 – биссектриса угла ACB, дуги AD и BD равны, значит, C_3O проходит через точку D, где O – центр описанной окружности, поскольку CC_1 и DC_3 перпендикулярны одной прямой AB, они параллельны.

4*) Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 обозначают середины сторон, противоположных соответствующим вершинам; H – точка пересечения высот треугольника; A_2, B_2, C_2 – основания высот, опущенных из соответствующих вершин; A_3, B_3, C_3 – середины отрезков AH, BH и CH (рис. 127).

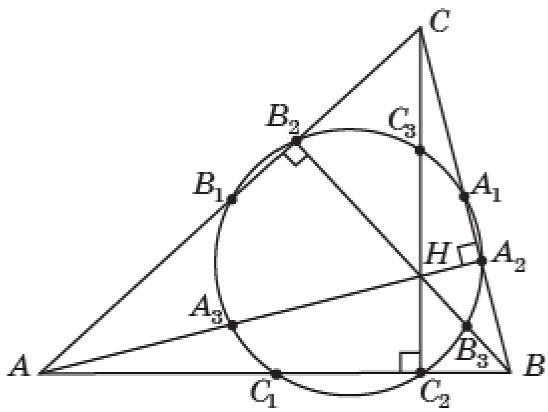


Рис. 127

Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 принадлежат одной окружности, называемой ***окружностью девяти точек***, или ***окружностью Эйлера***.

Решение. Точки C_1, C_2, A_3, B_3 и C_3 принадлежат одной окружности (см. решение задачи 3* этапа IV данного урока 28). Аналогично можно доказать, что точки A_1, A_2, A_3, B_3 и C_3 принадлежат одной окружности и точки B_1, B_2, A_3, B_3 и C_3 принадлежат одной окружности. Сравнив три полученные окружности, придем к выводу, что это одна окружность, проходящая через три точки A_3, B_3 и C_3. Она и является искомой окружностью девяти точек, или окружностью Эйлера.

5*) Окружность называется ***вневписанной*** по отношению к данному треугольнику, если она касается одной стороны и продолжения двух других сторон этого треугольника. Докажите, что для любого треугольника существуют вневписанные окружности. Сколько таких окружностей? Где находятся их центры?

Решение. Для любого треугольника существует три вневписанных окружности. Чтобы их построить, проводят биссектрисы внешних углов треугольника и точки пересечения берут за центры, радиусы равны перпендикулярам, опущенным из центров на соответствующие стороны треугольника или их продолжения. На рисунке 128 показано построение вневписанных окружностей треугольника.

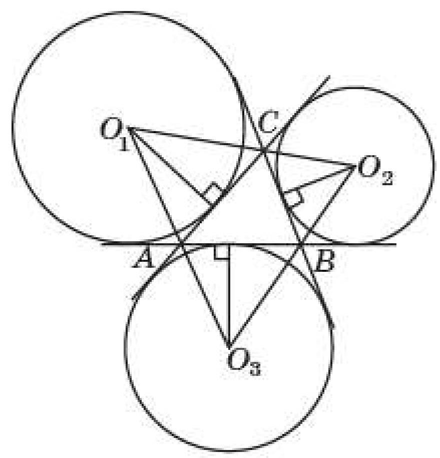


Рис. 128

Урок 29

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задания 1, 3, 5

1. Определение ортоцентра треугольника.
2. Теорема о медианах треугольника.

Задания 2, 4, 6

1. Определение центроида треугольника.
2. Теорема о высотах треугольника.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются на местах.

Карточка

1) Верно ли следующее утверждение: «Высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке»?

2) Найдите углы между парами медиан равностороннего треугольника.

3) Через вершины основания равнобедренного треугольника проведены высоты к его боковым сторонам. Найдите угол между ними, если угол при вершине треугольника, противолежащей основанию, равен 44°.

Ответы. 1) Нет. 2) 120°. 3) 44°.

Задание для класса

1. Докажите, что если какие-нибудь из замечательных точек треугольника совпадают, то этот треугольник - равносторонний.

2. В равнобедренном треугольнике угол между высотами, проведенными к его боковым сторонам, равен 144°. Найдите углы треугольника.

3. Докажите, что медиана треугольника одинаково отстоит от его вершин, образующих сторону, к которой она проведена.

4*. Восстановите треугольник ABC по положению трех точек: вершины A, центроида M и центра O описанной около треугольника окружности.

Ответы. **2.** Два угла по 72° и угол 36°. **4*.** Проводим окружность с центром в точке O и радиусом, равным OA, эта окружность, описанная около искомого треугольника; проводим отрезок AM и на его продолжении откладываем отрезок $MA_1 = \frac{AM}{2}$, точка A_1 – середина стороны BC; проводим прямую $a \perp OA_1$, B и C – точки пересечения прямой a с проведенной окружностью.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 3 из домашнего задания (см. этап VI урока 28).

Дополнительные вопросы

- Как найти центр окружности, вписанной в данный треугольник?
- Как найти центр окружности, описанной около данного треугольника?
- Где находится ортоцентр прямоугольного треугольника?

II. Устная работа

1) Может ли точка пересечения биссектрис треугольника находиться вне этого треугольника?

2) Может ли точка пересечения медиан треугольника находиться вне этого треугольника?

3) Может ли точка пересечения высот или их продолжений находиться вне этого треугольника?

4) Может ли вершина треугольника быть точкой пересечения его высот?

5) Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров для: а) прямоугольного; б) остроугольного; в) тупоугольного треугольника?

6) Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой его биссектрисы?

7) К какой из сторон треугольника ближе расположен центр описанной окружности?

8) К какой из вершин треугольника ближе расположен центр вписанной окружности?

Ответы. 1) Нет. 2) Нет. 3) Да. 4) Да. 5) а) В середине гипотенузы; б) внутри треугольника; в) вне треугольника. 6) Нет. Предположим, что биссектриса BL треугольника ABC биссектрисой AK в точке O их пересечения делится пополам (рис. 129), т. е. $BO = OL$, тогда прямоугольные треугольники OPL, OHB и OQB равны (по гипотенузе и катету), где OP, OH и OQ – радиусы вписанной в треугольник окружности.

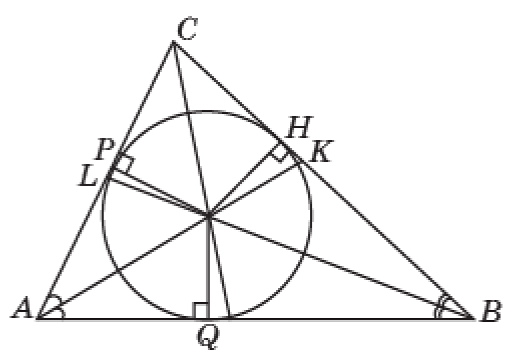


Рис. 129

Тогда $\angle LOP = \angle BOQ = \angle BOH$, что невозможно. 7) Наибольшей. 8) К вершине наибольшего угла.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Под каким углом виден каждый катет прямоугольного треугольника с углом 20° из центра окружности, вписанной в него?

2. Под какими углами видны стороны равностороннего треугольника из центра окружности, описанной около него?

3. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 55° и 127°. Найдите остальные углы четырехугольника.

4. Три последовательные стороны описанного около окружности четырехугольника относятся как 2:5:9. Периметр четырехугольника равен 88 см. Найдите его стороны.

5*. Постройте треугольник ABC по его высоте $AH = h_a$, высоте $BP = h_b$ и острому углу A.

Ответы. **1.** 100°, 125°, 135°. **2.** Три угла по 120°. **3.** 125° и 53°. **4.** 8 см, 20 см, 36 см и 24 см. **5*.** Строим прямоугольный треугольник ABP по острому углу A и катету $BP = h_b$, проводим окружность с центром в точке A и радиусом, равным h_a, из точки B проводим к этой окружности касательную (которая лежат с AB в разных полуплоскостях относительно BP), точку ее пересечения с прямой AP называем C, ABC – искомый треугольник.

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 34 – п. 38 учебника).

2. Решить задачи.

1) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Угол при основании равен 60°. Где расположен центр описанной около данной трапеции окружности?

Ответ. В середине большего основания.

2) Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 1 см и 3 см. Найдите периметр и среднюю линию трапеции.

Ответ. 8 см, 2 см.

3) Пусть H - точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC, CHA равны между собой.

Решение. Поскольку высоты (AA_1, BB_1, CC_1) данного треугольника пересекаются, то он – остроугольный. Докажем, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AHB, равны. Действительно, на рисунке 130 точка O – центр окружности, описанной около данного треугольника, OD, MD и ND – серединные перпендикуляры сторон треугольника AHB, D – точка их пересечения, т. е. центр окружности, описанной около треугольника AHB. $\angle A_1AB = \angle C_1CB$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами или можно рассмотреть прямоугольные треугольники A_1AB и C_1CB, имеющие общий острый угол), аналогично, $\angle B_1BA = \angle C_1CA$.

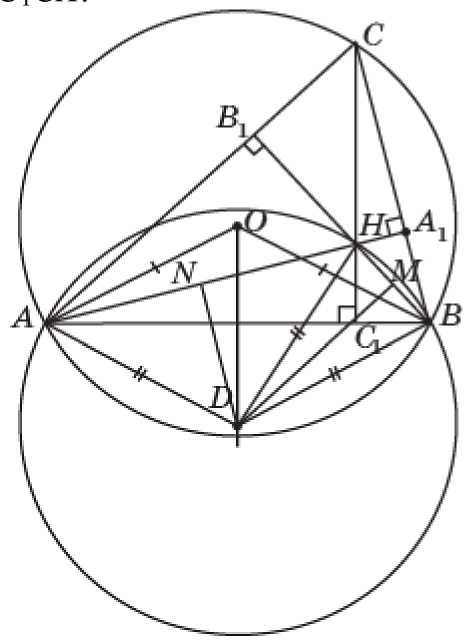


Рис. 130

Тогда $\angle A_1AB + \angle B_1BA = \angle C_1CB + \angle C_1CA = \angle ACB = \alpha$, значит, $\angle AOB = 2\alpha$. Таким образом, в окружности с центром в точке D, описанной около треугольника AHB, центральный угол ADB тоже равен 2α. Итак, четырехугольник $AOBD$ – ромб, и $OA = DA$, т. е. радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AHB, равны. Аналогично можно доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников BHC и AHC, каждый равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

4*) Докажите, что внутри произвольного треугольника ABC с углами, меньшими 120^o, существует точка O (***точка Торричелли***), из которой стороны треугольника видны под углом 120^o.

Решение. На стороне AB треугольника ABC построим равносторонний треугольник ABC_1 (рис. 131, а) и опишем около него окружность. Отрезок AB стягивает дугу этой окружности величиной 120^o. Следовательно, точки этой дуги, отличные от A и B, обладают тем свойством, что отрезок AB виден из них под углом 120^o. Аналогично, на стороне AC треугольника ABC построим равносторонний треугольник ACB_1 (рис. 131, б) и опишем около него окружность. Точки соответствующей дуги, отличные от A и C, обладают тем свойством, что отрезок AC виден из них под углом 120^o. В случае, когда углы треугольника меньше 120^o, эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке O. В этом случае $\angle AOB = \angle AOC = 120^o$. Следовательно, $\angle BOC = 120^o$.

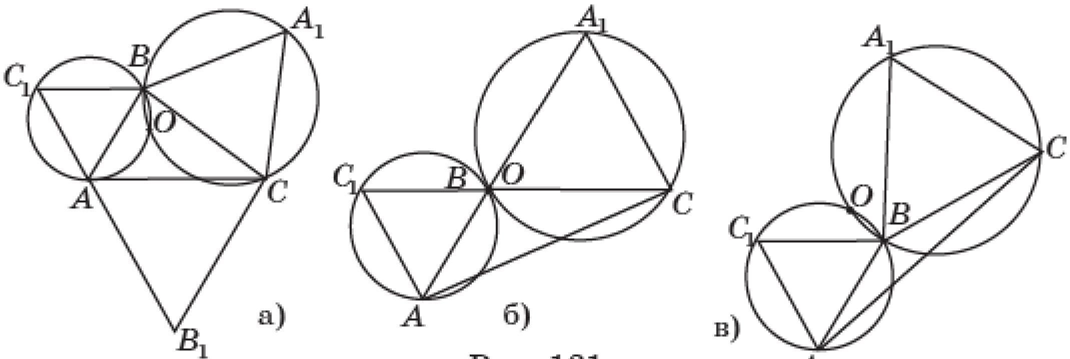


Рис. 131

В случае, когда один из углов треугольника, например ABC, равен 120°, точкой пересечения дуг окружностей будет точка B (рис. 131, б). В этом случае точки Торричелли не существует, так как нельзя говорить об углах, под которыми видны из этой точки стороны AB и BC.

В случае, когда один из углов треугольника, например ABC, больше 120° (рис. 131, в), соответствующие дуги окружностей не пересекаются. Сами окружности пересекаются в некоторой точке O, из которой стороны AB и BC видны под углом 60°. В этом случае точки Торричелли также не существует.

Таким образом, во всех трех случаях окружности, описанные около равносторонних треугольников, построенных на сторонах данного треугольника, пересекаются в одной точке. Если углы треугольника меньше 120°, то эта точка лежит внутри треугольника и является точкой Торричелли.

5*) Докажите, что центр описанной окружности, ортоцентр, центроид и центр окружности девяти точек треугольника принадлежат одной прямой (***прямая Эйлера***). При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между ортоцентром и центром описанной окружности.

Решение. На рисунке 132 точки H и O являются соответственно ортоцентром и центром описанной окружности треугольника ABC; AA_1, BB_1, CC_1 – его медианы.

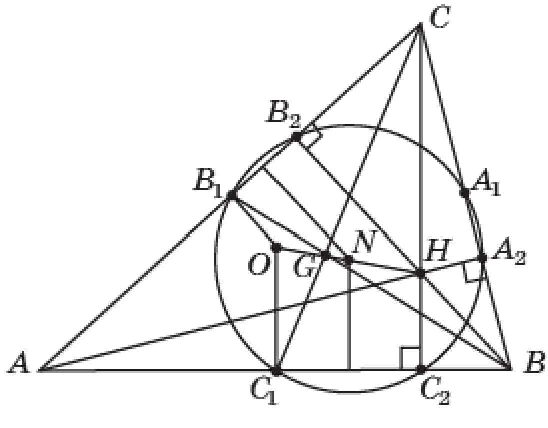


Рис. 132

Проведем прямую OH и докажем, что центроид и центр девяти точек (см. задачу 4* из этапа VI урока 28) треугольника ABC принадлежат ей. Обозначим точку пересечения прямых OH и CC_1 через G. Проведем в треугольнике BHC среднюю линию KL и заметим, что в треугольнике ABC отрезок B_1C_1 - тоже средняя линия, значит, $KL||B_1C_1$ и $KL=B_1C_1$; $\Delta KHL=\Delta B_1OC_1$ (по стороне и двум прилежащим углам, которые соответственно равны, как углы с соответственно параллельными сторонами), откуда $HL=OC_1$, но $HL=CL$, значит, $CL=OC_1$. Проведем LE – среднюю линию треугольника CGH, тогда $\Delta CEL=\Delta C_1OG$ (по стороне и двум прилежащим углам), откуда следует, что $CE=C_1G$, значит, $CG=2CE=2C_1G$, другими словами, точка G делит отрезок CC_1 в отношении 2:1, считая от вершины, т. е. является точкой пересечения медиан, или центроидом, данного треугольника. Итак, центроид принадлежит прямой, соединяющей ортоцентр треугольника с центром описанной около него окружности, к тому же делит этот отрезок в отношении 2:1, считая от ортоцентра.

Теперь рассмотрим хорды B_2B_1 и C_2C_1 окружности девяти точек и проведем их серединные перпендикуляры, они должны пересечься в центре N этой окружности, который будет совпадать с серединой отрезка OH, поскольку он является боковой стороной прямоугольных трапеций OB_1B_2H и OC_1C_2H.

Урок 30
Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Под каким углом виден каждый катет из центра окружности, описанной около данного треугольника?

2. Углы треугольника относятся как 3:7:8. Под какими углами видны его стороны из центра вписанной окружности?

3. Два угла, вписанного в окружность четырехугольника, равны 80° и 60°. Найдите остальные углы четырехугольника.

4. Три последовательные стороны описанного около окружности четырехугольника относятся как 1:3:5. Периметр четырехугольника равен 36 см. Найдите его стороны.

5*. Постройте треугольник ABC по его высоте $AH=h$, биссектрисе $AL=l$ и углу B.

Вариант 2

1. Угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, равен 120°. Под каким углом видна каждая сторона треугольника из центра описанной около него окружности?

2. Два угла треугольника равны 36° и 48°. Под какими углами видны его стороны из центра вписанной окружности?

3. Три последовательные угла, вписанного в окружность четырехугольника, относятся как 3:4:6. Найдите углы четырехугольника.

4. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. Сторона AB на 4 см больше стороны CD, а стороны BC и AD относятся соответственно как 1:2. Найдите стороны данного четырехугольника, если его периметр равен 48 см.

5*. Постройте треугольник ABC по его стороне $BC=a$, медиане $AM=m$ и углу HAM, где AH – высота треугольника ABC.

39. Центральная симметрия
(урок 31)

Цель – сформировать понятия центральной симметрии, центрально-симметричной фигуры; научиться строить центрально-симметричные точки и фигуры; сформулировать и доказать основные свойства центральной симметрии.

Урок 31

I. Анализ контрольной работы № 3

II. Устная работа

1) У какого правильного многоугольника равны между собой внутренний, внешний и центральный углы?

2) В окружность вписан многоугольник. а) Все его стороны равны. Равны ли его углы? б) Все его углы равны. Равны ли стороны многоугольника?

3) Приведите пример неправильного многоугольника, у которого: а) все стороны равны; б) все углы равны между собой.

4) Верно ли следующее утверждение; «Центры окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, совпадают»?

5) Какой наибольший центральный угол может быть у правильного многоугольника?

6) Какой наименьший внутренний угол может быть у правильного многоугольника?

Ответы. 1) Квадрата. 2) а) Да; б) нет. 3) а) Ромб; б) прямоугольник. 4) Да. 5) $120_{\circ}$. 6) $60_{\circ}$.

III. Новый материал

Рассмотрим отрезок AA' и найдем его середину, которую обозначим точкой O. Теперь возьмем произвольную точку B и построим такой отрезок BB', чтобы точка O была его серединой. Для этого нужно провести луч BO, на его продолжении за точку O отложить отрезок $OB' = OB$. После выполнения этого задания делаем вывод о том, какие две точки называются симметричными относительно некоторой точки – центра симметрии.

Определение. Точки A и A' называются ***симметричными относительно точки*** O, если O является серединой отрезка AA'. Точка O считается симметричной сама себе.

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно точки O точка A', называется ***центральной симметрией***. Точка O при этом называется ***центром симметрии***.

Задание

Построим произвольный треугольник ABC и отметим произвольную точку O (рис. 133). Построим точки A', B' и C', симметричные относительно этой точки соответственно вершинам данного треугольника. Получим треугольник $A'B'C'$. Возьмем любую точку M, принадлежащую треугольнику ABC, и построим точку M', симметричную ей относительно центра O.

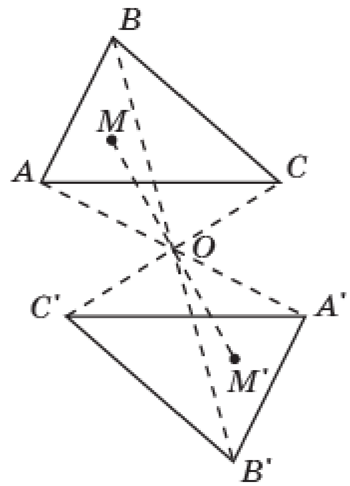


Рис. 133

Вопросы

- Где будет находиться точка M'?

- Какое положение займет точка M', если точка M является, например: а) серединой стороны AB треугольника ABC; б) центроидом треугольника ABC; в) центром окружности, описанной около треугольника ABC?

Определение. Две фигуры F и F' называются ***центрально-симметричными*** относительно центра O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 134).

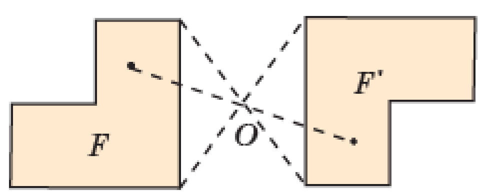


Рис. 134

Задание

Построим окружность с центром в точке O, и возьмем произвольные точки C, D, E, ей принадлежащие.

Вопрос

- Где будут находиться точки C', D', E', соответственно симметричные данным относительно центра O?

Определение. Фигура F называется ***центрально-симметричной*** относительно центра O, если она симметрична сама себе.

Таким образом, окружность является центрально-симметричной фигурой.

Рассмотрим некоторые свойства центральной симметрии.

Свойство 1. Центральная симметрия сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены центральной симметрией относительно точки O точек A, B соответственно (рис. 135). Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны (по первому признаку равенства треугольников), и, следовательно, $AB = A'B'$.

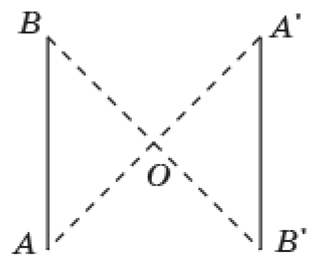


Рис. 135

Свойство 2. Центральная симметрия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точки A, B и C принадлежат одной прямой, причем точка C лежит между точками A и B. Тогда $AC+CB=AB$. Для центрально-симметричных точек A', B', C' будет выполняться равенство $A'C'+C'B'=A'B'$. Следовательно, точка C' лежит на прямой $A'B'$ между точками A' и B'. Значит, отрезок AB переводится в отрезок $A'B'$.

Аналогичным образом доказывается, что луч AB переводится в луч $A'B'$ и вся прямая AB переходит в прямую $A'B'$.

IV. Закрепление нового материала

1. Докажите, что центральная симметрия переводит прямую в параллельную ей прямую или в нее саму.

2*. Всякий ли правильный многоугольник имеет центр симметрии?

Решения. **1.** Ясно, что если центр симметрии принадлежит данной прямой, то эта прямая при центральной симметрии переходит сама в себя. Пусть центр симметрии O не принадлежит прямой a (рис. 136). Докажем, что прямая a', симметричная a, будет параллельна прямой a. Рассмотрим какие-нибудь точки A и B на прямой a. Они переходят в точки A' и B' на прямой a'. При этом треугольники OAB и $OA'B'$ равны (по первому признаку равенства треугольников, так как $OA=OA'$, $OB=OB'$, $\angle AOB=\angle A'OB'$). Следовательно, $\angle OAB=\angle OA'B'$. Но эти углы являются внутренними накрест лежащими.

Значит, прямые a и a' параллельны (по признаку параллельности двух прямых).

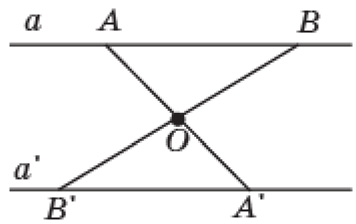


Рис. 136

2*. Правильный многоугольник с нечетным числом сторон не имеет центра симметрии. Правильный многоугольник с четным числом сторон имеет центр симметрии, совпадающий с центром описанной окружности.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 39 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно центра O, если: а) O принадлежит прямой AB; б) O не принадлежит прямой AB.

2) Докажите, что центральная симметрия переводит окружность в окружность.

Ответ. Следует из свойства 1.

3) Докажите, что центральная симметрия сохраняет величины углов.

Решение. Пусть дан угол BAC и центр симметрии O. Соединим точки B и C отрезком и рассмотрим треугольник ABC и треугольник $A'B'C'$, симметричный ему относительно центра O. Углом, симметричным данному углу BAC относительно центра O, будет угол $B'A'C'$. Поскольку $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ (по трем сторонам), $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

4) Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

Решение. Действительно, у параллелограмма, например $ABCD$, точка O - точка пересечения его диагоналей, является центром симметрии треугольников AOD, COB и AOB, COD. Таким образом, точка, симметричная относительно центра O произвольной точке параллелограмма, будет принадлежать ему. Следовательно, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой относительно точки пересечения своих диагоналей.

5*) При каком расположении трех различных прямых образованная ими фигура имеет бесконечно много центров симметрии?

Ответ. Прямые параллельны, и одна из них находится на равных расстояниях от двух других.

6*) Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно два центра симметрии.

Ответ. Пусть O_1, O_2 – центры симметрии данной фигуры Φ. Обозначим O_3 точку, симметричную O_1 относительно центра O_2. Докажем, что она также будет центром симметрии фигуры Φ. Пусть A – точка данной фигуры Φ. A_3 – точка, симметричная A относительно O_3. Требуется доказать, что A_3 принадлежит Φ. Обозначим A_2 точку, симметричную A относительно центра O_2. По условию A_2 принадлежит Φ. Обозначим A_1 точку, симметричную A_2 относительно центра O_1. По условию она принадлежит Φ. Тогда A_3 будет симметрична A_1 относительно центра O_2 и, следовательно, будет принадлежать Φ. Отсюда следует, что если фигура имеет два центра симметрии, то их бесконечно много.

3. Принести циркуль и транспортир.

40. Поворот. Симметрия *n*-го порядка
(уроки 32, 33)

Цель - сформировать понятия поворота, симметрии n-го порядка; научиться строить фигуры, которые получаются при повороте данных фигур на определенные углы; сформулировать и доказать основные свойства поворота.

Урок 32

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Две точки A и A' являются симметричными относительно точки O, если…
2. Центром симметрии называется …
3. Фигура F является центрально-симметричной относительно точки O, если …
4. Первое свойство центральной симметрии заключается в том, что …
5. При центральной симметрии прямая, проходящая через центр симметрии, переводится в …
6. Примером не центрально-симметричной фигуры является …

Вариант 2

1. Центральной симметрией называется …
2. Две фигуры F и F' являются центрально-симметричными, если …
3. Центром симметрии фигуры называется …
4. Второе свойство центральной симметрии заключается в том, что …
5. При центральной симметрии прямая, не проходящая через центр симметрии, переводится в …
6. Примером центрально-симметричной фигуры является …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

На рисунке 137 изображен угол AOA', причем $OA=OA'$ и $\angle AOA' = \varphi$.

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A ***поворотом*** вокруг точки O на угол φ, если $OA'=OA$ и $\angle AOA' = \varphi$.

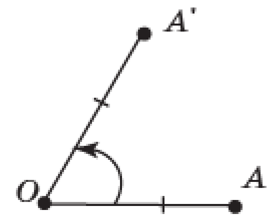


Рис. 137

Вопросы

- На рисунке 137 поворот осуществлен по часовой стрелке или против часовой стрелки?

- Как определить, в какую точку перейдет данная точка A при повороте вокруг точки O по часовой стрелке?

Преобразование плоскости, при котором данная точка O остается на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол φ, называется ***поворотом*** вокруг точки O.

Задания

- Изобразим отрезок AB и повернем его вокруг точки A против часовой стрелки на угол, равный 90°. Получим отрезок AB' (рис. 138).

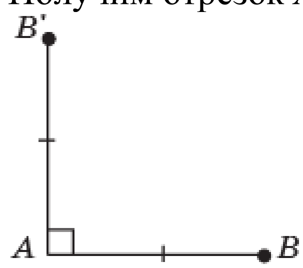


Рис. 138

- Теперь изобразим треугольник ABC и произвольную точку O. Повернем данный треугольник вокруг данной точки по часовой стрелке на угол, равный 90° (рис. 139). Получим треугольник $A'B'C'$.

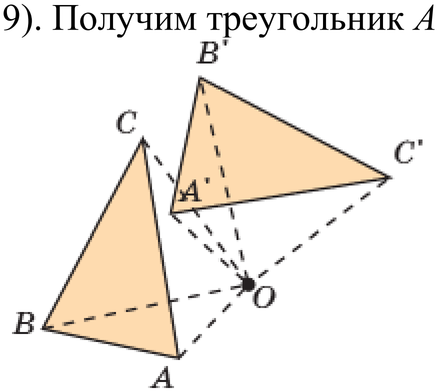


Рис. 139

Говорят, что фигура F' получается ***поворотом*** фигуры F вокруг точки O, если все точки фигуры F' получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг точки O на угол φ.

Рассмотрим некоторые свойства поворота.

Свойство 1. Поворот сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены поворотом вокруг точки O точек A, B соответственно (рис. 140). Тогда треугольники AOB и $A'OB'$ равны (по первому признаку равенства треугольников), и, следовательно, $AB=A'B'$.

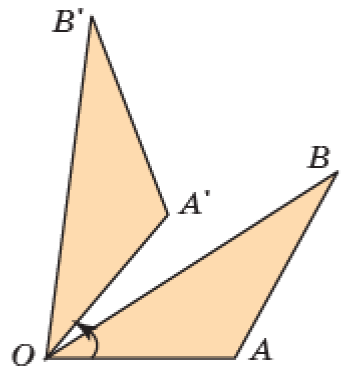


Рис. 140

Свойство 2. Поворот переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для центральной симметрии.

IV. Закрепление нового материала

1. Постройте точки, в которые переходит заданная точка A при повороте вокруг заданной точки O против часовой стрелки на углы: а) 30°; б) 120°.

2. Квадрат повернули вокруг точки пересечения диагоналей на угол 45° по часовой стрелке. Какая фигура является общей частью полученного и исходного квадратов?

3*. Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разбить на многоугольники, имеющие центры симметрии, то и исходный многоугольник имеет центр симметрии.

Ответы. **2.** Правильный восьмиугольник (рис. 141). **3*.** Рассмотрим какую-нибудь сторону разбиваемого многоугольника. Она состоит из одной или нескольких сторон многоугольников разбиения. Каждый из таких многоугольников имеет центр симметрии и, следовательно, имеет сторону, равную и параллельную части рассматриваемой стороны. Продолжая этот процесс, мы придем к стороне разбиваемого многоугольника, которая будет равна и параллельна исходной. Таким образом, в данном многоугольнике для каждой стороны имеется равная ей и параллельная сторона. Из этого следует, что многоугольник имеет центр симметрии, им является точка пересечения прямых, соединяющих противоположные концы равных и параллельных сторон многоугольника.

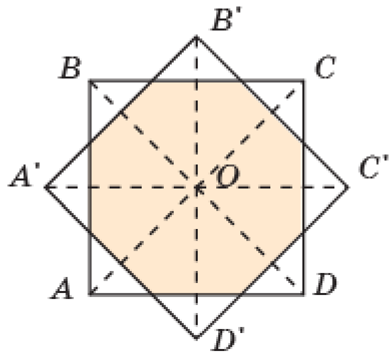


Рис. 141

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 40 учебника). Повторить теорию (п. 39 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте точки, в которые переходит заданная точка A при повороте вокруг заданной точки O на углы: а) 60° по часовой стрелке; б) 180°; в) 270° против часовой стрелки.

2) Определите, на какой угол нужно повернуть прямую, чтобы полученная прямая была: а) перпендикулярна данной; б) параллельна данной.

Ответ. а) 90°; б) 180°.

3) Правильный треугольник повернули на 60° вокруг центра описанной окружности против часовой стрелки. Какая фигура является общей частью полученного и исходного треугольников?

Ответ. Правильный шестиугольник (рис. 142).

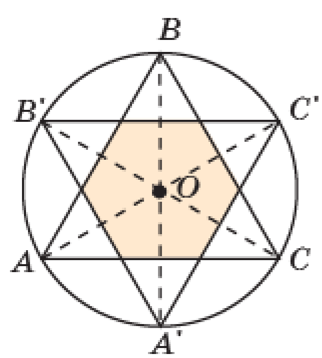


Рис. 142

4*) На продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC построен равносторонний треугольник CDE (рис. 143). Докажите, что треугольник CMP, где M и P - середины отрезков AD и BE соответственно, - равносторонний.

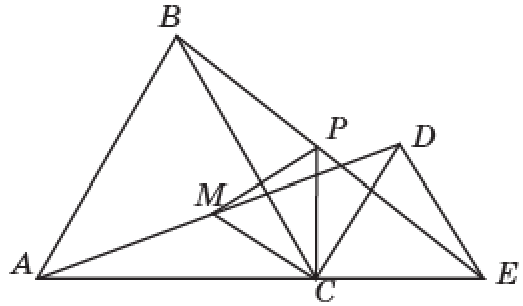


Рис. 143

Решение. Повернем треугольник ACD вокруг вершины C на угол 60° (по часовой стрелке). Тогда вершина A перейдет в вершину B, а D – в E. Середина M отрезка AD перейдет в середину P отрезка BE. Следовательно, треугольник CMP - равнобедренный с углом C, равным 60°. Значит, он равносторонний.

Урок 33

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задания 1, 3, 5

1. Определение центрально-симметричных фигур.
2. Формулировка и доказательство свойств поворота.

Задания 2, 4, 6

1. Определение поворота вокруг точки на заданный угол.
2. Формулировка и доказательство свойств центральной симметрии.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Постройте отрезок, в который переходит данный отрезок AB при повороте вокруг точки O на угол $30°$ по часовой стрелке.

2) Каким образом можно повернуть правильный треугольник, чтобы при повороте он перешел сам в себя? Укажите центр и угол поворота.

Ответ. Вокруг своего центра (центра описанной или вписанной окружностей) на 120∘ по часовой стрелке или против часовой стрелки.

Задание для класса

1. Постройте треугольник, в который переходит данный треугольник ABC при повороте вокруг точки O на угол $45°$ по часовой стрелке.

2. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

3. Каким образом можно повернуть правильный шестиугольник, чтобы при повороте он перешел сам в себя? Укажите центр и угол поворота.

4*. Докажите, что при повороте сохраняются углы.

Ответы. **2.** Действительно, точки окружности перейдут в точки, которые будут находиться на одинаковом расстоянии от точки, в которую при данном повороте перейдет центр данной окружности (так как при повороте сохраняются раксстояния), следовательно, полученные точки тоже образуют окружность, причем равную данной. **3.** Вокруг своего центра (центра описанной или вписанной окружностей) на 60º по часовой стрелке или против часовой стрелки. **4*.** Решение аналогично решению задачи 3 из этапа V урока 31.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашней работы (см. этап V урока 32).

Дополнительные вопросы

- Как определить центр симметрии двух данных точек?

- Может ли фигура иметь бесконечно много центров симметрии? Приведите пример.

- Как найти точку, в которую перейдет точка M при повороте вокруг точки S на угол α?

II. Устная работа

1) Заданы точки A и A', полученная из A поворотом. Можно ли по этим данным однозначно определить угол поворота?

2) Заданы точки A и A', полученная из A поворотом на угол 60° по часовой стрелке. Можно ли по этим данным однозначно определить точку O, вокруг которой произведен поворот?

3) Заданы точки A, B и точки A', B', полученные соответственно из A, B поворотом. Можно ли по этим данным однозначно определить точку O, вокруг которой произведен поворот, и угол поворота?

4) Какие фигуры, изображенные на рисунке 144, при повороте переходят сами в себя? Укажите центры и углы поворота.

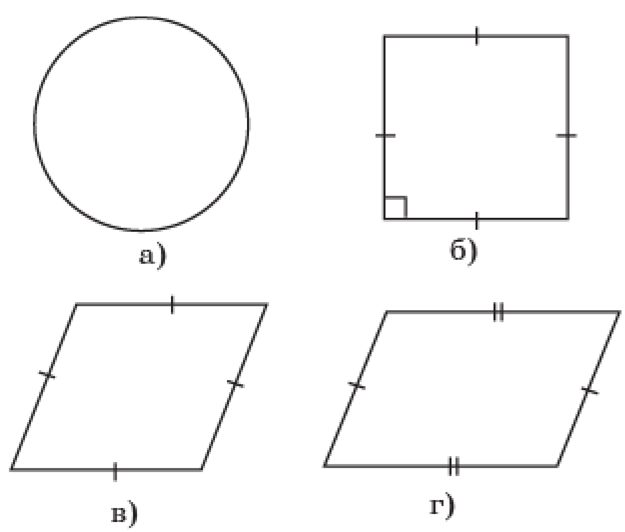


Рис. 144

Ответы. 1) Нет. 2) Да. 3) Да. 4) а) Центр окружности, любой угол поворота; б) вокруг центра квадрата (точки пересечения диагоналей), например, на 90°; в), г) ромб и параллелограмм вокруг точки пересечения диагоналей на 180°.

III. Новый материал

Определение. Точка O называется ***центром симметрии n-го порядка*** фигуры F, если при повороте фигуры F вокруг точки O на угол $\frac{360°}{n}$ фигура F совмещается сама с собой.

Вопросы

- Центром симметрии какого порядка является: а) центр правильного треугольника; б) центр квадрата; в) центр правильного шестиугольника; г) точка пересечения диагоналей параллелограмма?

Ответы. а) 3-го; б) 4-го; в) 6-го; г) 2-го порядка.

Ясно, что центр симметрии второго порядка является просто центром симметрии.

Вопросы

- Куда перейдет точка A при повороте вокруг точки O на: а) 0°; б) 360°?

Повороты на 0° и на 360° оставляют все точки на месте.

Определим поворот для произвольных положительных градусных величин. Обычно направление поворота в этом случае выбирается против часовой стрелки. Воспользуемся тем, что, делая поворот вокруг точки O на угол φ_1, а затем вокруг той же точки на угол φ_2, мы получаем поворот вокруг точки O на угол $\varphi_1+\varphi_2$. Поэтому, если градусная величина φ больше 360°, то мы представляем ее в виде суммы градусных величин $\varphi_1, ..., \varphi_n$, меньших 360°, и последовательно делаем повороты вокруг точки O на углы $\varphi_1, ..., \varphi_n$. В результате получим искомый поворот на угол φ.

Заметим, что поворот на 360° переводит точки в те же самые точки, т. е. оставляет их на месте. Поэтому для поворота на градусную величину φ, большую 360°, можно поступать и другим образом. Сначала представить φ в виде $\varphi = 360°n + \varphi_o$, где n – некоторое натуральное число, $\varphi_o < 360°$. Затем делаем поворот на угол φ_o. Он и будет искомым поворотом.

Для отрицательных градусных величин поворот определяется так же, как и для положительных, только в направлении по часовой стрелке. А именно, поворот на угол $-\varphi$ для $0 < \varphi < 360°$ означает поворот на угол φ по часовой стрелке. Поворот на произвольную градусную величину $-\varphi$, где $\varphi > 0°$, означает поворот на градусную величину φ в направлении по часовой стрелке.

IV. Закрепление нового материала

1. Постройте точки, в которые переходит заданная точка A при повороте вокруг заданной точки O на углы: а) -30°; б) 740°.

2. Докажите, что центр окружности, описанной около правильного n-угольника, является центром симметрии n-го порядка.

3*. Правильный шестиугольник, сторона которого равна 1, повернут вокруг своего центра на угол 30°. Найдите сторону правильного двенадцатиугольника, являющегося общей частью исходного шестиугольника и повернутого.

Ответы. **2.** Пусть O – центр окружности, описанной около правильного n-угольника. Тогда при повороте вокруг O на угол $\frac{360°}{n}$ многоугольник перейдет сам в себя, т. е. O – является центром симметрии n-го порядка. **3*.** $2\sqrt{3}$ см.

V. Занимательный момент

Решения задач 5*, 6* (этап IV урока 31) и 4* (этап V урока 32).

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 40 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте треугольник, в который переходит данный треугольник ABC при повороте вокруг точки O на угол –45°.

2) Докажите, что поворот на угол – φ для 0 <φ <360° равносилен повороту на угол 360° – φ.

Ответ. Поворот на угол 360° равносилен повороту на угол 0°, значит, поворот на угол 360° – φ равносилен повороту на угол 0° – φ, т.е. на угол – φ.

3) Докажите, что фигура, образованная тремя равными окружностями, каждая из которых касается двух других, обладает центром симметрии 3-го порядка. Нарисуйте эту фигуру.

Ответ. Фигура представлена на рисунке 145. Центры данных окружностей являются вершинами равностороннего треугольника, центр которого, на рисунке точка C, является для всей фигуры центром симметрии 3-го порядка.

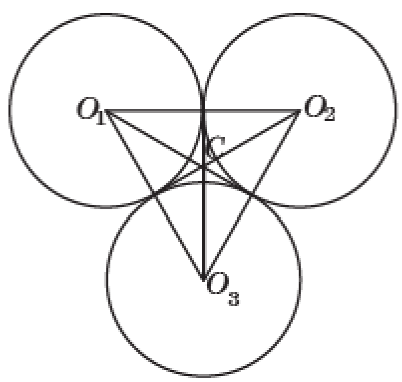


Рис. 145

4*) Дан правильный пятиугольник. Каждая вершина соединена отрезком с серединой соответствующей стороны так, как показано на рисунке (рис.

146). Докажите, что точки пересечения проведенных отрезков являются вершинами правильного пятиугольника.

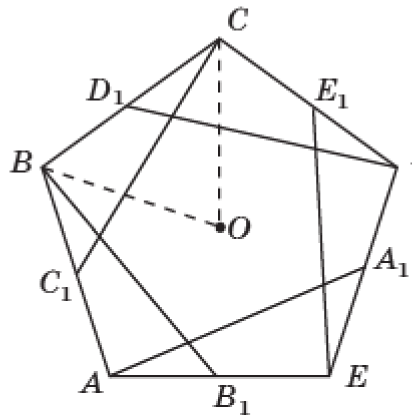


Рис. 146

Указание. Рассмотрите поворот вокруг точки O – центра данного пятиугольника, на 72°.

41. Осевая симметрия
(уроки 34, 35)

Цель – сформировать понятия осевой симметрии, фигур, симметричных относительно оси; научиться строить симметричные относительно оси точки и фигуры; сформулировать и доказать основные свойства осевой симметрии.

Урок 34

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Поворотом вокруг точки называется …
2. Фигура F' получается поворотом из фигуры F вокруг точки O, если …
3. Второе свойство поворота заключается в том, что …
4. Центральная симметрия является поворотом на …
5. Центр окружности, описанной около квадрата, является центром симметрии n-го порядка, где n = …
6. Примером фигуры, которая при повороте на любой угол ϕ переходит в себя, является …

Вариант 2

1. Точка A' плоскости получается из точки A поворотом вокруг точки O на угол ϕ, если …
2. Точка O является центром симметрии n-го порядка фигуры F, если …
3. Первое свойство поворота заключается в том, что …
4. Центр симметрии является центром симметрии n-го порядка, где n= …
5. Центр окружности, описанной около равностороннего треугольника, является центром симметрии n-го порядка, где n = …
6. Поворот на угол -φ равносилен повороту на …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Построим отрезок AA' и найдем его середину – точку O.

Вопрос

- Как называются точки A и A' относительно точки O?

Теперь проведем серединный перпендикуляр, назовем его c, отрезка AA'.

Вопросы

- Как удобно по аналогии с центральной симметрией назвать точки A и A' относительно прямой c?

- Какая точка будет симметричной точке O – середине отрезка AA', относительно прямой c?

После обсуждения ответов на эти вопросы вводим понятие осевой симметрии.

Определение. Две точки A и A' называются ***симметричными относительно прямой*** c, если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Каждая точка прямой c считается симметричной самой себе.

Задание

Построим произвольный треугольник ABC и произвольную прямую c (рис. 147).

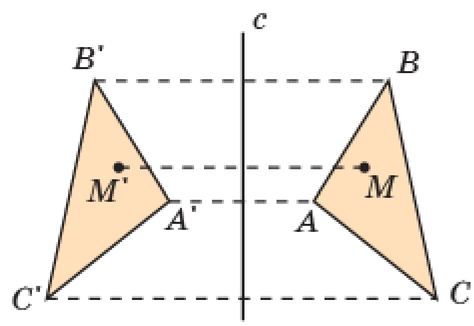


Рис. 147

Построим точки A', B' и C', симметричные относительно этой прямой соответственно вершинам данного треугольника. Получим треугольник $A'B'C'$. Возьмем любую точку M, принадлежащую треугольнику ABC, и построим точку M', симметричную ей относительно оси c.

Вопросы

- Где будет находиться точка M'?

- Какое положение займет точка M', если точка M является, например: а) серединой стороны BC треугольника ABC; б) ортоцентром треугольника ABC; в) центром окружности, вписанной в треугольник ABC?

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно прямой c точка A', называется ***осевой симметрией***. Прямая c при этом называется ***осью симметрии***.

Две фигуры F и F' называются ***симметричными относительно оси*** c, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры.

Фигура F называется ***симметричной относительно оси*** c, если она симметрична сама себе. Например, квадрат симметричен относительно прямой, на которой лежит его диагональ (рис. 148).

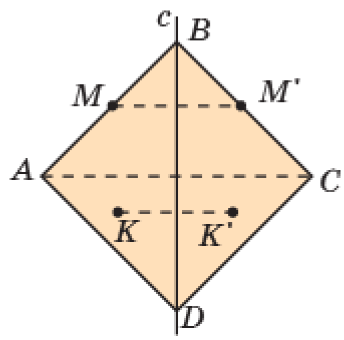


Рис. 148

Рассмотрим некоторые свойства осевой симметрии.

Свойство 1. Осевая симметрия сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены симметрией относительно оси c из точек A, B соответственно. Предположим, что точки A, B лежат по одну сторону от c (рис. 149).

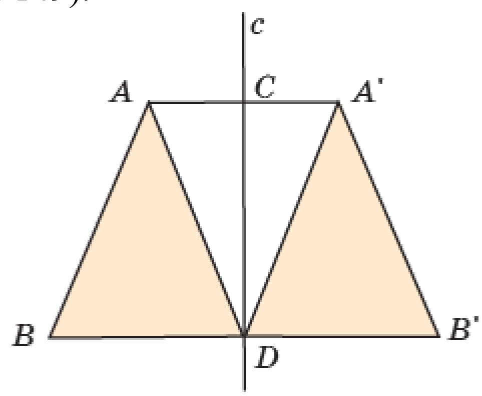


Рис. 149

Обозначим через C, D точки пересечения прямых AA', BB' с прямой c. Прямоугольные треугольники ACD и $A'CD$ равны (по двум катетам). Следовательно, $\angle ADC = \angle A'DC$ и $AD = A'D$. Треугольники ADB и $A'DB'$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $AB = A'B'$.

Пусть теперь точки A, B лежат по разные стороны от c (рис. 150).

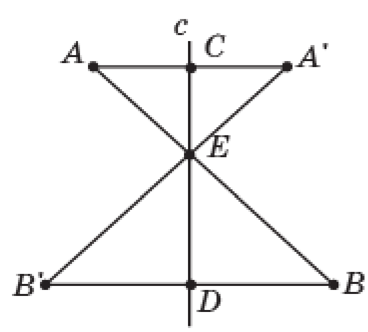


Рис. 150

Обозначим через C, D точки пересечения прямых AA', BB' с прямой c, E –точка пересечения AB с осью c. Прямоугольные треугольники ACE, $A'CE$ и BDE, $B'DE$ равны (по двум катетам). Следовательно, $AE=A'E$ и $BE=B'E$, $AE+BE=A'E+B'E$, т.е. $AB=A'B'$.

Свойство 2. Осевая симметрия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для центральной симметрии.

IV. Закрепление нового материала

1. Осевая симметрия переводит точку A в точку A'. Постройте ось симметрии.

2. Найдите оси квадрата.

3. Приведите пример фигуры, которая не имеет оси симметрии.

4*. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

Ответы. **2.** 4 оси симметрии. Из них 2 оси проходят через противоположные вершины и 2 оси проходят через середины противоположных сторон. **3.** Например, неравнобедренный прямоугольный треугольник, неравнобедренная трапеция, параллелограмм (общего типа). **4*.** Центром симметрии этой фигуры является точка пересечения ее перпендикулярных осей симметрии.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 33).

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 41 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте оси симметрии: а) отрезка; б) равнобедренного треугольника; в) прямой. Сколько их?

Ответ. а) 1, серединный перпендикуляр отрезка; б) 1, прямая, содержащая высоту треугольника, опущенную на его основание; в) бесконечно много, любая прямая, перпендикулярная данной прямой.

2) На рисунке 151 укажите буквы латинского алфавита, имеющие: а) центр симметрии; б) одну ось симметрии; в) две оси симметрии.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Рис. 151

Ответ. а) H, I, N, O, S, X, Z; б) A, B, C, D, E, M, T, U, V, W, Y, Z; в) H, I, O, X.

3) Докажите, что прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.

Ответ. Действительно, точка, симметричная произвольной точке ромба относительно осей, на которых лежат его диагоналей, будет принадлежать ромбу, и, наоборот, любая точка ромба является образом точек ромба при данных осевых симметриях (рис. 152).

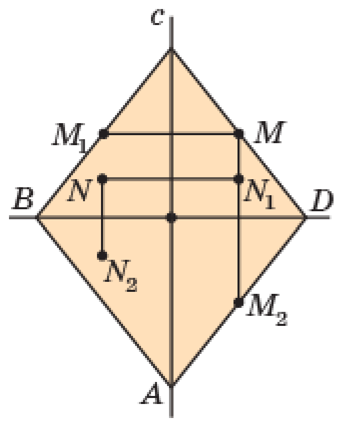


Рис. 152

4*) Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно прямых, на которых лежат его стороны, принадлежат описанной около этого треугольника окружности.

Решение. Обратимся к рисунку 153, H – ортоцентр треугольника ABC.

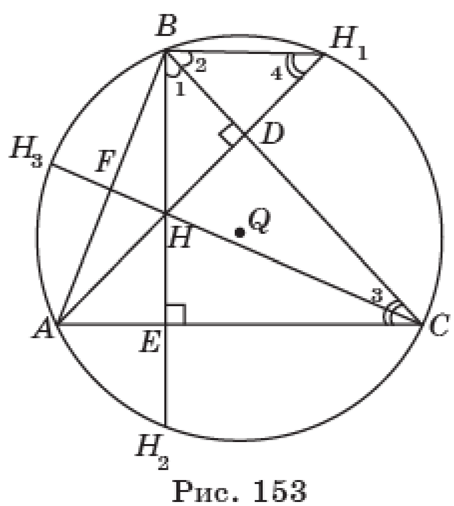


Рис. 153

Продолжим его высоты до пересечения с описанной около треугольника окружностью и назовем соответствующие точки пересечения H_1, H_2, H_3. Докажем, что они симметричны точке H относительно прямых, на которых лежат соответстветствующие стороны треугольника. Например, H_1 симметрична точке H относительно прямой BC. Для этого рассмотрим треугольник HBH_1, он является равнобедренным, так как у него BD – одновременно высота и биссектриса ($\angle 1 = 90^\circ - \angle 3$, $\angle 2 = 90^\circ - \angle 4$, но $\angle 3 = \angle 4$, так как они опираются на одну и ту же дугу AB, значит, $\angle 1 = \angle 2$). Таким образом, BD – медиана, и $HD = DH_1$, т. е. точки H и H_1 симметричны относительно прямой BC. Аналогично можно показать, что точки H_2 и H_3 симметричны точке H относительно прямых соответственно AC и AB.

Урок 35

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задания 1, 3, 5

1. Определение фигур, симметричных относительно прямой.
2. Формулировка и доказательство первого свойства осевой симметрии.

Задания 2, 4, 6

1. Определение фигуры, симметричной относительно прямой.
2. Формулировка и доказательство второго свойства осевой симметрии.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Постройте фигуру, симметричную ромбу относительно прямой, содержащей одну из его сторон.

2) Укажите оси симметрии прямоугольника.

Ответ. Две прямые, каждая из которых соединяет середины противоположных сторон прямоугольника.

Задание для класса

1. Постройте фигуру, симметричную правильному шестиугольнику относительно оси, которая содержит одну из его сторон.

2. Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник? Укажите их.

3. Докажите, что равнобедренный треугольник симметричен относительно биссектрисы, проведенной через вершину, противолежащую основанию этого треугольника.

4*. Как центральную симметрию можно получить с помощью двух осевых симметрий?

Ответы. **2.** 6 осей симметрии, три из которых проходят через наибольшие диагонали и три соединяют середины противоположных сторон шестиугольника. **3.** Точка, симметричная произвольной точке равнобедренного треугольника относительно оси, содержащей высоту, проведенную к его основанию, принадлежит треугольнику, и, наоборот, любая точка этого треугольника является образом точки треугольника при данной осевой симметрии. **4*.** Взять за центр симметрии точку пересечения двух перпендикулярных осей.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашней работы (см. этап VI урока 34).

Дополнительные вопросы

- Как определить, имеет ли фигура ось симметрии?
- Приведите пример фигуры, которая имеет одну ось симметрии.
- Как найти точку, в которую перейдет точка M при осевой симметрии относительно прямой a?

II. Устная работа

1) Какие точки при осевой симметрии переходят в себя?

2) Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя?

3) Осевая симметрия переводит точку A в точку A'. Где находится ось симметрии?

4) Точка A' симметрична точке A относительно оси c. Верно ли, что точка A симметрична точке A' относительно этой оси?

5) Задача 2 из домашней работы (см. этап VI урока 34, рисунок 151).

Ответы. 1) Принадлежащие оси. 2) Ось симметрии. 3) Серединный перпендикуляр отрезка, концами которого являются данные точки. 4) Да.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Постройте ось симметрии, зная положение двух симметричных относительно нее точек M и M'.

2. Приведите пример цифры, имеющей ось симметрии. Сколько у нее осей симметрии?

3. На рисунке (рис. 154) a и b – оси симметрии четырехугольника $ABCD$. Докажите, что он является прямоугольником.

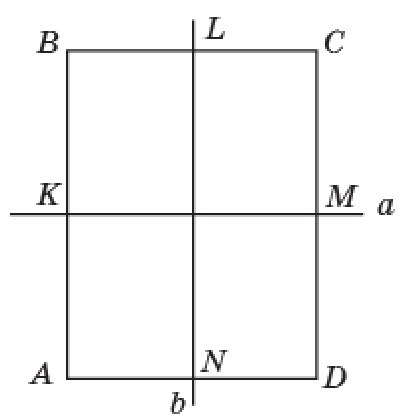


Рис. 154

4*. Отрезок EF симметричен отрезку $E'F'$ относительно прямой l и не пересекает ее. Прямая k перпендикулярна l и пересекает данные отрезки соответственно в точках M и M'. Докажите, что точки M и M' симметричны относительно прямой l.

Вариант 2

1. Постройте фигуру, симметричную отрезку KL относительно прямой a, которая проходит через точку K и перпендикулярна прямой KL.

2. Приведите пример буквы русского алфавита, имеющую: а) одну ось симметрии; б) две оси симметрии.

3. На рисунке (рис. 155) c и d – оси симметрии четырехугольника $CDEF$. Докажите, что он является ромбом.

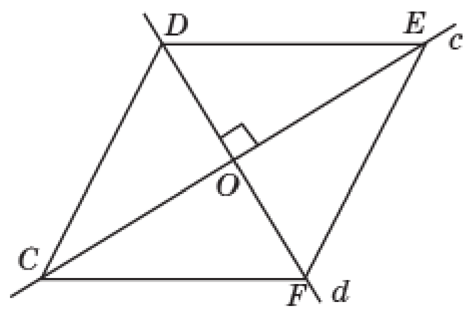


Рис. 155

4*. Отрезок GH симметричен отрезку $G'H'$ относительно прямой k и пересекает ее. Прямая l перпендикулярна k и пересекает данные отрезки соответственно в точках P и P'. Докажите, что точки P и P' симметричны относительно прямой k.

Ответы. *Вариант 1*. 2. 0 – две оси симметрии, 3 – одна ось симметрии, 8 – две оси симметрии. 3. $ABCD$ – параллелограмм с равными диагоналями, следовательно, он является прямоугольником. 4*. Четырехугольник $EE'F'F$– равнобедренная трапеция, у которой прямая l является осью симметрии, точке $M \in EF$, должна соответствовать точка, принадлежащая стороне $E'F'$, т.е. точка M'. *Вариант 2*. 2. а) Е, П, Т и др.; б) Ж, Н, О, Х и др. 3. $ABCD$ – параллелограмм, диагонали которого перпендикулярны, следовательно, он является ромбом. 4*. Пусть $GH \cap k = O$, тогда $G'H' \cap k = O$, и пусть $P \in GO$, в треугольнике GOG' прямая k является осью симметрии, значит, точке, симметричной точке $P \in GO$, должна соответствовать точка, принадлежащая стороне $G'O$, т.е. точка P'.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 34).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 41 учебника).

2. Решить задачи.

1) Определите число осей симметрии правильного n-угольника. Как они расположены?

Ответ. Всего n осей симметрии. Если n – четное число, n-угольник имеет $\frac{n}{2}$ осей, на которых лежат наибольшие диагонали (т. е. проходящие через центр правильного многоугольника) и $\frac{n}{2}$ осей, соединяющих середины его противоположных сторон. Если n – нечетно, то каждая из осей соединяет соответствующую вершину с серединой противоположной стороны правильного многоугольника.

2) Докажите, что равнобедренный треугольник симметричен относительно биссектрисы, проведенной через вершину, противолежащую основанию этого треугольника.

Ответ. Точка, симметричная любой точке треугольника относительно данной оси, будет принадлежать этому треугольнику, и, наоборот, любая точка треугольника является образом его точки при данной осевой симметрии.

3) Докажите, что окружность при осевой симметрии переходит в окружность.

Ответ. Пусть центр окружности O и произвольная точка M, ей принадлежащая, переходят при осевой симметрии соответственно в точки O_1 и M_1. По свойствам осевой симметрии $OM = O_1M_1$, следовательно, фигура, в которую перейдет окружность, является фигурой, состоящей из точек, одинаково удаленных от точки O_1, т. е. является окружностью, причем равной данной.

4*) Точки G и H расположены по одну сторону от прямой x, которой принадлежит точка P. Известно, что прямые PG и PH образуют равные углы с прямой x. Докажите, что ломаная GPH является кратчайшей среди ломаных GXH, где точка X принадлежит прямой x.

Решение. На рисунке 156 $\angle GPM = \angle HPN$. Через точку G проведем прямую, перпендикулярную данной прямой x, и назовем G_1 точку ее пересечения с прямой HP. Тогда $\angle G_1PM = \angle HPN$ и треугольник GPG_1 – равнобедренный: у него PM одновременно является биссектрисой и высотой, значит, и медианой, т.е. точки G и G_1 являются симметричными относительно данной прямой x, $GP+PH = G_1P+PH = G_1H < G_1X+XH = GX+XH$ ($G_1X=GX$) в силу неравенства треугольника. Таким образом, ломаная GPH является кратчайшей из данных ломаных.

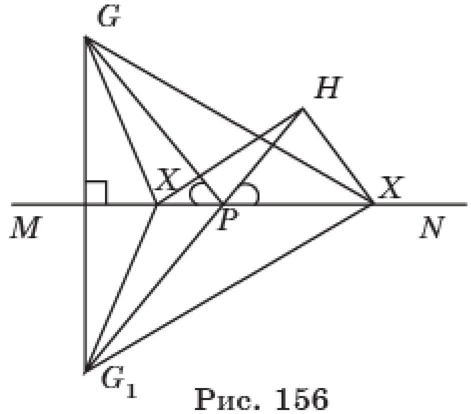


Рис. 156

5*) Угол MON симметричен углу $M'O'N'$ относительно прямой l. Докажите, что углы равны.

Решение. На сторонах данных углов отложим соответственно равные отрезки, а именно, $OM = O'M'$, $ON = O'N'$. Тогда $MN = M'N'$ (свойство осевой симметрии сохранять расстояние между соответствующими точками) и $\Delta MON = \Delta M'O'N'$ (по трем сторонам), откуда следует равенство данных углов.

42. Параллельный перенос
(уроки 36, 37)

Цель – сформировать понятия параллельного переноса, вектора, одинаково и противоположно направленных векторов, длины (модуля) вектора; научиться строить точки и фигуры при заданном параллельном переносе; сформулировать и доказать основные свойства параллельного переноса.

Урок 36

I. Устная работа

1) Как расположены относительно друг друга: а) две центрально-симметричные прямые?

2) Имеет ли центр симметрии: а) луч; б) две пересекающиеся прямые; в) фигура, составленная из полосы и прямой, не лежащей в ней?

3) На рисунке 157 найдите фигуры, которые имеют: а) центр симметрии; б) центр симметрии n-го порядка, определите n.

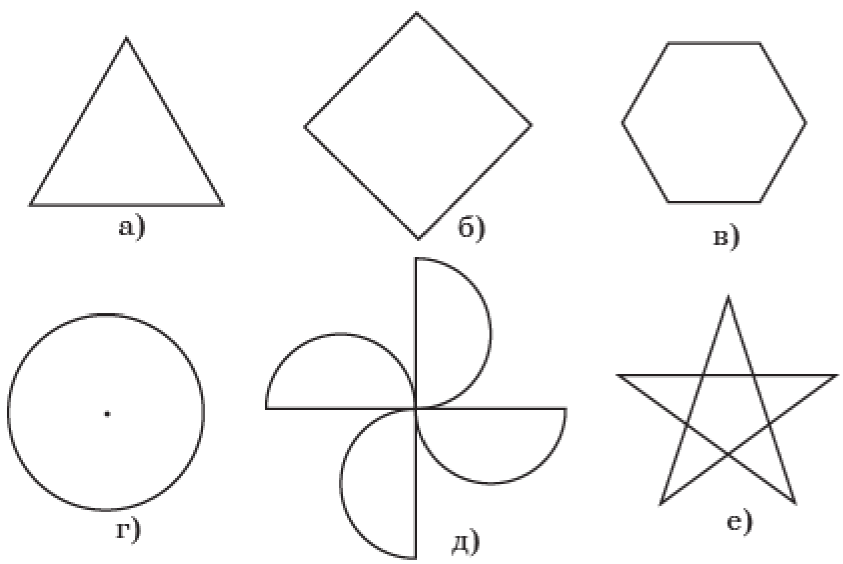


Рис. 157

4) В каком случае прямая при осевой симметрии переходит в параллельную ей прямую?

5) Существует ли осевая симметрия, которая переводит луч в себя?

6) Может ли иметь центр симметрии невыпуклый: а) четырехугольник; б) шестиугольник?

Ответы. 1) Параллельны. 2) а) Нет; б) да, это точка пересечения прямых; в) имеется два случая, а именно: прямая пересекает полосу (рис.158, а), тогда центром симметрии будет точка O – середина отрезка AB; прямая параллельна прямым, образующим полосу (рис.158, б), тогда центра симметрии нет.

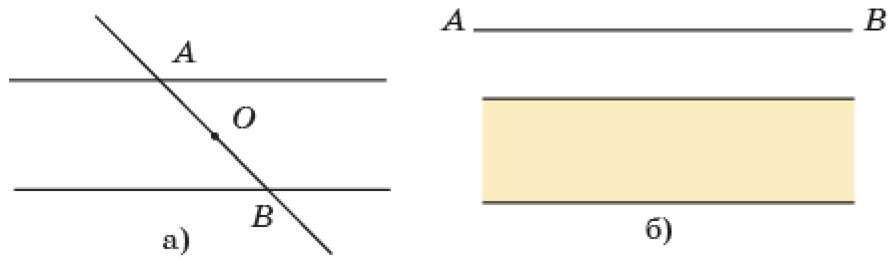


Рис. 158

3) Центр симметрии имеют фигуры б), в), г), д); центр симметрии n-го порядка имеют все фигуры, у фигуры: а) n=3; б) n=4; в) n=6; г) n - любое число; д) n=4; е) n=5. 4) В случае если данная прямая параллельна оси симметрии. 5) Да, если луч лежит на оси симметрии. 6) а) Нет; б) да, например, шестиугольник на рисунке 159.

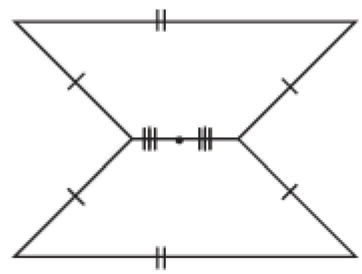


Рис. 159

II. Новый материал

Изобразим отрезок AB и точку M (лучше сначала взять точку, не принадлежащую прямой AB). Построим отрезок: 1) $MN=AB$; 2) $MN=AB$ и $MN||AB$; 3) $MN=AB$, $MN||AB$ и точки B и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой AM.

Вопрос

- Сколько таких отрезков можно построить в каждом случае?

Ответ. 1) Бесконечно много; 2) два; 3) один.

Остановимся на последнем, третьем случае. Наглядно можно себе представить, что точки A и M переносились в одном и том же направлении на одну и ту же величину, чтобы подчернуть это, поставим соответствующие стрелки (рис. 160). Не только своим значением, но и направлением характеризуются многие физические величины, например, скорость, сила и др. Такие величины называют векторными.

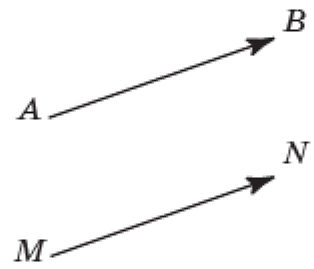


Рис. 160

Определение. ***Вектором*** называется направленный отрезок, т.е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B. Векторы обозначаются также и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$, и т.д.

Обратимся к рисунку 161.

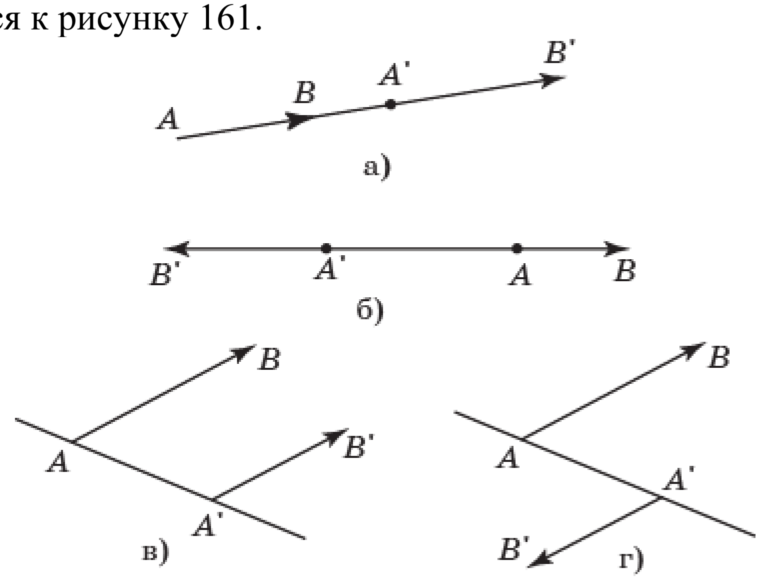


Рис. 161

Вопросы

- Чем отличаются расположения векторов на рисунках 161, а и 161, б?
- Тот же вопрос для рисунков 161, в и 161, г.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, лежащие на одной прямой, называются ***одинаково направленными***, если один из лучей AB или $A'B'$ содержится в другом (рис. 161, а). В противном случае они называются ***противоположно направленными*** (рис. 161, б).

Два вектора, не лежащие на одной прямой, называются ***одинаково*** (***противоположно***) направленными, если они лежат на параллельных прямых по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала (соотвественно рис. 161, в и рис. 161, г).

Введем понятие длины вектора.

Вопрос

- Как вы думаете, что нужно принять за длину вектора?

Определение. ***Длиной***, или ***модулем***, вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Вопрос

- Сделайте предположение о том, какие пары векторов на рисунке 162 можно считать равными? Почему?

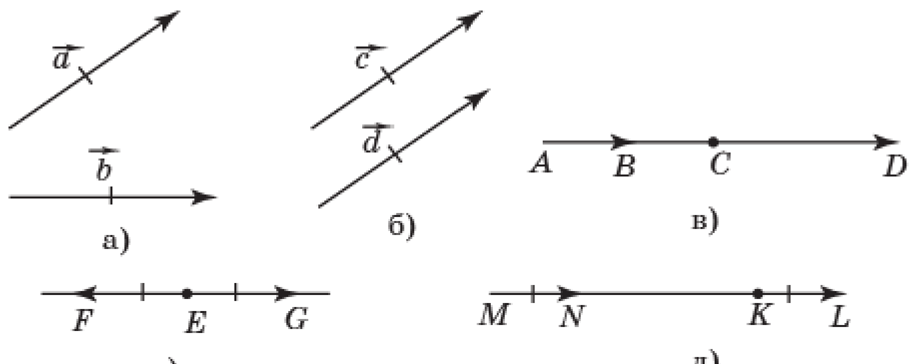


Рис. 162

Ответ. На рисунках 162, б и 162, д.

Определение. Два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Вопрос

- Может ли ветор иметь нулевую длину?

Изобразим такой вектор.

Таким образом, рассматривают нулевые векторы, у которых начало совпадает с концом. Все нулевые векторы считаются равными между собой. Они обозначаются $\vec{0}$, и их длина считается равной нулю.

В дальнейшем мы рассмотрим понятие вектора более подробно. Сейчас же используем это понятие для определения параллельного переноса.

Задание

Изобразите вектор $\vec{a}$ и произвольные точки A, B, C. Постройте векторы $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, равные вектору $\vec{a}$.

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A параллельным переносом на вектор $\vec{a}$, если $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$.

Преобразование плоскости, при котором точкам A сопоставляются точки A' так, что вектор $\overrightarrow{AA'}$ равен заданному вектору $\vec{a}$, называется ***параллельным переносом*** на вектор $\vec{a}$.

Задание

Изобразите отрезок MN, задайте вектор $\vec{b}$ и сделайте параллельный перенос данного отрезка на данный вектор.

Говорят, что фигура F' получается ***параллельным переносом*** фигуры F на вектор $\vec{a}$, если все точки фигуры F' получаются параллельным переносом точек фигуры F на вектор $\vec{a}$ (рис. 163).

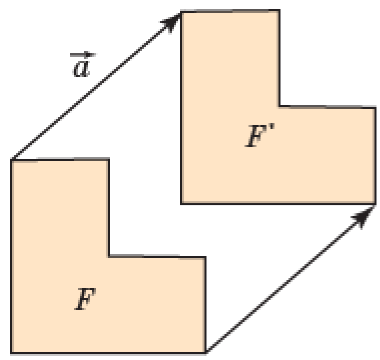


Рис. 163

Рассмотрим некоторые свойства параллельного переноса.

Свойство 1. Параллельный перенос сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ точек A и B соответственно. Тогда $AA'B'B$ – параллелограмм, и $AB = A'B'$.

Свойство 2. Параллельный перенос переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точки A, B и C принадлежат одной прямой, причем точка C лежит между точками A и B. Тогда $AC + CB = AB$. Для A', B', C', полученных в результате параллельного переноса, будет выполняться равенство $A'C' + C'B' = A'B'$. Следовательно, точка C' лежит на прямой $A'B'$ между точками A' и B'. Значит, отрезок AB переводится в отрезок $A'B'$. Аналогичным образом доказывается, что луч AB переводится в луч $A'B'$ и вся прямая AB переходит в прямую $A'B'$.

III. Закрепление нового материала

1. Изобразите параллелограмм $ABCD$. Сколько различных веторов задают его стороны?

2. Изобразите окружность и вектор $\vec{k}$. Постройте фигуру, в которую перейдет окружность при параллельном переносе, заданном данным вектором. Какой вывод можно сделать.

3*. Треугольник $C'D'E'$ получен параллельным переносом из треугольника CDE. Докажите, что при этом биссектрисы треугольника CDE переходят в соответствующие биссектрисы треугольника $C'D'E'$.

Ответы. **1.** 4 вектора. **2.** При параллельном переносе окружность перейдет в равную себе окружность. **3*.** На рисунке 164 DL – биссектриса данного треугольника, L' – точка, соответствующая точке L при заданном параллельном переносе, $\Delta CDL = \Delta C'D'L'$ (по трем сторонам) и $\Delta LDE = \Delta L'D'E'$, значит, $\angle CDL = \angle C'D'L'$ и $\angle LDE = \angle L'D'E'$, но $\angle CDL = \angle LDE$, следовательно, $\angle C'D'L' = \angle L'D'E'$, т. е. $D'L'$ - биссектриса треугольника $C'D'E'$.

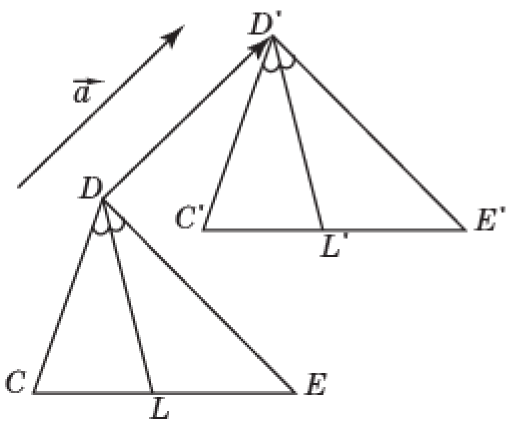


Рис. 164

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 42 учебника).

2. Решить задачи.

1) Даны точки A, B, C. Постройте точку C', получающуюся из точки C параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$.

2) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Ответ. Это следует из того, что $ABDC$ – параллелограмм.

3) Докажите, что прямая при параллельном переносе переходит или сама в себя, или в прямую, параллельную исходной.

Решение. Если прямая параллельна прямой, на которой лежит вектор, задающий параллельный перенос, то она переходит в себя, так как все ее точки переходят в точки, принадлежащие ей. Если прямая не параллельна прямой, на которой лежит этот вектор, то возьмем произвольные две точки A, B, ей принадлежащие, и точки A_1, B_1, в которые они соответственно переходят при данном параллельном переносе, тогда четырехугольник AA_1B_1B – параллелограмм, значит, $AB \| A_1B_1$.

4*) Докажите, что если фигура имеет две параллельные оси симметрии, то она переводится сама в себя некоторым параллельным переносом.

Решение. Пусть фигура имеет две параллельные оси симметрии a' и a'' и пусть точке A фигуры сопоставляется точка A', симметричная ей относительно прямой a'. Точке A' сопоставляется точка A'', симметричная точке A' относительно прямой a''. Назовем O', O'' – точки пересечения отрезков AA', $A'A''$ с прямыми a', a'' соответственно (рис. 165).

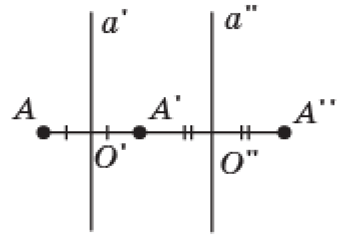


Рис. 165

Тогда $AO' = O'A'$ и $A'O'' = O''A''$. Значит, $AA'' = 2h$, где h – расстояние между параллельными прямыми a' и a''. Таким образом, соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'', является параллельным переносом на вектор длины $2h$.

Урок 37

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задания 1, 3, 5

1. Определения вектора, его длины, равенства векторов.

2. Формулировка и доказательство первого свойства параллельного переноса.

Задания 2, 4, 6

1. Определения параллельного переноса, одинаково и противоположно направленных векторов.

2. Формулировка и доказательство второго свойства параллельного переноса.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Изобразите квадрат $ABCD$ и фигуру, которая получается из него при параллельном переносе, который задается вектором: а) $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BD}$. Сделайте вывод.

2) Определите вид четырехугольника $KLMN$, если $\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{KN}$ и $|\overrightarrow{KL}|=|\overrightarrow{KN}|$.

Ответы. 1) При параллельном переносе квадрата получается равный ему квадрат. 2) Ромб.

Задание для класса

1. Постройте фигуру, которая получается при параллельном переносе трапеции $ABCD$ ($BC||AD$) на вектор: а) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BD}$.

2. Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC параллельным переносом. Докажите, что соответствующие медианы этих треугольников или лежат на параллельных прямых, или на одной прямой.

3*. Используя параллельный перенос, докажите свойства средней линии треугольника.

Решения. **2.** Пусть BM – медиана данного треугольника, M' – точка, соответствующая точке M при заданном параллельном переносе, тогда четырехугольник $BMM'B'$ – параллелограмм, значит, $BM||B'M'$ (рис. 166, а), если BM параллельна вектору, задающему параллельный перенос (рис. 166, б), то $B'M'$ лежит на прямой BM.

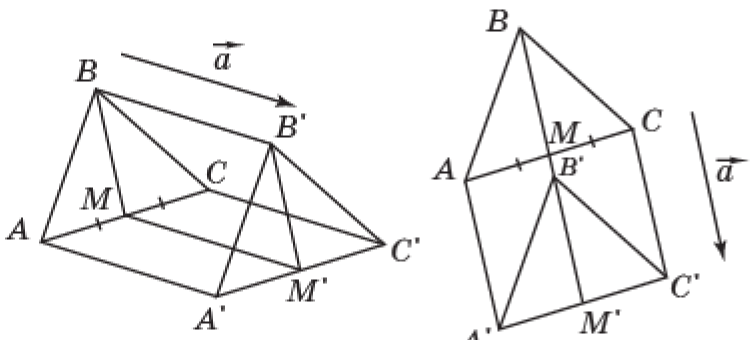


Рис. 166

3*. *Указание*. Пусть в треугольнике *ABC* проведена средняя линия *MN*, где *M* – середина *AB*, *N* – середина *BC*, нужно сделать параллельный перенос *MN* на вектор $\overrightarrow{MN}$.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашней работы (см. этап IV урока 36).

Дополнительные вопросы

- Что называется вектором?

- Какие два вектора называются равными?

- Какое преобразование плоскости называется параллельным переносом?

II. Устная работа

1) Какие из векторов, изображенных на рисунке 167: а) равны; б) одинаково направлены, но не равны; в) противоположно направлены?

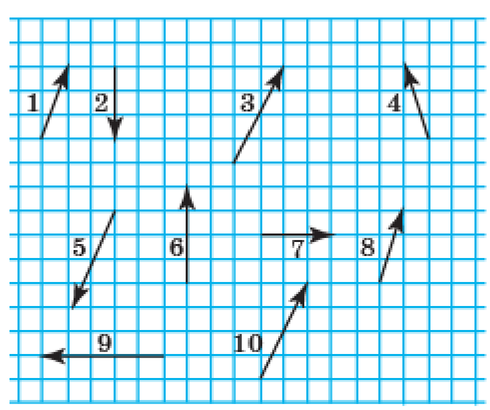


Рис. 167

2) В какую фигуру переходит при параллельном переносе: а) прямая; б) луч?

3) Задается ли параллельный перенос указанием: а) его направления; б) расстояния от точки A до точки A', в которую переходит данная точка?

4) При каком условии существует параллельный перенос, переводящий: а) один отрезок в другой; б) одну прямую в другую; в) один луч в другой; г) одну окружность в другую?

5) Даны два параллельных и одинаково направленных луча. Сколько существует параллельных переносов, переводящих один из них в другой?

6) Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона треугольника переходит в его другую сторону?

7) Приведите примеры фигур, которые можно перевести на себя с помощью параллельного переноса.

Ответы. 1) а) 1 и 8, 3 и 10; б) нет; в) 2 и 6, 3 и 5, 10 и 5; 7 и 9.

2) Переходит: а) в прямую, параллельную данной прямой; б) в луч, одинаково направленный с данным лучом.

3) а), б) Нет.

4) а) Отрезки равны и параллельны; б) прямые параллельны; в) лучи одинаково направлены; г) окружности имеют равные радиусы.

5) Один.

6) Нет.

7) Полуплоскость, прямая.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках под копирку.

Вариант 1

1. Запишите все векторы, которые определяют вершины ромба $DEFG$. Сколько всего ненулевых векторов получилось?

2. Изобразите геометрическую ситуацию, при которой параллельный перенос переводит: а) один отрезок в другой; б) одну прямую в другую. Задайте соответствующий вектор.

3*. Используя параллельный перенос, докажите свойства средней линии трапеции.

Вариант 2

1. Запишите все векторы, которые определяют вершины квадрата $KLMN$. Сколько всего ненулевых векторов получилось?

2. Изобразите геометрическую ситуацию, при которой параллельный перенос переводит: а) одну окружность в другую; б) один луч в другой. Задайте соответствующий вектор.

3*. Задача 3* из первого варианта.

Ответы. *Вариант 1*. 1. 8 векторов. 3*. *Указание*. Пусть в трапеции $ABCD$ ($BC||AD$, $BC<AD$) проведена средняя линия MN, где M – середина AB, N – середина CD; нужно сделать параллельный перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{BA}$, тогда точка C перейдет в точку E, принадлежащую AD. *Вариант 2*. 1. 8 векторов. 3*. См. указание к решению задачи 3* из первого вари анта.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап IV урока 36).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 42 учебника).

2. Решить задачи.

1) Для заданного параллельного переноса постройте фигуры, в которые переходят заданные: луч, две перпендикулярные прямые, угол.

2) Докажите, что параллельный перенос, переводящий точку M в точку N, переводит прямую MN на себя.

Ответ. Данный параллельный перенос можно задать вектором $\overrightarrow{MN}$, MN перейдет на себя.

3) Постройте неправильный шестиугольник, имеющий центр симметрии.

Решение. Например, шестиугольник, изображенный на рисунке 168, у которого противоположные стороны равны и параллельны. У него диагонали, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку, на рисунке она названа O (это следует, например, из того, что четырехугольники $ABDE$ и $BCEF$ – параллелограммы), которая и является центром его симметрии.

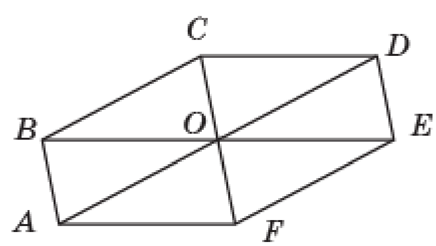


Рис. 168

4*) Населенные пункты A и B расположены на противоположных берегах реки (рис. 169, а). В каком месте реки следует построить мост CD, чтобы длина пути $ACDB$ была наименьшей? (Берега реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам.)

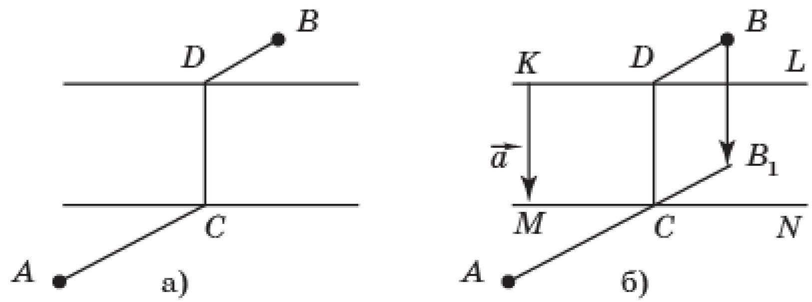


Рис. 169

Решение. Возьмем параллельный перенос, определяемый вектором $\vec{a}$, изображенным на рисунке 169, б. Тогда точка B перейдет в точку B_1. Соединим точку B_1 с точкой A, точка $C=AB_1 \cap MN$, $DC \perp MN$, $D \in KL$. Путь $ACDB$ – искомый. Действительно, $AC+CD+DB = AC+CB_1+BB_1 = AB_1+BB_1$ (четырехугольник BB_1CD – параллелограмм), поскольку BB_1 – величина постоянная, а AB_1 – наименьшее соответствующее расстояние, получаем наименьший путь $ACDB$.

43. Движение. Равенство фигур
(уроки 38, 39)

Цель – ввести понятия движения, композизии движений, равенства фигур; знать примеры движений; сформулировать и доказать основные свойства движений; научиться применять их при решении задач.

Урок 38

I. Устная работа

1) Имеет ли отрезок центр симметрии?

2) Всякий ли правильный многоугольник имеет центр симметрии?

3) На какой угол нужно повернуть прямую вокруг точки, не принадлежащей ей, чтобы получить прямую, параллельную данной?

4) Какие точки и прямые переходят в себя при повороте вокруг некоторой точки на угол φ, отличный от развернутого?

5) Приведите примеры фигур, которые совмещаются сами с собой при повороте вокруг некоторой точки на угол, равный: а) 45°; б) 60°; в) 120°.

6) Сколько осей симметрии имеет каждая из фигур, изображенных на рисунке 170?

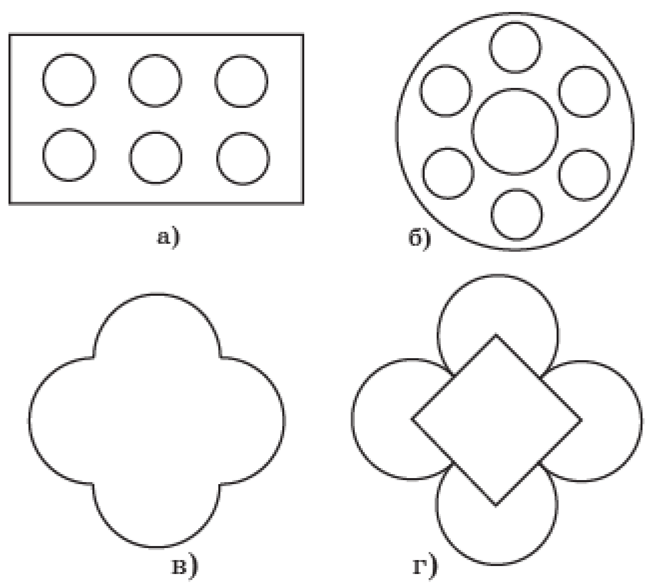


Рис. 170

Ответы. 1) Да, это середина отрезка. 2) Не всякий. Например, правильный треугольник не имеет центра симметрии. Центр симметрии имеют правильные многоугольники только с четным числом сторон. 3) На $180_{\circ}$. 4) Центр поворота. Прямых нет. 5) Правильный: а) восьмиугольник; б) шестиугольник; в) треугольник. 6) а) 2; б) 6; в), г) 4.

II. Новый материал

Вопрос

- Каким общим свойством обладают рассмотренные преобразования плоскости (центральная симметрия, поворот, осевая симметрия, параллельный перенос)?

Ответ. Они сохраняют расстояния между точками.

Такие преобразования называются движениями.

Определение. ***Движением*** называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, т.е. если точки A, B переводятся в точки A', B' соответственно, то $AB = A'B'$.

Примерами движений являются: центральная симметрия, поворот, осевая симметрия и параллельный перенос.

Пусть одно движение переводит точку A в точку A', а другое движение переводит точку A' в точку A''. Тогда преобразование плоскости, при котором точке A сопоставляется точка A'', называется ***композицией*** движений. Оно получается последовательным выполнением двух данных движений.

Рассмотрим теперь свойства движения.

Свойство 1. Композиция движений является движением.

Доказательство. Пусть одно движение переводит точки A, B в точки A', B' соответственно, а другое движение переводит точки A', B' в точки A'', B'' соответственно. Тогда $AB=A'B'=A''B''$. Таким образом, композиция движений сохраняет расстояние между точками и, следовательно, сама является движением.

Свойство 2. Движение переводит прямые в прямые, лучи в лучи и отрезки в отрезки.

Доказательство. Пусть точка B принадлежит отрезку AC и движение переводит эти точки в точки A', B', C' соответственно. Тогда $AB+BC=AC$. Поскольку при движении расстояния между точками не изменяются, то для точек A', B', C' будет иметь место равенство $A'B'+B'C'=A'C'$. Следовательно, точка B' лежит на прямой $A'C'$ между точками A' и C'. Значит, отрезок AC переводится в отрезок $A'C'$.

Аналогичным образом доказывается, что луч AB переводится в луч $A'B'$ и вся прямая AB переходит в прямую $A'B'$.

Свойство 3. При движении сохраняются углы.

Доказательство. Пусть дан угол с вершиной в точке O и точками A, B на его сторонах. Предположим, что движением эти точки переводятся в точки O', A', B' соответственно. Поскольку при движении расстояния между точками не изменяются, то треугольник AOB будет равен треугольнику $A'O'B'$ (по третьему признаку равенства треугольников), и, следовательно, $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

Определение. Две фигуры называются ***равными***, если они движением переводятся одна в другую.

Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F=F'$ означает, что фигура F равна фигуре F'.

III. Закрепление нового материала

1. Докажите, что движение переводит окружность в окружность того же радиуса.

2. Пусть движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$. Докажите, что середина C отрезка AB перейдет в середину C' отрезка $A'B'$.

3. Пусть движение переводит угол AOB в угол $A'O'B'$. Докажите, что биссектриса OC угла AOB перейдет в биссектрису $O'C'$ угла $A'O'B'$.

4*. Представьте поворот как композицию осевых симметрий.

Ответы. **1.** Окружность перейдет в фигуру, все точки которой расположены на одинаковом расстоянии от одной точки, в которую перейдет центр данной окружности, значит, полученная фигура – окружность, радиус которой равен радиусу данной окружности, так как при движении сохраняются расстояния между соответствующими точками. **2.** Поскольку $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $CB=C'B'$, C' – середина отрезка $A'B'$. **3.** Это следует из свойства сохранения углов при движении. **4*.** Угол между осями симметрии должен равняться половине угла поворота.

IV. Занимательный момент

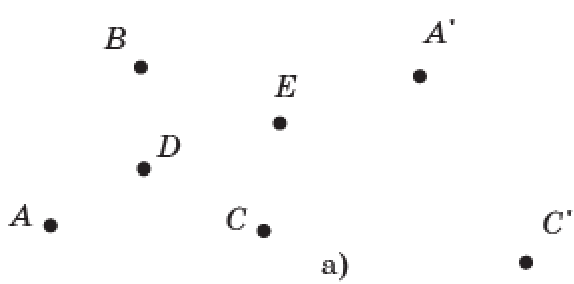
Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 37).

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 43 учебника). Самостоятельно разобрать доказательство теоремы из данного параграфа учебника о том, что два треугольника равны в том и только том случае, когда один из них переводится движением в другой.

2. Решить задачи.

1) Пусть движение переводит точки A, B и C соответственно в точки A', B' и C' (рис. 171, а). Постройте точки, в которые переходят точки D и E.



а)

Рис. 171

Решение показано на рисунке 171, б, где $\Delta ABD=\Delta A'B'D'$ и $DC=D'C'$, аналогично, $\Delta DEC=\Delta D'E'C'$ и $BE=B'E'$.

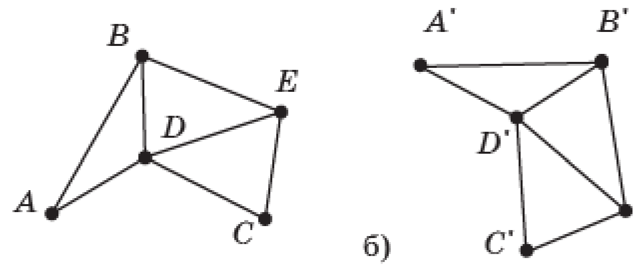


Рис. 171

2) Докажите, что движение переводит полуплоскость в полуплоскость.

Ответ. Пусть прямая a определяет данную полуплоскость, движение переводит ее в прямую a', точки, принадлежащие полуплоскости (т.е. лежащие от прямой a по одну сторону) – в точки, лежащие от прямой a' тоже по одну сторону, значит, при движении полуплоскость переходит в полуплоскость.

3) Для двух данных равных углов (рис. 172, а) укажите движения, переводящие один в другой.

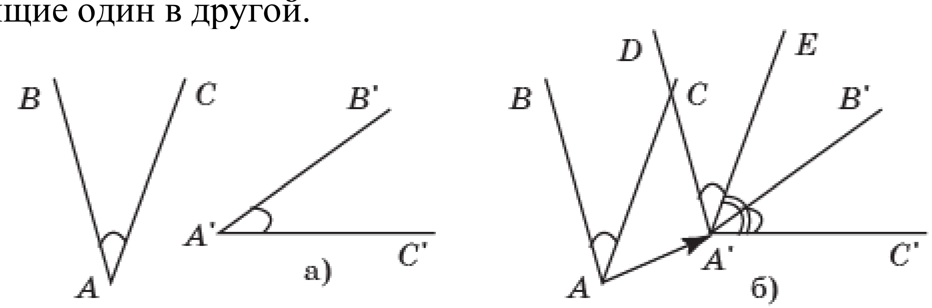


Рис. 172

Решение показано на рисунке 172, б, сначала нужно сделать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$, данный угол BAC перейдет в равный себе угол $DA'E$, затем сделать поворот по часовой стрелке вокруг точки A' на угол, равный углу $EA'C'$, в результате композиции указанных движений, которая является тоже движением, угол BAC перейдет в угол $B'A'C'$.

4*) Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников соответственно равны все стороны и по одному углу, то такие четырехугольники равны.

Решение. Пусть у четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны соответствующие стороны и $\angle A = \angle A'$, тогда $\Delta ABD = \Delta A'B'D'$ (по двум сторонам и углу между ними), значит, $BD = B'D'$ и $\Delta BDC = \Delta B'D'C'$ (по трем сторонам), следовательно, и соответственные углы четырехугольников равны. Таким образом, четырехугольники равны.

Урок 39

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Композицией движений называется …
2. Примерами движений являются …
3. Движение переводит прямые в …
4. Две фигуры называются равными, если …
5. При движении углы …

Вариант 2

1. Движением называется …
2. Композицией движений является …
3. Движение переводит лучи в …
4. Два треугольника равны в том и только том случае, если …
5. При движении окружность переходит в …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Постройте фигуру, центрально-симметричную трапеции относительно точки пересечения ее диагоналей.

2. Постройте фигуру, симметричную трапеции относительно оси, проходящей через ее среднюю линию.

3. Постройте фигуру, в которую перейдет трапеция при параллельном переносе на вектор, определяемый ее меньшим основанием.

4. Центром симметрии какого порядка является центр правильного: а) шестиугольника; б) восьмиугольника; в) десятиугольника; г) n-угольника? На какой угол происходит поворот при каждом самосовмещении рассматриваемой фигуры?

5*. Каким движением является композиция двух осевых симметрий, если оси пересекаются?

Ответы. **4.** а) 6-го порядка, на 60°; б) 8-го порядка, на 45°; в) 10-го порядка, на 36°; г) n-го порядка, на $\frac{360^\circ}{n}$. **5*.** Поворотом с центром в точке пересечения осей на угол, в 2 раза больший угла между ними.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 38).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 39 – п. 43 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте фигуру, симметричную правильному шестиугольнику относительно: а) одной из его вершин; б) оси, проходящей через одну из вершин перпендикулярно наибольшей диагонали шестиугольника, которая проходит через эту вершину.

2) Постройте фигуру, в которую перейдет правильный шестиугольник при повороте на угол -60° вокруг одной из его вершин.

3) Постройте фигуру, в которую перейдет правильный шестиугольник при параллельном переносе, задаваемым вектором одной из его сторон.

4*) Докажите, что два равных треугольника можно перевести один в другой с помощью не более трех осевых симметрий.

Решение. Пусть даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Значит, существует движение, которое переводит вершину A в вершину A_1, вершину B - в вершину B_1, вершину C – в вершину C_1. Возьмем осевую симметрию относительно серединного перпендикуляра a отрезка AA_1 (рис. 173, а), тогда точка A перейдет в точку A_1, точка B – в точку B_2, точка C – в точку C_2, если точки B_1 и C_1 совпадают соответственно с точками B_2 и C_2 , то треугольник ABC перейдет в треугольник $A_1B_1C_1$ с помощью одной осевой симметрии.

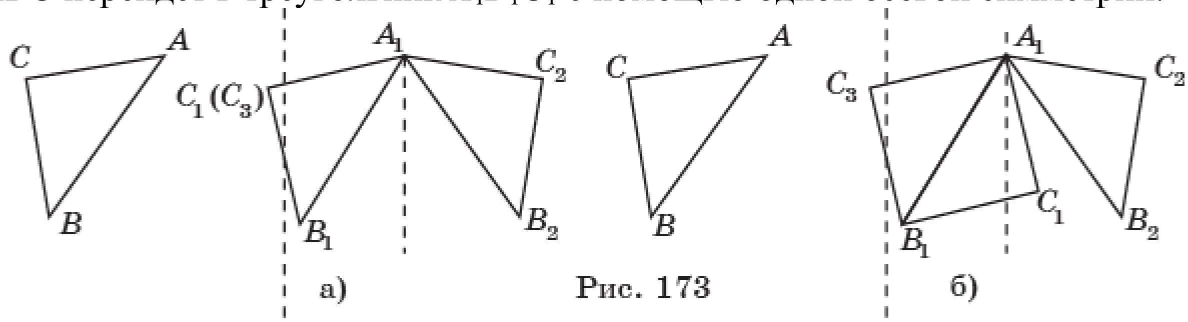


Рис. 173

Если, например, B_1 и B_2 не совпадают, возьмем осевую симметрию относительно серединного перпендикуляра b отрезка B_1B_2, причем b пройдет через точку A_1 (треугольник $B_1A_1B_2$ – равнобедренный с основанием B_1B_2), тогда точка A_1 перейдет в точку A_1, точка B_2 – в точку B_1, точка C_2 – в точку C_3, если точки C_1 и C_3 лежат по одну сторону от прямой A_1B_1, то они совпадут ($\angle B_1A_1C_1= \angle B_1A_1C_3$, т. е. совпадают лучи A_1C_1 и A_1C_3, а поскольку $A_1C_1=A_1C_3$, точки C_1 и C_3 тоже совпадают. Таким образом, в этом случае треугольник ABC перейдет в треугольник $A_1B_1C_1$ с помощью двух осевых симметрий.

Если точки C_1 и C_3 лежат по разные стороны от прямой A_1B_1 (рис. 173, б), то нужно взять осевую симметрию относительно этой прямой. Тогда треугольник ABC перейдет в треугольник $A_1B_1C_1$ с помощью трех осевых симметрий.

Урок 40
Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Постройте фигуру, центрально-симметричную равностороннему треугольнику относительно одной из его вершин. Какая получилась фигура?

2. В данной плоскости вокруг своего центра вращается квадрат. Сколько раз происходит самосовмещение квадрата при повороте на 360°? На какой угол происходит поворот при каждом самосовмещении квадрата? Центром симметрии какого порядка является центр квадрата?

3. Докажите, что если прямые, на которых лежат диагонали четырехугольника, являются его осями симметрии, то четырехугольник является ромбом.

4. Постройте фигуру, в которую перейдет равносторонний треугольник ABC при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$, где M – точка пересечения его медиан. Сделайте соответствующий чертеж и запишите равные векторы.

5*. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что их отрезки, заключенные внутри квадрата, равны. При доказательстве используйте движение.

Вариант 2

1. Постройте фигуру, центрально-симметричную равностороннему треугольнику относительно середины одной из его сторон. Какая получилась фигура?

2. В данной плоскости вокруг своего центра вращается равносторонний треугольник. Сколько раз происходит самосовмещение треугольника при повороте на 360°? На какой угол происходит поворот при каждом самосовмещении? Центром симметрии какого порядка является центр равностороннего треугольника?

3. Докажите, что если прямые, на которых лежат одна диагональ и одна средняя линия (отрезок, соединяющий середины противоположных сторон) четырехугольника, являются его осями симметрии, то четырехугольник является квадратом.

4. Постройте фигуру, в которую перейдет параллелограмм $ABCD$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BO}$, где O – точка пересечения его диагоналей. Сделайте соответствующий чертеж и запишите равные векторы.

5*. Дан квадрат $ABCD$. Докажите, что четырехугольник, образовавшийся при пересечении отрезков AE, BF, CG, DH, где точки E, F, G, H – середины сторон квадрата соответственно CD, DA, AB, BC, является квадратом. При доказательстве используйте движение.

44*. Паркеты

См. параграф 4

45. Подобие треугольников. Первый признак подобия треугольников (уроки 41, 42)

Цель – сформировать понятия подобных треугольников, коэффициента подобия; научиться выделять подобные треугольники; сформулировать и доказать первый признак подобия треугольников (по углам); научиться применять его при решении задач.

Урок 41

I. Анализ контрольной работы № 4

II. Устная работа

1) Могут ли при движении разные точки переходить в одну точку?

2) Какие из фигур, изображенных на рисунке 174, равны?

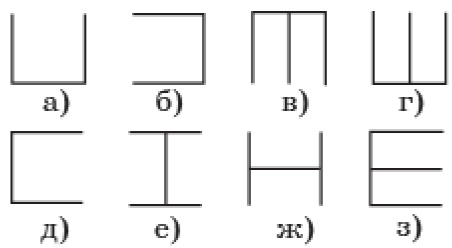


Рис. 174

3) Почему две окружности равны, если равны их радиусы?

4) Для лучей, изображенных на рисунке 175, укажите движение, переводящее один луч в другой.

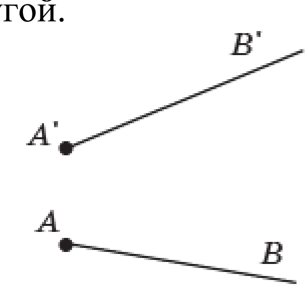


Рис. 175

5) Назовите движения, при которых каждая прямая переходит в параллельную ей прямую или на себя.

6) Даны две пары параллельных прямых: $a||a'$ и $b||b'$. Всегда ли существует параллельный перенос, переводящий прямую a на прямую a', а прямую b на прямую b'?

Ответы. 1) Нет. 2) а, б и д; в, г и з; е и ж. 3) Достаточно взять движение – параллельный перенос на вектор, определяемый отрезком, соединяющим их центры. 4) Нужно взять композицию двух движений – параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$, при этом луч AB перейдет в луч $A'B_1$, а затем взять поворот на угол $B_1A'B'$. 5) Центральная симметрия и параллельный перенос. 6) Если прямые a и b пересекаются, то существует единственный параллельный перенос. Если прямые a и b параллельны, то параллельный перенос существует только в случае, если равны расстояния между прямыми a и a', b и b'.

III. Новый материал

Изобразим: а) две неравные окружности; б) два неравных квадрата; в) два неравных равнобедренных прямоугольных треугольника; г) два неравных равносторонних треугольника.

Вопрос

- Чем отличаются фигуры в каждой представленной паре? Что у них общего? Почему они не равны?

При обсуждении ответа на этот вопрос выясняем, что равные фигуры можно представлять себе как фигуры, имеющие равные размеры. Помимо этого, встречаются фигуры, имеющие, хотя и разные размеры, но одинаковую форму. Например, все окружности имеют одинаковую форму, все квадраты имеют одинаковую форму, все равнобедренные прямоугольные треугольники имеют одинаковую форму, все равносторонние треугольники имеют одинаковую форму. Такие фигуры в геометрии принято называть *подобными*. Рассмотрим сначала подобные треугольники.

Определение. Два треугольника называются ***подобными***, если углы одного соответственно равны углам другого и соответствующие стороны пропорциональны. Коэффициент пропорциональности называется ***коэффициентом подобия***.

Вопрос

- Что значит, что треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$?

Ответ. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=k$, где k – коэффициент подобия.

Введем соответствующую запись с помощью математического знака отношения подобия: $\Delta ABC\sim \Delta A_1B_1C_1$, которая означает, что треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

Задание

Для своих изображенных пар подобных фигур определите их коэффициент подобия.

Вопрос

- Вспомните, для установления равенства двух треугольников нужно ли проверять равенство всех их элементов, т.е. соответствующих сторон и углов? Чем мы пользовались?

Для установления подобия треугольников тоже, оказывается, необязательно проверять все перечисленные выше равенства, а достаточно проверить только некоторые из них. Для этого служат признаки подобия треугольников.

Теорема. (Первый признак подобия треугольников.) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$. Тогда и $\angle C=\angle C_1$. Докажем, что $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$. Отложим на AB отрезок AB', равный A_1B_1, и проведем прямую $B'C'$, параллельную BC (рис. 176).

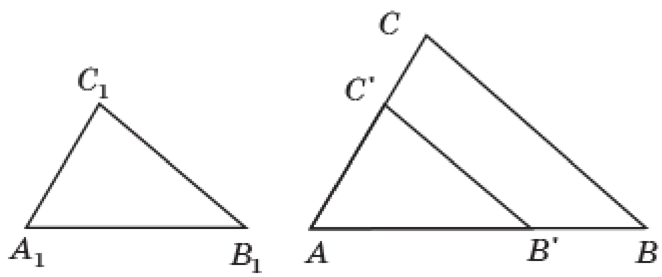


Рис. 176

Треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ равны (по второму признаку равенства треугольников). По теореме о пропорциональных отрезках имеет место равенство $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$ и, следовательно, имеем равенство $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$. Аналогичным образом доказывается, что имеет место равенство $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$. Следовательно, треугольники подобны.

IV. Закрепление нового материала

1. Будут ли подобны два: а) равнобедренных прямоугольных треугольника; б) равносторонних треугольника? Почему?

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$=90º) из вершины прямого угла проведите высоту CH. Найдите образовавшиеся подобные треугольники.

3. В трапеции $ABCD$ ($BC||AD$) проведите диагонали и найдите образовавшиеся подобные треугольники. Назовите точку пересечения диагоналей O.

4*. Можно ли треугольник пересечь прямой, непараллельной его стороне, так, чтобы отсечь от него подобный треугольник? В каком случае это невозможно?

Ответы. **1.** а), б) Да, так как у них равны углы. **2.** ABC, ACH, CBH. **3.** AOD и COB. **4*.** Да, если треугольник не равносторонний.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы урока 39 (см. этап V урока 39).

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 45 учебника).

2. Решить задачи.

1) Стороны треугольника относятся как 5:3:7. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого периметр равен 45 см.

Ответ. 15 см, 9 см, 21 см.

2) Докажите, что равнобедренные треугольники подобны, если углы при их вершинах, противолежащих основаниям, равны.

Ответ. Углы таких треугольников равны, значит, по первому признаку подобия треугольников данные треугольники подобны.

3) Катеты одного прямоугольного треугольника на 3 см больше катетов другого прямоугольного треугольника. Подобны ли треугольники?

Ответ. Нет.

4*) Докажите, что каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Ответ. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C$=90°), проведем высоту CH, тогда $\Delta ABC\sim \Delta ACH$ (по углам, т. е. по первому признаку подобия треугольников), значит, $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AH}$, следовательно, $AC=\sqrt{AB\cdot AH}$. Аналогично, $\Delta ABC\sim \Delta CBH$ (по углам), откуда $\frac{BA}{BC}=\frac{BC}{BH}$, следовательно, $BC=\sqrt{AB\cdot BH}$.

Урок 42

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Два треугольника называются подобными, если …

2. $\Delta CDE \sim \Delta C_1D_1E_1$ означает, что …

3. В трапеции $ABCD$ ($DC||AB$) проведены диагонали, которые пересеклись в точке O, тогда образовались следующие подобные треугольники …

4. Первый признак подобия треугольников для прямоугольных треугольников может быть сформулирован следующим образом …

5. Стороны одного треугольника равны 5 см, 2 см и 6 см, тогда стороны подобного ему треугольника с коэффициентом подобия 5 равны …

Вариант 2

1. Коэффициентом подобия двух треугольников называется …

2. $\Delta KLM \sim \Delta K_1L_1M_1$, если …

3. Первый признак подобия треугольников заключается в том, что …

4. Первый признак подобия треугольников для равнобедренных треугольников может быть сформулирован следующим образом …

5. Стороны одного треугольника равны 4 см, 7 см и 9 см, тогда стороны подобного ему треугольника с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ равны …

Ответы. *Вариант 1*. 4. Если два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу, то они подобны. 5. 10 мм, 4 мм, 12 мм. *Вариант 2*. 4. Если два равнобедренных треугольника имеют по равному углу при основаниях (или вершинах, противолежащих основаниям), то они подобны. 5. 8 см, 14 см, 18 см.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

1) Подобны ли любые два: а) равносторонних треугольника; б) равнобедренных треугольника; в) равнобедренных прямоугольных треугольника?

2) Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) 2; б) $\frac{1}{2}$.

3) Подобны ли прямоугольные треугольники, если у одного из них есть угол 40°, а у другого 50°?

4) Два треугольника подобны. Два угла одного треугольника равны 55° и 80°. Найдите наименьший угол второго треугольника.

5) Подобны ли равные треугольники? Если да, каков коэффициент подобия? Верно ли обратное?

Ответы. 1) а), в) Да; б) нет. 2) а) 2,5 см, 4 см и 5 см; б) 10 см, 16 см и 20 см. 3) Да. 4) 45∘. 5) Да, k=1. Нет, подобные треугольники при $k\neq1$ не равны.

IV. Решение задач

1. В треугольнике GHL проведены отрезки $KN||LG$ ($K\in LH$, $N\in GH$) и $NM||LH$ ($M\in GL$). Найдите пары подобных треугольников.

2. Стороны треугольника относятся как 3:5:6. Большая сторона подобного ему треугольника равна 43,8 дм. Найдите периметр второго треугольника.

3*. В трапеции, основания которой равны 4 см и 8 см, через точку пересечения диагоналей проведен отрезок, параллельный основанию, концы которого принадлежат боковым сторонам трапеции. Найдите его длину.

4*. Постройте треугольник ABC, если $\angle A=\alpha$, $AB:AC=m:n$ и $BC=a$.

Ответы. **1.** $\Delta GHL\sim\Delta GNM$; $\Delta GHL\sim\Delta NHK$; $\Delta NHK\sim\Delta GNM$. **2.** 102,2 дм. **3*.** $5\frac{1}{3}$ см. **4*.** Строим $\angle A=\alpha$ и на его сторонах откладываем отрезки $AB'=m$ и $AC'=n$; находим $B'C'=a'$, $a:a'=k$, тогда $AB=mk$, $AC=nk$; откладываем на сторонах угла A соответствующие отрезки AB и AC; ABC – искомый треугольник.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 41).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 45 учебника)

2. Решить задачи.

1) В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ AB=8 см, BC=10 см, A_1B_1=5,6 см, A_1C_1=10,5 см. Найдите AC и B_1C_1.

Ответ. AC=15 см, B_1C_1=7 см.

2) Стороны треугольника относятся как 5:3:7. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: а) меньшая сторона равна 5 см; б) большая сторона равна 7 см.

Ответ. а) $8\frac{1}{3}$ см, 5 см, $11\frac{2}{3}$ см; б) 5 см, 3 см, 7 см.

3) Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

Ответ. Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Стороны подобного ему треугольника равны $a_1=\frac{a}{k}$, $b_1=\frac{b}{k}$, $c_1=\frac{c}{k}$, где k – коэффициент подобия. Таким образом, $a+b+c=k(a_1+b_1+c_1)$, т. е. $\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}=k$.

4*) Постройте среднее геометрическое двух данных отрезков.

Построение. Назовем данные отрезки a и b, строим отрезки $AH=a$ и $HB=b$ (рис. 177). На AB, как на диаметре, описываем окружность и проводим через точку H прямую, перпендикулярную AB, одну из точек ее пересечения с окружностью назовем C, CH – искомый отрезок. Действительно, $\Delta ACH \sim \Delta CBH$, откуда $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$, значит, $CH=\sqrt{AH \cdot BH}$. Задача имеет два решения (на рисунке 177 отрезки CH и C_1H).

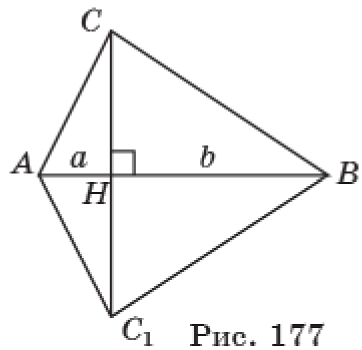


Рис. 177

46. Второй и третий признаки подобия треугольников (уроки 43, 44, 45)

Цель – сформулировать и доказать второй (по двум сторонам и углу между ними) и третий (по сторонам) признаки подобия треугольников; научиться применять их при решении задач.

Урок 43

I. Решение задач по готовым чертежам

1. – 5. – По рисунку 178, а-д укажите все подобные треугольники.

Ответы. а) ΔABC, ΔDBE, ΔFEC; б) ΔABC, ΔAGD, ΔFBE, ΔGFC; в) ΔABC, ΔAEB, ΔBEC, ΔCDA; г) ΔAOB, ΔCOD; д) $\Delta ABC \sim \Delta FGC$, $\Delta ADC \sim \Delta FEC$, $\Delta DBC \sim \Delta EGC$.

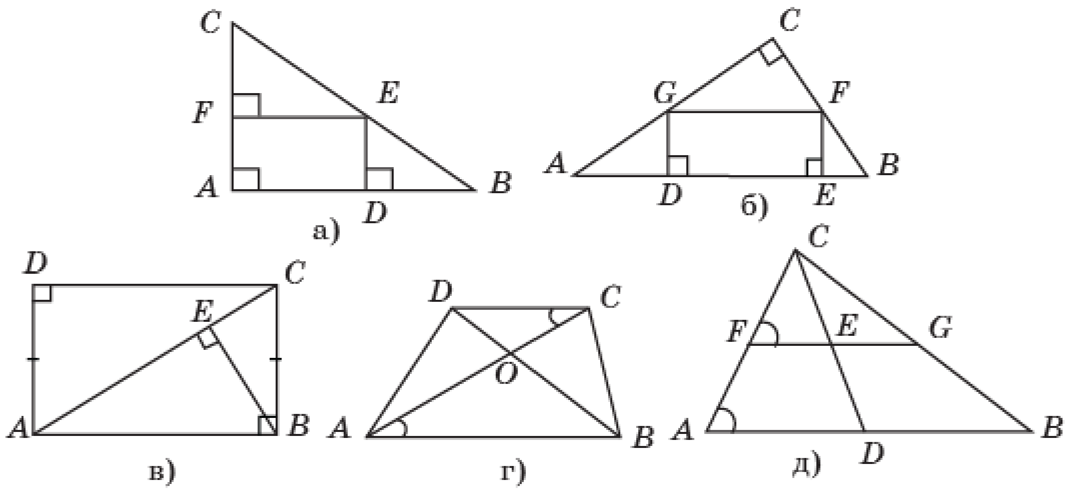


Рис. 178

II. Новый материал

Рассмотрим еще один признак подобия треугольников.

Задание

Постройте два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A=60°$, $AB=6$ см, $AC=4$ см; $\angle A_1=60°$, $A_1B_1=3$ см, $A_1C_1=2$ см, значит, выполняются равенства $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A=\angle A_1$. Подобны ли треугольники? Выскажите предположение.

Теорема. (Второй признак подобия треугольников.) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A=\angle A_1$. Отложим на AB отрезок AB', равный A_1B_1, и проведем прямую $B'C'$, параллельную BC (рис. 179). Треугольники ABC и $AB'C'$ подобны (по первому признаку подобия треугольников) и имеет место равенство $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$. Из этого равенства и равенства $AB'=A_1B_1$ следует равенство $AC'=A_1C_1$. Значит, треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

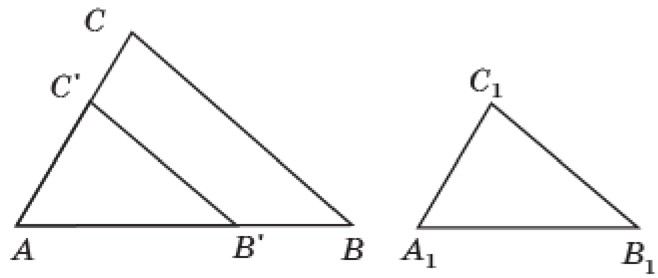


Рис. 179

III. Закрепление нового материала

1. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, через середины соответственно сторон AB и BC. Найдите подобные треугольники, воспользовавшись вторым признаком подобия треугольников.

2. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AB, которая пересекает стороны AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отношение $\frac{A_1B_1}{AB}$.

3. Диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся на пропорциональные части. Определите вид данного четырехугольника.

4*. В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AE и BD. Докажите, что треугольники ABC и EDC подобны.

Ответы. **1.** $\Delta ABC \sim \Delta MBN$. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** Трапеция. **4*.** Треугольники AEC и BDC подобны, как треугольники с равными углами, значит, $AC:BC=EC:DC$. Следовательно, треугольники ABC и EDC подобны.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 42).

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 46 учебника). Повторить формулировку и доказательство первого признака подобия треугольников (п. 45 учебника).

2. Решить задачи.

1) На одной стороне угла A отложены отрезки AB=5 см и AC=16 см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки AD=8 см и AE=10 см. Подобны ли треугольники ACD и AEB?

Ответ. Да, по второму признаку подобия треугольников: угол A – общий, и $\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AB}$ =1,6.

2) На стороне AC треугольника ABC взята точка D, такая, что $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите стороны треугольника ABD, если AB=8 см, BC=12 см, AC=18 см.

Ответ. $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ (по углам), значит, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{DB}$, откуда $AD=3\frac{5}{9}$ см, $DB=5\frac{1}{3}$ см.

3) В треугольнике ABC AB=25 см, BC=20 см и AC=30 см. На стороне AB отложен отрезок BK=4 см, а на стороне BC взята точка L таким образом, что угол BKL равен углу C. Найдите периметр треугольника BKL. Предложите несколько способов решения.

Ответ. *1-й способ*. $\Delta ABC \sim \Delta LBK$ (по углам), значит, $\frac{BC}{BK} = \frac{AB}{LB} = \frac{AC}{LK}$, откуда LB=5 см, LK=6 см, P_{LBK}=15 см. *2-й способ*. $\Delta ABC \sim \Delta LBK$ (по углам), значит, $\frac{BC}{BK}=5$, таким образом, $\frac{P_{ABC}}{P_{LBK}}=5$, P_{ABC}=75 см, следовательно, P_{LBK}=15 см.

4*) Отрезок, соединяющий точки на боковых сторонах трапеции, делит эти стороны в отношении $m:n$. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны соответственно a и b.

Ответ. $\frac{an+bm}{m+n}$. Пусть в трапеции $ABCD$ ($AD||BC$, $AD=a$, $BC=b$) проведен отрезок MN ($M \in AB$, $N \in CD$), такой, что $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{m}{n}$, значит, $MN||AD$ ($MN||BC$). Продолжим боковые стороны до пересечения в точке E (рис. 180), тогда $\Delta AED \sim \Delta BEC$ (по углам), откуда следует, что $\frac{AE}{BE} = \frac{a}{b}$, $AE=AB+BE=(m+n)k+BE$, $\frac{AE}{BE} = \frac{AB+BE}{BE} = \frac{AB}{BE}+1=\frac{a}{b}$, следовательно, $BE=\frac{b(m+n)}{a-b}k$. Далее, $\Delta MEN \sim \Delta BEC$ (по углам), откуда следует, что $\frac{ME}{BE} = \frac{MN}{BC}$, замечая, что $ME=MB+BE=nk+BE$, получаем, что $MN=\frac{an+bm}{m+n}$.

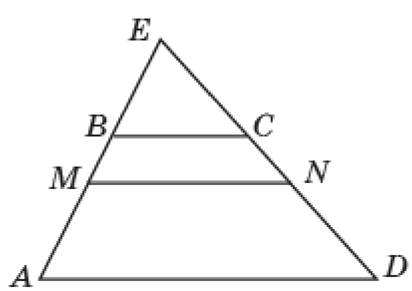


Рис. 180

Урок 44

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – шесть человек приглашаем за первые парты.

Задания 1, 3, 5

1. Определение подобных треугольников.
2. Формулировка и доказательство первого признака подобия треугольников.

Задания 2, 4, 6

1. Определение коэффициента подобия.
2. Формулировка и доказательство второго признака подобия треугольников.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются на своих местах.

Карточка

1) Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если: а) $\angle B = \angle B_1 = 105°$, $AB = 15$ см, $BC = 45$ см, $A_1B_1 = 5$ см, $B_1C_1 = 15$ см; б) треугольники прямоугольные, и один из треугольников имеет угол 45°, а другой – 60°?

2) Есть ли на рисунке (рис. 181) подобные треугольники?

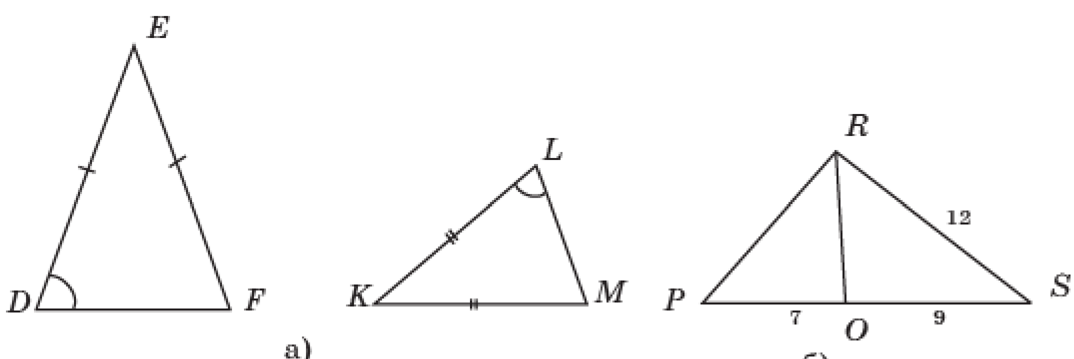


Рис. 181

Ответы. 1) а) Да; б) нет. 2) а) $\Delta DEF \sim \Delta MKL$; б) $\Delta PSR \sim \Delta RSO$.

Задание для класса

1. Есть ли на рисунке (рис. 182) подобные треугольники?

2. Стороны одного треугольника равны 8 см, 6 см и 5 см. Меньшая сторона второго треугольника, подобного первому, равна 2,5 см. Найдите другие стороны второго треугольника.

3*. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к этим отрезкам.

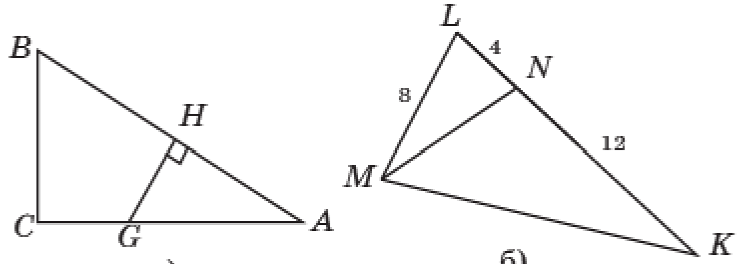


Рис. 182

Ответы. **1.** а) $\Delta ABC \sim \Delta AGH$; б) $\Delta KLM \sim \Delta MLN$. **2.** k=2; 4 см, 3 см. **3*.** Пусть в треугольнике ABC проведена биссектриса BL (рис. 183). Проведем $CD||BL$, где точка D принадлежит прямой AB, тогда $\frac{AB}{BD}=\frac{AL}{LC}$, $\angle ABL=\angle ADC$, $\angle CBL=\angle BCD$, но по условию $\angle ABL=\angle CBL$, следовательно, $\angle ADC=\angle BCD$ и треугольник BCD – равнобедренный, $CB=DB$. Таким образом, $\frac{AB}{CB}=\frac{AL}{CL}$.

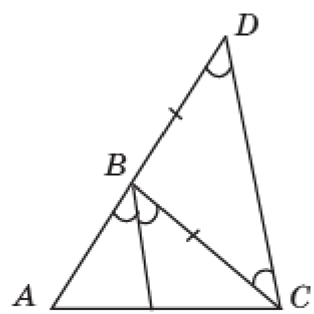


Рис. 183

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – решает классную задачу 2.

$У_2$, $У_3$ – показывают решения задач 2 и 3 из домашней работы (см. этап V урока 43).

Дополнительные вопросы

- Всегда ли равносторонние треугольники подобны?
- Всегда ли равнобедренные треугольники подобны?
- Всегда ли прямоугольные треугольники подобны?

II. Новый материал

Задание

Постройте два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых AB=2 см, BC=2,5 см, AC=3 см и A_1B_1=4 см, B_1C_1=5 см, A_1C_1=6 см. Что можно сказать о соответствующих сторонах треугольников? Будут ли они пропорциональны? Сравните углы данных треугольников. Подобны ли треугольники? Выскажите предположение.

Теорема. (Третий признак подобия треугольников.) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны пропорциональны, т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. На стороне AB отложим отрезок AB', равный A_1B_1, и проведем прямую $B'C'$, параллельную BC (рис. 179). Из подобия треугольников ABC и $AB'C'$ следуют равенства $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Из равенства $A_1B_1 = AB'$ следуют равенства $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{AC'}$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{B'C'}$.

Значит, имеем равенства $A_1C_1 = AC'$, $B_1C_1 = B'C'$. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $AB'C'$ равны (по третьему признаку равенства треугольников), и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

III. Закрепление нового материала

1. Подобны ли два треугольника, если их стороны имеют длины: а) 4, 5, 6 и 8, 10, 12; б) 3, 4, 6 и 9, 15, 18; в) 1, 2, 2 и 1, 1, 0,5?

2. На рисунке 184 найдите подобные треугольники и их коэффициент подобия.

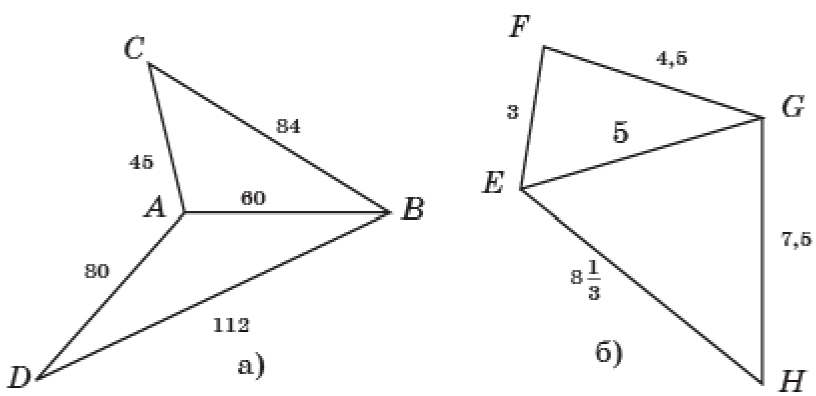


Рис. 184

3*. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP=\frac{AD}{n}$; Q - точка пересечения прямых AC и BP. Докажите, что $AQ=\frac{AC}{n+1}$.

Ответы. **1.** а) Да; б) нет; в) да. **2.** а) $\Delta ABC \sim \Delta ADB$, $k=\frac{3}{4}$; б) $\Delta EFG \sim \Delta EGH$, $k=\frac{3}{5}$. **3*.** Рисунок 185: $\Delta AQP \sim \Delta CQB$ (по углам), $\frac{AQ}{CQ} = \frac{AP}{CB} = \frac{1}{n}$ (так как $CB=AD$), $AC=AQ+QC$, значит, $\frac{AC}{AQ} = \frac{AQ+CQ}{AQ} = 1+\frac{CQ}{AQ} = 1+n$, или $AQ=\frac{AC}{n+1}$.

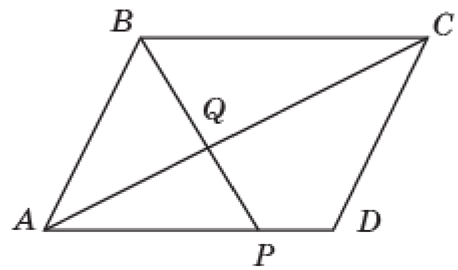


Рис. 185

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 43).

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 46 учебника).

2. Решить задачи.

1) Стороны одного треугольника 4 дм, 3,6 дм и 1,5 дм. Найдите стороны другого треугольника, подобного данному, если коэффициент подобия равен 1,6.

Ответ. 2,5 дм; 2,25 дм; 0,9375 дм.

2) Стороны треугольника 12,6 м, 16,1 м и 18 м. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его меньшая сторона равна большей стороне данного треугольника.

Ответ. k=12,6:18=0,7; 18 м, 23 м, $25\frac{5}{7}$ м.

3) Сформулируйте признаки подобия: а) равнобедренных треугольников; б) прямоугольных треугольников.

Ответ. а) Если один угол одного равнобедренного треугольника равен соответствующему углу другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники подобны. Если боковая сторона и основание одного равнобедренного треугольника пропорциональны боковой стороне и основанию другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники подобны; б) если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны. Если катеты одгого прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники подобны.

4*) Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжения боковых сторон и середины оснований произвольной трапеции принадлежат одной прямой.

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ ($AD||BC$), продолжения боковых сторон и диагонали которой пересекаются соответственно в точках M и O. Проведем прямую MO, которая пересечет основания в точках E и F (рис. 186), докажем, что E, F – середины соответственно оснований BC и AD: а) $\Delta AMF\sim \Delta BME$, $\Delta DMF\sim \Delta CME$, $\Delta AMD\sim \Delta BMC$, откуда $\frac{AM}{BM}=\frac{AF}{BE}$, $\frac{DM}{CM}=\frac{DF}{CE}$, $\frac{AM}{BM}=\frac{DM}{CM}$, значит, $\frac{AF}{BE}=\frac{DF}{CE}$; б) $\Delta AOF\sim \Delta COE$, $\Delta DOF\sim \Delta BOE$, откуда $\frac{AF}{CE}=\frac{OF}{OE}$, $\frac{DF}{BE}=\frac{OF}{OE}$, следовательно, $\frac{AF}{CE}=\frac{DF}{BE}$; в) итак, имеем $\frac{AF}{BE}=\frac{DF}{CE}$ и $\frac{AF}{CE}=\frac{DF}{BE}$, откуда следует, что $AF=DF$ и $BE=CE$.

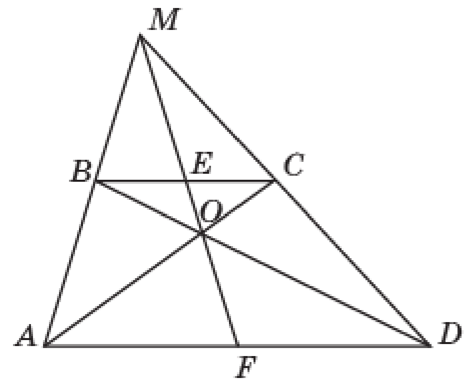


Рис. 186

Урок 45

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то …

2. Второй признак подобия треугольников заключается в том, что …

3. В треугольнике ABC последовательно соединены точки A_1 – середина стороны BC, B_1 – середина стороны AC, C_1 – середина стороны AB, при этом образовались следующие подобные треугольники …

4. На рисунке (рис. 187) подобными являются треугольники …

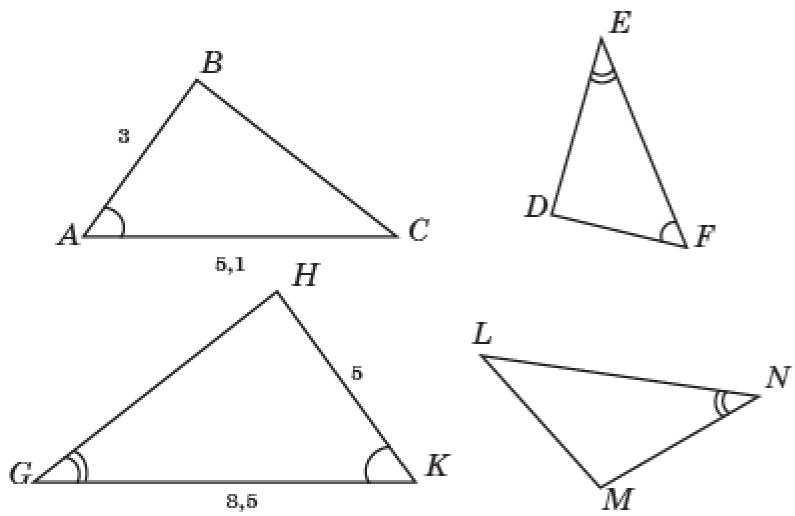


Рис. 187

5. Если соответственные стороны подобных треугольников относятся как 3:2, то их периметры относятся как …

Вариант 2

1. Два равнобедренных прямоугольных треугольника подобны, так как …

2. Третий признак подобия треугольников заключается в том, что …

3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$=90°) проведена высота CH, при этом образовались следующие подобные треугольники …

4. На рисунке (рис. 188) подобными являются треугольники …

5. Периметры подобных треугольников относятся как 5:7, коэффициент подобия при этом равен …

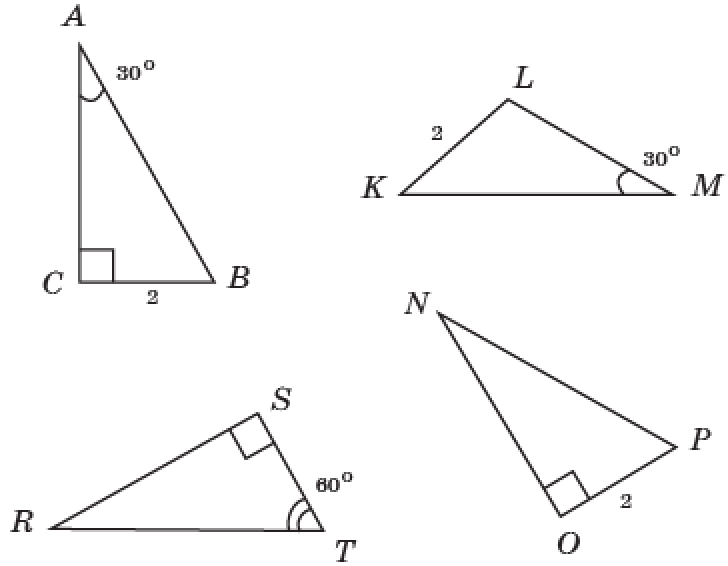


Рис. 188

Ответы. Вариант 1. 3. ABC, AC_1B_1, C_1BA_1, B_1A_1C, $A_1B_1C_1$. 4. $\Delta ABC \sim \Delta KHG$, $\Delta KHG \sim \Delta FDE$, $\Delta ABC \sim \Delta FDE$. *Вариант 2.* 3. ABC, ACH, CBH. 4. $\Delta ABC \sim \Delta RTS$.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Решение практических задач

1. На географической карте три населенных пункта расположены друг от друга на расстояниях 6 см, 5 см и 4,5 см. Наибольшее расстояние равно в действительности 15 км. Найдите масштаб карты и действительное наименьшее расстояние.

2. Какой должна быть ширина (x) прямоугольной рамки для фотографий, если известны три ее размера a, b, c, указанные на рисунке (рис. 189), чтобы прямоугольники рамки и фотографии были подобны?

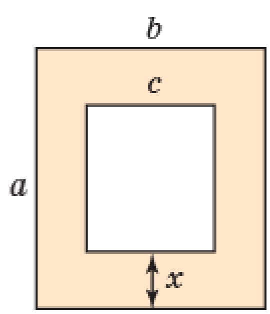


Рис. 189

3. Как определить высоту дерева по его тени в солнечный день?

4*. Объясните по рисунку (рис. 190), как измерить глубину обрыва, стоя на его краю и имея небольшую палку: A – уровень глаз стоящего человека, B - уровень обрыва и уровень глаз лежащего человека, CD и EF – длины частей палки, K – камень на дне.

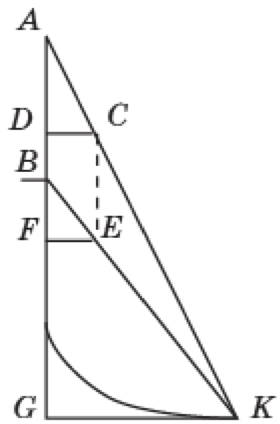


Рис. 190

Ответы. **1.** 1:250000; 11,25 км. **2.** $\frac{a}{b} = \frac{a-2x}{c}$, откуда $x = \frac{a(b-c)}{2b}$. **3.** См. рисунок 191.

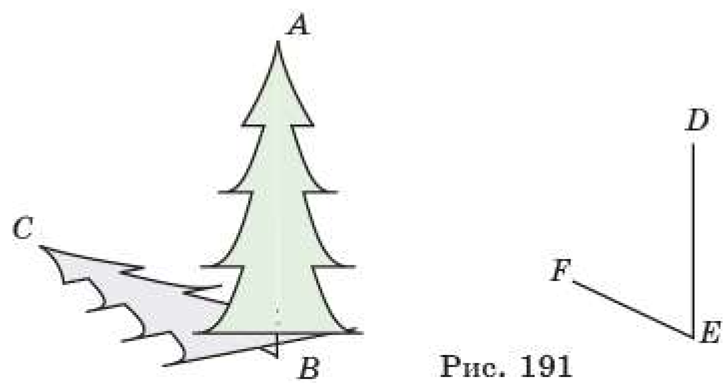


Рис. 191

Поскольку солнечные лучи можно считать параллельными, то тень от дерева (BC) во столько же раз длиннее тени (EF) от, например шеста (DE), во сколько раз дерево (AB) выше шеста (DE). Таким образом, высота дерева $AB=\frac{DE \cdot BC}{EF}$. **4*.** 1) Встав у края обрыва и удерживая палку горизонтально, отмечают на ней точку C, находящуюся на одной прямой с глазом стоящего наблюдателя A и выделенным камнем K на дне обрыва. Измеряют часть палки CD и расстояние AD от глаза до конца палки. 2) Лежа на краю обрыва и удерживая палку горизонтально, отмечают на ней точку E, находящуюся на одной прямой с глазом лежащего человека и выделенным камнем K на дне обрыва. Измеряют часть палки EF и расстояние BF от глаза до конца палки.

3) Находят искомую глубину обрыва BG. Для этого рассматривают подобные треугольники BEF, BKG и ACD, AKG, откуда $BG = \frac{AB \cdot CD \cdot BF}{AD \cdot EF - CD \cdot BF}$.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 44).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 45, п. 46 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что треугольники подобны, если имеют по равному углу и стороны, к которым примыкают равные углы, соответственно пропорциональны высотам, проведенным к этим сторонам.

Решение. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, проведены высоты BH, CP, B_1H_1, C_1P_1 и $\frac{AB}{CP} = \frac{A_1B_1}{C_1P_1}$, $\frac{AC}{BH} = \frac{A_1C_1}{B_1H_1}$. Поскольку треугольники ABH, ACP, $A_1B_1H_1$, $A_1C_1P_1$ подобны (по углам), имеем $\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{CP}$, $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{B_1H_1}{C_1P_1}$. Значит, $\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}$. Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по второму признаку подобия треуголтьников).

2) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 24 см. Через середину высоты, опущенной на его основание, проведена прямая, параллельная боковой стороне, до пересечения с двумя другими сторонами треугольника. Найдите ее отрезок, заключенный в треугольнике.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB=BC$, $BH \perp AC$, $BK=KH$ и $EF || AB$ (рис. 192).

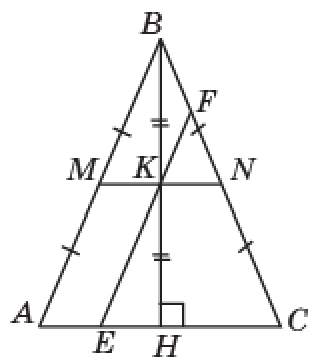


Рис. 192

Через точку K проведем $MN || AC$, MN – средняя линия данного треугольника. $AMKE$– параллелограмм, значит, $EK=AM=\frac{1}{2}AB=12$ см, KF – средняя линия треугольника MBN, $KF=\frac{1}{2}MB=6$ см. Таким образом, $EF=18$ см.

3) Стороны треугольника, образующие угол 120°, равны 8 см и 24 см. Найдите биссектрису треугольника, выходящую из этого угла.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle B=120^\circ$, BL – его биссектриса (рис. 193).

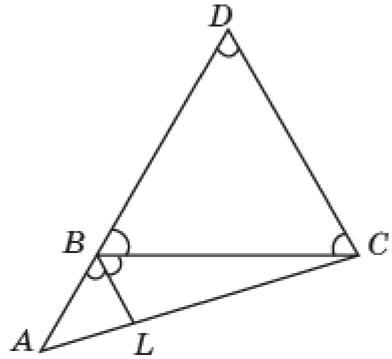


Рис. 193

Проведем $CD||BL$, точка D принадлежит продолжению стороны AB, тогда $\angle ABL=\angle CBL=\angle CBD=\angle BCD=\angle BDC=60^\circ$. Треугольник BCD – равносторонний, значит, CD=24 см. $\Delta ABL \sim \Delta ADC$, откуда $\frac{BL}{DC}=\frac{AB}{AD}$, учитывая, что $AD=AB+BD$, получим BL=6 см.

4*) Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно целиком накрыть двумя меньшими подобными ему треугольниками.

Решение. Пусть $AB > AC$. Треугольник $AB'C'$ подобен треугольнику ABC и $AC<AB'<AB$ (рис. 194). Через точку E проведем прямую DE, параллельную AC. Треугольники $AB'C'$ и DBE – искомые.

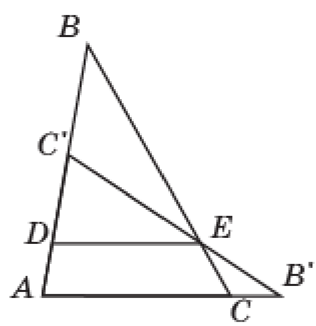


Рис. 194

47. Подобие фигур. Гомотетия
(уроки 46, 47)

Цель – сформировать понятия подобия и гомотетии фигур; рассмотреть их свойства; научиться применять их при решении задач; научиться строить подобные и гомотетичные фигуры.

Урок 46

I. Устная работа

1) Подобны ли равнобедренные треугольники, если основание и высота, проведенная к нему, одного треугольника в 2 раза больше соответствующих элементов другого треугольника?

2) Каждый катет одного прямоугольного треугольника на 3 см больше катетов другого прямоугольного треугольника. Подобны ли треугольники?

3) Можно ли в треугольнике провести высоту таким образом, чтобы она разделила его на два подобных треугольника?

4) Сколько получится подобных треугольников, если в треугольнике провести все средние линии?

5) Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) 2; б) $\frac{1}{2}$.

6) Стороны треугольника относятся как 2:5:6. Меньшая сторона подобного ему треугольника равна 6 см. Найдите стороны второго треугольника.

Ответы. 1) Да. 2) Подобны только в случае равенства катетов у данного прямоугольного треугольника. 3) Да. Высота, опущенная из вершины прямого угла неравнобедренного прямоугольного треугольника. 4) 5. 5) а) 10 см, 16 см, 20 см; б) 2,5 см, 4 см, 5 см. 6) 6 см, 15 см, 18 см.

II. Новый материал

Вопросы

- Какие два треугольника называются подобными?
- Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Как связаны между собой стороны?

Определение. Преобразование плоскости, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, называется ***подобием***. Само это число называется ***коэффициентом подобия***.

Таким образом, если точки A, B при подобии переходят соответственно в точки A', B', то $A'B'=k\cdot AB$, или, что то же самое, $A'B':AB=k$, причем k – одно и то же число для всех точек A, B. Заметим, что при k=1 подобие является движением.

Две фигуры F и F' называются ***подобными***, если одна из них переводится в другую подобием.

Рассмотрим некоторые свойства подобия.

Свойство 1. Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точка B принадлежит отрезку AC. Тогда $AB+BC=AC$. Подобие переводит эти точки соответственно в точки A', B', C'. Поскольку при подобии расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, то для точек A', B', C' будет иметь место равенство $A'B'+B'C'=A'C'$. Следовательно, точка B' будет принадлежать отрезку $A'C'$. Из этого следует, что подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Свойство 2. Подобие сохраняет величины углов.

Доказательство. Пусть угол с вершиной C и сторонами a, b переводится подобием в угол с вершиной C' и сторонами a', b' (рис. 195).

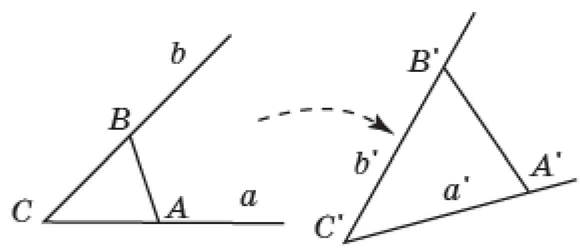


Рис. 195

Возьмем на сторонах a, b точки A, B, и пусть A', B' – соответствующие им точки на сторонах a', b'. Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны (по третьему признаку подобия треугольников) и, следовательно, имеют соответственно равные углы. В частности, $\angle C=\angle C'$.

Задание

Изобразим точку O и возьмем положительное число k, например $k=2$. Отметим несколько точек, A, B, C и сопоставим им соответственно точки A' на луче OA, B' на луче OB, C' на луче OC так, чтобы $OA'=k\cdot OA$, $OB'=k\cdot OB$, $OC'=k\cdot OC$ (рис. 196). Точке O сопоставим ее саму.

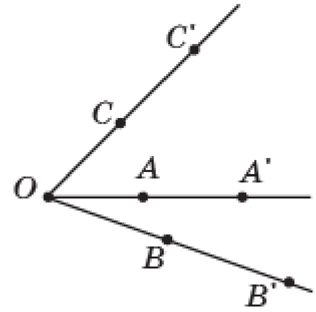


Рис. 196

Полученное преобразование плоскости называется ***гомотетией*** с центром в точке O и коэффициентом k.

Теорема. Гомотетия является подобием с тем же коэффициентом.

Доказательство. Пусть при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k точки A, B переходят соответственно в точки A', B' (рис. 197).

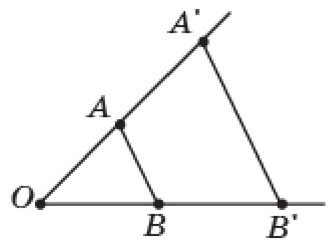


Рис. 197

Тогда треугольники AOB и $A'OB'$ подобны (по второму признаку подобия треугольников) и, следовательно, $A'B'=k \cdot AB$, т.е. гомотетия является подобием с коэффициентом k.

III. Закрепление нового материала

1. Для точек A, B, C, изображенных на рисунке 195, постройте точки A_1, B_1, C_1, соответственно гомотетичные им относительно центра O, если $k = \frac{1}{2}$. Сравните с предыдущим заданием, где $k = 2$. Сделайте соответствующий вывод.

2. Постройте фигуру, гомотетичную данной окружности относительно ее центра с k=1,5. Какая получилась фигура? Как она расположена относительно данной окружности?

3. Докажите, что любые два квадрата подобны. Найдите коэффициент их подобия.

4*. От параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB=a$, $BC=b$ ($a>b$) отсечен другой параллелограмм $EBCF$, подобный данному, где точки E и F принадлежат соответственно AB и CD. Каким должен быть отрезок BE?

Ответы. 1. Если $0<k<1$, то точка, гомотетичная данной, располагается между ней и центром гомотетии, если $k>1$, то данная точка находится между центром и гомотетичной ей точкой. 2. Получилась окружность, концентрическая данной. 3. Нужно взять преобразование подобия с коэффициентом, равным отношению сторон данных квадратов. 4*. Из подобия указанных параллелограммов следует пропорциональность соответствующих сторон, т. е. $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BE}$ или $\frac{a}{b} = \frac{b}{BE}$, откуда $BE=\frac{b^2}{a}$.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 45).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 47 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте треугольник, гомотетичный данному, приняв за центр одну из вершин данного треугольника и коэффициент гомотетии, равным: а) 3; б) $\frac{1}{3}$.

2) Стороны четырехугольника равны 14 см, 21 см, 10 см и 42 см. Найдите стороны подобного ему четырехугольника, если известно, что его меньшая сторона равна 2 см.

Ответ. $k=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$; 2,8 см, 4,2 см, 2 см и 8,4 см.

3) Докажите, что любые две окружности подобны и коэффициент подобия равен отношению их радиусов.

Решение. Возьмем гомотетию с коэффициентом, равным отношению радиусов данных окружностей, и центром в центре первой окружности, тогда первая данная окружность перейдет в концентрическую окружность, равную второй данной окружности. Таким образом, первая данная окружность перейдет во вторую данную окружность с помощью композиции преобразований подобия и движения, т.е. преобразованием подобия с коэффициентом, равным отношению радиусов данных окружностей.

4*) Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C – точка касания). Докажите, что произведение отрезков AE и BE секущей равно квадрату отрезка CE касательной.

Решение. Обратимся к рисунку 198. $\Delta BCE \sim \Delta CAE$ (по углам), значит, $\frac{BE}{CE} = \frac{CE}{AE}$, откуда получаем, что $BE \cdot AE = CE^2$.

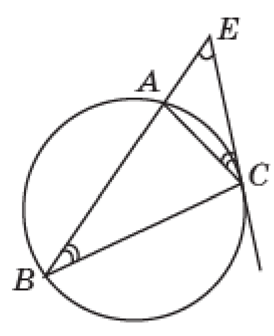


Рис. 198

Урок 47

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – шестерых учащихся приглашаем за первые парты.

Задания 1, 2

1. Определение преобразования плоскости - подобия.
2. Формулировка и доказательство первого свойства подобия.

Задания 3, 4

1. Определение подобных фигур.
2. Формулировка и доказательство второго свойства подобия.

Задания 5, 6

1. Определение преобразования плоскости - гомотетии.
2. Формулировка и доказательство теоремы о гомотетии.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Найдите условия, при которых подобны два: а) квадрата; б) параллелограмма.

2) В двух подобных трапециях меньшие диагонали равны 10,5 см и 7 см, средняя линия первой трапеции равна 18 см, большее основание второй трапеции равно 16,6 см. Найдите меньшее основание первой трапеции.

Ответы. 1) а) Два квадрата всегда подобны; б) имеют по равному углу и стороны пропорциональны. 2) $k=\frac{10,5}{7}=1,5$; средняя линия второй трапеции равна 12 см, таким образом, меньшее основание второй трапеции равно 7,4 см, наконец, искомое основание первой трапеции равно 11,1 см.

Задание для класса

1. Найдите условия, при которых подобны два: а) ромба; б) прямоугольника.

2. В двух подобных параллелограммах меньшие диагонали равны 20,8 см и 28,6 см. Периметр первого параллелограмма равен 136 см, меньшая сторона второго равна 44 см. Найдите большую сторону первого параллелограмма.

3*. Две хорды окружности пересекаются. Одна из них точкой пересечения делится на отрезки 2 см и 8 см, а другая пополам. Найдите вторую хорду.

Ответ. **1.** а) Имеют по равному углу; б) стороны пропорциональны. **2.** 36 см. **3*.** 8 см.

К доске вызываем трех учеников ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$, $У_2$ – начинают решать классные задачи соответственно 2 и 3.

$У_3$ – показывает решение задачи 3 из домашней работы (см. этап V урока 46).

Дополнительные вопросы

- Какие два треугольника называются подобными?

- Как расположены друг относительно друга две гомотетичные окружности?

- Как определить коэффициент подобия двух подобных многоугольников?

II. Устная работа

1) Можно ли считать равные фигуры подобными?

2) Фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом k. С каким коэффициентом фигура F подобна фигуре F'?

3) Приведите примеры фигур, которые подобны сами себе при любом коэффициенте подобия.

4) Верно ли, что если два угла подобны, то они равны?

5) Как расположены точки A и A' относительно центра гомотетии O, если: а) $0<k<1$; б) $k>1$?

6) Существуют ли прямые, которые переводятся гомотетией сами на себя?

7) Даны точки A, B и гомотетичные им точки A', B' соответственно. Можно ли найти центр данной гомотетии?

Ответы. 1) Да, k=1. 2) $\frac{1}{k}$. 3) Например, прямая, угол. 4) Да. 5) а) Точка A' находится между точками A и O; б) точка A находится между точками A' и O. 6) Да, проходящие через центр гомотетии. 7) Да. Центром гомотетии будет точка пересечения прямых AA' и BB'.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Отношение периметров подобных многоугольников равно 3:5. Найдите большую сторону первого многоугольника, если большая сторона второго многоугольника равна 45 см.

2. Постройте треугольник, гомотетичный данному треугольнику относительно центра описанной около него окружности с коэффициентом гомотетии $\frac{2}{3}$.

3*. Постройте трапецию $ABCD$ ($AD||BC$) по следующим данным: $AB{:}AD=2{:}5$, $\angle A=60°$, $\angle D=45°$, $BH=3{,}5$ см, где BH – высота трапеции (перпендикуляр, опущенный из вершины основания на другое основание).

Вариант 2

1. Меньшая сторона многоугольника равна 14 см, а его периметр равен 90 см. Найдите периметр подобного ему многоугольника, если его меньшая сторона равна 21 см.

2. Постройте треугольник, гомотетичный данному треугольнику относительно его центроида с коэффициентом гомотетии 1,5.

3*. Постройте трапецию $ABCD$ ($AB||CD$) по следующим данным: $CD{:}AD{:}AH=5{:}3{:}2$, где AH – высота трапеции (перпендикуляр, опущенный из вершины основания на другое основание), $\angle B=110°$ и $DB=4$ см.

Ответы. *Вариант 1*. 1. 27 см. 3*. Строим $\angle A=60°$, на его сторонах откладываем отрезки AB' и AD', равные, например, 1 см и 2,5 см соответственно, чтобы $\frac{AB'}{AD'}=\frac{2}{5}$ (рис. 199).

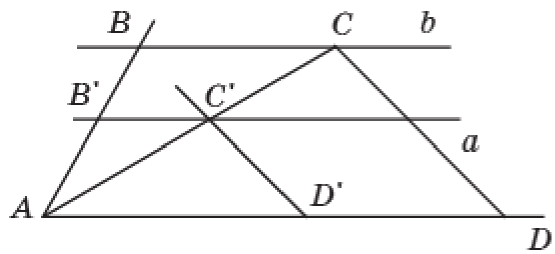


Рис. 199

Строим $\angle D' = 45°$, проводим через точку B' прямую $a||AD'$, C'- точка пересечения прямой a и соответствующей стороны угла D'. Трапеция $AB'C'D'$ подобна искомой трапеции. Проводим прямую $b||a$ на расстоянии 3,5 см от нее, $B=AB'\cap b$, $C=AC'\cap b$, $\angle BCD = 135°$, $D\in AD'$, $ABCD$ – искомая трапеция. *Вариант 2*. 1. 135 см. 3*. Строим прямоугольный треугольник $A'DH'$ по гипотенузе $A'D$ и катету $A'H'$, которые равны, например, 3 см и 2 см соответственно, чтобы $\frac{A'D}{A'H}=\frac{3}{2}$ (рис. 200).

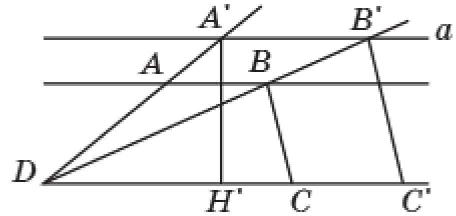


Рис. 200

Откладываем DC'=5 см. Через точку A' проведем прямую $a||DC'$, откладываем $\angle C'$=70º, B' - точка пересечения его соответствующей стороны и прямой a. $A'B'C'D$ – трапеция, подобная искомой трапеции. На DB' откладываем DB=4 см и через точку B проводим прямые, параллельные прямым $A'B'$ и $B'C'$, соответствующие точки пересечения называем A и C. $ABCD$ – искомая трапеция.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 46).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 47 учебника).

2. Решить задачи.

1) Меньшее основание трапеции равно 2 см. Точка пересечения ее диагоналей удалена от оснований на 1 см и 2 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ. 3 см.

2) Около треугольника CDE описана окружность с центром в точке O (рис. 201), DH – его высота, $OP\perp CD$. Докажите, что $DE\cdot DP=DH\cdot CO$.

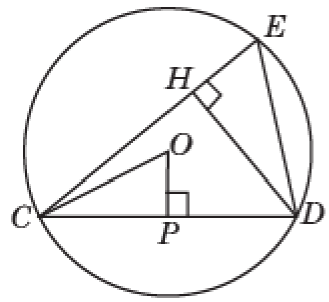


Рис. 201

Решение. $\Delta DHE\sim\Delta CPO$ (прямоугольные, имеющие равные острые углы, действительно, $\angle DEH=\angle COP$, потому что $\angle DEH$ измеряется половиной дуги CD, которой измеряется и $\angle COP$, как половина центрального $\angle COD$). Значит, $\frac{DE}{DH}=\frac{CO}{CP}$, учитывая, что $CP=DP$, имеем $DE\cdot DP=DH\cdot CO$.

3) В прямоугольнике $KLMN$ проведен отрезок KF таким образом, что $\angle KMN=\angle NKF$ (рис. 202). Найдите все подобные треугольники.

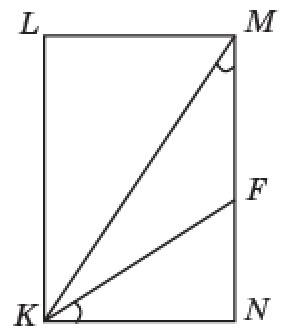


Рис. 202

Ответ. ΔKMN, ΔFKN, ΔMKL.

4*) Докажите, что два треугольника подобны тогда и только тогда, когда существует преобразование подобия, переводящее один из них в другой.

Решение. Пусть треугольник ABC переводится преобразованием подобия в треугольник $A'B'C'$. Тогда $AB=k\cdot A'B'$, $AC=k\cdot A'C'$, $BC=k\cdot B'C'$, где k - коэффициент подобия, и $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$. Значит, треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Обратно, пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ пропорциональны соответствующие стороны и равны соответствующие углы. Докажем, что треугольник ABC преобразованием подобия переводится в треугольник $A'B'C'$. Рассмотрим гомотетию с центром в точке A и k, равным отношению пропорциональных сторон, тогда треугольник ABC перейдет в треугольник AB_1C_1 (рис. 203). $\Delta AB_1C_1=\Delta A'B'C'$ (по трем сторонам), но $\Delta\ ABC \sim \Delta\ AB_1C_1$. Таким образом, треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$ композицией двух преобразований (гомотетии и движения), которая является подобием.

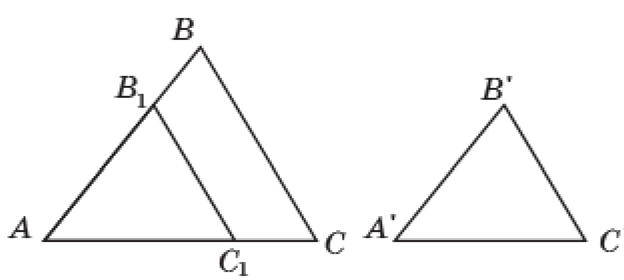


Рис. 203

48*. Золотое сечение

См. параграф четвертый

49. Теорема Пифагора
(уроки 48, 49, 50)

Цель – сформулировать и доказать теорему Пифагора; научиться пользоваться ею при решении задач; познакомиться с историческими аспектами этой темы.

Урок 48

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Подобием называется …
2. Коэффициентом гомотетии называется …
3. Центром гомотетии называется …
4. Подобие переводит лучи в …
5. Движение является подобием с коэффициентом …
6. Композиция двух преобразований подобия является …

Вариант 2

1. Гомотетией называется …
2. Коэффициентом подобия называется …
3. Две фигуры называются подобными, если …
4. Подобие переводит отрезки в …
5. Подобие сохраняет …
6. Фигура F подобна фигуре F' с коэффициентом подобия k, тогда фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом подобия …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Задание

Постройте прямоугольный треугольник с катетами, равными: а) 3 см и 5 см; б) 6 см и 8 см. Найдите сумму квадратов катетов. Измерьте гипотенузу. Возьмите ее квадрат и сравните с полученной суммой. Какой вывод можно сделать?

После обсуждения переходим к доказательству теоремы.

Теорема. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство. Пусть ABC - прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведем высоту CD. Треугольники ABC и ACD подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot AD = AC^2$. Аналогично треугольники ABC и CBD подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно, $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot BD = BC^2$. Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Обозначим стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) соответственно $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Тогда в силу теоремы Пифагора будет иметь место формула

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.}$$

IV. Закрепление нового материала

1. Стороны прямоугольника равны 12 см и 5 см. Найдите его диагонали.

2. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 16 см. Найдите две другие его стороны, если он имеет угол в 45°.

3. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной a.

4*. Постройте отрезок x, если $x = \frac{c\sqrt{c^2-b^2}}{d}$, где b, c, d – данные отрезки.

Ответы. **1.** 13 см и 13 см. **2.** 16 см и $16\sqrt{2}$ см. **3.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **4*.** $\frac{x}{c} = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{d}$. Сначала построим отрезок $a=\sqrt{c^2-b^2}$, это катет в прямоугольном треугольнике, у которого один катет равен b, а гипотенуза равна c. Теперь нужно построить отрезок x, такой что $\frac{x}{c} = \frac{a}{d}$. Для этого возьмем произвольный угол O (рис. 204) и на его сторонах отложим последовательно отрезки $OA=d$, $AB=c$, $OC=a$. Проведем прямую AC и прямую $BD||AC$, где $D \in OC$. Отрезок CD – искомый.

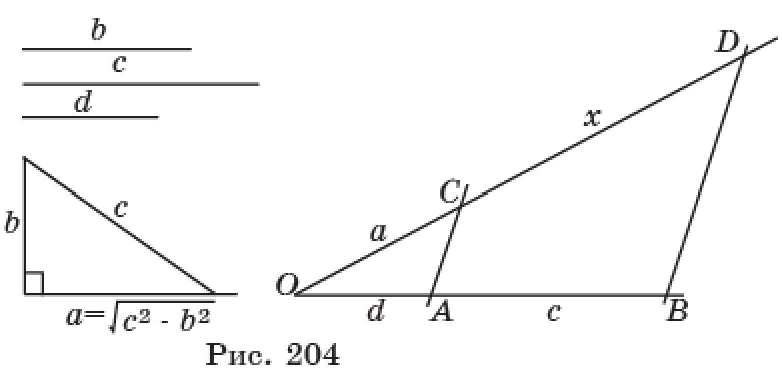


Рис. 204

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 49 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 10 см, разность катетов – 2 см.

Ответ. 10 см, 8 см, 6 см.

2) В прямоугольном треугольнике с катетами 3 см и 4 см опущена высота на гипотенузу. Найдите эту высоту и отрезки, на которые она делит гипотенузу.

Ответ. 2,4 см; 1,8 см и 3,2 см.

3) Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 5 м и 12 м.

Ответ. 6,5 м.

4*) Постройте отрезок x, если $x = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, где a и b – данные отрезки.

Построение. $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$. Сначала построим отрезок $c = \sqrt{a^2+b^2}$, это гипотенуза в прямоугольном треугольнике, у которого катеты равны a и b. Теперь нужно построить отрезок x такой, что $\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$. Для этого возьмем произвольный угол O (рис. 205) и на его сторонах отложим последовательно отрезки $OA=b$, $AB=a$, $OC=c$. Проведем прямую AC и прямую $BD||AC$, где $D \in OC$. Отрезок CD – искомый.

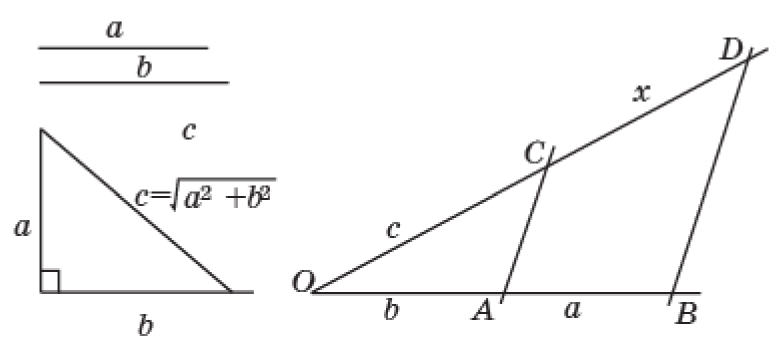


Рис. 205

3. Индивидуальное задание.

Исторические сведения

Пифагор (580–500 гг. до н. э.) - один из величайших ученых Древней Греции, а теорема Пифагора - одна из самых красивых в геометрии. Имеется более 500 различных ее доказательств. Простейший случай теоремы Пифагора для треугольника со сторонами 3, 4 и 5 был известен до Пифагора египетским жрецам, а еще ранее – китайским ученым (около 11000 лет до н.э.). Пифагор, долго живший в Египте, специально изучал науку египетских жрецов и ознакомился с тем, как они строили на земле прямой угол при помощи веревочного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 единиц. Пифагор обратил внимание на замечательное соотношение между числами 3, 4 и 5, а именно: $3^2+4^2=5^2$, и доказал, что такое соотношение имеет место для сторон произвольного прямоугольного треугольника. Целые числа, представляющие длины сторон прямоугольных треугольников, носят название ***пифагорейских чисел***.

Литература. Параграф 49 учебника; Волошинов А. В. Пифагор: союз истины, добра и красоты. – М.: Просвещение, 1993.

Урок 49

I. Устная работа

1) У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу c, если: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 1$, $b = 1$; в) $a = 5$, $b = 6$.

2) У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза c и катет a. Найдите второй катет, если: а) $c = 5$, $a = 3$; б) $c = 13$, $a = 5$; в) $c = 6$, $a = 5$.

3) Точка, лежащая внутри прямого угла, удалена от его сторон на расстояния, равные a и b. Найдите расстояние от точки до вершины угла.

4) Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?

Ответы. 1) а) 5; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{61}$. 2) а) 4; б) 12; в) $\sqrt{11}$. 3)$\sqrt{a^2+b^2}$. 4) Нет.

II. Новый материал

С теоремой Пифагора связано открытие Пифагором несоизмеримых отрезков. Два отрезка называются ***соизмеримыми***, если их отношение является рациональным числом. Иначе говоря, если один из них принять за единичный отрезок, то длина другого будет выражаться рациональным числом. Оказывается, что, как бы мы ни выбирали единичный отрезок, всегда найдутся ***несоизмеримые*** с ним отрезки, т.е. такие, длины которых не выражаются рациональными числами.

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с катетами AC и BC, равными единичному отрезку. Докажем, что гипотенуза AB несоизмерима с катетами. Предположим противное, т. е. что она соизмерима с катетами, т.е. ее длина выражается рациональным числом $\frac{p}{q}$. При этом дробь $\frac{p}{q}$ можно предполагать несократимой. Тогда по теореме Пифагора имеет место равенство $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Перепишем его в виде

$$(*)\quad p^2 = 2q^2.$$

Из этого равенства следует, что p^2 должно делиться на 2, значит, и p должно делиться на 2, т.е. $p = 2p'$. Подставляя это выражение в равенство (*), получим $(2p')^2 = 2q^2$ и, следовательно, $4(p')^2 = 2q^2$. Сокращая на 2, будем иметь равенство $2(p')^2 = q^2$. Из него следует, что q^2 должно делиться на 2, значит, и q должно делиться на 2.

Таким образом, p и q делятся на 2, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{p}{q}$. Полученное противоречие доказывает, что неверным было предположение о том, что гипотенуза соизмерима с катетами. Следовательно, гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника несоизмерима с его катетами.

III. Закрепление нового материала

1. Диагональ квадрата a. Чему равна сторона квадрата?

2. Найдите высоту равнобедренной трапеции, у которой основания 5 м и 11 м, а боковая сторона 4 м.

3. В правильном треугольнике со стороной 1 найдите его медианы.

4*. Даны две окружности радиусов R и r. Расстояние между их центрами равно $a>R+r$. Найдите длины отрезков их общих касательных (внешних).

Ответы. **1.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\sqrt{7}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4*.** $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$.

IV. Индивидуальное задание

Задание 3 из домашней работы (см. этап V урока 48).

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 48).

VI.Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 49 учебника).

2. Решить задачи.

1) Запишите какие-нибудь тройки пифагорейских чисел, кроме (3, 4, 5).

Ответ. (6, 8, 10); (5, 12, 13); (8, 15, 17); (10, 24, 26) и др.

2) Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 26 см, а отношение катетов 5:12.

Ответ. 10 см, 24 см, 26 см.

3) В равностороннем треугольнике со стороной a найдите радиусы r и R вписанной и описанной окружностей.

Ответ. $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

4*) Докажите, что верна теорема, обратная к теореме Пифагора: "Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то он прямоугольный".

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $AB^2=AC^2+BC^2$. Возьмем прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, у которого катеты A_1C_1 и B_1C_1 равны соответственно AC и BC, тогда его гипотенуза A_1B_1 равна AB. Значит, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам), следовательно, $\angle C=\angle C_1=90^{\circ}$, и треугольник ABC – прямоугольный.

Урок 50

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен …
2. Несоизмеримыми отрезками называются …
3. Примером соизмеримых отрезков являются …
4. Примером пифагорейских чисел являются …
5.* Пентаграммой называется …

Вариант 2

1. В силу теоремы Пифагора имеет место формула …
2. Соизмеримыми отрезками называются …
3. Примером несоизмеримых отрезков являются …
4. Пифагорейскими числами называются …
5*. Все треугольники в пентаграмме являются …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

1) Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) 2; б) $\frac{1}{2}$.

2) Стороны треугольника относятся как 2:5:6. Меньшая сторона подобного ему треугольника равна 6 см. Найдите стороны второго треугольника.

3) Найдите значение коэффициента k, при котором гомотетия с центром в точке O является движением.

4) Существуют ли точки, которые переводятся гомотетией на себя?

5) Существуют ли прямые, которые переводятся гомотетией на себя?

6) Какая фигура будет гомотетична отрезку с концом в центре гомотетии?

Ответы. 1) а) 10 см, 16 см, 20 см; б) 2,5 см, 4 см, 5 см. 2) 6 см, 15 см, 18 см. 3) k = 1. 4) Да, это центр гомотетии. При k = 1 все точки плоскости переходят в себя. 5) Да, все прямые, проходящие через центр гомотетии. 6) Отрезку с концом в центре гомотетии.

IV. Подготовка к контрольной работе

1. Определите, подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если: а) $\angle C=\angle C_1=87°$, AC=24 см, BC=72 см, A_1C_1=36 см, B_1C_1=108 см; б) треугольники равнобедренные и имеют равные углы при вершине, противолежащей основанию?

2. Докажите, что треугольники подобны, если имеют по равному углу, и высоты, проведенные к сторонам этих углов, пропорциональны.

3. Из точки вне окружности проведены к ней две касательные. Радиус окружности равен 11 см, сумма отрезков касательных равна 120 см. Найдите расстояние от данной точки до центра окружности.

4*. Постройте отрезок $x=\sqrt{6}$.

Ответы. **1.** а), б) Да. **2.** Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\frac{BH}{CP}=\frac{B_1H_1}{C_1P_1}$, где BH, CP и B_1H_1, C_1P_1 - соответствующие высоты треугольников. Тогда подобны прямоугольные треугольники ABH, ACP, $A_1B_1H_1$, $A_1C_1P_1$, откуда следует, что $\frac{AB}{AC}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1}$, значит, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по второму признаку подобия треугольников). **3.** 61 см. **4*.** Искомый отрезок – гипотенуза в прямоугольном треугольнике с катетами 2 и $\sqrt{2}$, отрезок $\sqrt{2}$ - это гипотенуза в прямоугольном равнобедренном треугольнике, катеты которого равны 1.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 45 – п. 49 учебника).

2. Решить задачи.

1) Треугольник DEF подобен треугольнику $D_1E_1F_1$ с коэффициентом подобия 4. Найдите стороны треугольника $D_1E_1F_1$, если DE=12 см, DF=8 см, EF=18 см.

Ответ. 1) 3 см, 2 см и 4,5 см.

2) Стороны треугольника относятся как 2:3:4. Найдите стороны подобного ему треугольника, зная, что периметр второго треугольника равен 137,7 дм.

Ответ. 30,6 дм, 45,9 дм и 61,2 дм.

3) Найдите медиану, опущенную на основание равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

Ответ. $\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$.

4) Гипотенуза прямоугольного треугольника на 1 больше одного из катетов, а сумма катетов на 4 больше гипотенузы. Найдите стороны этого треугольника.

Ответ. 5, 12, 13.

5*) Докажите, что сумма величин, обратных квадратам длин катетов прямоугольного треугольника, равна величине, обратной квадрату длины высоты этого треугольника, опущенной на его гипотенузу.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^{\circ}$), у которого $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, высота $CH=h$. Докажем, что $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$. Поскольку $\Delta ABC \sim \Delta ACH$ (по углам), имеем $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{b}{h}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат и сделав соответствующие преобразования, получим требуемое равенство.

Урок 51

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. В треугольнике ABC AB=6,8 см, BC=3,2 см, AC=7,6 см. Найдите стороны подобного ему треугольника $A_1B_1C_1$, если его сторона A_1B_1 соответствует стороне AB первого треугольника и больше ее на 3,4 см.

2. Докажите, что в подобных треугольниках отношение двух соответствующих сторон равно отношению двух соответствующих биссектрис.

3. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной b.

4. В равнобедренной трапеции основания равны 3,6 см и 7,6 см, расстояние между ними равно $4\sqrt{1,19}$ см. Найдите боковую сторону трапеции.

5*. В прямоугольный треугольник вписан квадрат таким образом, что две его вершины принадлежат гипотенузе. Эти вершины делят гипотенузу последовательно на отрезки a, b, c. Докажите, что $b^2=ac$.

Вариант 2

1. Даны два подобных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Стороны первого треугольника равны: AB=5,6 см, BC=4,8 см, AC=6,3 см. Найдите стороны второго треугольника $A_1B_1C_1$, если отношение соответствующих сторон равно 1,2 ($AB < A_1B_1$).

2. Докажите, что в подобных треугольниках отношение двух соответствующих сторон равно отношению двух соответствующих медиан.

3. Найдите высоту равнобедренного прямоугольного треугольника, опущенную из вершины прямого угла, если катет равен c.

4. Основания прямоугольной трапеции равны 2 см и 2,5 см, большая боковая сторона равна 1,3 см. Найдите периметр трапеции.

5*. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат таким образом, что у них один общий угол. Сторона квадрата равна c. Докажите, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

50. Тригонометрические функции острого угла (уроки 52, 53)

Цель – ввести понятия тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника; доказать, что синус, косинус, тангенс и котангенс зависят только от угла, а не от выбора прямоугольного треугольника; определить и знать тригонометрические функции углов в 30◦, 45◦ и 60◦; знать, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30◦, равен половине гипотенузы.

Урок 52

I. Анализ контрольной работы № 5

II. Устная работа

1) Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C$=90°), у которого $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Назовите его: а) наибольшую сторону; б) наименьшую сторону.

2) Может ли в прямоугольном треугольнике отношение катета к гипотенузе быть: а) больше 1; б) меньше 1; в) равняться 1?

3) Может ли в прямоугольном треугольнике отношение катета к катету быть: а) больше 1; б) меньше 1; в) равняться 1?

4) На рисунке (рис. 206) $BC||B_1C_1$. Равны ли отношения: а) $\frac{BC}{AB}$ и $\frac{B_1C_1}{AB_1}$; б) $\frac{AC}{AB}$ и $\frac{AC_1}{AB_1}$; в) $\frac{BC}{AC}$ и $\frac{B_1C_1}{AC_1}$; г) $\frac{AC}{BC}$ и $\frac{AC_1}{B_1C_1}$? Почему?

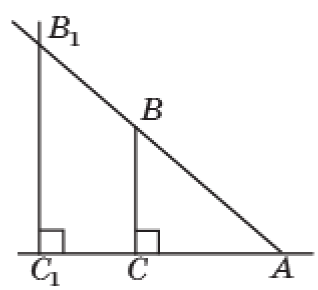


Рис. 206

5) Вопросы предыдущей задачи для ситуации, изображенной на рисунке (рис. 207).

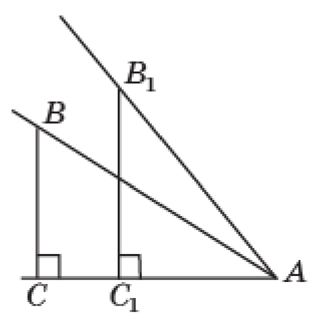


Рис. 207

6) От чего зависят отношения сторон прямоугольного треугольника?

Ответы. 1) а) Гипотенуза c; б) нельзя определить, или a, или b. 2) а) Нет; б) да, всегда меньше 1; в) нет. 3) а), б), в) Да. 4) а), б), в), г) Да, так как $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$. 5) $AB = AB_1$, но $BC \neq B_1C_1$ и $AC \neq AC_1$, поэтому во всех случаях, а именно, а), б), в), г) - нет. 6) От величин острых углов (на рисунках 206 и 207 – от величины угла A).

III. Новый материал

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C$=90º) и его острый угол A.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

Синус угла A обозначается sin A. По определению

$$\sin A=\frac{BC}{AB}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Косинус угла A обозначается cos A. По определению

$$\cos A=\frac{AC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему.

Тангенс угла A обозначается tg A. По определению

$$\mathrm{tg}\, A=\frac{BC}{AC}.$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему.

Котангенс угла A обозначается ctg A. По определению

$$\mathrm{ctg}\, A=\frac{AC}{BC}.$$

Непосредственно из этих определений следуют равенства:

$$\mathrm{tg}\, A=\frac{\sin A}{\cos A},\ \mathrm{ctg}\, A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

Теорема. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника зависят только от угла и не зависят от выбора прямоугольного треугольника, т.е. у двух прямоугольных треугольников с соответственно равными углами значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов равных острых углов совпадают.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два прямоугольных треугольника ($\angle C=\angle C_1$=90°), у которых $\angle A=\angle A_1$. Тогда эти треугольники подобны (по первому признаку подобия треугольников). Поэтому $A_1B_1=k\cdot AB$, $A_1C_1=k\cdot AC$, $B_1C_1=k\cdot BC$. Следовательно,

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{A_1B_1}=\sin A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1,$$
$$\text{tg}\, A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \text{tg}\, A_1,$$
$$\text{ctg}\, A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \text{ctg}\, A_1.$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс называют ***тригонометрическими функциями острого угла*** (от греческих слов: «тригонон» - треугольник и «метрео» - измеряю).

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите значения тригонометрических функций для угла 45°.

2. Постройте угол *A*, если: а) $\text{tg}\, A = \frac{1}{2}$; б) $\sin A = \frac{3}{5}$.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите тригонометрические функции большего из острых углов данного треугольника.

4*. Что больше: а) sin 15° или sin 30°; б) sin 15° или cos 15°; в) tg 60° или ctg 60°?

Ответы. **1.** $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg}\, 45^\circ = \text{ctg}\, 45^\circ = 1$. **2.** Нужно построить прямоугольный треугольник с катетами: а) 1 и 2; б) 3 и 4. Угол *A* лежит против катета, равного: а) 1; б) 3. **3.** Больший из острых углов, назовем его ϕ, лежит против катета, равного12: $\sin \varphi = \frac{12}{13}$, $\cos \varphi = \frac{5}{13}$, $\text{tg}\, \varphi = 2{,}4$, $\text{ctg}\, \varphi = \frac{5}{12}$. **4*.** а) sin 30° > sin 15° ; б) cos 15°>sin 15°; в) tg 60° >ctg 60°.

V. Занимательный момент

Решение задачи 5* из домашней работы (см. этап V урока 50).

VI. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 50 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите значения тригонометрических функций угла в 60°.

Ответ. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3}$, $\text{ctg}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) Постройте угол *B*, косинус которого равен: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{9}$.

Ответ. Нужно построить прямоугольный треугольник с катетом и гипотенузой, соответственно равными: а) 3 и 5; б) 4 и 9. Угол *B* прилежит к данному катету.

3) Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 8 см, основание равно 12 см. Найдите синус и косинус угла *C* при основании треугольника.

Ответ. $\sin C = 0{,}8$; $\cos C = 0{,}6$.

4*) Найдите синус угла в 54°.

Решение. Возьмем равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине C, противоположной основанию AB, в 108° и опустим из этой вершины высоту CH, тогда $\angle ACH = 54°$ и $\sin 54° = \frac{AH}{AC}$. Треугольник ABC – золотой (см. параграф 48* из учебника), значит, $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, учитывая, что $AH = \frac{AB}{2}$, имеем $\sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Урок 53

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется …
2. Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется …
3. Косинус и тангенс угла A обозначаются соответственно …
4. Тригонометрическими функциями острого угла называются …
5. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на … прилежащего угла.
6. tg 45°= …

Вариант 2

1. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется …
2. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется …
3. Синус и котангенс угла B обозначаются соответственно …
4. Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на … противолежащего угла.
5. sin 60°= …
6. ctg 45°= …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Найдем значения тригонометрические функций угла в 30°. Для этого рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a и проведем в нем биссектрису AD. Тогда треугольник ADB прямоугольный и $\angle DAB = 30°$, $DB = \frac{a}{2}$, по теореме Пифагора $AD=\sqrt{AB^2 - DB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, и, следовательно,

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Первое из этих равенств можно переформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Для тригонометрических функций составлены специальные таблицы. Для вычисления тригонометрических функций применяют также микрокалькуляторы.

IV. Закрепление нового материала

1. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а угол при основании – 30°. Найдите боковую сторону.

2. В треугольнике ABC угол A равен 60°, AB = 3 см, BC = 4 см. Найдите AC.

3. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Известно, что: а) $\sin A = \sin B$; б) $\text{ctg}\, A = \text{ctg}\, B$; в) $\sin A<\sin B$; г) $\cos B>\cos A$. Какой вывод можно сделать о катетах данного треугольника?

4*. По данной стороне a правильного вписанного в окружность n-угольника найдите сторону правильного описанного около данной окружности n-угольника.

Ответы. **1.** $8\sqrt{3}$ см. **2.** Опустим высоту BH (рис. 208), тогда из треугольника ABH имеем $AH = \frac{AB}{2} = 1{,}5$ (см), $BH = AB\cdot\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Из треугольника BCH имеем $CH=\sqrt{BC^2 - BH^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$ (см). Окончательно получаем $AC=AH+CH=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ (см).

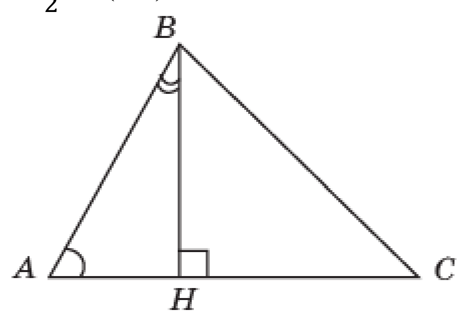


Рис. 208

3. а), б) $AC=BC$; в) $BC<AC$; г) $BC>AC$. **4*.** $\frac{a}{2\cdot cos\frac{180^\circ}{n}}$.

V. Задание на дом

1. Знать теорию (п. 50 учебника).

2. Решить задачи.

1) У прямоугольного треугольника один катет равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен 0,8. Найдите гипотенузу и второй катет.

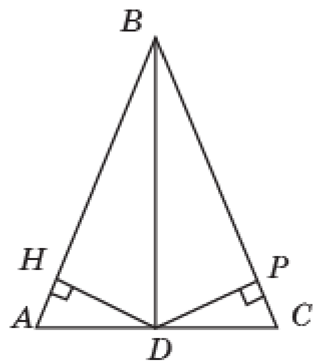
Ответ. 10 см, 6 см.

2) В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны 1 и 3. Найдите его острые углы.

Ответ. 30° и 60°.

3) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведена медиана BD (рис. 209). Из точки D опущены перпендикуляры DH и DP на боковые стороны треугольника соответственно AB и BC. Выразите все отрезки,

данные на рисунке, через $AB=a$ и тригонометрические функции угла A, равного α.



Ответ. $BC = a$, $BD = a\cdot\sin\alpha$, $AD = CD = a\cdot\cos\alpha$, $AC = 2a\cdot\cos\alpha$, $DH = DP = a\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $AH = CP = a\cdot\cos^2\alpha$, $BH = BP = a\cdot(1-\cos^2\alpha) = a\cdot\sin^2\alpha$.

4*) Найдите наименьшую диагональ правильного n-угольника, сторона которого равна b.

Ответ. $2b\cdot\sin\frac{90°(n-2)}{n}$.

51. Тригонометрические тождества (уроки 54, 55)

Цель – познакомиться с некоторыми тригонометрическими тождествами; научиться применять их при решении задач.

Урок 54

I. Устная работа

1) Может ли синус угла равняться его косинусу?

2) Может ли: а) синус; б) косинус угла быть равен $\sqrt{2}$? Почему?

3) Может ли: а) тангенс; б) котангенс угла равняться $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

4) Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите угол между диагоналями.

5) Найдите высоту равностороннего единичного треугольника. Предложите несколько способов.

Ответы. 1) Да, например, у угла 45°. 2) а), б) Нет, синус и косинус угла меньше единицы. 3) а), б) Да. 4) 60°. 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II. Новый материал

Изобразим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), тогда $\angle A+\angle B = 90°$, т.е. $\angle A = 90° - \angle B$. Теперь выпишем тригонометрические функции $\angle A$ и $\angle B$, а именно, $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $\sin B = \frac{AC}{AB}$, $\cos B = \frac{BC}{AB}$, $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$, $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$, $\operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}$. Следовательно, $\sin B = \cos A$, $\cos B = \sin A$, $\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A$, $\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} A$. Таким образом, имеют место следующие тождества:

$$\sin (90° - A) = \cos A,\ \cos (90° - A) = \sin A;$$

$$\operatorname{tg} (90° - A) = \operatorname{ctg} A,\ \operatorname{ctg} (90° - A) = \operatorname{tg} A;$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},\ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A},\ \operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A};$$

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = 1.$$

Задание

Заполним следующую таблицу:

Угол α → Фунция ↓	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

После заполнения данной таблицы предлагаем учащимся найти для указанных углов сумму $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ и сделать соответствующее предположение.

Теорема. Синус и косинус острого угла связаны между собой основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Доказательство. По определению синуса и косинуса в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) имеем

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2+AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2+AC^2=AB^2$, следовательно, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

Основное тригонометрическое тождество позволяет выразить косинус острого угла через его синус и наоборот, а именно,

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A},\ \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}.$$

III. Закрепление нового материла

1. Найдите значение тригонометрических функций угла M, если $\cos M = \frac{1}{4}$.

2. Выразите тригонометрические функции угла α через $\sin\alpha$.

3. Докажите тождество $1+\mathrm{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.

4*. Докажите, что для любого острого угла A выполняется неравенство $\sin A<\mathrm{tg}\, A$.

Ответы. **1.** $\sin M = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\mathrm{tg}\, M = \sqrt{15}$, $\mathrm{ctg}\, M = \frac{\sqrt{15}}{15}$. **2.** $\cos\alpha =\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$. **3.** $1+\mathrm{ctg}^2 A = 1+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A}$. **4*.** $\mathrm{tg}\, A = \frac{\sin A}{\cos A} = \sin A\cdot \frac{1}{\cos A}$, поскольку $\sin A<1$, $\cos A<1$, то $\frac{1}{\cos A}>1$ и $\sin A < \sin A\cdot \frac{1}{\cos A}$.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 53).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 51 учебника), повторить теорию (п. 50).

2. Решить задачи.

1) Найдите tg A, если: а) $\cos A = \frac{5}{13}$; б) $\sin A = \frac{3}{5}$.

Ответ. а) 2,4; б) $\frac{3}{4}$.

2) Докажите, что синус большего угла больше, а косинус меньше.

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^o$) $\angle A > \angle B$, значит, $BC > AC$, $\sin A = \frac{BC}{AB} = BC \cdot \frac{1}{AB}$, $\sin B = AC \cdot \frac{1}{AB}$, значит, $\sin A > \sin B$. Аналогично, $\cos A = AC \cdot \frac{1}{AB}$, $\cos B = BC \cdot \frac{1}{AB}$, $\cos A < \cos B$.

3) Докажите, что если синусы острых углов равны, то и сами углы равны

Ответ. Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = 90^o$ и $\angle C_1 = 90^o$) $\sin A = \sin A_1$. Тогда $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, значит, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$. Поскольку $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(kA_1B_1)^2 - (kB_1C_1)^2} = k \cdot A_1C_1$, или $\frac{AC}{A_1C_1} = k$. Таким образом, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по третьему признаку подобия треугольников), откуда следует равенство соответствующих углов, т.е. $\angle A = \angle A_1$.

4*) Докажите, что углы B и E на рисунке 210 равны.

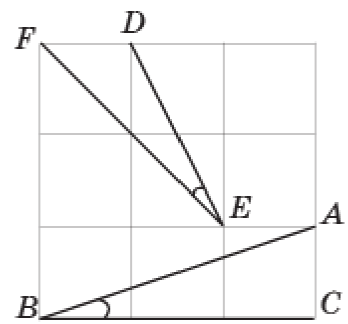


Рис. 210

Решение. Проведем $DH \perp EF$, где $D \in EF$, и рассмотрим прямоугольный треугольник DHE. Из него $\sin E = \frac{DH}{DE}$, учитывая, что $DH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $DE = \sqrt{5}$, имеем $\sin E = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Из прямоугольного треугольника ABC имеем $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Таким образом, $\sin B = \sin E$, откуда на основании факта, доказанного в предыдущей задаче, получаем $\angle B = \angle E$.

Урок 55

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – шестерых учащихся приглашаем за первые парты.

Задания 1, 3, 5

1. Определения синуса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.

2. Теорема о том, что синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника не зависят от выбора треугольника.

Задания 2, 4, 6

1. Определения косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

2. Теорема об основном тригонометрическом тождестве.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Найдите sin B, если: а) $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos B = \frac{1}{3}$.

2) Упростите выражение: а) $1+\sin^2\beta - \cos^2\beta$; б) $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

Ответы. 1) а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 2) а) $2\sin^2\beta$; б) $2\operatorname{tg}\alpha$.

Задание для класса

1. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.

2. Известно, что $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите значения остальных тригонометрических функций угла A.

3. Определите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катет которого равен a, а прилежащий к нему острый угол равен $\boldsymbol{\beta}$.

4*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена биссектриса AL его острого угла A. Докажите, что $\frac{AB}{BL} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

Ответы. 1. $\frac{\sqrt{7}}{12}$. 2. $\sin A = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} A = \frac{4}{3}$. 3. $R = \frac{a}{2\cos\beta}$. 4*. Поскольку биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к этим отрезкам (см. задачу 3* этапа I урока 44 из рубрики «Задание для класса»), имеем, $\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

К доске вызываем трех учеников ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ –вместе с классом начинает решать задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно решает классную задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 2 из домашней работы (см. этап V урока 54).

Дополнительные вопросы

- Что называется тригонометрическими функциями острого угла?
- Как связаны между собой гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника?
- Чему равен катет, лежащий против угла в 30°?

II. Устная работа

1) Найдите sin A, если cos $A = \frac{1}{6}$.

2) Найдите угол B, если: а) sin $B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) cos $B = \frac{1}{2}$; в) tg B = 1; г) ctg $B = \sqrt{3}$.

3) Найдите ctg C, если: а) tg C = 6; б) tg C = 1; в) tg $C = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

4) Может ли синус (косинус) угла быть равен $\sqrt{5}$?

5) Может ли тангенс (котангенс) угла быть равен $\sqrt{5}$?

6) Существует ли угол D, для которого: а) sin D = cos D; б) tg D = ctg D?

7) Могут ли синус и косинус одного угла равняться: а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Ответы. 1) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. 2) а), б) 60°; в) 45°; г) 30°. 3) а) $\frac{1}{6}$; б) 1; в) $2\sqrt{5}$. 4) Нет (нет). 5) Да (да). 6) а), б) Да, 45°. 7) а) Нет; б) да.

III. Самостоятельная работа

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Найдите tg A, если: а) sin $A=\frac{1}{2}$; б) cos $A=\frac{2}{3}$.

2. Найдите sin B и ctg B, если cos $A = \frac{3}{5}$ и $\angle A+\angle B$= 90°.

3. Упростите выражение: а) $\frac{\sin^2 \alpha}{1+\cos \alpha}$; б) $\frac{\text{tg}^2 \alpha}{1+\text{tg}^2 \alpha}$.

4*. Смежные стороны прямоугольника равны a и b ($a<b$). Найдите угол между его диагоналями.

Вариант 2

1. Найдите ctg B, если: а) sin $B = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) cos $B = \frac{1}{3}$.

2. Найдите cos *A* и tg *A*, если sin *B* = $\frac{1}{4}$ и ∠*A*+∠*B* = 90°.

3. Упростите: а) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

4*. Угол $\boldsymbol{\alpha}$, вписанный в окружность, опирается на хорду, длина которой равна *a*. Найдите радиус круга.

Ответы. *Вариант 1*. 1. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 2. $\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{3}$. 3. а) 1 – cos α; б) $\sin^2\alpha$. 4*. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b}$. *Вариант 2*. 1. а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 2. $\frac{1}{4}$; $\sqrt{15}$. 3. $-\mathrm{ctg}^2\alpha$; б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. 4*. $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 54).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 50, п. 51 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что тангенсы острых углов прямоугольного треугольника взаимно обратны, т. е. их произведение равно единице.

2) В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны 2 и 3. Найдите его острые углы.

Ответ. tg *A* = $\frac{\sqrt{6}}{2}$, tg *B* = $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3) Смежные стороны прямоугольника равны *a* и *b*. Найдите углы, которые образуют с ними диагонали прямоугольника.

Ответ. tg α = ctg β =$\frac{a}{b}$ (или $\frac{b}{a}$), α +β =90°, где α и β - искомые углы.

4*) Докажите, что для любого острого угла *A* выполняется неравенство cos *A* < ctg *A*.

52. Тригонометрические функции тупого угла (уроки 56, 57)

Цель – дать определение тригонометрических функций углов $90° \leq \angle A < 180°$; доказать для углов $0° < \angle A < 180°$ основное тригонометрическое тождество; научиться применять его при решении задач.

Урок 56

I. Анализ самостоятельной работы

Этап III урока 55.

II. Новый материал

Определим тригонометрические функции углов $90° \leq \angle A < 180°$ (рис. 211), положив, что $\sin 90° = 1$ и $\sin A = \sin(180° - A)$, если $90° < \angle A < 180°$; $\cos 90° = 0$ и $\cos A = -\cos(180° - A)$, если $90° < \angle A < 180°$.

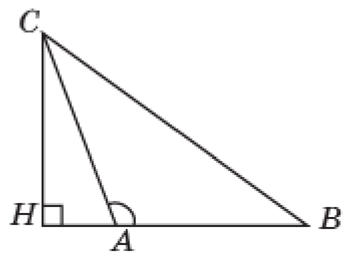


Рис. 211

Тангенс и котангенс углов определяются как и ранее, а именно,

$$\text{tg}\, A = \frac{\sin A}{\cos A},\ \angle A \neq 90°;\ \text{ctg}\, A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Теорема. Для произвольных углов A, $0° < \angle A < 180°$, имеет место основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Доказательство. Для углов, меньших 90°, это тождество было доказано ранее. Если $\angle A = 90°$, то $\sin A = 1$, $\cos A = 0$. Следовательно, требуемое тождество выполняется. Если $90° < \angle A < 180°$, то для $\angle B = 180° - \angle A$ будет выполняться неравенство $0° < \angle B < 90°$ и равенства

$$\sin A = \sin B,\ \cos A = -\cos B.$$

Следовательно, $\sin^2 A + \cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 B = 1$.

III. Закрепление нового материала

1. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла в $150°$.

2. Упростите выражение $(1 - \sin A)(1 + \sin A)$.

3. Найдите $\text{tg}\, B$, если: а) $\cos B = -\frac{1}{2}$; б) $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $90° < \angle B < 180°$.

4*. Расположите в порядке убывания синусы углов 30°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°.

Ответы. **1.** $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\text{tg } 150° = \frac{\sin 150°}{\cos 150°} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{ctg } 150° = -\sqrt{3}$. **2.** $\cos^2 A$. **3.** а) $-\sqrt{3}$; б) -1. **4*.** $\sin 90° > \sin 60° = \sin 120° > \sin 135° > \sin 30° = \sin 150°$.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 55).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 52 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла в 120°.

Ответ. $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\text{tg } 120° = -\sqrt{3}$, $\text{ctg } 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) Найдите котангенс угла K, если $\sin K = \frac{1}{3}$ и угол K – тупой.

Ответ. $\text{ctg } K = -2\sqrt{2}$.

3) Найдите значение выражения: а) $\sin 30° + \text{ctg } 90° - \cos 120°$;

б) $\text{tg } 135° + \cos 150° + \text{ctg } 60°$.

Ответ. а) 1; б) $-\frac{6+\sqrt{3}}{6}$.

4*) Докажите, что сумма косинусов всех четырех углов трапеции равна нулю.

Ответ. Решение следует из того, что сумма углов трапеции, прилежащих к одной боковой стороне, равна 180°.

Урок 57

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Острым углом называется …

2. Основное тригонометрическое тождество для случая 90°<*A*<180° заключается в том, что …

3. sin (180°–*A*)= …

4. cos 135° = …

5. tg 120° = …

Вариант 2

1. Тупым углом называется …

2. Основное тригонометрическое тождество для случая 0°<*B*<90° заключается в том, что …

3. cos (180°–*A*)= …

4. sin 150° = …

5. ctg 135° = …

Ответы. Вариант 1. 4. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 5. $-\sqrt{3}$. *Вариант 2*. 4. $\frac{1}{2}$. 5. -1.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

Задания на повторение по готовым чертежам.

1) Найдите диагональ квадрата (рис. 212).

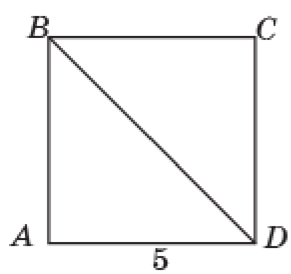


Рис. 212

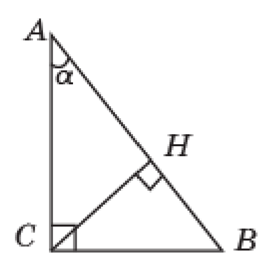


Рис. 213

2) Найдите катеты прямоугольного треугольника *ABC* (рис. 213).

3) В параллелограмме *KLMN* (рис. 214) определите, в каком отношении разделена диагональ *LN* точками *R* и *S*, точки *P* и *Q* - середины сторон соответственно *KL* и *MN*.

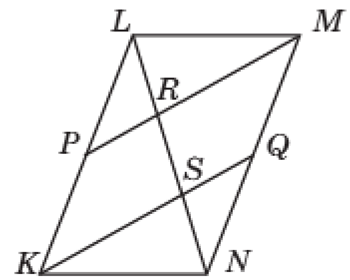


Рис. 214

Ответы. 1) $5\sqrt{2}$. 2) $\frac{h}{\sin\alpha}, \frac{h}{\cos\alpha}$. 3) Точки R и S разбивают диагональ LN на три равные части.

IV. Решение практических задач

1. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Найдите угол подъема.

2. На каком расстоянии друг от друга следует копать ямки для посадки деревьев по склону холма, наклоненному к горизонту под углом ϕ, если расстояние между двумя деревьями на ровной горизонтальной поверхности равно a м?

3. Ширина каждой ступеньки (называется *проступь*) лестницы равна b см. Найдите высоту ступеньки, если угол подъема лестницы равен α.

Ответы. **1.** $\sin\varphi = \frac{1}{30}$, $\varphi \approx 2°$. **2.** $\frac{a}{\cos\varphi}$ м. **3.** $b\cdot\operatorname{tg}\alpha$ см.

V. Занимательный момент урока

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 56).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 50, п. 51, п. 52 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что для углов $90° < \angle A < 180°$ имеют место тождества

$$1 + \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A};\ 1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

2) Упростите выражение: а) $1 - \sin^2 A$; б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$; в) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A \cos^2 A$.

Ответ. а) $\cos^2 A$; б) 2; в) 1.

3) Расположите в порядке возрастания тангенсы углов: 70°, 80°, 100°.

Ответ. $\operatorname{tg} 100° < \operatorname{tg} 70° < \operatorname{tg} 80°$.

4*) Расположите в порядке возрастания котангенсы углов: 60°, 110°, 120°.

Ответ. $\operatorname{ctg} 120° < \operatorname{ctg} 110° < \operatorname{ctg} 60°$.

53. Теорема косинусов
(уроки 58, 59)

Цель – сформулировать и доказать теорему косинусов, научиться использовать ее при решении задач, в том числе практического характера.

Урок 58

I. Устная работа

1) Какой угол называется: а) прямым; б) острым; в) тупым?

2) Как связаны между собой катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника?

3) Что называется тригонометрическими функциями острого угла?

4) Как выражается синус угла через его косинус и, наоборот, косинус через синус?

5) Может ли: а) синус; б) косинус; в) тангенс; г) котангенс угла роавняться 2?

6) Может ли: а) синус; б) косинус; в) тангенс; г) котангенс угла быть отрицательным?

II. Новый материал

Вопрос

- Сколько основных элементов, и каких имеет любой треугольник?

Задание

Изобразите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и найдите его неизвестные элементы (углы и стороны) по известным элементам, указанным на рисунках 215, а) – г).

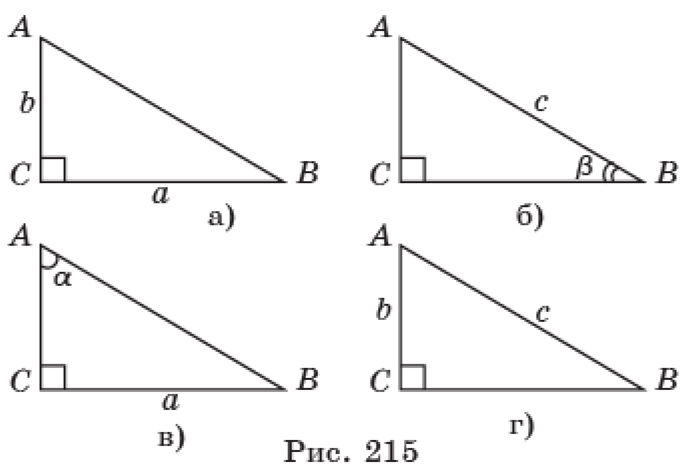


Рис. 215

Ответ. а) $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, tg $A = \frac{a}{b}$, $\angle B = 90° - \angle A$; б) $\angle A = 90° - \beta$, $AC = c \cdot \sin\beta$, $BC = c \cdot \cos\beta$; в) $\angle B = 90° - \alpha$, $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$, $AC = a \cdot \text{ctg}\alpha$; г) $BC = \sqrt{c^2 - b^2}$, $\sin B = \frac{b}{c}$, $\angle A = 90° - \angle B$.

Вопросы

- По каким элементам прямоугольного треугольника можно найти его остальные элементы (углы и стороны)?

- Сколько основных элементов определяют прямоугольный треугольник?

- Сколько же нужно знать элементов, и каких в произвольном треугольнике, чтобы найти остальные? Сделайте предположение.

Задание

Пусть дан треугольник ABC, у которого стороны $AC = b$, $BC = a$ и известен $\angle C$. Найдите сторону AB.

Решение. Проведем высоту AH (рис. 216), тогда $AH = b \cdot \sin C$, $CH = b \cdot \cos C$, $BH = a - b \cdot \cos C$. Таким образом, $AB^2 = (b \cdot \sin C)^2 + (a - b \cdot \cos C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

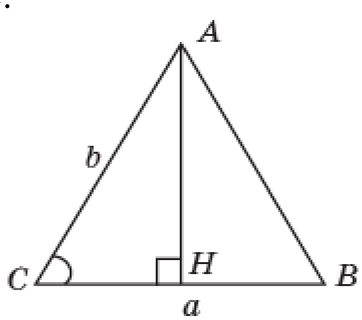


Рис. 216

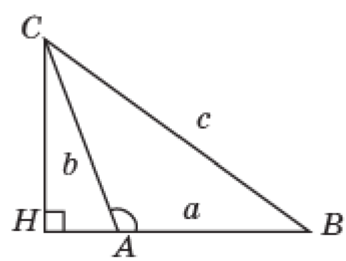


Рис. 217

Следующая теорема является обобщением теоремы Пифагора.

Теорема. (Теорема косинусов.) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство. Выше мы рассмотрели треугольник ABC с острым углом C, теперь рассмотрим треугольник ABC с тупым углом C (рис. 217). Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Из вершины A опустим перпендикуляр AH. Тогда $AH = b \cdot \sin C$, $CH = -b \cdot \cos C$, $BH = a - b \cdot \cos C$.

По теореме Пифагора имеем $c^2 = (b \cdot \sin C)^2 + (a - b \cdot \cos C)^2 = b^2 \cdot \sin^2 C + a^2 - 2ab \cdot \cos C + b^2 \cdot \cos^2 C = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Итак, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Если угол C будет прямой, то $\cos C = 0$, и, значит, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ или $c^2 = a^2 + b^2$.

Вопрос

- Почему доказанную теорему называют обобщенной теоремой Пифагора?

III. Закрепление нового материала

1. Задачи по готовым чертежам (рис. 218, а-г). Найдите *x*.

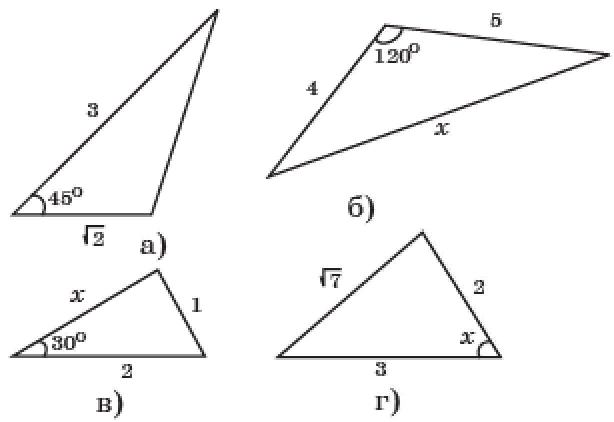


Рис. 218

2*. При каких значениях угла *A* квадрат стороны треугольника, лежащей против этого угла: а) меньше суммы квадратов двух других сторон; б) равен сумме квадратов двух других сторон; в) больше суммы квадратов двух других сторон?

Ответы. **1.** а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{61}$; в) $\sqrt{3}$; г) 60°. **2*.** а) $0° < \angle A < 90°$; б) $\angle A = 90°$; в) $90° < \angle A < 180°$.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 57).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 53 учебника).

2. Решить задачи.

1) В треугольнике *ABC* стороны $AB = 12$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 60°$. Найдите третью сторону.

Ответ. $BC = 4\sqrt{7}$см.

2) Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 120°, если прилежащие к нему стороны равны 6 см и 10 см.

Ответ. 14 см.

3) Даны диагонали параллелограмма *c* и *d* и угол между ними ϕ. Найдите стороны параллелограмма.

Ответ. $\frac{\sqrt{c^2+d^2-2cd\cdot\cos\varphi}}{2}$, $\frac{\sqrt{c^2+d^2+2cd\cdot\cos\varphi}}{2}$.

4*) Стороны треугольника равны *a*, *b* и *c*. Найдите медиану, проведенную к стороне *c*.

Ответ. $\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}$.

Урок 59

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – шестерых учащихся приглашаем за первые парты.

Задания 1, 3, 5

1. Когда косинус угла отрицателен?

2. Сформулируйте и докажите теорему косинусов (для острого угла).

Задания 2, 4, 6

1. Может ли быть отрицательным: а) синус; б) тангенс; б) котангенс угла?

2. Сформулируйте и докажите теорему косинусов (для тупого угла).

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 120°, если прилежащие к нему стороны равны 14 мм и 16 мм.

2) Найдите косинусы углов равнобедренного треугольника, если его основание равно a, а боковая сторона равна b.

Ответы. 1) 26 мм. 2) $\frac{a}{2b}$, $\frac{a}{2b}$, $1-\frac{a^2}{2b^2}$.

Задание для класса

1. В треугольнике ABC известны стороны AB=4 см, BC=5 см, AC=6 см. Найдите косинус угла B. Определите, острым или тупым является угол B.

2. Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 м и 5 м на третью сторону.

3. Как расположен центр описанной окружности относительно треугольника, стороны которого равны 6, 8, 10?

4*. Поезд идет со скоростью 12 м/с, и пассажиру из вагона кажется, что капли дождя падают под углом 30° к отвесному направлению. Найдите скорость падания капель.

Ответы. **1.** $\frac{1}{8}$, угол B - острый. **2.** 2,25 м и 3,75 м. **3.** Лежит в середине гипотенузы, равной 10. **4*.** Нужно рассмотреть прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен 30°, катет, противолежащий ему, равен 12, искомый прилежащий катет равен $12\sqrt{3}$ м/с.

К доске вызываем трех учеников ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом начинает решать задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – решение задачи 3 из домашней работы (см. этап V урока 58).

Дополнительные вопросы

- Почему теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора?
- В чем заключается основное тригонометрическое тождество?
- Как связаны между собой катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника?

II. Устная работа (на повторение)

1) Подобны ли два треугольника: а) равносторонних; б) равнобедренных; в) прямоугольных; г) равнобедренных прямоугольных?

2) Подобны ли два равнобедренных треугольника, если основание и высота, проведенная к нему, одного треугольника в 3 раза меньше соответствующих элементов другого треугольника?

3) Можно ли в треугольнике провести высоту таким образом, чтобы разделить его на два подобных треугольника?

4) Произведение сторон треугольника равно 24, стороны подобного ему треугольника равны 12 см, 9 см и 6 см. Найдите стороны данного треугольника.

5) Какая фигура будет гомотетична отрезку с концом в центре гомотетии?

6) Как расположены относительно друг друга две окружности, если центром гомотетии является центр одной из них?

Ответы. 1) а) Да; б), в) нет; г) да. 2) Да. 3) Да, это высота, опущенная из вершины прямого угла неравнобедренного треугольника. 4) 4 см, 3 см, 2 см. 5) Отрезок с концом в центре гомотетии. 6) Концентрические окружности.

III. Решение практических задач

1. Используя теорему косинусов, определите расстояние между пунктами M и N, между которыми расположен пруд (рис. 219, а).

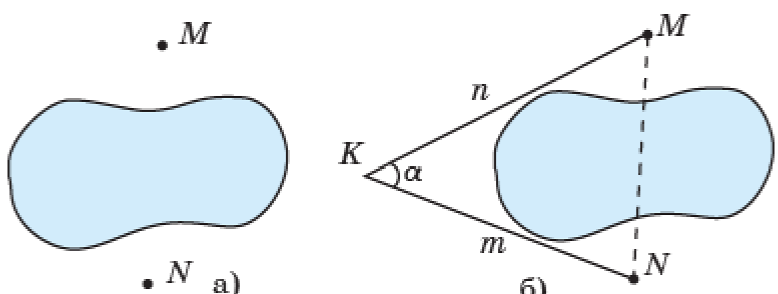


Рис. 219

2. Длина маятника равна l м, высота его подъема (от вертикального положения) при отклонении на угол ψ равна h м. Найдите расстояние от конца маятника при данном отклонении от вертикальной прямой до его первоначального спокойного состояния.

3*. На стрельбище спортсмены выстраиваются параллельно стрелковому стенду на расстоянии 500 м от него. Определите длину участка, который находится под обстрелом, если расстояние между первым и последним участниками соревнования равно 100 м и дальность полета пули равна 2,9 км.

Ответы. **1.** Решение показано на рисунке 219, б, где K – выбранный третий пункт такой, что из него видны и доступны данные пункты M и N. Пусть $KN = m$, $KM = n$ и $\angle MKN = \alpha$, тогда по теореме косинусов $MN = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cdot cos\,\alpha}$. **2.** См. рисунок 220, $BH = (l - h)\cdot \mathrm{tg}\,\psi$, где $OA = OB = l$, $\angle AOB = \psi$, $AH = h$.

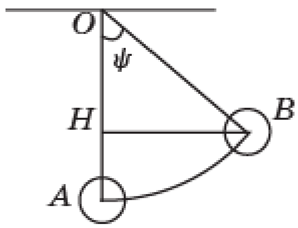


Рис. 220

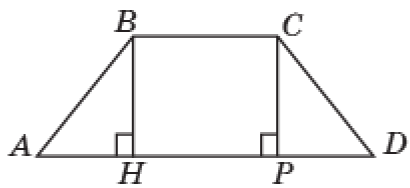


Рис. 221

3*. См. рисунок 221, где $ABCD$ – равнобедренная трапеция ($BC||AD$), BC – цепь спортсменов, $BC = 100$ м, $BH \perp AD$, $CP \perp AD$, $BH = CP = 500$ м, $AB = CD = 2{,}9$ км, AD - искомое расстояние. $AD = 100(8\sqrt{51}+1)$ м.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 58).

V. Задание на дом

1. Повторить теорему косинусов (п. 53 учебника).

2. Решить задачи.

1) Не вычисляя углы треугольника, укажите его вид (относительно углов), если стороны треугольника равны: а) 7, 8, 12; б) 0,3, 0,4, 0,5; в) 13, 14, 15.

Ответ. а) Тупоугольный; б) прямоугольный; в) остроугольный.

2) Как расположен центр описанной окружности относительно треугольника, стороны которого равны: а) 4, 5, 6; б) 3, 4, 6?

Ответ. а) Находится внутри треугольника; б) находится вне треугольника.

3) Стороны параллелограмма равны 30 мм и 35 мм, одна диагональ – 55 мм. Найдите другую диагональ.

Ответ. $\cos\varphi = -\frac{3}{7}$, где φ - тупой угол параллелограмма, искомая диагональ равна 35 мм.

4*) Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Решение. $d_1^2 + d_2^2 = (a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\varphi) + (a^2 + b^2 + 2ab\cdot\cos\varphi) = 2(a^2 + b^2)$, где d_1, d_2 – диагонали параллелограмма, a и b – его стороны, φ - острый угол.

54. Теорема синусов
(уроки 60, 61)

Цель – сформулировать и доказать теорему синусов, научиться использовать ее при решении задач, в том числе практического характера.

Урок 60

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Обобщением теоремы Пифагора является теорема, которая заключается в том, что …

2. Косинус угла отрицателен, когда …

3. Если катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 16 см, то тангенс большего острого угла равен …

4. В треугольнике CDE $\angle C = 30°$, $CD = 4$ см, $CE = 3$ см, тогда $DE = …$

5. В треугольнике LMN $\angle M = 120°$, $ML = 2$, $MN = 3$, тогда $LN = …$

Вариант 2

1. Теорема косинусов формулируется следующим образом …

2. Теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора, потому что …

3. Если катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 5 см, то котангенс меньшего острого угла равен …

4. В треугольнике KLM $\angle K = 60°$, $KL = 5$ см, $KM = 3$ см, тогда $ML = …$

5. В треугольнике DEF $\angle E = 150°$, $DE = 1$, $FE = 9$, тогда $DF = …$

Ответы. *Вариант 1*. 2. Угол тупой. 3. $2\frac{2}{7}$. 4. $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$ см. 5. $\sqrt{19}$. *Вариант 2*. 3. $2\frac{2}{5}$. 4. $\sqrt{19}$ см. 5. $\sqrt{82 + 9\sqrt{3}}$.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Задание

В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AB = c$. Нужно найти сторону BC.

Решение. Проведем высоту BH, тогда $BH = c \cdot \sin\alpha$, $BC = \frac{BH}{\sin C} = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\sin C = \sin(180° - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$.

Оказывается, эту задачу можно решить проще, если знаешь теорему синусов, которую впервые доказал азербайджанский математик Насир ад-Дин (Насирэддин) ат-Туси (1201-1274).

Теорема. (Теорема синусов.) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Причем, отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около треугольника окружности.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник (рис. 222).

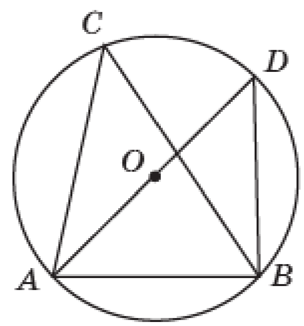


Рис. 222

Опишем около него окружность с центром O и радиусом R. Рассмотрим треугольник ABD, сторона AD которого проходит через O. Тогда углы C и D опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны. Угол ABD опирается на половину окружности и, следовательно, равен 90°. Таким образом, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = AD = 2R$. Аналогично, имеют место равенства $\frac{BC}{\sin A} = 2R = \frac{AC}{\sin B}$. Итак, имеем равенства

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R,$$

означающие, что стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов и их отношения равны диаметру описанной окружности.

IV. Закрепление нового материала

1. Пусть в треугольнике ABC известна сторона AB и углы A и B. Какими формулами выражаются его стороны AC и BC?

2. В треугольнике ABC сторона $AC = 9$ см, $\angle B = 135°$. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

3. Найдите отношения сторон $AC{:}BC$ и $AB{:}BC$ в треугольнике ABC, в котором $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

4*. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Докажите, что $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \angle DCB}{\sin \angle DCA}$.

Ответы. **1.** $\angle C = 180^{\circ} - (\angle A + \angle B)$, $AC = AB \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$, $BC = AB \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$. **2.** $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{\sin 135^{\circ}} = 4{,}5\sqrt{2}$ см. **3.** $AC:BC = \sqrt{3}:3$ и $AB:BC = \sqrt{3}:3$. **4*.** $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin B}{\sin A}$; из треугольника BCD имеем $\sin B = \frac{\sin \angle DCB \cdot CD}{BD}$; из треугольника ACD имеем $\sin A = \frac{\sin \angle DCA \cdot CD}{AD}$; учитывая, что $AD = BD$, получим искомое равенство $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \angle DCB}{\sin \angle DCA}$.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 54 учебника), повторить теорию (п. 53 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите отношения сторон $AC:BC$ и $AB:BC$ в треугольнике ABC, в котором $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$.

Ответ. $AC:BC=1:2$ и $AB:BC=\sqrt{3}:2$.

2) В треугольнике ABC сторона $AB = 6$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 120°$. Найдите сторону BC.

Ответ. $2\sqrt{6}$ см.

3) Сторона AB треугольника ABC равна 10 см. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если противолежащий этой стороне угол C равен: а) 30°; б) 90°; в) 120°.

Ответ. а) 10 см; б) 5 см; в) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см.

4) Диагональ параллелограмма равна c и образует со сторонами этого параллелограмма углы φ и ψ. Выразите стороны параллелограмма через c, φ и ψ.

Ответ. $\frac{c \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$ и $\frac{c \cdot \sin \psi}{\sin(\varphi+\psi)}$.

5*) В равнобедренной трапеции основания равны 4 см и 6 см, боковая сторона – 5 см. Найдите ее диагонали.

Ответ. $\cos \varphi = \frac{1}{5}$, где φ - острый угол трапеции, ее диагонали равны 7 см и 7 см.

Урок 61

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – шестерых учащихся приглашаем за первые парты.

Задания 1, 3, 5

1. Определение косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Теорема синусов.

Задания 2, 4, 6

1. Определение синуса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Теорема косинусов.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Найдите отношение сторон $KL:LM:MK$ треугольника KLM, если $\angle K=\angle L=30°$.

2) В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $BC = a$. Найдите остальные элементы треугольника (углы и стороны).

Ответы. 1) $\sqrt{3}$:1:1. 2) $\angle C = 180° - (\alpha + \beta)$, $AC = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$, $AB = \frac{a\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$.

Задание для класса

1. В треугольнике ABC известен радиус R описанной около него окружности и два угла $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите остальные элементы треугольника.

2. Найдите углы треугольника со сторонами 5 см, 12 см, 13 см.

3. Докажите, используя теорему синусов, что биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

4*. Докажите, что для произвольного треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ имеет место формула: $c = a\cdot\cos B + b\cdot\cos A$.

Ответы. **1.** $\angle B = 180° - (\alpha + \gamma)$, $AB = 2R\cdot\sin\gamma$, $BC = 2R\cdot\sin\alpha$, $AC = 2R\cdot\sin(\alpha + \gamma)$. **2.** Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см, синусы его острых углов равны $\frac{5}{13}$ и $\frac{12}{13}$. **3.** Пусть в треугольнике ABC проведена биссектриса BL, тогда из треугольников ABL и CBL соответственно имеем: $\frac{AB}{AL} = \frac{\sin\angle ALB}{\sin\angle ABL}$ и $\frac{CB}{CL} = \frac{\sin\angle CLB}{\sin\angle CBL}$. Учитывая, что $\angle ABL=\angle CBL$ и $\angle ALB = 180° -$

$\angle CBL$, получим требуемое соотношение: $\frac{AB}{AL} = \frac{CB}{CL}$. **4*.** *Указание*. Проведите высоту CH.

К доске вызываем трех учеников ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом начинает решать задачу 1.

$У_2$ – начинает самостоятельно решать задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 4 из домашней работы (см. этап V урока 60).

Дополнительные вопросы

- Сформулируйте теорему косинусов.
- Сформулируйте теорему синусов.
- Чему равны тригонометрические функции угла в 30°?

II. Устная работа

1) Стороны треугольника относятся как 2:3:4. Найдите отношения синусов углов.

2) Синусы углов треугольника относятся как 3:4:5. Как относятся стороны? Какой это треугольник?

3) Катеты прямоугольного треугольника с острым углом в 30° равны 3 см и 4 см. Найдите проекции катетов на гипотенузу.

4) В прямоугольном треугольнике с углом в 60° и противолежащим ему катетом, равным 12 см, найдите другой катет.

5) У скольких углов треугольника косинусы могут быть: а) положительными числами; б) отрицательными числами; в) нулем?

Ответы. 1) 2:3:4. 2) 3:4:5; прямоугольный. 3) 1,5 см и 3,5 см. 4) $4\sqrt{3}$ см. 5) а) Все три или два; б), в) только один.

III. Решение практических задач

1. Объясните по рисунку 223, а, как было определено расстояние от данного пункта A до недоступного пункта C, т. е. такого, для которого нельзя произвести непосредственное измерение расстояния AC.

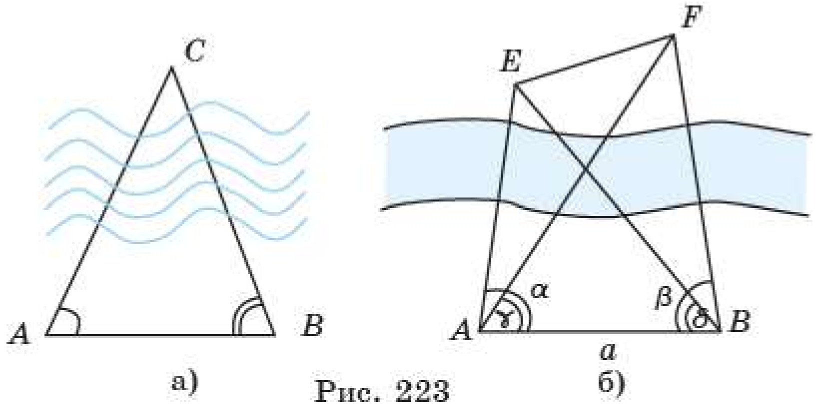


Рис. 223

2. На рисунке (рис. 223, б) показано, как определяли расстояние между двумя недоступными объектами E и F, находящимися на другом берегу реки. Объясните предложенный способ определения EF.

Ответы. 1. В этом случае берут еще один пункт B и измеряют расстояние AB и углы A и B в треугольнике ABC. Затем, используя теорему синусов, находят расстояние AC: $AC = AB\cdot\frac{\sin B}{\sin C} = AB\cdot\frac{\sin B}{\sin(A+B)}$. 2. Рассмотрели треугольники AEB и AFB, используя теорему синусов, нашли соответственно AE и AF. Затем из треугольника AEF по теореме косинусов определили EF.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 5* из домашней работы (см. этап V урока 60).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 54 учебника).

2. Решить задачи.

1) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3 см. Найдите сторону AB этого треугольника, если противолежащий ей угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°.

Ответ. а) 3 см; б) $3\sqrt{2}$ см; в) $3\sqrt{3}$ см; г) 6 см; д) 3 см.

2) Спортивный самолет летит по замкнутому треугольному маршруту с постоянной скоростью. Два угла этого треугольника равны по 30°. Большую сторону он пролетел за 1 ч. За сколько часов он пролетит весь маршрут?

Ответ. Каждую из боковых сторон данного равнобедренного треугольника самолет пролетит за $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ч; весь маршрут пролетит за $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ ч.

3) Используя рисунок 224, укажите способ нахождения высоты недоступного предмета (BC).

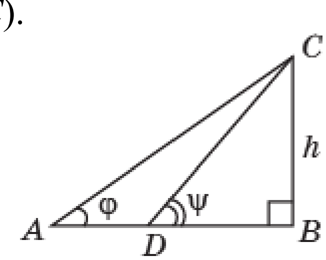


Рис. 224

Ответ. Измеряем углы φ, ψ и расстояние AD, затем из треугольника ACD по теореме синусов находим $CD=\frac{AD\cdot\sin\varphi}{\sin(\psi-\varphi)}$, далее из прямоугольного треугольника BCD находим катет $BC=\frac{AD\cdot\sin\varphi}{\sin(\psi-\varphi)}\cdot\sin\psi$.

4*) На рисунке (рис. 225) угол AOB – *угол места цели* (это угол между горизонтом и прямой, соединяющей орудие с целью). Найдите его при стрельбе по цели, которая находится выше уровня орудия на 75 м, учитывая, что расстояние ρ от орудия до цели по карте масштаба 1:10000 равно 37,5 см.

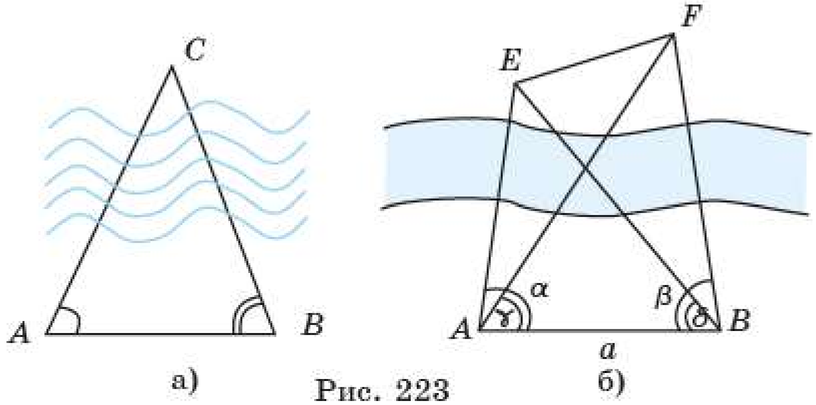


Рис. 223

Ответ. tg φ = 0,02, где φ - искомый угол.

55. Длина окружности
(уроки 62, 63)

Цель – вывести формулы для определения периметров правильных n-угольников и длины окружности; научиться использовать их при решении задач; ввести понятия радианной меры угла и радиана.

Урок 62

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Теорема косинусов заключается в том, что …

2. Теорема синусов позволяет по известным углам и одной стороне треугольника найти …

3. В треугольнике ABC $\angle B = 120°$, $AC = 3$ см, тогда радиус описанной окружности равен …

4. Стороны треугольника относятся как 1:2:2, тогда синусы его углов относятся как …

5. Тангенс одного из углов прямоугольного треугольника равен $\frac{3}{5}$, прилежащий к нему катет равен 15 см, тогда другой катет равен …

Вариант 2

1. Теорема синусов заключается в том, что …

2. Теорема косинусов позволяет по двум сторонам и углу между ними найти …

3. По теореме синусов радиус окружности, описанной около треугольника, равен …

4. Синусы углов треугольника относятся как $1:2:\sqrt{3}$, тогда его стороны относятся как …

5. Котангенс одного из углов прямоугольного треугольника равен $1\frac{1}{3}$, прилежащий к нему катет равен 12 см, тогда другой катет равен …

Ответы. *Вариант 1*. 3. $\sqrt{3}$ см. 4. 1:2:2. 5. 9 см. *Вариант 2*. 4. $1:2:\sqrt{3}$. 5. 9 см.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Для нахождения длины окружности рассмотрим правильные многоугольники, вписанные в эту окружность. При увеличении числа сторон многоугольники приближаются к окружности. Поэтому длиной окружности считают число, к которому стремятся периметры правильных вписанных в эту окружность многоугольников при увеличении числа их сторон.

Теорема. Периметр P_n правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, выражается формулой

$$P_n = n \cdot 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Доказательство. Пусть $A_1...A_n$ – правильный n-угольник, вписанный в окружность с центром в точке O и радиусом R (на рисунке 226 n = 6).

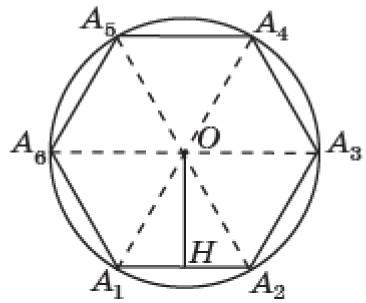


Рис. 226

Треугольник A_1OA_2 – равнобедренный, $OA_1 = OA_2 = R$. Проведем в нем высоту OH, которая одновременно будет биссектрисой и медианой. Угол A_1OH равен половине угла A_1OA_2, равного $\frac{360^\circ}{n}$. Следовательно, $A_1H = R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$, и, значит, $A_1A_2 = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$. Умножая это значение на n, получаем периметр правильного n-угольника $P_n = n \cdot 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Следствие. Периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных около них окружностей.

Доказательство. Пусть P'_n, P''_n – периметры правильных n-угольников, вписанных в окружности радиусов R' и R'' соответственно. Тогда

$$P'_n = n \cdot 2R' \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P''_n = n \cdot 2R'' \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно, $\frac{P_n'}{P_n''} = \frac{R'}{R''}$.

Теорема. Отношение длин двух окружностей равно отношению их радиусов.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы дадим только набросок доказательства. Рассмотрим окружности радиусов R', R'' и вписанные в них правильные многоугольники. При увеличении числа сторон периметры правильных многоугольников приближаются к длинам соответствующих окружностей. Поскольку отношение этих периметров постоянно и равно $\frac{R'}{R''}$, то и отношение чисел, к которым стремятся эти периметры, т.е. отношение длин окружностей, также будет равно $\frac{R'}{R''}$.

Половина длины окружности единичного радиуса обозначается греческой буквой π. Таким образом, длина окружности единичного радиуса равна 2π. Из рассмотренной выше теоремы следует, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Таким образом, для длины C окружности радиуса R можем записать следующую формулу

$$\boxed{C = 2\pi R.}$$

Для приближенного вычисления числа π в единичную окружность вписывают правильный многоугольник и находят его полупериметр. Чем больше число сторон вписанного многоугольника, тем более точное значение получается для числа π.

Вопрос о вычислении длины окружности и числа π занимал умы ученых на протяжении тысячелетий. Первое вычисление числа π, использующее строгие рассуждения, было сделано величайшим математиком древности Архимедом (287 - 212 гг. до н. э.). В своей работе "Об измерении круга" он доказал, что для числа π выполняются неравенства

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

На практике приближенное значение числа π берется равным 3,14. Центральные углы в 1° разбивают всю окружность на 360 равных секторов. Поэтому длина дуги окружности в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть длины всей окружности, т. е. равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Длина l дуги окружности в φ градусов, т. е. ограничивающая центральный угол в ϕ градусов, равна $\frac{\pi R\varphi}{180}$.

Равенство $l = \frac{\pi\varphi}{180}$, выражающее длину дуги единичной окружности, устанавливает соответствие между длиной дуги и ее градусной мерой. Это позволяет измерять углы не только с помощью градусов, но и с помощью длины дуги соответствующей окружности единичного радиуса. Величина длины дуги называется ***радианной мерой угла***. Единицей радианной меры углов является ***радиан***. Угол в один радиан – это угол, длина соответствующей дуги единичной окружности которого равна единице.

Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$.

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите длину окружности, диаметр которой равен 24 см. Выведите формулу для длины окружности диаметра D.

2. Найдите длину окружности, описанной около единичного: а) квадрата; б) равностороннего треугольника.

3. Найдите длину дуги окружности радиуса единица, соответствующую центральному углу в: а) 30°; б) 240°.

4. Каким должен быть радиус окружности, в которой дуга в 1° имеет длину 1 м?

5*. Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна $\frac{5\pi}{36}$.

Ответы. **1.** 24π см; $C = \pi D$. **2.** а) $\sqrt{2}\pi$; б) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. **3.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{4\pi}{3}$. **4.** $\frac{180}{\pi}$. **5*.** 25°.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 55 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите длину дуги окружности радиуса 4 см, соответствующую центральному углу в: а) 135°; б) 315°.

Ответ. а) 3π см; б) 7π см.

2) Какой длины должна быть хорда в окружности радиуса R, чтобы длины дуг, на которые она разбивает окружность, относились как 2:1?

Ответ. $R\sqrt{3}$.

3) Найдите периметр правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса R.

Ответ. $n \cdot 2R \cdot \mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}$.

4*) Найдите радиус земного шара, исходя из того, что 1 м составляет одну сорокамиллионную долю длины экватора.

Ответ. ≈6369427 м.

Урок 63

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, выражается формулой …

2. Отношение длин двух окружностей равно …

3. Длина окружности диаметра D выражается формулой …

4. Радианной мерой угла называется …

5. Длина окружности, описанной около единичного квадрата, равна …

Вариант 2

1. Периметры правильных n-угольников относятся как …

2. Для приближенного вычисления числа π поступают следующим образом …

3. Длина окружности радиуса R выражается формулой …

4. Радианом называется …

5. Длина окружности, описанной около прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см, равна …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Постройте прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, чтобы: а) $\operatorname{tg} A = 1\frac{2}{3}$; б) $\sin A = \frac{3}{5}$.

2. Одна из сторон треугольника равна 13 см, противолежащий угол равен 120°, сумма двух других сторон равна 15 см. Найдите эти стороны.

3. В треугольнике FGH известны стороны $FG = h$, $FH = g$ и угол H. Найдите основные неизвестные элементы треугольника.

4*. Внутри угла взята точка, из которой на его стороны опущены перпендикуляры. Длины перпендикуляров и отрезка, соединяющего их основания, относятся соответственно как 5:8:7. Найдите данный угол.

Ответы. **2.** 7 см, 8 см. **3.** $\sin G = \frac{g \cdot \sin H}{h}$, $\angle F = 180^{\circ} - (\angle H + \angle G)$, $GH = \frac{h \cdot \sin F}{\sin H}$. **4*.** Сначала рассмотрим треугольник, вершинами которого являются данная точка, назовем ее M, и основания опущенных перпендикуляров; применяя теорему косинусов, получим $\cos M = \frac{1}{2}$, $\angle M = 60^{\circ}$, искомый угол равен $180^{\circ} - \angle M$, значит, он равен 120°.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 62).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 50 – п. 55 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте прямоугольный треугольник, у которого один из углов равен 60° и радиус описанной окружности равен 12 см.

Ответ. Нужно построить прямоугольный треугольник по острому углу в 60° и гипотенузе, равной 24 см (на одной из сторон угла в 60° откладываем отрезок 24 см и опускаем перпендикуляр на вторую сторону угла).

2) В прямоугольном треугольнике KLN ($\angle K = 90°$) проведена высота KH и медиана KM (рис. 227). Из точки M опущен перпендикуляр MP на KN. Выразите все отрезки, данные на рисунке, через $KL = n$ и тригонометрические функции угла L, равного α.

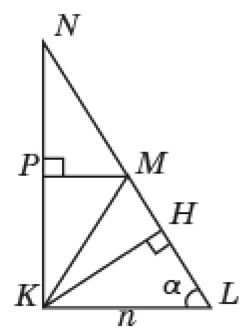


Рис. 227

Ответ. $KN = n\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$, $NP = KP = \frac{1}{2}n\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$; $LN = \frac{n}{\cos\alpha}$, $NM = LM = KM = \frac{n}{2\cos\alpha}$; $MP = \frac{n}{2}$; $KH = n\cdot\sin\alpha$; $LH = n\cdot\cos\alpha$; $MH = \frac{n}{2\cos\alpha} - n\cdot\cos\alpha = \frac{n}{2\cos\alpha}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$.

3) Найдите длину и радиус окружности, если длина ее дуги, содержащей 18°, равна 54π см.

Ответ. 1080π см, 540 см.

4) Докажите, что периметры правильных n-угольников относятся как радиусы вписанных в них окружностей.

5*) Вообразите, что земной шар плотно обтянут по экватору веревкой. На сколько нужно увеличить длину веревки, чтобы ее можно было поднять над поверхностью Земли по всей длине на расстояние 1 м?

Ответ. Пусть длина соответствующей окружности равна $2\pi R$, после увеличения она стала равна $2\pi(R+1) = 2\pi R+2\pi$, значит, длину веревки нужно увеличить на 2π м.

Урок 64

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Постройте острый угол α, если: а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.

2. Сравните $\sin 1°$ и $\cos 1°$.

3. Стороны MN и MK треугольника MNK соответственно равны 6 см и 10 см, $\angle M = 60°$. Найдите остальные стороны и углы данного треугольника.

4. По данному радиусу R окружности определите сторону правильного вписанного в нее n-угольника.

5*. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при вершине, которая противолежит основанию, равен β. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

Вариант 2

1. Постройте острый угол β, если: а) $\cos\beta = \frac{2}{3}$; б) $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{7}$.

2. Сравните $\operatorname{tg} 1°$ и $\operatorname{ctg} 1°$.

3. Стороны DE и DF треугольника DEF соответственно равны 2 см и 5 см, $\angle D = 60°$. Найдите остальные стороны и углы данного треугольника.

4. По данному радиусу R окружности определите сторону правильного описанного около нее n-угольника.

5*. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, угол при вершине, которая противолежит основанию, равен α. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

56*. Циклоидальные кривые

См. параграф 4

Итоговое повторение
(уроки 65 – 68)

См. параграф 5

§ 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ

44*. Паркеты
(два урока)

Цель – познакомить учащихся с новыми для них геометрическими фигурами – паркетами, определить правильный паркет, доказать, что существует 11 правильных паркетов, решить задачу о заполнении плоскости произвольным четырехугольником.

Урок 1

I. Устная работа

1) Чему равна сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?

2) Как определить угол правильного n-угольника?

3) Может ли угол правильного многоугольника равняться: а) 45°; б) 60°; в) 90°; г) 180°?

4) Чему равен угол правильного: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) восьмиугольника?

5) Какое наибольшее число правильных: а) шестиугольников; б) четырехугольников; в) треугольников может сходиться (иметь общую вершину) в одной точке плоскости, чтобы они не перекрывали друг друга? С чем это связано?

6) Может ли в одной точке плоскости сойтись четыре восьмиугольника? Почему?

Ответы. 1) $180°(n-2)$. 2) $\frac{180°(n-2)}{n}$. 3) а) Нет; б), в) да; г) нет. 4) а) 108°; б) 120°; в) 135°. 5) а) 3; б) 4; в) 6. 6) Нет.

II. Новый материал

Вопросы

- Где в повседневной жизни мы встречаемся с паркетами?
- Какими свойствами обладает паркет?

После обсуждения ответов даем определение математического паркета.

Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

Вопрос

- Какой паркет можно назвать правильным?

Паркет называется ***правильным***, если он состоит из правильных многоугольников и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

Примеры правильных паркетов дают заполнения плоскости:

а) квадратами (рис. 228);

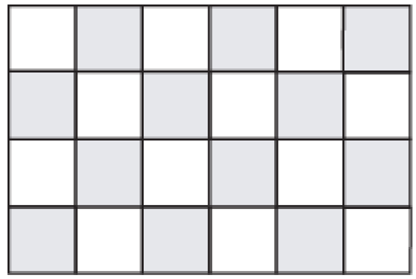


Рис. 228

б) правильными треугольниками (рис. 229);

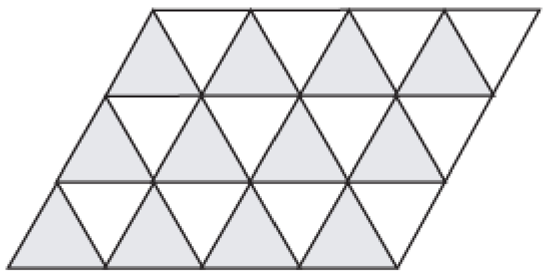


Рис. 229

в) правильными шестиугольниками (рис. 230).

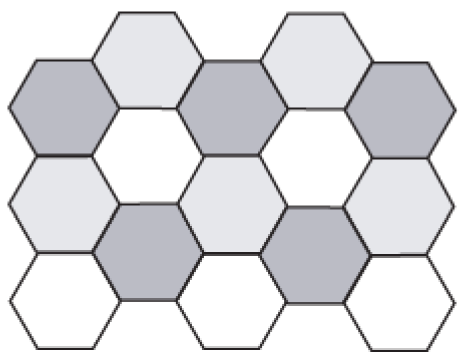


Рис. 230

Докажем, что другими равными правильными многоугольниками заполнить плоскость нельзя. Воспользуемся тем, что сумма углов многоугольников, сходящихся в одной вершине паркета, должна быть равна 360°.

Рассмотрим правильные пятиугольники. Углы правильного пятиугольника равны 108°. В одной вершине паркета не может сходиться три правильных пятиугольника, так как сумма углов в этом случае будет 324° < 360°. Если же число правильных пятиугольников больше или равно 4, то сумма углов будет больше или равна 432° > 360°. Значит, не существует правильного паркета из пятиугольников.

Аналогично в одной вершине паркета не может сходиться три или более правильных семиугольников, восьмиугольников и т. д., так как их углы больше 120° и в сумме они будут составлять величину, большую 360°. Поэтому не существует правильных паркетов из семиугольников, восьмиугольников и т.д.

Расширим способы составления паркетов из правильных многоугольников, разрешив использовать в них правильные многоугольники с различным числом сторон.

Обозначим через α_1, α_2, … углы правильных многоугольников, имеющих общую вершину. Расположим их в порядке возрастания $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots$. Учитывая, что сумма всех таких углов должна быть равна 360°, составим таблицу, содержащую возможные наборы углов, и укажем соответствующие паркеты.

Заполним вместе с учащимися таблицу.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots=360°$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Паркет из 3-в (рис. 229)
60°	60°	60°	60°	120°		Паркет из 3-в и 6-в (рис. 231)
60°	60°	60°	90°	90°		Два паркета из 3-в и 4-в (рис. 232, 233)
60°	60°	90°	150°			Нет паркета
60°	60°	120°	120°			Паркет из 3-в и 6-в (рис. 234)
60°	90°	90°	120°			Паркет из 3-в, 4-в и 6-в (рис. 235)
60°	150°	150°				Паркет из 3-в и 12-в (рис. 236)
90°	90°	90°	90°			Паркет из квадратов (рис. 228)
90°	120°	150°				Паркет из 4-в, 6-в и 12-в (рис. 237)
90°	135°	135°				Паркет из 4-в и 8-в (рис. 238)
120°	120°	120°				Паркет из 6-в (рис. 230)

Таким образом, всего имеется 11 типов правильных паркетов.

III. Закрепление нового материала

1. Можно ли заполнить плоскость неправильным треугольником? Постройте паркет из прямоугольного треугольника.

2. Можно ли заполнить плоскость прямоугольником? Постройте паркет из прямоугольника.

3. Возьмите произвольный разносторонний треугольник и постройте из него паркет.

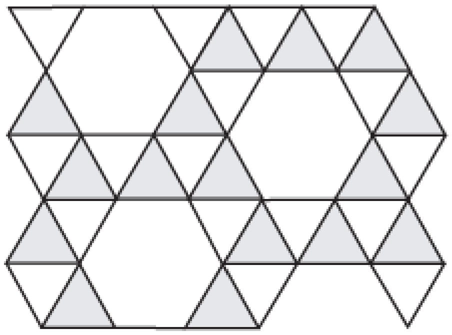


Рис. 231

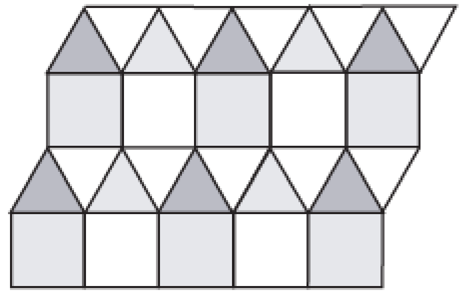


Рис. 232

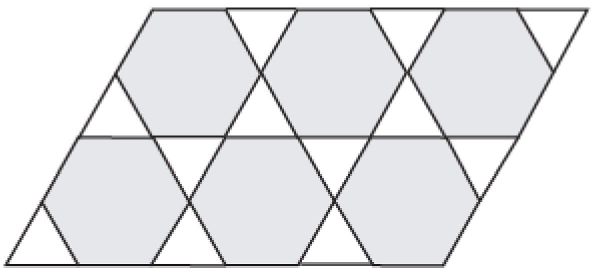


Рис. 234

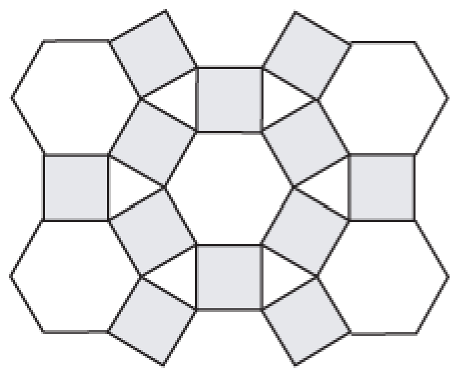


Рис. 235

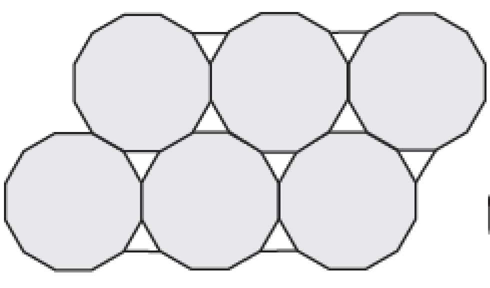


Рис. 236

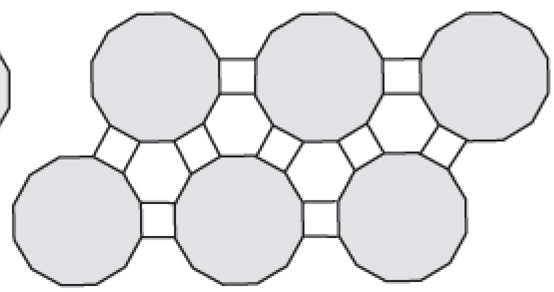


Рис. 237

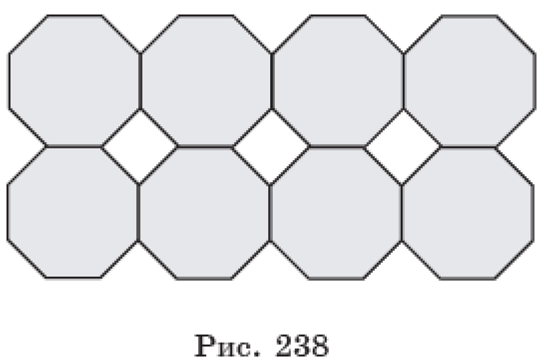


Рис. 238

IV. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 44* учебника).

2. Решить задачи.

1) Сложите из спичек правильные паркеты, изображенные на рисунках 228 - 238.

2) Сколько красок потребуется для раскраски правильных паркетов так, чтобы соседние многоугольники были раскрашены в разные цвета?

Ответ. Соответственно: рис. 228 – 2 цвета; рис. 229 – 2 цвета; рис. 230 – 3 цвета; рис. 231 – 3 цвета; рис. 232 – 3 цвета; рис. 233 – 3 цвета; рис. 234 – 2 цвета; рис. 235 – 2 цвета; рис. 236 – 3 цвета; рис. 237 – 3 цвета; рис. 238 – 3 цвета.

3) Нарисуйте паркеты, двойственные к паркетам, изображенным на рисунках 228 – 238. Центры многоугольников, образующих паркет, являются вершинами паркета, двойственного данному паркету.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Паркетом называется …
2. Из одноименных правильных многоугольников можно составить … паркетов. (Количество.)
3. В каждой вершине правильного паркета сходятся 3 квадрата и …
4. В каждой вершине правильного паркета сходятся квадрат, восьмиугольник и …
5. В каждой вершине правильного паркета могут сходиться 2 шестиугольника и … или …

Вариант 2

1. Правильным паркетом называется …
2. Из разноименных правильных многоугольников можно составить … паркетов. (Количество.)
3. В каждой вершине правильного паркета сходятся 5 треугольников и …
4. В каждой вершине правильного паркета сходятся треугольник, двенадцатиугольник и …
5. В каждой вершине правильного паркета могут сходиться шестиугольник, квадрат и … или …

II. Проверка математического диктанта

Проводится через кодоскоп или проектор.

III. Лабораторная работа

Учащимся раздаем равные картонные четырехугольники (выпуклые).

Задание. Докажем, что для любого четырехугольника существует паркет, состоящий из четырехугольников, равных исходному. Иначе говоря, четырехугольником произвольной формы можно заполнить всю плоскость.

Решение. Пусть дан четырехугольник *ABCD* (рис. 239). Рассмотрим центрально-симметричный ему четырехугольник относительно середины стороны *AB*. Исходный четырехугольник *ABCD* обозначим цифрой 1, а симметричный - цифрой 2. Теперь четырехугольник 2 отразим симметрично относительно середины его стороны *BC*. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 3 и отразим его симметрично относительно середины его стороны *CD*. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 4. Четырехугольники 1, 2, 3 и 4 примыкают к общей вершине углами *A, B, C* и

D. Поскольку сумма углов четырехугольника равна 360°, то эти четырехугольники заполнят часть плоскости вокруг общей вершины. Такое же построение можно провести вокруг каждой новой вершины, что и даст искомое заполнение плоскости.

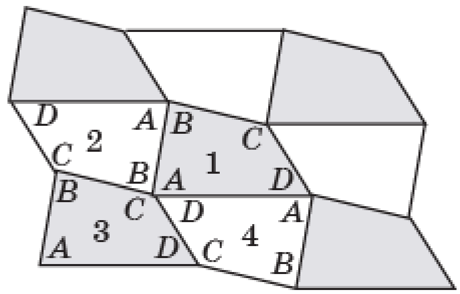


Рис. 239

Заметим, что четырехугольники, закрашенные одним цветом (рис. 239), получаются друг из друга параллельным переносом.

IV. Решение задач

1. Изобразите паркет из равнобедренной трапеции.

2. Выпуклый четырехугольник разрезали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины его противоположных сторон. Докажите, что из этих частей можно сложить параллелограмм.

Решение следует из того, что данным четырехугольником можно заполнить всю плоскость, на рисунке 240 *ABCD* – данный четырехугольник; *EF*, *GH*, *OP*, *QR* – отрезки, соединяющие середины соответствующих сторон четырехугольников, тогда *KLMN* – параллелограмм (у него противоположные стороны параллельны), составленный из четырех частей данного четырехугольника, которые указаны в условии задачи.

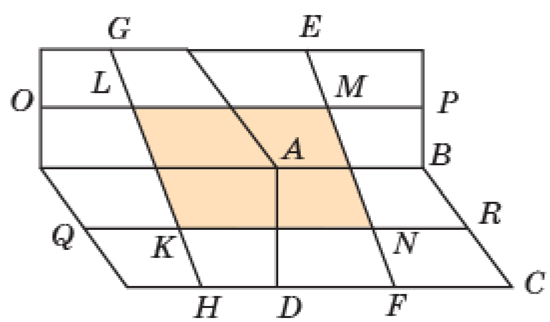


Рис. 240

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 44* учебника).

2. Решить задачи.

1) Составьте паркет из греческих крестов (рис. 241).

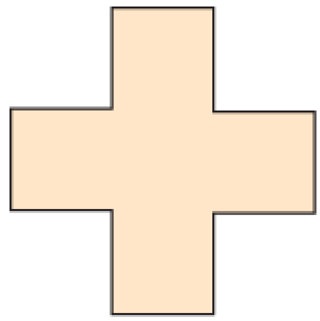
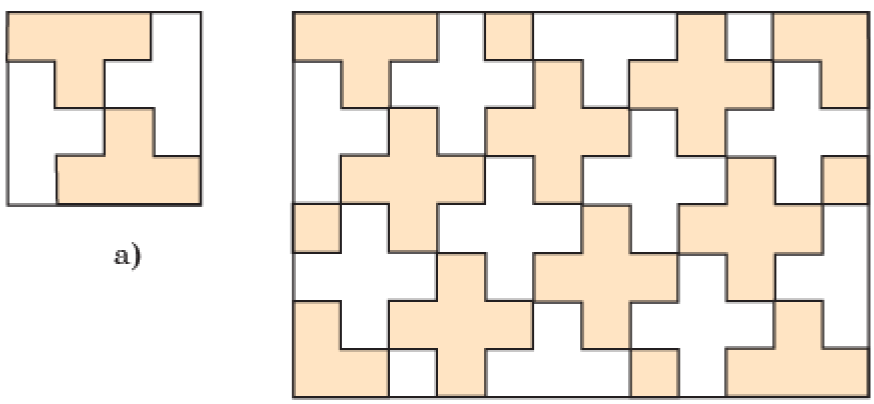


Рис. 241

Решение. Составим квадрат, как показано на рисунке 242, а, затем такими квадратами заполним всю плоскость (рис. 242, б).



а) б)

Рис. 242

2) Вырежьте из картона невыпуклый четырехугольник и составьте из него паркет. Какое наименьшее число цветов нужно взять, чтобы соседние четырехугольники имели разный цвет?

Решение показано на рисунке 243. Потребуется два цвета.

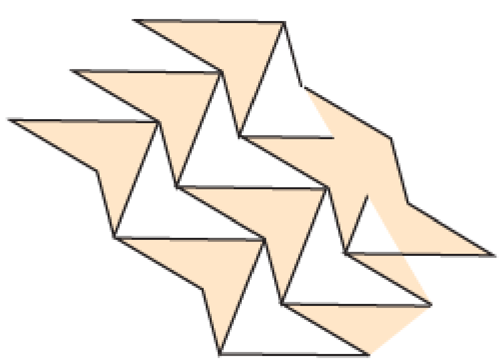
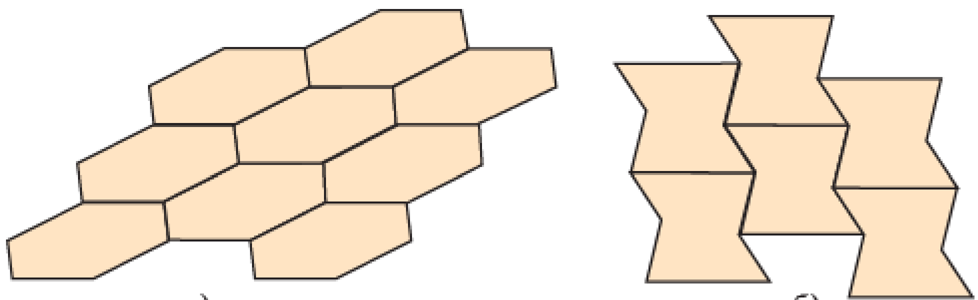


Рис. 243

3) Докажите, что с помощью центрально-симметричных шестиугольников произвольной формы (даже невыпуклых) можно заполнить плоскость. Приведите пример соответствующего паркета.

Решение показано на рисунке 244. У такого шестиугольника противоположные стороны равны и параллельны.



а) б)

Рис. 244

п. 48*. Золотое сечение
(два урока)

Цель – ввести понятия золотого сечения, золотых прямоугольника и треугольника, золотой спирали, пентаграммы; научиться делить отрезок в золотом отношении; познакомиться с историей и приложениями золотого сечения в живописи, архитектуре, строительстве, живой природе и т.п.

Урок 1

I. Устная работа

1) Как разделить отрезок в данном отношении, например; а) пополам; б)1:2; в) 2:3; г) $m:n$?

2) Как разделить данную окружность на: а) три равные части; б) четыре равные части; в) пять равных частей?

3) Как вписать в данную окружность правильный: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник?

II. Новый материал

С давних времен люди занимались поисками гармонии и совершенства. Древние греки считали, что мир устроен по законам гармонии и задачей познания мира, таким образом, является ее поиск.

Одним из вопросов, волновавших древних ученых, был вопрос о нахождении наилучшего соотношения неравных частей, составляющих вместе единое целое. Его решение связывают с именем Пифагора, который установил, что наиболее совершенным делением целого на две неравные части является такое, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому. В Древней Греции такое деление называлось ***гармоническим отношением***. Интерес к нему необычайно возрос в эпоху Возрождения (XV – XVII вв.). В 1509 году итальянский математик, монах Лука Пачоли (1445 – ок. 1514), друг Леонардо да Винчи (1452 – 1519), написал целую книгу "О божественной пропорции". Леонардо выполнил иллюстрации к этой книге. В ней воздействие божественной пропорции на человека называлось "существенным, невыразимым, чудесным, неизъяснимым, неугасимым, возвышенным, превосходнейшим, непостижимым". Пачоли назвал гармоническое отношение божественной пропорцией ("***Sectio divina***"). Термин ***золотое сечение*** ("***Sectio aurea***") появился в Германии в первой половине XIX века.

Выясним, каким числом выражается золотое сечение. Для этого выберем произвольный отрезок и примем его длину за единицу. Разобьем этот отрезок на две неравные части и большую из них обозначим через x. Тогда меньшая часть равна $1-x$ (рис. 245).

Рис. 245

По определению золотого сечения должно выполняться равенство

$$(1-x):x = x:1.$$

Мы получили уравнение относительно x, которое легко свести к квадратному $x^2 + x - 1 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}6$.

Итак, если длина исходного отрезка равна 1, то его большая часть при золотом сечении равна примерно 0,6.

Полученное число обозначается буквой φ. Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия, который часто использовал золотое сечение в своих произведениях. Самыми знаменитыми из них были статуи Зевса Олимпийского (которая считалась одним из семи чудес света) и Афины Парфенос.

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, называется ***золотым прямоугольником*** (рис. 246). Золотые прямоугольники обладают многими интересными свойствами.

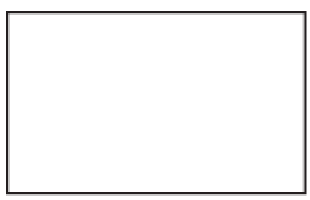


Рис. 246

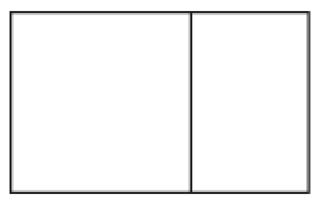


Рис. 247

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник меньших размеров, подобный исходному (рис. 247).

Если этот процесс продолжить, то мы получим так называемые ***вращающиеся квадраты***, и весь прямоугольник окажется составленным из этих квадратов (рис. 248, а). Если вершины квадратов соединить плавной кривой, то получим кривую, называемую ***золотой спиралью*** (рис. 248, б), форму которой имеют как раковины морских моллюсков, так и галактики во Вселенной.

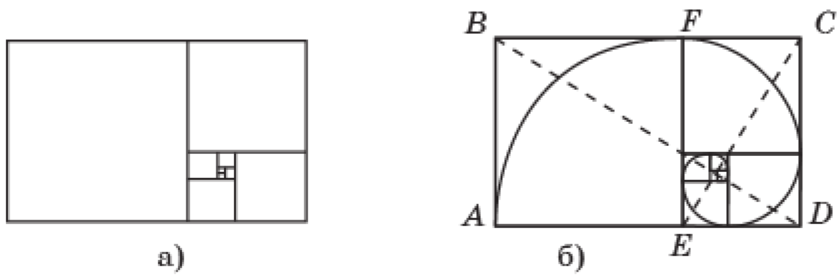


Рис. 248

Помимо золотых прямоугольников, имеются и ***золотые треугольники***. Равнобедренный треугольник называется золотым, если его боковая сторона и основание находятся в золотом отношении.

Возможны два типа золотых треугольников (рис. 249, а, б). В первом случае $\frac{AB}{AC} = \varphi$. Во втором случае $\frac{AC}{AB} = \varphi$.

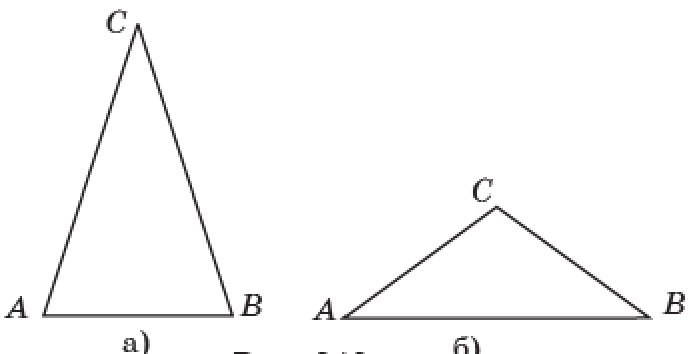


Рис. 249

III. Закрепление нового материал

1. Докажите, что все золотые прямоугольники подобны.

2. Докажите, что золотыми треугольниками являются равнобедренные треугольники с углами при вершинах, противолежащих основанию, 36° и 108°.

Ответы. **1.** Следует непосредственно из определения золотого прямоугольника. **2.** В равнобедренном треугольнике *ABC* с углом при вершине *C*, равным 36°, проведем биссектрису *AD* (рис. 250).

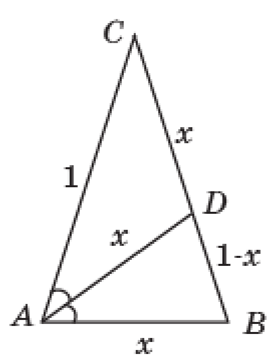


Рис. 250

Треугольники ACD и ABD равнобедренные, и треугольник BDA подобен треугольнику ABC. Примем боковую сторону треугольника ABC за единицу, а его основание за x. Тогда $AD=CD=x$, $BD=1–x$. Из подобия треугольников получаем равенство $\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}$, из которого следует, что $x=\varphi$, т.е. треугольник ABC – золотой. Кроме того, треугольник ACD с углом при вершине D, равным 108°, также золотой.

IV. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 48* учебника).

2. Решить задачи.

1) Отсекая золотые треугольники, аналогично тому, как это было сделано для золотого прямоугольника, постройте последовательность вращающихся золотых треугольников. Соединяя вершины треугольников плавной кривой, нарисуйте золотую спираль.

Решение представлено на рисунке 251.

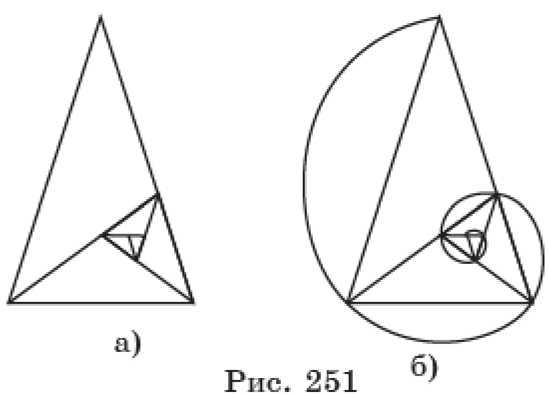


Рис. 251

2) На рисунке 252, а окружность с центром в точке O касается прямой AB в точке B, $2OB=AB$, $AE=AC$. Докажите, что треугольники ABC и ADB подобны. Выведите из этого, что точка E делит отрезок AB в золотом отношении. Укажите способ деления данного отрезка в золотом отношении с помощью циркуля и линейки.

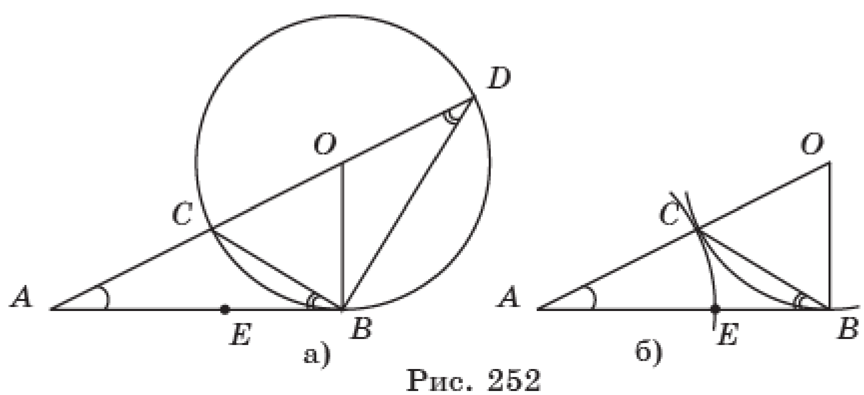


Рис. 252

Решение. $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ (по углам), откуда $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$ и $AB^2 = AD \cdot AC$. Обозначив радиус данной окружности через R, имеем $AB=2R$, $AD=2R+AC$, и, решая квадратное уравнение $AC^2 + 2R \cdot AC - 4R^2 = 0$, получим $AC = R \cdot (-1+\sqrt{5})=AE$. Значит, $\frac{AE}{AB} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, т. е. точка E делит отрезок AB в золотом отношении.

Разделим данный отрезок AB (рис. 252, б) в золотом отношении. Для этого проведем $BO \perp AB$ и $BO=\frac{1}{2}AB$, затем на OA отложим $OC=OB$ и на AB отложим $AE=AC$, точка E делит отрезок AB в золотом отношении.

3) На рисунке (рис. 253) изображен лотарингский крест, служивший эмблемой «Свободной Франции» (организации, которую в годы Второй мировой войны возглавлял генерал де Голль). Он составлен из 13 единичных квадратов. Докажите, что прямая, проходящая через точку A и делящая лотарингский крест на две равновеликие части, делит отрезок BC в золотом отношении.

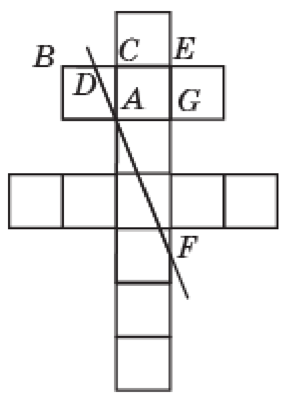


Рис. 253

Решение. Пусть прямая DF делит крест на две равновеликие части, тогда $S_{DEF} = 2{,}5$ кв.ед. Обозначим $DC = x$, $GF = y$. Учитывая, что сторона каждого квадрата равна 1, получим $\frac{(x+1)(y+1)}{2} = 2{,}5$. Рассмотрим треугольники DCA и AGF, они подобны (по углам), значит, $\frac{x}{1} = \frac{1}{y}$. Решая соответствующую систему уравнений, найдем $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и, значит, $BD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. точка D делит отрезок BC в золотом отношении.

3. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «Золотое сечение в искусстве». (Литература: Учебник, п. 48*; Волошинов А.В. Геометрия и искусство. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2000).

4. Принести циркуль и линейку.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. В Древней Греции гармоническим отношением называлось …
2. Термин «*Sectio aurea*» в переводе означает …
3. Золотое отношение единичного отрезка равно приблизительно …
4. Золотым прямоугольником называется …
5. Вращающиеся квадраты получаются, если …
6. В золотом остроугольном треугольнике углы равны …

Вариант 2

1. Золотым сечением называется …
2. Термин «*Sectio divina*» в переводе означает …
3. Золотое сечение обозначается …
4. Золотым треугольником называется …
5. Золотая спираль – это кривая, которая …
6. В золотом тупоугольном треугольнике углы равны …

II. Проверка математического диктанта

Проводится через кодоскоп или проектор.

III. Индивидуальное задание

Задание 3 из домашней работы (См. этап IV предыдущего урока).

IV. Решение задач

1. С помощью циркуля и линейки постройте правильный пятиугольник с данной стороной.

2. На рисунке 254 изображен правильный пятиугольник с проведенными в нем диагоналями, образующими звездчатый правильный пятиугольник – ***пентаграмму***.

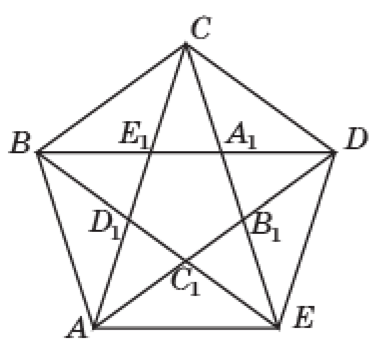


Рис. 254

Докажите, что все треугольники, на которые при этом разбивается пятиугольник, являются золотыми.

3. Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем расправлена так, чтобы узел стал плоским (рис. 255). Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

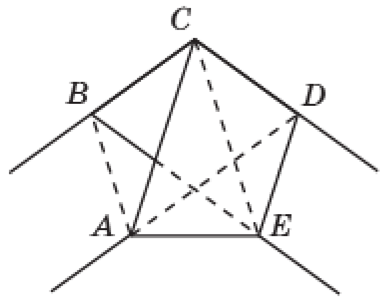


Рис. 255

Ответы. **1.** Примем данную сторону *AB* правильного пятиугольника за единицу. Тогда для построения правильного пятиугольника *ABCDE* достаточно построить отрезок $AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Построим прямоугольный треугольник с катетами 1 и $\frac{1}{2}$. Его гипотенуза будет равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Прибавим к ней отрезок длины $\frac{1}{2}$, получим искомый отрезок. **2.** Следует из того, что угол правильного выпуклого пятиугольника равен 108°, а пентаграммы – 36°. **3.** Легко видеть, что узел имеет форму пятиугольника. Он ограничен тремя сгибами и двумя кромками, к которым примыкают концы ленты. Докажем, что все стороны и все углы этого пятиугольника равны. Воспользуемся тем, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный. Рассмотрим треугольник *AEB*. Высоты этого треугольника, опущенные на прямые *AB* и *AE*, равны ширине ленты. Следовательно, *AE*=*AB*. Аналогично показывается, что *AB*=*BC* и *BC* =*CD*. Четырехугольники *EABC*, *ABCD*, *BCDE*, *DEAB* - трапеции, и притом по доказанному две первые - равнобедренные трапеции. Следовательно, угол *A* равен углу *B*, равен углу *C*.

Докажем, что все диагонали пятиугольника равны между собой. Рассмотрим, например, треугольник *ABD*. Высоты этого треугольника, опущенные на стороны *AD* и *BD*, равны ширине ленты. Следовательно, *AD* =*BD*. Аналогично доказывается, что *DB* = *BE*, *BE* = *EC*.

Рассмотрим теперь треугольники *EAB* и *ABC*. Они равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, *AC*=*EB*. Таким образом, все диагонали пятиугольника равны.

В трапеции $DEAB$ равны диагонали. Значит, она равнобедренная и, следовательно, $AB = DE$, угол A равен углу E. Аналогично показывается, что угол D равен углу C.

Таким образом, все стороны и все углы пятиугольника равны, т. е. пятиугольник правильный.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 48* учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что диагонали правильного пятиугольника образуют правильный пятиугольник. Найдите сторону этого пятиугольника, если сторона исходного пятиугольника равна 1.

Решение. Обратимся к рисунку 254, все стороны и углы пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны, что следует из равенства треугольников A_1CE_1, A_1DB_1, B_1EC_1, C_1AD_1 и D_1BE_1, следовательно, он является правильным. Найдем его сторону, например, A_1E_1: из золотых треугольников A_1CE_1 и CA_1D следует, что $\frac{A_1E_1}{A_1C} = \varphi$ и $\frac{A_1C}{CD} = \varphi$, откуда $A_1E_1=\varphi^2$.

2) Докажите, что точка A_1 на рисунке 254 делит отрезок: а) BD; б) DE_1 в золотом отношении.

Решение. а) Следует из того, что треугольник BA_1C – золотой, значит, $\frac{A_1C}{A_1B} = \varphi$, но $A_1C = A_1D$, таким образом, $\frac{A_1D}{A_1B} = \varphi$; б) треугольник A_1CE_1 – золотой, значит, $\frac{A_1E_1}{A_1C} = \varphi$, но $A_1C = A_1D$, таким образом, $\frac{A_1E_1}{A_1D} = \varphi$.

3) В полукруг с диаметром AB вписан квадрат $CDEF$ (рис. 256).

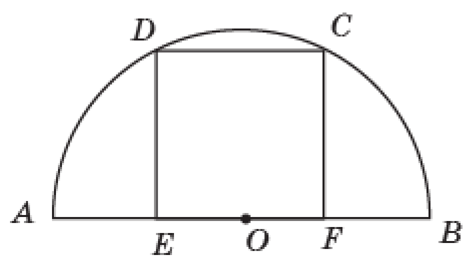


Рис. 256

Докажите, что отрезок AE и сторона квадрата ED находятся в золотом отношении.

Решение. Пусть $EF = 1$. Тогда $OE = \frac{1}{2}$, $OD = \frac{\sqrt{5}}{2} = OA$. Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $\frac{AE}{ED} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$.

п. 56*. Цилоидальные кривые
(два урока)

Цель – рассмотреть кинематический способ задания кривых и познакомить с наиболее известными из них – циклоидой, кардиоидой, астроидой.

Урок 1

I. Устная работа

1) Какие кривые вы знаете?

2) Как они задаются?

3) Сколько кривых можно провести через: а) одну точку; б) две точки; в) три точки; в) n точек?

4) Может ли кривая разбить плоскость на: а) две; б) три; в) четыре части? Приведите примеры.

5) Приведите примеры: а) замкнутых; б) незамкнутых кривых.

6) На сколько частей разбивает плоскость незамкнутая кривая?

II. Новый материал

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки. Кривая, которая получается как траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся без скольжения по прямой, по окружности или другой кривой, называется ***циклоидальной***, что в переводе с греческого означает кругообразная, напоминающая о круге.

Рассмотрим сначала случай, когда окружность катится по прямой. Кривая, которую описывает точка, закрепленная на окружности, катящейся без скольжения по прямой линии, называется ***циклоидой***.

Пусть окружность радиуса R катится по прямой a. C – точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находящаяся в положении A (рис. 257).

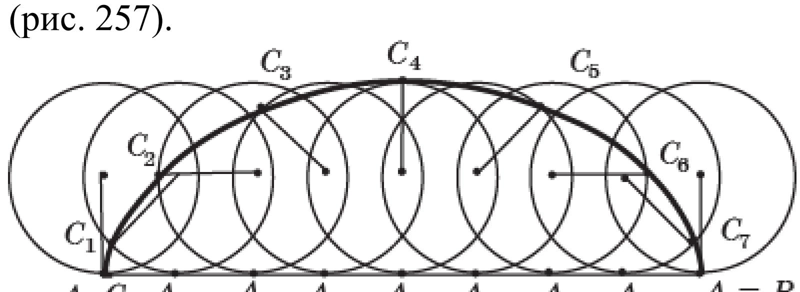


Рис. 257

Изобразим прямую a и отложим на ней отрезок AB, равный длине окружности, т. е. $AB = 2\pi R$. Разделим этот отрезок на 8 равных частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_8=B$.

Ясно, что когда окружность, катясь по прямой *a*, сделает один оборот, она повернется на 360°.

Вопросы

- В какую точку переместится при этом точка *C*?

Ответ. Окружность займет положение (8), а точка *C* переместится из положения *A* в положение *B*.

- Если окружность сделает половину полного оборота, т. е. повернется на 180°, то какое положение она займет и куда при этом переместится точка *C*?

Ответ. Окружность займет положение (4), а точка *C* переместится в самое верхнее положение C_4.

Задания

1) Найдите положение окружности, если она повернется на угол 45°, изобразите ее. Куда переместится при этом точка *C*?

Ответ. Окружность переместится в положение (1), а точка *C* переместится в положение C_1.

2) Найдите положения окружности, если она повернется на углы, кратные 45°, изобразите ее. Куда переместится при этом точка *C*?

Ответ. На рисунке 257 показаны также другие точки циклоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим участок циклоиды, соответствующий одному полному обороту окружности. При следующих оборотах будут получаться такие же участки, т.е. циклоида будет состоять из периодически повторяющегося участка, называемого ***аркой циклоиды***.

Обратим внимание на положение касательной к циклоиде (рис. 258).

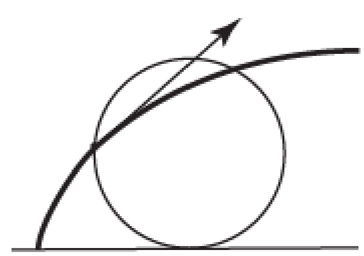


Рис. 258

Если велосипедист едет по мокрой дороге, то оторвавшиеся от колеса капли будут лететь по касательной к циклоиде и при отсутствии щитков могут забрызгивать спину велосипедиста.

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564 – 1642). Он же придумал и ее название.

Пусть теперь окружность катится без скольжения не по прямой, а по окружности с внешней стороны. В зависимости от соотношения между радиусами неподвижной и катящейся окружностей будут получаться различные кривые. Рассмотрим некоторые из них.

Кривая, которая получается как траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности того же радиуса, называется ***кардиоидой***.

Изобразим две касающиеся равные окружности и пусть правая окружность катится по левой окружности (рис. 259).

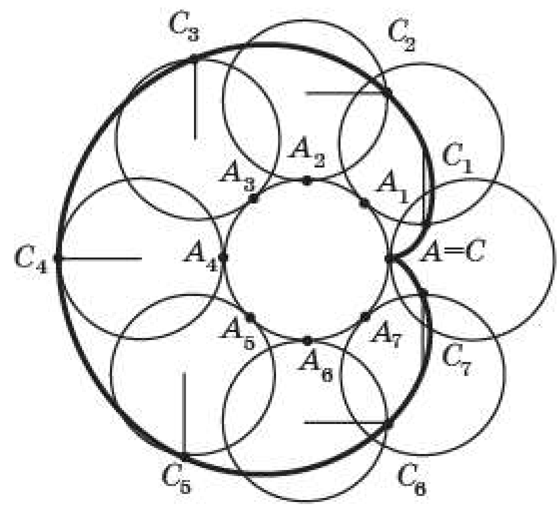


Рис. 259

Построим некоторые точки этой кривой. Пусть C – точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находилась в положении A. Разделим неподвижную окружность на 8 равных частей точками A_1, A_2, ..., A_8 = A.

Ясно, что когда окружность сделает один оборот, т.е. повернется на 360°, она займет исходное положение вместе с точкой C.

Если окружность сделает половину полного оборота, т.е. повернется на 180°, то она займет положение (4), а точка C переместится в положение C_4.

Если окружность повернется на угол 45°, то окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1.

На рисунке 259 показаны также другие точки кардиоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим кривую, соответствующую одному полному обороту окружности. При следующих оборотах окружности точка C будет описывать ту же самую кривую.

Рассмотрим теперь случай, когда окружность катится по окружности с внутренней стороны и радиус неподвижной окружности в четыре раза больше радиуса катящейся окружности. Получаемая при этом траектория движения точки, закрепленной на катящейся окружности, называется ***астроидой*** (рис. 260).

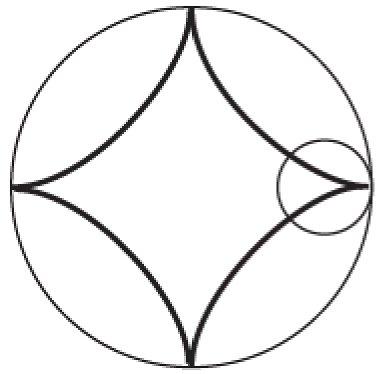


Рис. 260

III. Закрепление нового материала

1. Предположим, что круг без скольжения катится по прямой. Как мы знаем, точки на его окружности будут описывать циклоиды. Нарисуйте кривую, которую будет описывать точка A, закрепленная внутри круга (рис. 261, а).

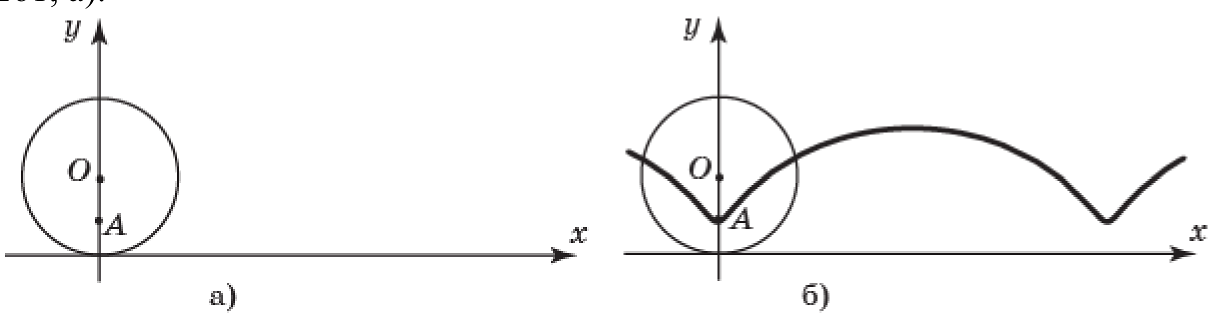


Рис. 261

2. Докажите, что касательная к циклоиде перпендикулярна отрезку, соединяющему точку касания и точку соприкосновения окружности с прямой, по которой она катится.

Ответы. **1.** Решение представлено на рисунке 261, б. **2.** Заменим окружность на вписанный в нее правильный n-угольник. Когда n-угольник катится по прямой, его вершины двигаются по окружностям, радиусами которых являются отрезки, соединяющие эти вершины с опорной точкой. Касательные к траекториям движения вершин будут перпендикулярны этим радиусам. При увеличении n многоугольники приближаются к окружности, а траектория вершины приближается к циклоиде. Отсюда можно сделать вывод о том, что касательная к циклоиде перпендикулярна отрезку, соединяющему точку касания и точку соприкосновения окружности с прямой, по которой она катится.

IV. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 56* учебника).

2. Решить задачи.

1) Предположим, что круг без скольжения катится по прямой. Как мы знаем, точки на его окружности будут описывать циклоиды. Нарисуйте кривую, которую будет описывать точка *B*, закрепленная вне круга (рис. 262, а).

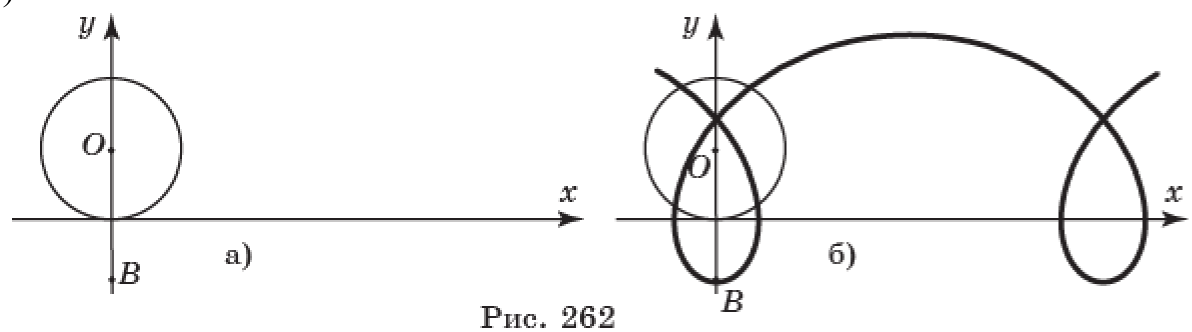


Рис. 262

Решение представлено на рисунке 262, б.

2) Окружность радиуса 2 см катится с внешней стороны по другой окружности того же радиуса. Нарисуйте соответствующую кардиоиду. Имеет ли она: а) ось симметрии; б) ценр симметрии?

Ответ. а) Да; б) нет.

3) Окружность радиуса 1 см катится с внутренней стороны по другой окружности радиуса 4 см. Нарисуйте соответствующую астроиду. Имеет ли она: а) ось симметрии; б) ценр симметрии?

Ответ. а) Да, 4 оси; б) да.

3*. Индивидуальные задания. Замечательные свойства циклоиды: 1) «Ледяная гора»; 2) «Часы с маятником». Литература: Учебник, п. 56*; Берман Г.Н. Циклоида. – М.: Наука, 1980.

Урок 2

I. Математический диктант

Вариант 1

1. Кинематический способ задания кривой заключается в том, что …
2. Циклоидой называется …
3. Астроидой называется …
4. Первым ученым, который изучал циклоиду, был …

Вариант 2

1. Циклоидальная кривая получается как …
2. Циклоида в переводе с греческого языка означает …
3. Кардиоидой называется …
4. Среди ученых, которые занимались изучением циклоиды, были …

II. Проверка математического диктанта

Проводится через кодоскоп или проектор.

III. Индивидуальные задания

См. задание 3* из домашней работы (этап IV предыдущего урока).

IV. Решение задач

1. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного треугольника со стороной 1, катящегося по прямой аналогично окружности.

2. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного n-угольника, катящегося по прямой аналогично окружности при $n = 4$.

3. Докажите, что кардиоида обладает следующим свойством: если провести произвольную прямую через точку A (рис. 263) и от точки B ее пересечения с неподвижной окружностью отложить в обе стороны отрезки, равные диаметру окружности, то концы этих отрезков C и D будут принадлежать кардиоиде.

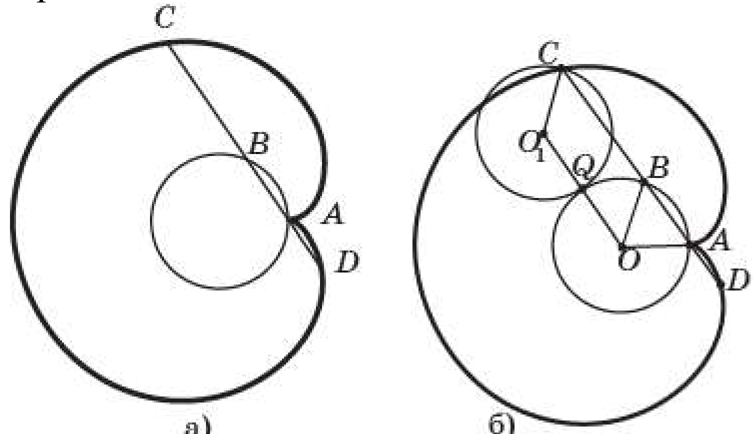


Рис. 263

Ответы. **1.** Пусть правильный треугольник ABC со стороной 1 расположен на прямой, как показано на рисунке 264.

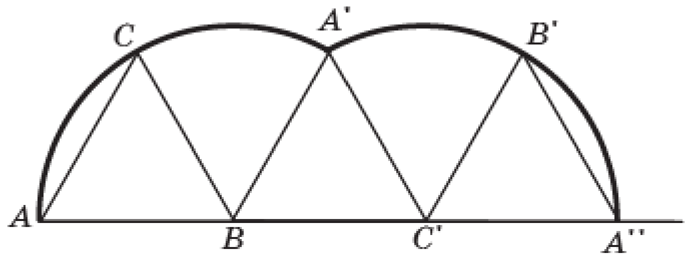


Рис. 264

Выясним, какую траекторию будет описывать вершина A. Сначала вершина A описывает дугу окружности величиной 120° с центром в B и радиусом 1 и занимает самое верхнее положение A'. После этого поворот производится вокруг точки C', и точка A описывает дугу $A'A''$. Далее все повторяется сначала. Таким образом, искомая траектория будет состоять из дуг единичной окружности величиной 120°. **2.** Решение показано на рисунке 265.

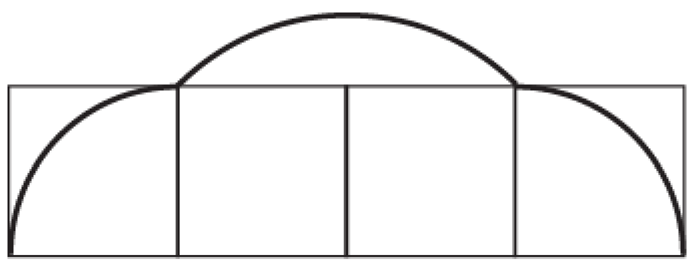


Рис. 265

3. Пусть O – центр исходной окружности, и O_1 – центр катящейся окружности (рис. 265). Докажем, что для точки C кардиоиды выполняется равенство $BC = OO_1 = 2R$. Действительно, так как длины дуг AQ и CQ равны, то равны углы AOQ и QO_1C. Поэтому AOO_1C – равнобедренная трапеция и, в частности, AC параллельна OO_1. Далее, $\angle OBA = \angle BAO = 180° - \angle OO_1C = \angle O_1CA$. Следовательно, OB параллельна O_1C и, значит, BCO_1O – параллелограмм. Таким образом, $BC = OO_1 = 2R$. Аналогичным образом показывается, что $BD = OO_2 = 2R$.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 56* учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте траекторию движения вершины правильного n-угольника, катящегося по прямой аналогично окружности при n=6.

Решение показано на рисунке 266.

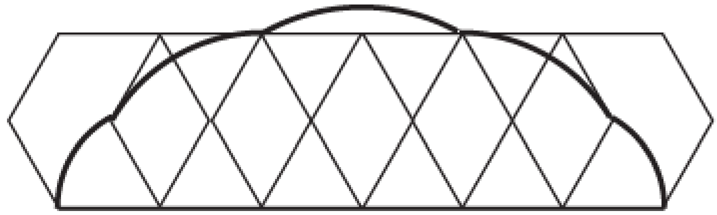
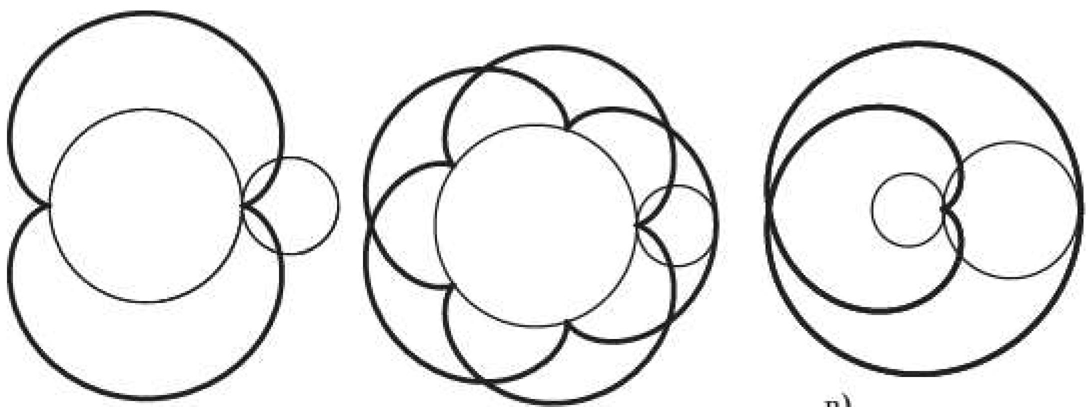


Рис. 266

2) Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закрепленной на окружности радиуса 2 см, катящейся с внешней стороны по окружности радиуса: а) 4 см; б) 5 см; в) 1 см.

Решение показано на рисунке 267.

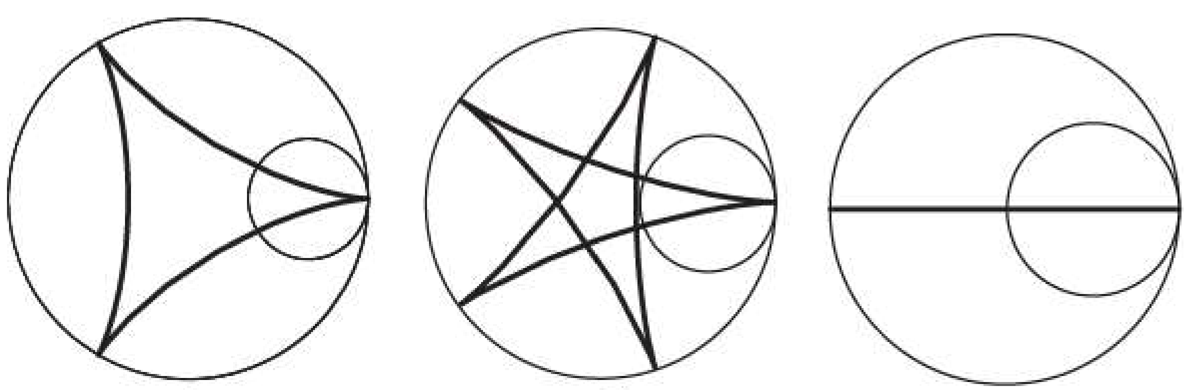


а) б) в)

Рис. 267

3) Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закрепленной на окружности радиуса 2 см, катящейся с внутренней стороны по окружности радиуса: а) 6 см; б) 5 см; в) 4 см.

Решение показано на рисунке 268.



а) б) в)

Рис. 268

§ 5. ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ

Тема «Параллельность на плоскости»

Определения понятий

1. Параллельные прямые на плоскости.
2. Секущая двух прямых.
3. Углы при пересечении двух параллельных прямых третьей (секущей): соответственные; внутренние накрест лежащие; внешние накрест лежащие; внутренние односторонние; внешние односторонние.

Формулировки теорем

1. Признак параллельности двух прямых.
2. Свойства параллельных прямых, пересеченных третьей прямой.
3. Сумма углов произвольного треугольника.
4. Сумма углов произвольного выпуклого n-угольника.

Упражнения

1. Как могут располагаться относительно друг друга две прямые на плоскости?
2. Могут ли все углы, образованные при пересечении двух прямых третьей, быть равными между собой?
3. На плоскости даны две точки. Сколько пар параллельных прямых можно провести через них?
4. Как расположены относительно друг друга биссектрисы соответственных углов при пересечении двух параллельных прямых третьей?
5. Найдите сумму внешних углов: а) треугольника; б) четырехугольника, взятых по одному при каждой вершине.
6. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен 120^0.
7. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 27^o. Из вершины его прямого угла опущена высота. Найдите углы образовавшихся треугольников.
8. Какие углы образуются при пересечении высот равностороннего треугольника?
9. Какие углы образуются при пересечении биссектрис острых углов прямоугольного треугольника?
10. Два угла треугольника равны 70^o и 40^o. Какие углы образуются при пересечении высот, проведенных из вершин этих углов?

11. В равнобедренном треугольнике сумма внутренних углов и одного внешнего равна 320°. Найдите углы треугольника.

12. Углы треугольника относятся как 2:7:9. Найдите углы треугольника, который образуется, если через каждую вершину данного треугольника провести прямую, параллельную противолежащей стороне.

13. Из точки, взятой внутри угла, равного 120° проведены прямые, параллельные его сторонам. Найдите углы образовавшегося четырехугольника.

14. Могут ли два угла с соответственно перпендикулярными сторонами быть одновременно равными и в сумме составлять 180°?

15. Стороны острого и тупого углов взаимно перпендикулярны. Найдите эти углы, если их разность равна $20_{\circ}$.

Тема «Четырехугольники»

Определения понятий

1. Параллелограмм.
3. Прямоугольник.
4. Ромб.
5. Квадрат.
6. Средняя линия треугольника.
7. Трапеция. Основание, боковые стороны, средняя линия трапеции. Виды трапеций (равнобедренная, прямоугольная).

Формулировки теорем

1. Свойства противоположных сторон и углов параллелограмма.
2. Свойство диагоналей параллелограмма.
3. Признаки параллелограмма.
4. Признак прямоугольника.
5. Признак ромба.
6. Теорема о средней линии треугольника.
7. Теорема о средней линии трапеции.

Упражнения

1. Можно ли построить четырехугольник с углами 55°, 65°, 100°, 110°?
2. Можно ли построить четырехугольник с двумя прямыми и двумя тупыми углами?
3. Может ли меньший угол четырехугольника быть больше 90°?
4. Может ли больший угол четырехугольника быть меньше 90°?
5. Могут ли три угла четырехугольника быть: а) тупыми; б) острыми?

6. Сколько пар равных треугольников образуется в параллелограмме, если провести диагонали?

7. Как расположена прямая, соединяющая середины противоположных сторон параллелограмма, относительно других его сторон?

8. Сколько параллелограммов можно построить с вершинами в трех данных точках, не принадлежащих одной прямой?

9. Почему одна диагональ параллелограмма (в общем случае) больше другой?

10. Середины сторон четырехугольника являются вершинами ромба. Определите вид этого четырехугольника.

11. Сторона ромба равна 1. Найдите его меньшую диагональ, если один из его углов равен 120^{o}.

12. Верно ли, что: а) параллелограмм является ромбом; б) квадрат является ромбом; в) прямоугольник является квадратом?

13. Сколько квадратов можно построить с вершинами в двух данных точках?

14. Два квадрата имеют равные диагонали. Равны ли они?

15. Могут ли два неравных ромба иметь равные периметры?

16. Равны ли два ромба, если равны их: а) соответственные диагонали; б) стороны?

17. Противоположные углы трапеции равны α и β. Найдите остальные углы трапеции.

18. Могут ли последовательные углы трапеции относиться как: а) 1:2:3:6; б) 2:3:9:10?

19. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон равнобедренной трапеции.

20. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на отрезки, равные a и b. Найдите основания трапеции.

Тема «Вписанные и описанные многоугольники»

Определения понятий

1. Центральный угол.
2. Вписанный угол.
3. Многоугольник, вписанный в окружность.
4. Многоугольник, описанный около окружности.
5. Окружность, вписанная в многоугольник.
6. Окружность, описанная около многоугольника.
7. Замечательные точки в треугольнике.

Формулировки теорем

1. Теорема Фалеса.
2. Теорема о пропорциональных отрезках.
3. Теорема о вписанном угле.
4. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
5. Теорема об окружности, описанной около правильного многоугольника.
6. Теорема об окружности, вписанной в треугольник.
7. Теорема об окружности, вписанной в правильный многоугольник.
8. Теоремы о пересечении биссектрис, высот и медиан треугольника.

Упражнения

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 9 см. Найдите радиус окружности, описанной около него.

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите радиус описанной около него окружности.

3. Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной, равной 1.

4. Под каким углом виден каждый катет прямоугольного треугольника из центра описанной около него окружности, если один из его острых углов равен $50_{\circ}$?

5. Определите вид треугольника, если центр окружности, описанной около него, лежит: а) внутри треугольника; б) вне треугольника; в) на его стороне.

6. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 1.

7. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c.

8. Можно ли описать окружность около четырехугольника, если его последовательные углы равны 40°, 90°, 130°?

9. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 75° и 110°. Найдите остальные его углы.

10. Можно ли описать окружность около: а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е) прямоугольной трапеции?

11. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, если его стороны равны 4 см и 8 см.

12. Три последовательные стороны четырехугольника, в который вписана окружность, равны 7 см, 5 см и 20 см. Найдите периметр этого четырехугольника.

13. Можно ли вписать окружность в: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат; д) равнобедренную трапецию; е) прямоугольную трапецию?

14. Найдите радиусы окружностей, описанной и вписанной в единичный квадрат.

15. Найдите радиусы окружностей, описанной и вписанной в правильный шестиугольник, сторона которого равна 1.

Тема «Движение»

Определения понятий

1. Центральная симметрия, центр симметрии, центрально-симметричные фигуры.

2. Поворот вокруг точки, симметрия n-го порядка.

3. Осевая симметрия, ось симметрии; фигуры, симметричные относительно оси.

4. Параллельный перенос, вектор, одинаково и противоположно направленные векторы, длина, или модуль, вектора.

5. Движение. Равенство фигур.

Формулировки теорем

1. Свойства центральной симметрии.

2. Свойства поворота вокруг точки.

3. Свойства осевой симметрии.

4. Свойства параллельного переноса.

5. Теоремы о движении (композиция движений, прямые, лучи, отрезки, углы, треугольники).

Упражнения

1. Каким преобразованием является преобразование, обратное движению?

2. Каким преобразованием является композиция двух движений?

3. Почему никакой треугольник не имеет центра симметрии?

4. В какую фигуру перейдет данный: а) треугольник; б) квадрат в результате последовательно выполненных центральных симметрий относительно одной и той же точки?

5. Будет ли преобразование, которое переводит фигуру в себя, центральной симметрией?

6. Как должны быть расположены относительно друг друга точка и окружность, чтобы эта фигура имела центр симметрии?

7. Имеет ли центр симметрии: а) отрезок; б) луч; в) прямая; г) ромб; д) равнобедренная трапеция; е) прямоугольник?

8. Может ли фигура иметь бесконечно много центров симметрии? Приведите примеры.

9. Какому повороту равносилен поворот на угол $-\varphi$, если $0^{o} < \varphi < 360^{o}$?

10. При повороте прямой вокруг точки, не принадлежащей ей, получили прямую, параллельную данной. Определите угол поворота.

11. При каком условии при параллельном переносе совмещаются: а) две прямые; б) два луча; в) два отрезка; г) две окружности?

12. Как связаны между собой параллельный перенос и осевая симметрия?

13. Имеют ли ось симметрии две: а) пересекающиеся прямые; б) параллельные прямые?

14. Какой четырехугольник имеет только одну ось симметрии?

15. Сколько векторов определяют вершины квадрата с точкой пересечения его диагоналей?

Тема «Подобие. Теорема Пифагора»

Определения понятий

1. Подобные треугольники.
2. Коэффициент подобия.
3. Подобные фигуры.
4. Гомотетия, центр гомотетии, коэффициент гомотетии.

Формулировки теорем

1. Признаки подобия треугольников.
2. Свойства подобия.
3. Теорема о гомотетии.
4. Теорема Пифагора.

Упражнения

1. В треугольнике ABC стороны AB=5,4 см, AC=4,2 см, BC=3,6 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$.

2. Подобны ли два: а) равнобедренных прямоугольных треугольника; б) равносторонних треугольника; в) равнобедренных треугольника?

3. Сколько соответственно равных углов достаточно задать у двух равнобедренных треугольников, чтобы они были подобны?

4. Два треугольника подобны. Два угла одного равны 30º и 50º. Найдите наибольший угол второго треугольника.

5. Назовите подобные треугольники в трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) с проведенными диагоналями AC и BD, которые пересекаются в точке O.

6. Подобны ли две окружности? Если да, чему равен коэффициент подобия?

7. Будут ли подобны два правильных многоугольника с соответственно равными углами?

8. Докажите, что диагонали трапеции в точке пересечения делятся на отрезки, пропорциональные основаниям трапеции.

9. Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.

10. Наименьшие стороны двух подобных четырехугольников равны 7 см и 2,8 см. Найдите их периметры, если стороны первого относятся как 1:2:2:3.

11. Две стороны треугольника равны 1,5 см и 2 см, высота, проведенная к третьей строне, равна 1,2 см. Найдите третью сторону треугольника.

12. В равнобедренной трапеции диагональ равна 8 см, боковая сторона - 7 см, средняя линия - 4 см. Найдите основания трапеции.

13. Катеты прямоугольного треугольника равны 42 см и 56 см. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится биссектрисой его прямого угла.

14. Катет прямоугольного треугольника делится биссектрисой противолежащего угла на отрезки, равные 5 см и 4 см. Найдите периметр этого треугольника.

15. Выразите боковую сторону равнобедренного треугольника через данную высоту h, проведенную к основанию, и радиус r вписанной окружности.

Тема «Тригонометрические функции»

Определения понятий

1. Тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс, котангенс) острого угла прямоугольного треугольника.

2. Тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс, котангенс) тупого угла.

Формулировки теорем

1. Теорема о том, что значения тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника не зависят от выбора треугольника.

2. Теорема о катете прямоугольного треугольника, лежащем против угла в $30_{\circ}$.

3. Основное тригонометрическое тождество.

4. Теорема косинусов.

5. Теорема синусов.

Упражнения

1. Постройте прямоугольный треугольник ABC таким образом, чтобы: а) $\sin A = \frac{1}{2}$; б) $\cos A = \frac{2}{3}$; в) $\operatorname{tg} B = 1\frac{1}{4}$; г) $\operatorname{ctg} B = \frac{4}{5}$.

2. В прямоугольном треугольнике MON ($\angle O = 90^{\circ}$): а) $\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} N$; б) $\sin M = \cos N$; в) $\sin M = \sin N$; г) $\cos M < \cos N$. Как связаны между собой его катеты?

3. Дан острый угол $\varphi = 50^{\circ}$. Найдите значения его тригонометрических функций.

4. Дан прямоугольный треугольник KHL ($\angle H = 90°$), в нем провели медиану HM и высоту HP. В треугольнике HML провели высоту MQ. Выразите все получившиеся отрезки через $\angle L = \alpha$ и $HL = k$.

5. В прямоугольнике середины сторон, которые равны a и b, служат вершинами четырехугольника. Определите его вид и углы, которые стороны этого четырехугольника образуют со сторонами прямоугольника.

6. В треугольнике известны две его стороны a, b и угол между ними, равный ψ. Выразите третью его сторону.

7. Стороны параллелограмма равны m и n, угол между диагоналями равен γ. Найдите его диагонали.

8. В треугольнике дана сторона c и два прилежащих к ней угла α, β. Найдите биссектрисы углов данного треугольника.

9. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AH = h$. Найдите стороны данного треугольника.

10. Приведите геометрический способ вывода формулы $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

(В прямоугольном треугольнике с острым углом α проведите биссектрису этого угла.)

О Т В Е Т Ы

Контрольные работы

№ 1

Вариант 1. **1.** 4 угла по 40° и 4 угла по 140°. **2.** 15°. **3.** 40°, 60°, 80°. **4.** 36°. **5*.** Назовем расстояние между данными параллельными прямыми d: а) если $a < d$, то решения нет; б) если $a = d$, то искомым ГМТ является полоса между данными прямыми (в том числе и точки принадлежашие данным прямым); в) если $a > d$, то две прямые, параллельные данным, лежащие вне соответствующей полосы и отстоящие каждая от ближайшей из данных прямых на расстояние $\frac{a-d}{2}$.

Вариант 2. **1.** 4 угла по 70° и 4 угла по 110°. **2.** 40°. **3.** 90°, 60°, 30°. **4.** 16. **5*.** Назовем расстояние между данными параллельными прямыми d: а) если $b = d$, то ГМТ являются сами данные прямые и все точки плоскости, лежащие вне полосы, которая определяется ими; б) если $b < d$, то ГМТ являются две прямые, параллельные данным прямым, лежащие внутри полосы, которая определяется ими, и отстоящие каждая от ближайшей из данных прямых на расстояние $\frac{d-b}{2}$; в) если $b > d$, решения нет.

№ 2

Вариант 1. **1.** 30°, 30°, 150°, 150°. **3.** 18 см. **4.** 60°, 60°, 120°, 120°. **5*.** Сначала построить прямоугольный треугольник AOB (A, B – вершины ромба, O – точка пересечения его диагоналей) по гипотенузе $AB = a$ и сумме катетов $AO+OB = \frac{d_1+d_2}{2}$. Для этого откладываем отрезок $AK = \frac{d_1+d_2}{2}$ и $\angle AKM = 45°$ (рис. 73). Проводим окружность (A; a), которая пересечет вторую сторону KM построенного угла в точке B. Опускаем перпендикуляр BO на AK, AOB – искомый треугольник. Теперь продолжаем AO и BO соответственно на отрезки $OC=AO$ и $OD=BO$, $ABCD$ - искомый ромб.

Вариант 2. **1.** 60°, 60°, 120°, 120°. **3.** 4,5 см, 3 см, 6 см. **4.** 60°, 60°, 120°, 120°. **5*.** Сначала построить прямоугольный треугольник AOB (A, B – вершины ромба, O – точка пересечения его диагоналей) по гипотенузе $AB=a$ и разности катетов $AO - BO = \frac{d_1-d_2}{2}$. Для этого откладываем отрезок $AK = \frac{d_1-d_2}{2}$ и $\angle AKM = 135°$. Проводим окружность (A; a), которая пересечет вторую сторону KM построенного угла в точке B. Опускаем перпендикуляр BO на AK, AOB – искомый треугольник. Теперь продолжаем AO и BO соответственно на отрезки $OC=AO$ и $OD=BO$, $ABCD$ - искомый ромб.

№ 3

Вариант 1. **1.** 60°, 120°. **2.** 105°, 125°, 130°. **3.** 100°, 120°. **4.** 3 см, 9 см, 15 см, 9 см. **5*.** *Указание*. Сначала строим прямоугольный треугольник *AHL* по гипотенузе $AL=l$ и катету $AH=h$.

Вариант 2. **1.** 60°, 60°, 120°. **2.** 108°, 114°, 138°. **3.** 60°, 80°, 120°, 100°. **4.** 10 см, 8 см, 14 см, 16 см. **5*.** *Указание*. Сначала строим прямоугольный треугольник *AHM* по гипотенузе $AM=m$ и острому углу *HAM*.

№ 4

Вариант 1. **1.** Равносторонний треугольник. **2.** 4 раза; 90°; 4-го порядка. **5*.** *Указание*. Следует взять движение – поворот вокруг центра квадрата на 90°.

Вариант 2. **1.** Равносторонний треугольник. **2.** 3 раза; 120°; 3-го порядка. **5*.** *Указание*. Следует взять движение – поворот вокруг центра квадрата на 90°.

№ 5

Вариант 1. **1.** 10,2 см; 4,8 см; 11,4 см. **3.** $\frac{b\sqrt{3}}{2}$. **4.** 4,8 см.

Вариант 2. **1.** 6,72 см; 5,76 см; 7,56 см. **3.** $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. **4.** 7 см.

№ 6

Вариант 1. **2.** $\sin 1° < \cos 1°$. **3.** $NK = 2\sqrt{19}$ см; $\sin N = \frac{5\sqrt{57}}{38}$; $\sin K = \frac{3\sqrt{57}}{38}$. **4.** $2R\cdot\sin\frac{180°}{n}$. **5*.** $\sin\frac{a\cdot\sin\beta}{1+\sin\frac{\beta}{2}}$.

Вариант 2. **2.** $\operatorname{tg} 1° < \operatorname{ctg} 1°$. **3.** $EF = \sqrt{19}$ см; $\sin E = \frac{5\sqrt{57}}{38}$; $\sin F = \frac{\sqrt{57}}{19}$. **4.** $2R\cdot\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. **5*.** $\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

С О Д Е Р Ж А Н И Е