

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
2024



УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

Смирнова И. М.

С50 Геометрия. 8 класс : учебное пособие для общеобразовательных организаций / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Мнемозина, 2024. — 207 с. : ил.

ISBN 978-5-346-05197-8

Учебное пособие написано в соответствии с требованиями ФГОС 2021 г., Федеральной рабочей программы ООО и Примерной рабочей программы ООО по математике. Оно может быть использовано для изучения геометрии как на базовом, так и на углублённом уровне. Данное пособие является переработанным вариантом учебника «Геометрия. 7—9 классы» и содержит главы этого учебника, относящиеся к курсу 8 класса. Помимо основного материала, в него включены вопросы истории геометрии, научно-популярный материал, задачи с практическим содержанием и др.

**УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721**

ISBN 978-5-346-05197-8

© «Мнемозина», 2024
© Оформление. «Мнемозина», 2024
Все права защищены

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для изучения геометрии в 8-м классе. Весь материал разбит на главы и параграфы, которые содержат как основной, так и дополнительный теоретический материал, исторические сведения, научно-популярный материал, задачи с практическим содержанием и повышенного уровня трудности.

Устные задачи выделены цветом (■). Они могут быть использованы для работы как в классе, так и дома.

Параграфы, теоремы и задачи, помеченные звёздочкой (*), относятся к дополнительному материалу, имеют исследовательский характер и могут быть использованы при проведении курсов по выбору и организации проектной и исследовательской деятельности.

Для дополнительных занятий и подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ), помимо данного пособия, рекомендуем использовать материалы авторского сайта www.vasmirnov.ru

Желаем успехов в изучении геометрии!

ЧЕТЫРЁХ- УГОЛЬНИКИ

§ 1 Параллелограмм

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 1.1).

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из точки одного основания этого параллелограмма на другое основание или его продолжение. На рисунке 1.1 показана высота DE параллелограмма $ABCD$.

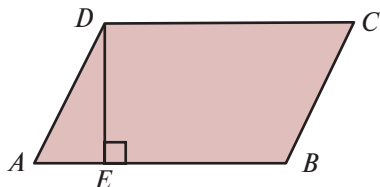


Рис. 1.1

Рассмотрим свойства параллелограмма.

Свойство 1. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180° .

Доказательство. Углы, прилежащие к стороне параллелограмма, являются внутренними односторонними углами. Поэтому их сумма равна 180° .

Свойство 2. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 1.2 на с. 5). Диагональ AC разбивает его на два треугольника ABC и CDA , которые равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и

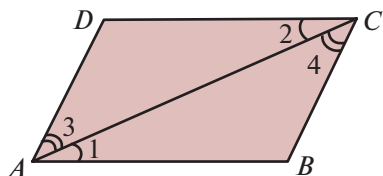


Рис. 1.2

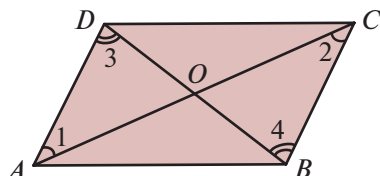


Рис. 1.3

$\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle B = \angle D$. Кроме этого, $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$.

Свойство 3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 1.3). Треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = BC$ по свойству 2, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому $AO = OC$ и $BO = OD$.

ПРИМЕР 1. Сумма двух углов параллелограмма равна 148° . Найдите его углы.

Решение. Так как сумма соседних углов параллелограмма равна 180° , то данные углы не могут быть соседними и, следовательно, являются противоположными. Поскольку противоположные углы параллелограмма равны, то в данном случае каждый из них равен 74° . Оставшиеся два угла параллелограмма равны 106° .

ПРИМЕР 2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Назовите пары равных треугольников.

Ответ. AOB и COD ; AOD и COB ; ABC и CDA ; ABD и CDB .

Вопросы

1. Какой четырёхугольник называется параллелограммом?
2. Чему равна сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?
3. Что можно сказать о противоположных: а) сторонах; б) углах параллелограмма?
4. Что можно сказать о диагоналях параллелограмма?

Задачи

1. Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Сколько при этом получилось параллелограммов?
2. Сколько различных параллелограммов можно получить из двух равных треугольников, прикладывая их друг к другу различным образом?
3. У параллелограмма две стороны равны 10 см и 15 см. Чему равны две другие стороны?
4. Один из углов параллелограмма равен 30° . Чему равны остальные углы?
5. На рисунке 1.4 $ABCD$ — параллелограмм, $BE \parallel DF$. Какой фигурой является четырёхугольник $BFDE$?
6. Могут ли углы треугольника быть равными трём углам какого-нибудь параллелограмма?
7. Найдите углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: а) 80° ; б) 100° ; в) 160° .
8. Найдите углы параллелограмма, если один из его углов: а) больше другого на 40° ; б) меньше другого в 5 раз.
9. Найдите углы параллелограмма, если два его угла относятся как 3 : 7.
10. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 25° и 35° . Найдите углы параллелограмма.
11. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 1.5) BE и BF перпендикулярны сторонам AD и CD соответственно. Его острый угол равен 60° . Найдите углы образовавшегося четырёхугольника $BFDE$.
12. Как расположены биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?
13. Как расположены биссектрисы углов параллелограмма (с неравными смежными сторонами), противолежащих друг другу?

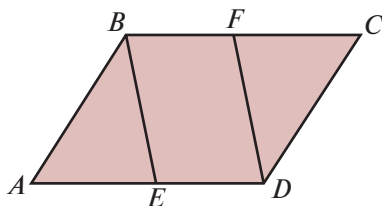


Рис. 1.4

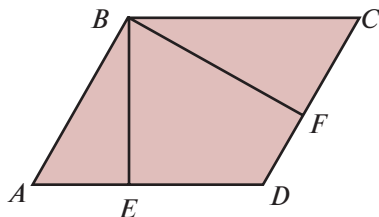


Рис. 1.5

14. Из двух противоположных вершин параллелограмма $ABCD$ (рис. 1.6) проведены биссектрисы BE и DF . Будет ли четырёхугольник $BFDE$ параллелограммом?

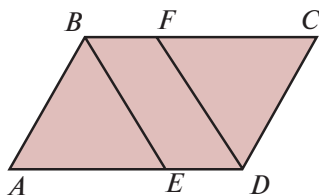


Рис. 1.6

15. Существует ли параллелограмм, в котором две стороны и одна диагональ соответственно равны: а) 5 см, 2 см, 2 см; б) 7 см, 4 см, 11 см; в) 2 см, 3 см, 4 см; г) 3 см, 8 см, 10 см?
16. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 2 см больше другой; б) разность двух сторон равна 7 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.
17. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны параллелограмма.
18. Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до двух его вершин равны 3 см и 4 см. Найдите расстояния от неё до двух других вершин.
19. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.

20. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что её отрезок, заключённый между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.

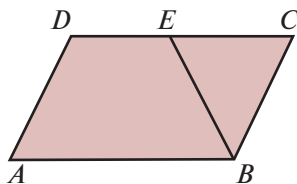


Рис. 1.7

21. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположащую сторону в отношении 3 : 4, считая от вершины тупого угла (рис. 1.7). Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.

22. На клетчатой бумаге изобразите параллелограмм, у которого даны три вершины (рис. 1.8). Сколько таких параллелограммов?

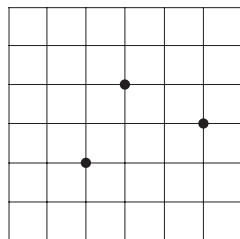


Рис. 1.8

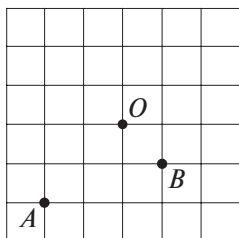


Рис. 1.9

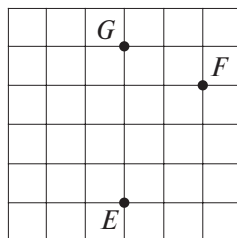


Рис. 1.10

23. На клетчатой бумаге изобразите параллелограмм $ABCD$, у которого даны вершины A , B и точка O пересечения его диагоналей (рис. 1.9).
24. На клетчатой бумаге изобразите параллелограмм $ABCD$, у которого даны середины E , F , G сторон соответственно AB , BC , CD (рис. 1.10).
- *25. Через точку, данную внутри угла, проведите отрезок с концами на сторонах угла, делящийся в этой точке пополам.

§2 Признаки параллелограмма

Рассмотрим признаки параллелограмма, т. е. достаточные условия, из выполнимости которых для четырёхугольника следует, что он является параллелограммом.

ТЕОРЕМА

(Первый признак параллелограмма.) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны. Проведём диагональ AC (рис. 2.1). Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому внутренние накрест лежащие углы 3 и 4 равны. Следовательно, прямые AD и BC параллельны. Таким образом, противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ параллельны и $ABCD$ — параллелограмм.

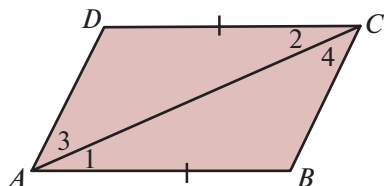


Рис. 2.1

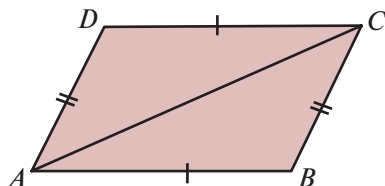


Рис. 2.2

ТЕОРЕМА

(Второй признак параллелограмма.) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ имеют место равенства: $AB = CD$, $BC = AD$. Одна из диагоналей разбивает его на два треугольника. Пусть, например, это диагональ AC (рис. 2.2). Тогда треугольники ABC и CDA равны (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle CAB = \angle ACD$, и, значит, прямые AB и CD параллельны. Аналогично $\angle ACB = \angle CAD$, и, значит, прямые BC и AD параллельны. Таким образом, противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ параллельны и $ABCD$ — параллелограмм.

ПРИМЕР 1. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.3) отложены равные отрезки $BE = DF$. Является ли четырёхугольник $BEDF$ параллелограммом?

Решение. Да, так как противоположные стороны BE и DF равны и параллельны.

ПРИМЕР 2. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

Решение. Пусть a — прямая, B — не принадлежащая ей точка. Отметим какие-нибудь точки A и D на прямой a (рис. 2.4). С центрами в точках B и D проведём окружности радиусами AD и AB соответственно. Их точку пересечения

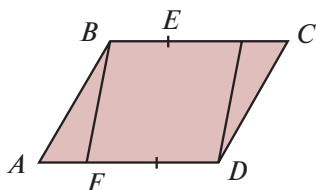


Рис. 2.3

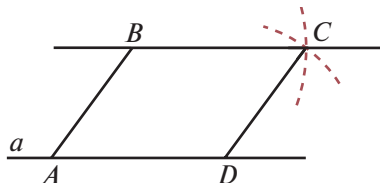


Рис. 2.4

обозначим C . Проведём прямую BC . Она и будет искомой. Действительно, в четырёхугольнике $ABCD$ равны противоположные стороны. Следовательно, он является параллелограммом, и, значит, BC параллельна AD .

Вопросы

1. Какие условия называют признаками параллелограмма?
2. Сформулируйте первый признак параллелограмма.
3. Сформулируйте второй признак параллелограмма.

Задачи

1. Даны два равных и параллельных отрезка. Их концы соединены непересекающимися отрезками. Верно ли, что получившийся четырёхугольник является параллелограммом?
2. Является ли равенство двух противоположных углов четырёхугольника признаком параллелограмма?
3. Две стороны четырёхугольника параллельны, а две другие равны. Верно ли утверждение, что этот четырёхугольник является параллелограммом?
4. На бумаге в клетку отмечены точки A, B, C, D (рис. 2.5). Докажите, что прямые AB и CD параллельны.
5. Из данной точки к окружности радиусом R проведены две взаимно перпендикулярные касательные. Чему равны отрезки этих касательных, заключённые между данной точкой и точками касания?
6. Докажите, что если в четырёхугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм (признак параллелограмма).
7. На продолжении противоположных сторон параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AK, CL (рис. 2.6) и проведены отрезки BK, LD . Докажите, что полученный четырёхугольник $LBKD$ — параллелограмм.

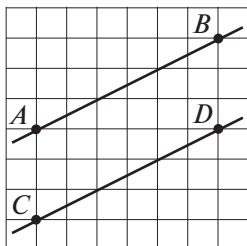


Рис. 2.5

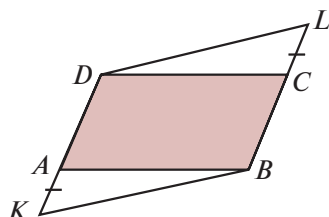


Рис. 2.6

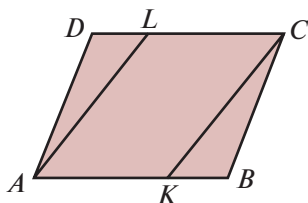


Рис. 2.7

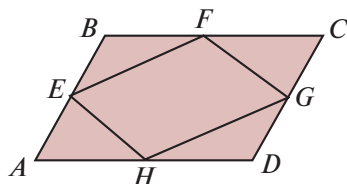


Рис. 2.8

8. На рисунке 2.7 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, $AK = CL$. Докажите, что точки A, K, C, L являются вершинами параллелограмма.
9. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 2.8). E, F, G, H — середины его сторон. Будет ли четырёхугольник $EFGH$ параллелограммом? Почему?
10. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.9) отложены две пары равных отрезков: $BE = DG$ и $BF = DH$. Будет ли четырёхугольник $EFGH$ параллелограммом?
11. На противоположных сторонах параллелограмма $KLMN$ отложены равные отрезки: $KA = MB$ и $KC = MD$. Будет ли четырёхугольник $ACBD$ параллелограммом? Докажите, что точки пересечения диагоналей $KLMN$ и $ACBD$ совпадают.
12. Докажите, что биссектриса внешнего угла параллелограмма вместе с его сторонами (или их продолжениями), не проходящими через вершину этого угла, образует равнобедренный треугольник, сумма боковых сторон которого равна периметру параллелограмма.
- *13. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.10) биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках K и L , которые соединены соответственно с вершинами параллелограмма D и B . Является ли четырёхугольник $KBLD$ параллелограммом?

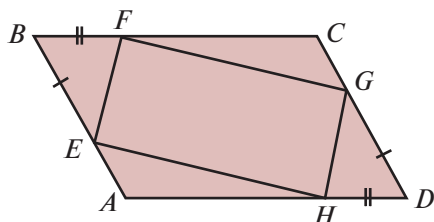


Рис. 2.9

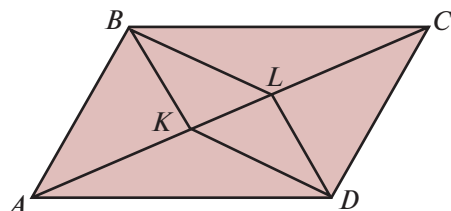


Рис. 2.10

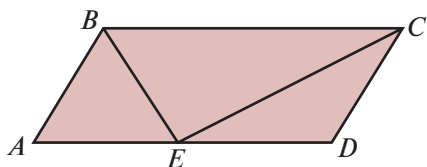


Рис. 2.11

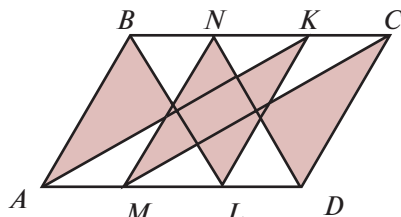


Рис. 2.12

- *14. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне (рис. 2.11). Как связаны между собой стороны данного параллелограмма?
- *15. Биссектрисы углов параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.12) пересекают его стороны в точках K , L , M и N . Определите вид четырехугольника $KLMN$.
16. Объясните, почему ось лампы, изображённой на рисунке 2.13, всегда вертикальна.
17. Восстановите параллелограмм по трём точкам — серединам его сторон.
18. Постройте параллелограмм: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне, углу и диагонали; в)* по стороне, перпендикуляру, опущенному на неё из вершины, и пересекающей его диагонали.
- *19. Населённые пункты A и B расположены на противоположных берегах реки (рис. 2.14). В каком месте реки следует построить мост CD и проложить дороги AC и BD , чтобы путь $AC + CD + DB$ имел наименьшую длину? (Берега c , d реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам).

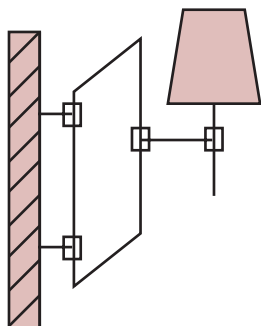


Рис. 2.13

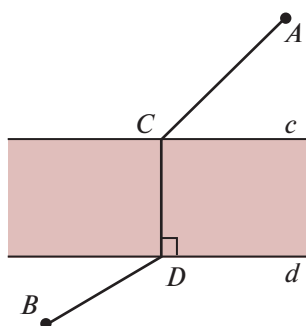


Рис. 2.14

§3 Прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется **прямоугольником** (рис. 3.1).

Так как прямоугольник является частным случаем параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. В частности, в прямоугольнике противоположные стороны попарно равны и диагонали в точке пересечения делятся пополам.

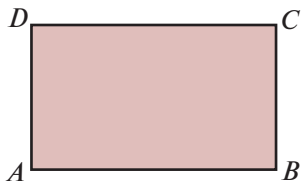


Рис. 3.1

ТЕОРЕМА

(Признак прямоугольника.) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$ (рис. 3.2). Тогда треугольники ABC и BAD равны по третьему признаку равенства треугольников (AB — общая, $AC = BD$, $BC = AD$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BAD$. Но эти углы в сумме составляют 180° . Значит, каждый из них равен 90° . Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то и остальные его углы также равны 90° , т. е. $ABCD$ — прямоугольник.

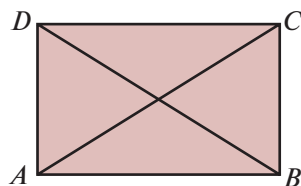


Рис. 3.2

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется **ромбом** (рис. 3.3).

Конечно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

ТЕОРЕМА

(Признак ромба.) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.

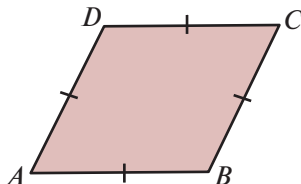


Рис. 3.3

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, диагонали AC и BD перпендикулярны, O — точка их пересечения (рис. 3.4). Тогда прямоугольные треугольники AOB и AOD равны (по двум катетам: AO — общий, $OB = OD$). Следовательно, $AB = AD$. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то и остальные его стороны равны, т. е. $ABCD$ — ромб.

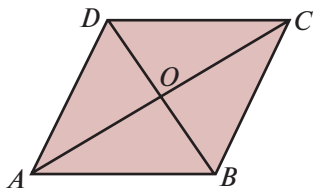


Рис. 3.4

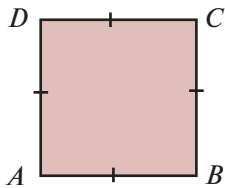


Рис. 3.5

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется **квадратом** (рис. 3.5).

Можно сказать, что квадратом является ромб, у которого все углы прямые.

Конечно, квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

ПРИМЕР 1. Из точки D , принадлежащей гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 3.6), проведены две прямые, параллельные катетам. Сумма периметров получившихся треугольников AKD и DLB равна 10 см. Найдите периметр данного треугольника ABC .

Решение. Четырёхугольник $KCLD$ — прямоугольник. Поэтому $KC = DL$ и $CL = KD$. Следовательно, периметр треугольника ABC равен сумме периметров треугольников AKD и DLB , т. е. равен 10 см.

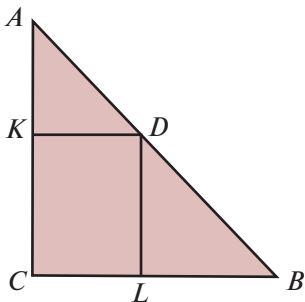


Рис. 3.6

ПРИМЕР 2. Докажите, что если в ромбе диагонали равны, то этот ромб является квадратом.

Решение. Так как ромб является параллелограммом, то из признака прямоугольника следует, что ромб, у которого равны диагонали, является прямоугольником, а значит, он является квадратом.

Вопросы

1. Какой параллелограмм называется прямоугольником?
2. Сформулируйте признак прямоугольника.
3. Какой параллелограмм называется ромбом?
4. Сформулируйте признак ромба.
5. Какой прямоугольник называется квадратом?
6. В каком случае ромб является квадратом?
7. В каком случае параллелограмм является квадратом?

Задачи

1. Два равных прямоугольных треугольника приложили один к другому таким образом, что их гипотенузы совпали, а неравные острые углы приложились один к другому. Какой при этом получился четырёхугольник?
2. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см, диагонали пересекаются под углом 60° . Найдите диагонали прямоугольника.
3. Существует ли четырёхугольник, не являющийся прямоугольником, диагонали которого были бы равны?
4. Верно ли утверждение, что если в четырёхугольнике один угол прямой, а диагонали равны, то он является прямоугольником?
5. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
6. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма с неравными соседними сторонами при пересечении образуют прямоугольник.
7. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 3.7) из вершины прямого угла C опущена высота CH , равная 3 см. Из точки H опущены перпендикуляры HK и HL на катеты треугольника. Найдите расстояние между точками K и L .
8. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении $1 : 2$, меньшая его сторона равна 5 см. Найдите диагонали данного прямоугольника.
9. Диагональ прямоугольника вдвое больше одной из его сторон. Какие углы образуют диагонали со сторонами прямоугольника?

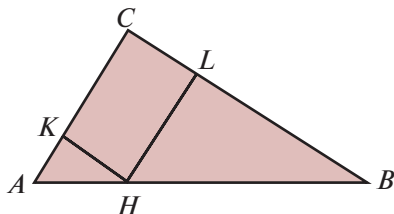


Рис. 3.7

10. Тупой угол между диагоналями прямоугольника равен 120° . Чему при этом будет равно отношение его меньшей стороны к диагонали?
11. Найдите диагонали прямоугольника, если его периметр равен 34 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 30 см.
12. В прямоугольнике острый угол между его диагоналями равен 50° . Найдите углы, которые образуют диагонали со сторонами прямоугольника.
13. Перпендикуляр BH (рис. 3.8), опущенный из вершины B прямоугольника $ABCD$ на его диагональ AC , делит угол B в отношении 2 : 3. Найдите: а) углы, которые образуют диагонали данного прямоугольника с его сторонами; б) угол между перпендикуляром BH и диагональю BD .

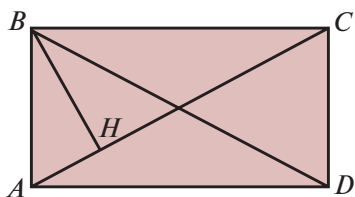


Рис. 3.8

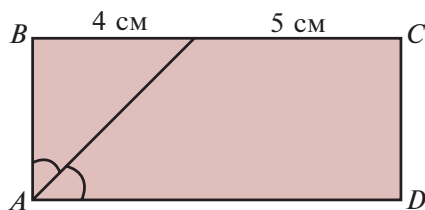


Рис. 3.9

14. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит пересекаемую ею сторону на отрезки 4 см и 5 см (рис. 3.9). Найдите стороны данного прямоугольника.
15. Чему равна меньшая диагональ ромба со стороной a и острым углом в 60° ?
16. Докажите, что у ромба диагонали перпендикулярны.
17. Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.
18. Докажите, что если у четырёхугольника все стороны равны, то он является ромбом.
19. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.
20. В ромбе одна из диагоналей равна его стороне. Найдите углы ромба.
21. На клетчатой бумаге изобразите квадрат $ABCD$, двумя вершинами которого являются данные точки A , B (рис. 3.10 на с. 17). Сколько таких квадратов?

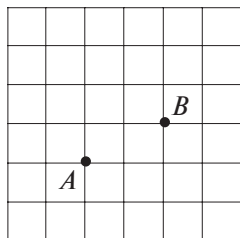


Рис. 3.10

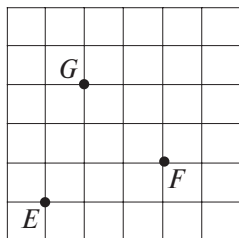


Рис. 3.11

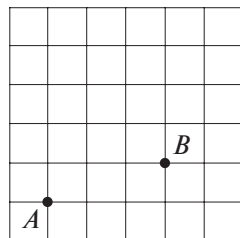


Рис. 3.12

22. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольник, серединами трёх сторон которого являются данные точки E , F , G (рис. 3.11).
23. На клетчатой бумаге изобразите ромб $ABCD$, двумя вершинами которого являются данные точки A , B , а остальные вершины расположены в узлах сетки (рис. 3.12).
24. Чему равен угол между: а) диагоналями квадрата; б) диагональю и стороной квадрата?
25. В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 5 см. Найдите периметр этого квадрата.
26. Докажите, что если диагонали прямоугольника перпендикулярны, то он является квадратом.
27. На сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.
- *28. Придумайте какой-нибудь признак квадрата.
- *29. Как нужно разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник на две части, чтобы из них можно было сложить квадрат?

§4 Средняя линия треугольника

Пусть в треугольнике ABC точки D и E — середины сторон AC и BC соответственно. Соединим эти точки отрезком DE (рис. 4.1).

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

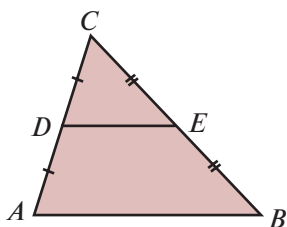


Рис. 4.1

ТЕОРЕМА

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Доказательство. Пусть DE — средняя линия треугольника ABC (рис. 4.2). Докажем, что DE параллельна AB и равна её половине. Для этого отложим на прямой DE отрезок $EF = DE$ и соединим отрезком точки B и F . Треугольники ECD и EBF равны по первому признаку равенства треугольников ($CE = BE$ по условию, $DE = FE$ по построению, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные). Следовательно, $BF = CD$, и, значит, $BF = AD$. Угол 3 равен углу 4, и, значит, прямые AC и BF параллельны. Таким образом, по признаку параллелограмма, четырёхугольник $ABFD$ — параллелограмм. Итак, сторона AB параллельна и равна стороне DF . Средняя линия DE равна половине DF и, следовательно, половине AB .

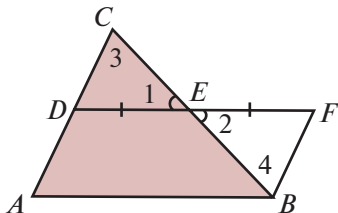


Рис. 4.2

Следствие. Если прямая проходит через середину одной стороны треугольника и параллельна другой его стороне, то она проходит через середину третьей стороны этого треугольника.

Доказательство. Пусть прямая проходит через середину D стороны AC и параллельна стороне AB треугольника ABC . Так как средняя линия DE также параллельна стороне AB , то она должна лежать на данной прямой. Следовательно, середина E стороны BC принадлежит этой прямой.

ПРИМЕР 1. Периметр треугольника равен 12 см, середины сторон соединены отрезками. Найдите периметр получившегося треугольника.

Решение. Стороны получившегося треугольника являются средними линиями исходного треугольника. Следовательно, они равны половинам соответствующих сторон. Поэтому искомый периметр равен половине периметра треугольника, т. е. равен 6 см.

ПРИМЕР 2. Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, E, F, G, H — середины его сторон (рис. 4.3). Тогда EF — средняя линия треугольника ABC и, следовательно, параллельна AC и равна её половине. Аналогично HG — средняя линия треугольника ACD и, следовательно, параллельна AC и равна её половине. Таким образом, стороны EF и HG четырёхугольника $EFGH$ равны и параллельны. Значит, этот четырёхугольник — параллелограмм.

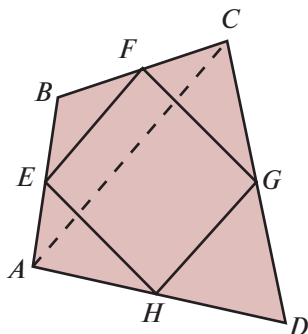


Рис. 4.3

Вопросы

1. Что называется средней линией треугольника?
2. Сформулируйте теорему о средней линии треугольника.

Задачи

1. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
2. Стороны треугольника равны 2 см, 3 см и 4 см. Его вершины являются серединами сторон другого треугольника. Найдите периметры треугольников.
3. Периметр равностороннего треугольника равен 72 см. Найдите его среднюю линию.
4. Периметр треугольника равен 12,3 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от данного какой-нибудь его средней линией.
5. Стороны треугольника относятся как 3:4:5, периметр его равен 60 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
6. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.
7. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.

8. Докажите, что каждый треугольник можно разрезать на две части, из которых можно составить параллелограмм.
9. Докажите, что каждый треугольник можно разрезать на три части, из которых можно составить прямоугольник.
10. У четырёхугольника диагонали равны a и b . Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.
11. В прямоугольнике меньшая сторона равна 20 см и образует с диагональю угол в 60° . Середины сторон прямоугольника последовательно соединены. Найдите периметр полученного четырёхугольника.
12. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба и, наоборот, середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.
13. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1 , которые пересекаются в точке M . В треугольнике AMB проведена средняя линия $PQ \parallel AB$. Докажите, что четырёхугольник A_1B_1PQ — параллелограмм.
14. Докажите, что вершины треугольника находятся на равном расстоянии от прямой, на которой лежит средняя линия этого треугольника.
15. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой. Как будет расположена прямая, равноудалённая от этих точек? Сколько существует таких прямых?
16. Постройте треугольник, если заданы середины его сторон (рис. 4.4).
17. Восстановите ромб по точке O пересечения его диагоналей и серединам E , F двух смежных сторон (рис. 4.5).

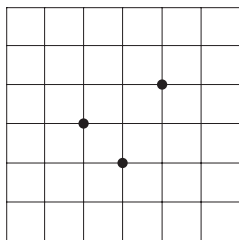


Рис. 4.4

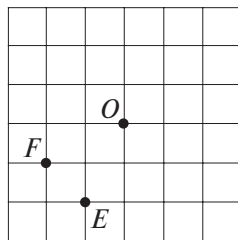


Рис. 4.5

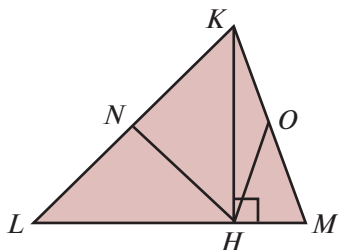


Рис. 4.6

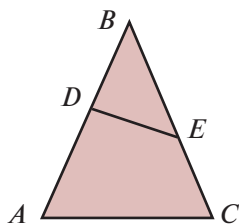


Рис. 4.7

- *18. В остроугольном треугольнике KLM точки N и O — середины сторон KL и KM соответственно, KH — высота треугольника (рис. 4.6). Докажите, что углы NHO и K равны.
- *19. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AD и BE (рис. 4.7). Докажите, что середина отрезка DE принадлежит средней линии треугольника ABC , параллельной его основанию.
- *20. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, делят друг друга пополам (рис. 4.8).
- *21. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD . Найдите угол, образованный продолжениями сторон AD и BC .
- *22. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AE = 4$. Середины сторон AB и CD , BC и ED соединены отрезками. Середины P и Q этих отрезков снова соединены отрезком (рис. 4.9). Найдите длину отрезка PQ .

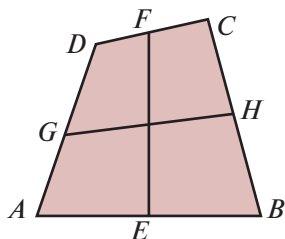


Рис. 4.8

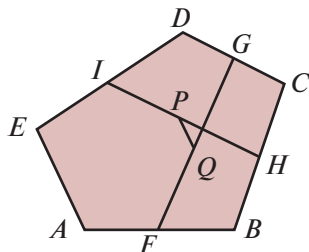


Рис. 4.9

§5 Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 5.1).

Параллельные стороны трапеции называются её **основаниями**, а непараллельные стороны — **боковыми сторонами**.

Высотой трапеции называется перпендикуляр, опущенный из точки одного основания этой трапеции на другое основание или его продолжение. На рисунке 5.1 показана высота DE трапеции $ABCD$.

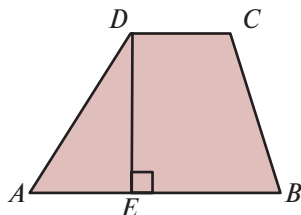
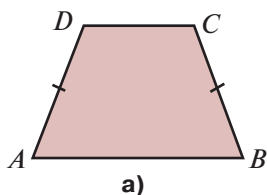
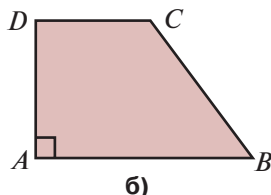


Рис. 5.1

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны (рис. 5.2, а). Трапеция называется **прямоугольной**, если один из её углов прямой (рис. 5.2, б).



а)



б)

Рис. 5.2

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон (рис. 5.3).

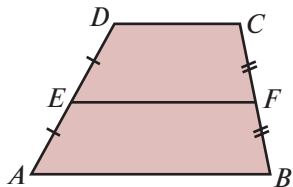


Рис. 5.3

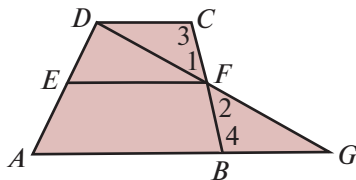


Рис. 5.4

ТЕОРЕМА

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть EF — средняя линия трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Проведём прямую DF и её точку пересечения с прямой AB обозначим G (рис. 5.4). Тре-

угольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства треугольников ($CF = BF$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы). Из равенства этих треугольников следует, что $DF = GF$, и, значит, EF — средняя линия треугольника AGD . Из теоремы о средней линии треугольника следует, что EF параллельна AB и $EF = \frac{1}{2} AG$. Так как $AB \parallel CD$, то EF будет параллельна обоим основаниям и, кроме того,

$$EF = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2}(AB + BG) = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Следствие. Прямая, проходящая через середину боковой стороны трапеции и параллельная основаниям, делит вторую боковую сторону пополам.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$), $AE = ED$, $EF \parallel AB$ (см. рис. 5.4). Так как средняя линия этой трапеции проходит через точку E и параллельна AB , то (в силу аксиомы параллельных) средняя линия содержится в EF и, значит, прямая EF делит вторую боковую сторону трапеции пополам.

ПРИМЕР 1. Могут ли два противоположных угла трапеции быть острыми?
Решение. Да, могут. Пример такой трапеции показан на рисунке 5.5.

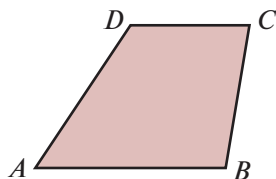


Рис. 5.5

ПРИМЕР 2. Отношение сторон равнобедренной трапеции равно $1:1:1:2$.
 Найдите углы этой трапеции.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = 2$, $BC = CD = AD = 1$. Обозначим через E середину стороны AB . В четырёхугольнике $AECD$ противоположные стороны AE и CD равны и параллельны. Значит, этот четырёхугольник — параллелограмм, и, следовательно, $EC = AD = 1$. В треугольнике EBC все стороны равны 1, поэтому $\angle EBC = 60^\circ$. Таким образом, в трапеции $ABCD$

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle B = 60^\circ, \\ \angle C &= \angle D = 120^\circ.\end{aligned}$$

Вопросы

1. Какой четырёхугольник называется трапецией?
2. Какие стороны трапеции называются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?
3. Какая трапеция называется равнобедренной; прямоугольной?
4. Что называется средней линией трапеции?
5. Сформулируйте теорему о средней линии трапеции.

Задачи

1. Могут ли углы, прилежащие к основанию трапеции, быть один острым, а другой тупым?
2. Может ли у трапеции быть: а) три прямых угла; б) три острых угла?
3. В четырёхугольнике диагонали равны. Будет ли он равнобедренной трапецией?
4. Через середину боковой стороны AB трапеции $ABCD$ проведена прямая, параллельная основанию. На какие части она рассечёт другую боковую сторону?
5. Определите вид четырёхугольника, который получится, если последовательно соединить отрезками середины сторон равнобедренной трапеции.
6. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 3 см (рис. 5.6), отсекает треугольник, периметр которого равен 15 см. Найдите периметр трапеции.
7. Основания трапеции относятся как 5:2, а их разность равна 18 см. Найдите среднюю линию трапеции.
8. Периметр трапеции равен 50 см, а сумма непараллельных сторон равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.
9. Средняя линия трапеции равна 30 см, а меньшее основание равно 20 см. Найдите большее основание.
10. Периметр равнобедренной трапеции равен 80 см, её средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону данной трапеции.
11. Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из её оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.
12. Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.
13. Чему равны углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противоположных углов равна 40° ?

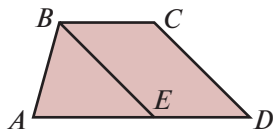


Рис. 5.6

14. Докажите, что у равнобедренной трапеции равны:
а) диагонали; б) углы при основаниях.
15. Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.
16. Докажите: 1) сумма боковых сторон трапеции больше разности оснований; 2) сумма диагоналей трапеции больше суммы оснований; 3) разность оснований больше разности боковых сторон; 4) диагонали трапеции точкой их пересечения не делятся пополам.
17. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длину 5 см и 2 см. Найдите среднюю линию этой трапеции.
18. В равнобедренной трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60° . Найдите меньшее основание.
19. Средняя линия трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 2 см. Найдите основания этой трапеции.
20. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.
21. Диагональ трапеции делит её среднюю линию на отрезки, равные a и b . Найдите основания трапеции.
22. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей равнобедренной трапеции и точку пересечения продолжения боковых сторон, перпендикулярна основаниям трапеции и делит их пополам (рис. 5.7).
- *23. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне (рис. 5.8). Найдите углы трапеции.

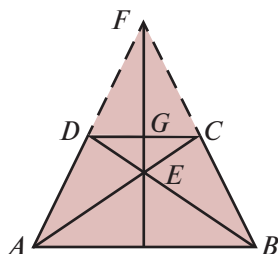


Рис. 5.7

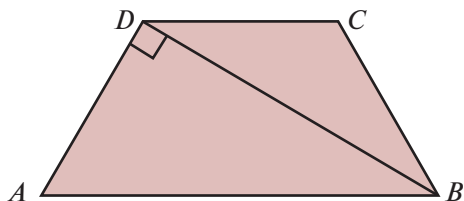


Рис. 5.8

- *24. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований (рис. 5.9).
- *25. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей?

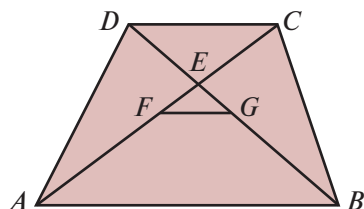


Рис. 5.9

§6 Теорема Фалеса

Следующая теорема, носящая имя Фалеса, является обобщением теорем о средних линиях треугольника и трапеции.

ТЕОРЕМА

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла; B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения параллельных прямых с другой стороной угла (рис. 6.1). Если $A_1A_2 = A_2A_3$, то A_2B_2 — средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$ и, следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$.

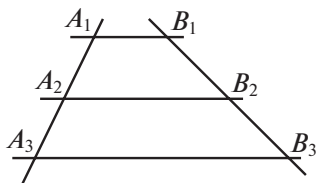


Рис. 6.1

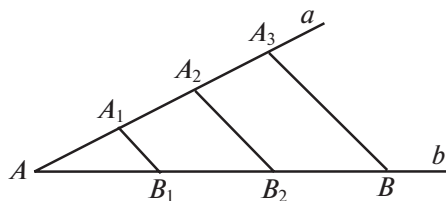


Рис. 6.2

Теорему Фалеса можно применять для деления отрезка на n равных частей. Например, разделим отрезок AB на три равные части. Через точку A проведём прямую a , отличную от AB , и отложим на ней равные отрезки $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ (рис. 6.2). Соединим отрезком точки A_3 и B . Через точки A_1, A_2 проведём прямые, параллельные A_3B , и их точки пересечения с отрезком AB обозначим B_1, B_2 . По теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$.

Отношением $\frac{AB}{CD}$ двух отрезков AB и CD называется число, показывающее, сколько раз отрезок CD и его части укладываются в отрезке AB . Если отрезок CD принять за единичный, то отношение $\frac{AB}{CD}$ будет равно длине отрезка AB . Отношение отрезков AB и CD обозначается также $AB : CD$.

Говорят, что отрезки AB , CD *пропорциональны* отрезкам A_1B_1 , C_1D_1 , если равны их отношения, т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = k$.

Число k называется *коэффициентом пропорциональности*.

ТЕОРЕМА

(О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Доказательство. Пусть стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B , C и E , F (см. рис. 6.3). Докажем, что имеет место равенство

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}.$$

Заметим, что отношение $\frac{AB}{AE}$ показывает, сколько раз отрезок AE и его части укладываются в отрезке AB , а отношение $\frac{AC}{AF}$ показывает, сколько раз отрезок AF и его части укладываются в отрезке AC . Теорема Фалеса позволяет установить соответствие между процессами измерения отрезков AB и AC . Действительно, прямые, параллельные BC , переводят равные отрезки на прямой AB в равные отрезки на прямой AC . Отрезок AE переходит в отрезок AF . Одна десятая часть отрезка AE переходит в одну десятую часть отрезка AF и т. д. Если отрезок AE целиком укладывается в отрезке AB n раз, то отрезок AF также будет целиком укладываться в отрезке AC n раз (на рисунке 6.3 $n = 3$). Если одна десятая часть отрезка AE целиком укладывается

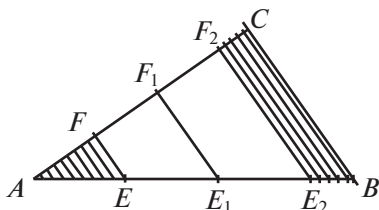


Рис. 6.3

ся в остатке E_2B m раз, то одна десятая часть отрезка AF также будет целиком укладываться в остатке F_2C m раз (на рисунке 6.3 $m = 4$) и т. д. Поэтому если длина отрезка AB (с единичным отрезком AE) выражается десятичной дробью $n, m \dots$, то длина отрезка AC (с единичным отрезком AF) будет выражаться той же самой десятичной дробью. Следовательно, $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$.

Следствие. Если стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и E, F (см. рис. 6.3 на с. 27), то имеет место равенство

$$\frac{EB}{AE} = \frac{FC}{AF}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$AB = AE + EB \text{ и } AC = AF + FC.$$

Подставляя эти выражения в равенство

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF},$$

получим равенство

$$1 + \frac{EB}{AE} = 1 + \frac{FC}{AF},$$

из которого следует и требуемое равенство.

ПРИМЕР 1. Стороны угла с вершиной O пересекаются двумя параллельными прямыми в точках A, B и C, D соответственно (рис. 6.4). Найдите OA , если $OB = 15$ см и $OC : OD = 2 : 5$.

Решение. По теореме о пропорциональных отрезках $OA : OB = 2 : 5$. Положим $OA = 2x$. Тогда $OB = 5x = 15$ см. Следовательно, $x = 3$ см, и, значит, $OA = 6$ см.

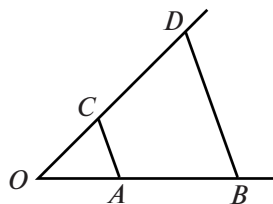


Рис. 6.4

ПРИМЕР 2. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противоположающую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Решение. Пусть CD биссектриса треугольника ABC (рис. 6.5). Докажем, что

$$AD : DB = AC : BC.$$

Проведём прямую BE , параллельную CD . В треугольнике BEC угол B равен углу E . Следовательно, $BC = EC$. По следствию из теоремы о пропорциональных отрезках

$$AD : DB = AC : CE = AC : BC.$$

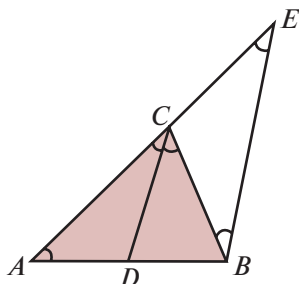


Рис. 6.5

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

По преданию, Фалес (около 624—547 гг. до н. э.) был родом из Милета — греческого города на берегу Эгейского моря, в котором он создал свою философскую школу. Фалес считается одним из первых учёных-геометров. Им были установлены первые теоремы геометрии как истины, обобщающие практические наблюдения и требующие логических доказательств. В частности, им были доказаны теоремы о равенстве вертикальных углов; о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; о том, что два треугольника равны, если они имеют по одной равной стороне и по два равных угла, прилежащих к этой стороне, и многие другие.

Вопросы

1. Сформулируйте теорему Фалеса.
2. Обобщением каких теорем является теорема Фалеса?
3. Как, используя теорему Фалеса, разделить отрезок на n равных частей?
4. Что называется отношением двух отрезков?
5. Какие отрезки называются пропорциональными?
6. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.

Задачи

1. Определите, пропорциональны ли пары отрезков a , b и c , d , если:
 - а) $a = 0,8$ см, $b = 0,3$ см, $c = 2,4$ см, $d = 0,9$ см;
 - б) $a = 50$ мм, $b = 6$ см, $c = 10$ см, $d = 18,5$ см.

2. Среди отрезков a, b, c, d, e выберите пары пропорциональных отрезков, если $a = 2$ см, $b = 17,5$ см, $c = 16$ см, $d = 35$ см, $e = 4$ см.
3. Даны три отрезка: a, b и c . Какой должна быть длина четвёртого отрезка d , чтобы из них можно было образовать две пары пропорциональных отрезков, если $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см и отрезок d больше каждого из этих отрезков?

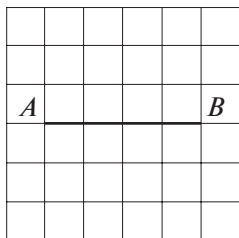


Рис. 6.6

4. Разделите данный отрезок на три равные части (рис. 6.6).
5. Разделите данный отрезок на пять равных частей (рис. 6.7).
6. На одной из сторон угла расположены два отрезка 3 см и 4 см. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Больший из отрезков равен 6 см (рис. 6.8). Чему равен другой отрезок?

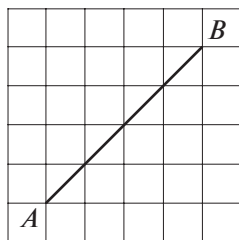


Рис. 6.7

7. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, B и C, D соответственно. Найдите: а) CD , если $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см; б) OC и OD , если $OA : OB = 3 : 5$ и $OD - OC = 8$ см; в) OA и OB , если $OC : CD = 2 : 3$ и $OA + OB = 14$ см.

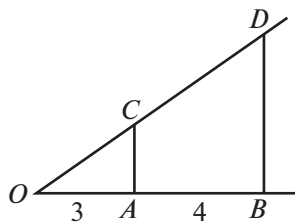


Рис. 6.8

8. Проекции двух сторон остроугольного треугольника ABC на прямую AC имеют длину 6 см и 4 см (рис. 6.9). Какую длину имеют проекции медиан этого треугольника на ту же прямую?

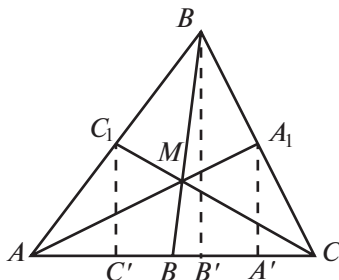


Рис. 6.9

9. Каждая из сторон треугольника разделена на три равных отрезка, и точки деления соединены отрезками. Найдите периметр образовавшейся при этом фигуры (рис. 6.10), если периметр исходного треугольника равен p .

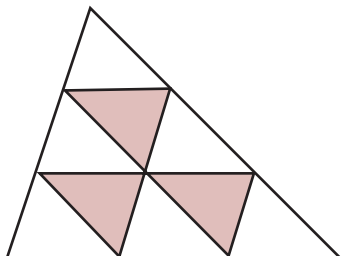


Рис. 6.10

10. Через вершины треугольника проведены прямые, параллельные его противоположным сторонам. Докажите, что стороны получившегося треугольника в два раза больше сторон исходного треугольника.
11. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E , причём $AD = \frac{3}{4}AB$, $AE = \frac{3}{4}AC$. Чему равен отрезок DE , если отрезок BC равен 5 см?
12. В треугольнике ABC сторона BC разделена на четыре равные части, и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне AB , равной 18 см (рис. 6.11). Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри треугольника.
13. Основания трапеции равны 14 см и 20 см. Одна из боковых сторон разделена на три равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции (рис. 6.12). Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри трапеции.

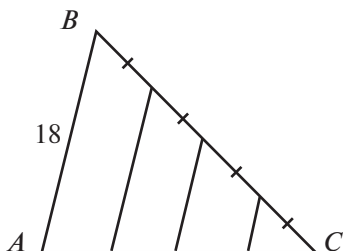


Рис. 6.11

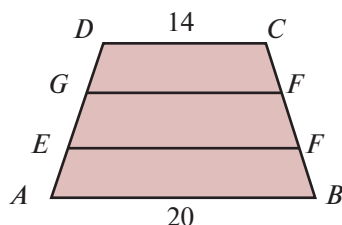


Рис. 6.12

- *14. Докажите, что биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в точке, расстояния от которой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника (рис. 6.13).

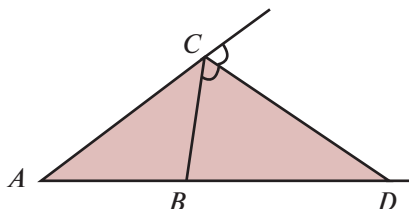


Рис. 6.13

- *15. Даны два отрезка длины a и b . Постройте отрезки длины ab , $\frac{a}{b}$.
- *16. Докажите, что если стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и E, F (см. рис. 6.3 на с. 27), то имеет место равенство

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AE}.$$

- *17. Докажите, что если луч, проведённый из вершины угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к лучу, то этот луч является биссектрисой угла треугольника.
- *18. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD . Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F (рис. 6.14). Найдите отношение $DF : FB$.
- *19. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон соответственно CD и AD . Отрезки AE и BF пересекаются в точке G (рис. 6.15). Найдите отношение $AG : GE$.

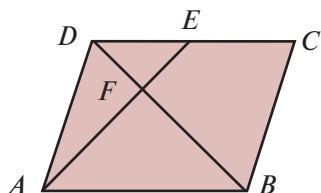


Рис. 6.14

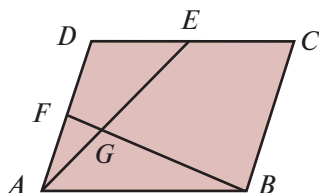


Рис. 6.15

- *20. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка D , $AB = BD$. Через неё и середину E стороны AC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке F (рис. 6.16). Найдите отношение $BF : FC$.

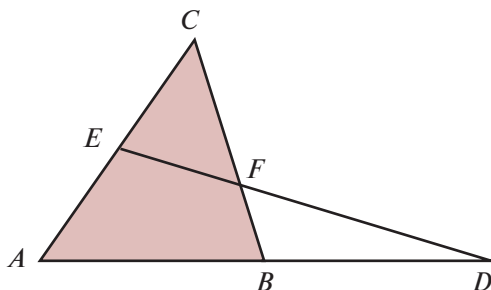


Рис. 6.16

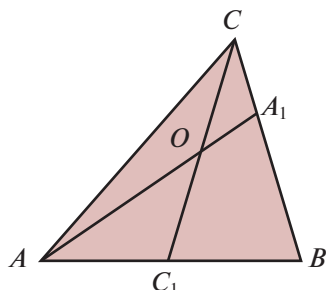


Рис. 6.17

- *21. Точка C_1 — середина стороны AB треугольника ABC . Точка O — середина отрезка CC_1 (рис. 6.17). В каком отношении делит прямая AO сторону BC ?
- *22. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении $1 : 2$. Точка B_1 делит сторону AC в отношении $2 : 1$. Прямая A_1B_1 пересекает продолжение стороны AB в точке C_1 (рис. 6.18). Найдите отношение $AB : BC_1$.

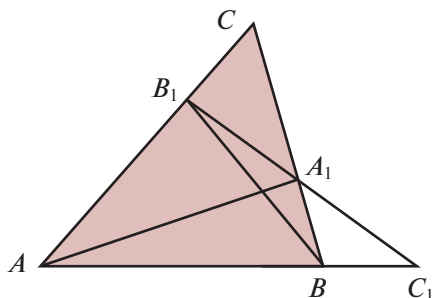


Рис. 6.18

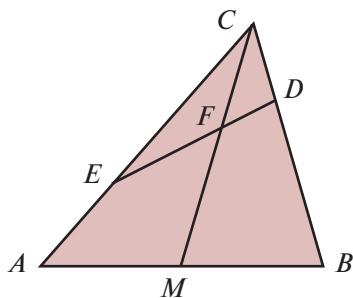


Рис. 6.19

- *23. Прямая пересекает стороны BC и AC треугольника ABC соответственно в точках D и E , причём $BD : DC = 2 : 1$, $AE : EC = 1 : 2$ (рис. 6.19). Найдите отношение, в котором эта прямая делит медиану CM .

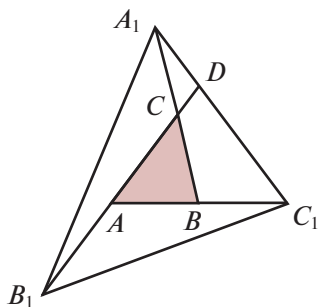


Рис. 6.20

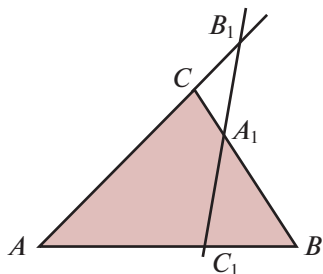


Рис. 6.21

- *24. На продолжениях сторон AB , BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$ (рис. 6.20). Найдите отношение, в котором прямая AB_1 делит сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.
- *25. Прямая пересекает стороны AB , BC и продолжения стороны AC треугольника ABC соответственно в точках C_1 , A_1 и B_1 (рис. 6.21). Докажите, что выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.



МНОГОУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ

§ 7 Углы, связанные с окружностью

Рассмотрим различные виды углов по отношению к данной окружности.

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральный** (рис. 7.1).

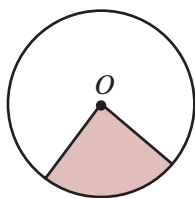


Рис. 7.1

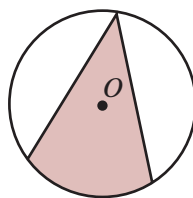


Рис. 7.2

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным** (рис. 7.2).

Каждый центральный и вписанный углы данной окружности определяют **дуги** окружности, которые состоят из точек окружности, принадлежащих этим углам. При этом говорят, что углы опираются на соответствующие дуги окружности.

ТЕОРЕМА

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Доказательство. Пусть угол ABC вписан в окружность с центром в точке O . Рассмотрим случай, когда одна из сторон угла, например AB , проходит через центр O окружности (рис. 7.3). Треугольник BOC равнобедренный, и, следовательно, $\angle B = \angle C$. Угол AOC — внешний угол треугольника BOC и, следовательно, равен сумме углов B и C . Поэтому $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$.

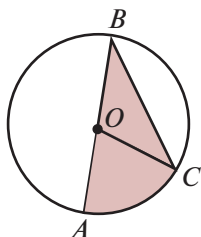


Рис. 7.3

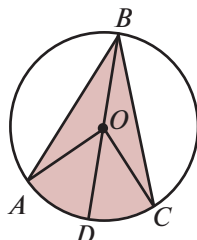


Рис. 7.4

В случае, если центр O окружности лежит внутри угла ABC (рис. 7.4), проведём диаметр BD и рассмотрим углы ABD и DBC . По доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD$, $\angle DBC = \frac{1}{2} \angle DOC$. Следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда центр O лежит вне угла ABC . Используйте рисунок 7.5.

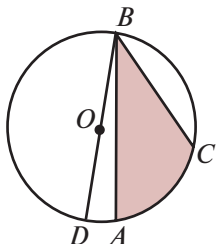


Рис. 7.5

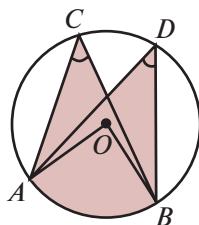


Рис. 7.6

Следствие. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны.

Доказательство. Действительно, если вписанные углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу AB (рис. 7.6), то у них один и тот же центральный угол AOB . По доказанной

теореме данные вписанные углы равны половине центрального угла AOB и, следовательно, равны между собой.

Дуги окружности измеряют соответствующими центральными углами. Поэтому теорему о вписанном угле можно переформулировать следующим образом: вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.

ПРИМЕР 1. В окружности проведена хорда, равная радиусу. Под каким углом видна эта хорда из: а) центра окружности; б) произвольной точки окружности, отличной от концов данной хорды?

Решение. Пусть AB — хорда окружности с центром в точке O , равная радиусу (рис. 7.7). Тогда треугольник AOB — равносторонний и, следовательно, центральный угол (угол, под которым видна хорда AB из центра окружности) равен 60° . Для произвольной точки C окружности, отличной от A и B , вписанный угол ACB (угол, под которым видна хорда AB из точки C) равен половине центрального, т. е. равен 30° .

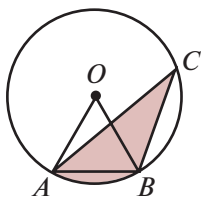


Рис. 7.7

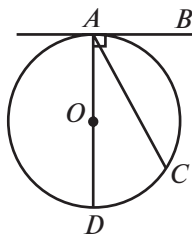


Рис. 7.8

ПРИМЕР 2. Используя рисунок 7.8, докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, проведённой через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключённой внутри этого угла.

Решение. Пусть AB — касательная к окружности с центром O , A — точка касания. Если хорда AD — диаметр, то угол BAD — прямой, следовательно, измеряется половиной дуги полуокружности. В остальных случаях для хорды AC имеем: $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$. Учитывая, что угол BAD измеряется половиной дуги ACD , а угол CAD измеряется половиной дуги CD , получаем, что угол BAC измеряется половиной дуги AC .

ТЕОРЕМА*

Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.

Доказательство. Пусть вершина C угла находится внутри окружности, а его стороны пересекают эту окружность в точках A и B (рис. 7.9). Обозначим D , E — точки пересечения с окружностью сторон вертикального с ним угла. Проведём хорду BD . Угол ACB является внешним углом треугольника BCD . Следовательно, $\angle ACB = \angle CDB + \angle CBD$. Вписанные углы с вершинами D и B измеряются половинами дуг соответственно $\cup AB$ и $\cup DE$. Следовательно, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup DE)$.

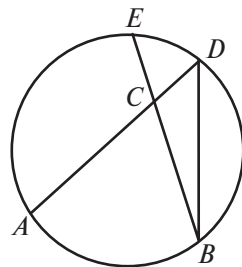


Рис. 7.9

Следствие. Величина угла с вершиной внутри окружности больше половины величины дуги, на которую опирается этот угол.

ТЕОРЕМА*

Угол с вершиной вне окружности, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключённых внутри этого угла.

Доказательство. Пусть вершина C угла находится вне окружности, а его стороны пересекают эту окружность соответственно в точках A , D и B , E (рис. 7.10). Проведём хорду BD . Угол ADB является внешним углом треугольника BCD . Следовательно, $\angle ACB = \angle ADB - \angle CBD$. Вписанные углы с вершинами D и B измеряются половинами дуг (соответственно $\cup AB$ и $\cup DE$). Следовательно, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\cup AB - \cup DE)$.

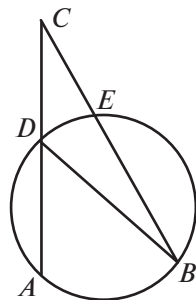


Рис. 7.10

Следствие. Величина угла с вершиной вне окружности меньше половины величины большей дуги, заключённой внутри этого угла.

Вопросы

1. Какой угол называется центральным?
2. Какой угол называется вписанным?
3. Что называется дугой окружности?
4. Как связаны между собой вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
5. Чем измеряются дуги окружности?

Задачи

1. Какие из углов на рисунке 7.11 являются вписанными? На какую дугу опирается каждый из вписанных углов?
2. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности?
3. Центральный угол на 35° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Найдите каждый из этих углов.
4. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет:
 - а) $\frac{1}{6}$ окружности; б) 10 % окружности.

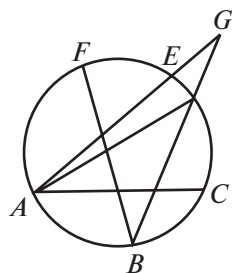
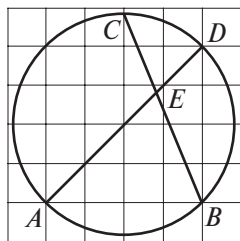
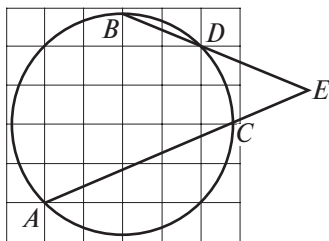


Рис. 7.11

5. Найдите величину угла AEB (рис. 7.12).



а)



б)

Рис. 7.12

6. Найдите геометрическое место вершин B прямоугольных треугольников ABC с данной гипотенузой AC .
7. Для данных точек A и B найдите геометрическое место точек C , для которых угол ACB : а) острый; б) тупой.
8. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне окружности.

9. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 4 : 5. Под какими углами видна эта хорда из точек окружности?
10. Докажите, что дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, имеют одинаковую градусную меру (рис. 7.13).
11. Точки A, B, C , расположенные на окружности, делят эту окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 7. Найдите углы треугольника ABC .
12. Окружность разделена точками на четыре части, градусные величины которых относятся как 3 : 7 : 5 : 3. Найдите углы многоугольника, полученного последовательным соединением точек деления.
13. Через концы дуги в 60° проведены касательные. Найдите угол между ними.
14. Хорда AB стягивает дугу окружности в 44° . Найдите углы, которые образует эта хорда с касательными к окружности, проведёнными через её концы.
15. Из точки пересечения двух окружностей проведены их диаметры (рис. 7.14). Докажите, что другие концы диаметров и вторая точка пересечения окружностей принадлежат одной прямой.
16. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке A , проведена общая касательная BC (B и C — точки касания) (рис. 7.15). Докажите, что угол BAC — прямой.

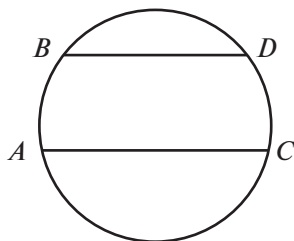


Рис. 7.13

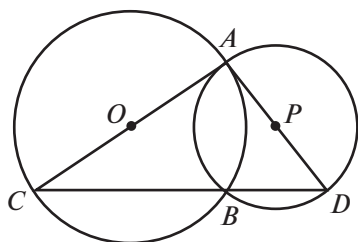


Рис. 7.14

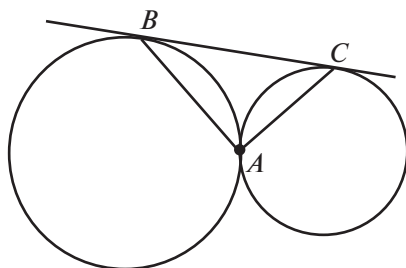


Рис. 7.15

17. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведена секущая, которая делит эти окружности на четыре дуги (рис. 7.16). Докажите, что пары дуг, расположенные по разные стороны секущей и принадлежащие разным окружностям, имеют одинаковые градусные величины.

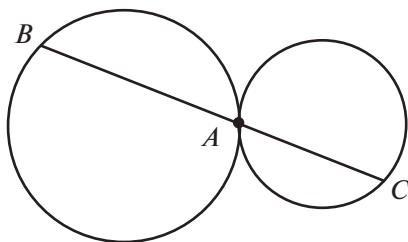


Рис. 7.16

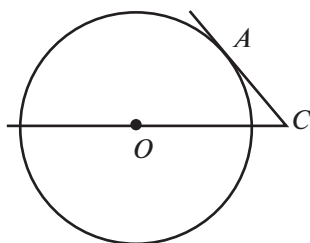


Рис. 7.17

- *18. Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности, сторона CO проходит через центр окружности, а меньшая дуга окружности, заключенная внутри этого угла, равна 40° (рис. 7.17).
19. В угол ABC вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как $5 : 4$. Найдите величину угла ABC .
- *20. Окружность разделена точками A, B, C на дуги, градусные величины которых относятся как $11 : 3 : 4$. Через точки A, B, C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.
21. Дуги AB и DE окружности составляют соответственно 90° и 50° . Найдите угол ACB , образованный пересекающимися хордами AD и BE (рис. 7.18).
22. Угол ACB , образованный пересекающимися хордами AD и BE окружности, равен 86° (рис. 7.18). Вписанный угол ADB равен 55° . Найдите вписанный угол DBE .

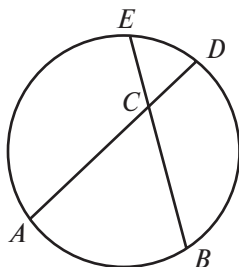


Рис. 7.18

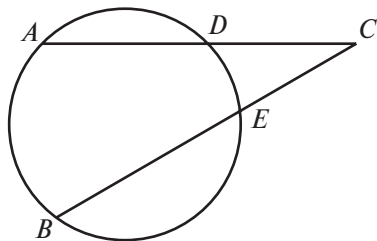


Рис. 7.19

23. Стороны угла с вершиной C пересекают окружность соответственно в точках A, D и B, E (рис. 7.19). Дуги AB и DE составляют соответственно 90° и 40° . Найдите величину угла ACB .
24. Угол ACB равен 32° . Градусная величина дуги AB окружности равна 104° . Найдите угол DAE (рис. 7.19).
25. Угол ACB равен 38° . Градусная величина дуги DE окружности равна 40° (рис. 7.19). Найдите величину угла ADB .
- *26. Докажите, что угол с вершиной, расположенной вне окружности, стороны которого касаются этой окружности, измеряется полуразностью дуг окружности, заключённых внутри данного угла.
27. Найдите угол ACB , если его стороны CA и CB касаются окружности в точках A и B , а меньшая дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 132° .
28. Угол ACB равен 52° . Его стороны CA и CB касаются окружности. Найдите градусную величину меньшей дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла.
29. Найдите угол ACB , если его стороны CA и CB касаются окружности, а большая дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 230° .
30. Угол ACB равен 48° . Его стороны CA и CB касаются окружности. Найдите градусную величину большей дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла.
31. В угол ACB вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как $5 : 4$. Найдите величину угла ACB .
- *32. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, т. е. таких точек C , для которых угол ACB равен данному углу.

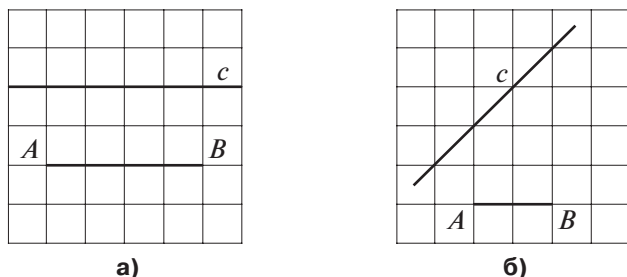


Рис. 7.20

- *33. На прямой c отметьте точку C , из которой отрезок AB виден под наибольшим углом (рис. 7.20). Найдите величину этого угла.

§8 Многоугольники, вписанные в окружность

Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется **описанной** около многоугольника (рис. 8.1).

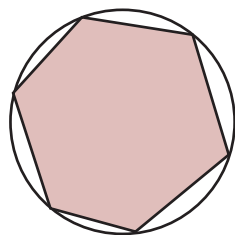


Рис. 8.1

ТЕОРЕМА

Около всякого треугольника можно описать окружность. Её центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC . К сторонам AB и AC проведём серединные перпендикуляры c и b соответственно (рис. 8.2). Докажем, что точка O их пересечения является центром описанной окружности. Для этого достаточно проверить, что выполняются равенства $OA = OB = OC$. Действительно, так как точка O принадлежит серединному перпендикуляру c отрезка AB , то она одинаково удалена от вершин A и B , т. е. $OA = OB$. Так как точка O принадлежит серединному перпендикуляру b отрезка AC , то она одинаково удалена от вершин A и C , т. е. $OA = OC$. Следовательно,

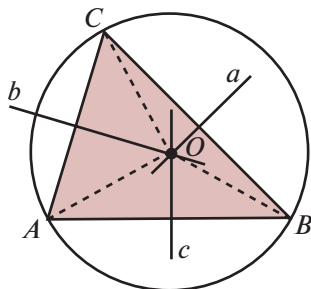


Рис. 8.2

точка O одинаково удалена от вершин A, B, C треугольника ABC , т. е. $OA = OB = OC$. Заметим, что из равенства $OB = OC$ следует, что точка O принадлежит серединному перпендикуляру a к стороне BC . Таким образом, все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке O . Окружность с центром в этой точке и радиусом $R = OA = OB = OC$ будет искомой описанной окружностью.

(*) Используя аксиому параллельных, докажем, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника действительно пересекаются. Пусть ABC — треугольник, c и b — серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC (рис. 8.3). Предположим, что прямые b и c не пересекаются, а значит, параллельны. Прямая AB перпендикулярна прямой c . Прямая AC перпендикулярна прямой b , а значит, и параллельной ей прямой c . Таким образом, прямые AB и AC перпендикулярны одной прямой c . Поэтому они должны или быть параллельными, или совпадать. Но эти прямые пересекаются. Следовательно, неверным было наше предположение о параллельности прямых b и c . Значит, они пересекаются.

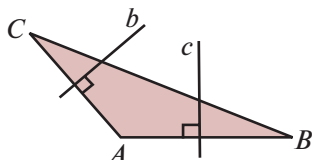


Рис. 8.3

ТЕОРЕМА

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

Доказательство. Пусть $A_1...A_n$ — правильный n -угольник (рис. 8.4). Опишем около треугольника $A_1A_2A_3$ окружность с центром в точке O и радиусом R . Докажем, что следующая вершина A_4 также принадлежит этой окружности. Для этого достаточно проверить, что $OA_4 = R$. Имеем OA_1A_2 и OA_2A_3 — равные равнобедренные треугольники. Поэтому их углы при основаниях равны и составляют половину угла данного n -угольника. Значит, угол OA_3A_4 также составляет половину угла n -угольника. Треугольники OA_3A_2 и OA_3A_4 равны по двум

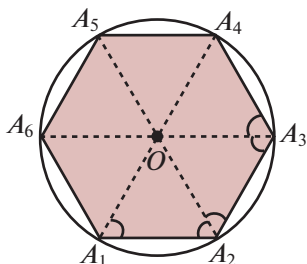


Рис. 8.4

сторонам и углу между ними ($A_2A_3 = A_3A_4$, OA_3 — общая, $\angle OA_3A_2 = \angle OA_3A_4$). Следовательно, $OA_2 = OA_4 = R$. Аналогично показывается, что следующие вершины A_5 и т. д. принадлежат данной окружности. Таким образом, эта окружность является искомой описанной окружностью. Её центром является точка пересечения биссектрис углов многоугольника.

ПРИМЕР 1. Два угла треугольника равны 60° и 40° . Под какими углами видны его стороны из центра описанной около него окружности?

Решение. Третий угол треугольника равен $180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$. Углы треугольника являются вписанными, а искомые углы — центральными. Поэтому они равны соответственно 120° , 80° и 160° .

ПРИМЕР 2. Докажите, что если около четырёхугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° .

Решение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, около которого описана окружность (рис. 8.5). Докажем, что $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг ADC и ABC , которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной дуги окружности, т. е. их сумма равна 180° .

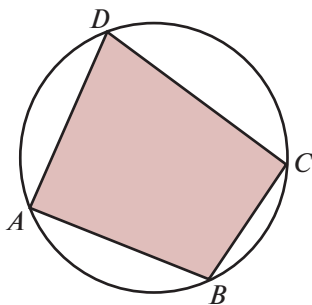


Рис. 8.5

Утверждение, доказанное в примере 2, называется свойством вписанного четырёхугольника.

Вопросы

1. Какой многоугольник называется вписанным в окружность?
2. Какая окружность называется описанной около многоугольника?
3. Около всякого ли треугольника можно описать окружность?
4. Где находится центр описанной около треугольника окружности?
5. Можно ли описать окружность около правильного многоугольника? Что является центром описанной окружности?

Задачи

1. Нарисуйте треугольники, вписанные в данную окружность.
2. Для данных треугольников (рис. 8.6) найдите центры описанных окружностей и постройте их.

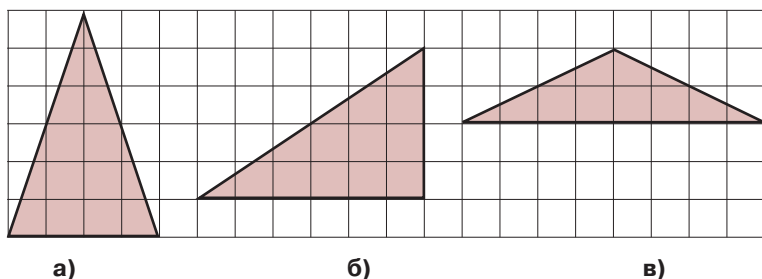


Рис. 8.6

3. Постройте окружность, проходящую через три данные точки (рис. 8.7).

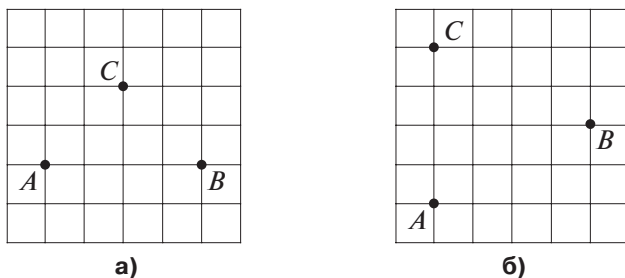


Рис. 8.7

4. Может ли центр описанной около треугольника окружности находиться: а) внутри треугольника; б) на стороне треугольника; в) вне этого треугольника? Приведите примеры.
5. Где находится центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника?
6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите радиус описанной окружности.
7. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в $24^\circ 51'$.
8. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, если его основание стягивает дугу в 100° .

9. Углы треугольника равны 30° , 65° и 85° . Какая из сторон треугольника расположена дальше от центра описанной окружности?
10. Нарисуйте четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник, вписанные в данные окружности.
11. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиусом 6 см.
12. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиусом R ?
13. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е) прямоугольной трапеции?
14. Можно ли описать окружность около четырёхугольника, углы которого последовательно равны: а) 70° , 130° , 110° , 50° ; б) 90° , 90° , 60° , 120° ; в) 45° , 75° , 135° , 105° ; г) 40° , 125° , 55° , 140° ?
15. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 80° и 60° . Найдите два других угла четырёхугольника.
16. Углы A , B и C четырёхугольника $ABCD$ относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите угол D , если около данного четырёхугольника можно описать окружность.
17. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см. Угол между диагоналями равен 60° . Найдите радиус описанной окружности.
18. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 20 см, средняя линия 5 см. Найдите боковые стороны трапеции.
19. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию. Угол при основании равен 60° . Где расположен центр описанной около данной трапеции окружности?
20. Одна сторона остроугольного треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне.
21. Угол C треугольника ABC , вписанного в окружность радиусом 3, равен 30° . Найдите сторону AB этого треугольника, противолежащую данному углу.
22. Одна сторона тупоугольного треугольника равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне.

23. Сторона AB треугольника ABC равна 2. Противлежащий ей угол C равен 150° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
24. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 105° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABD .
- *25. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 (рис. 8.8). Докажите, что углы BAC и B_1A_1C равны.

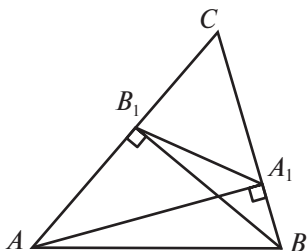


Рис. 8.8

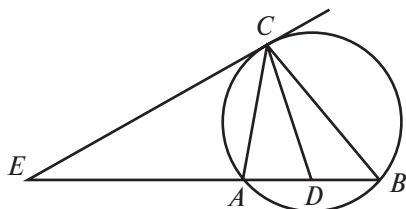


Рис. 8.9

- *26. Через вершину C треугольника ABC проведена касательная к описанной окружности. Она пересекает прямую AB в точке E . CD — биссектриса (рис. 8.9). Докажите, что $EC = ED$.
- *27. Докажите, что если около пятиугольника можно описать окружность, то сумма любых двух его несоседних углов больше 180° .
- *28. Докажите, что если около шестиугольника можно описать окружность, то сумма любых трёх его несоседних углов равна 360° .

§9 Многоугольники, описанные около окружности

Многоугольник называется **описанным** около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Сама окружность при этом называется **вписанной** в многоугольник (рис. 9.1).

ТЕОРЕМА

В любой треугольник можно вписать окружность. Её центром будет точка пересечения биссектрис этого треугольника.

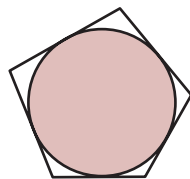


Рис. 9.1

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и из его вершин A и B проведём биссектрисы a и b соответственно (рис. 9.2). Докажем, что точка O их пересечения является центром вписанной окружности. Для этого достаточно проверить равенство перпендикуляров OD , OE и OF , опущенных из точки O на стороны треугольника ABC , или, что то же самое, что точка O одинаково удалена от сторон треугольника ABC . Действительно, так как точка O принадлежит биссектрисе a , то она одинаково удалена от сторон AB и AC . Так как точка O принадлежит биссектрисе b , то она одинаково удалена от сторон AB и BC . Значит, точка O одинаково удалена от всех сторон треугольника ABC . Заметим, что из того, что точка O одинаково удалена от сторон BC и AC , следует, что она принадлежит биссектрисе c угла C , т. е. все три биссектрисы пересекаются в одной точке O . Окружность с центром в этой точке и радиусом $r = OD = OE = OF$ будет искомой вписанной окружностью.

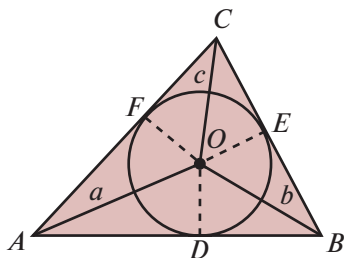


Рис. 9.2

ТЕОРЕМА

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть $A_1...A_n$ — правильный n -угольник. Как было доказано в предыдущем пункте, около этого многоугольника можно описать окружность и её центром O является точка пересечения биссектрис углов многоугольника. Точка пересечения биссектрис одинаково удалена от всех сторон многоугольника. Обозначим это расстояние через r . Окружность с центром в точке O и радиусом r будет касаться всех сторон многоугольника, т. е. будет искомой вписанной окружностью (рис. 9.3).

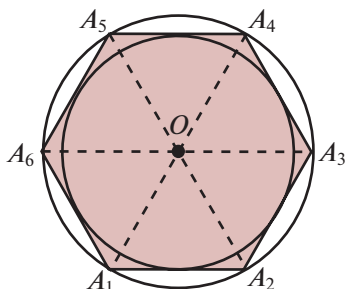


Рис. 9.3

ПРИМЕР 1. Окружность, вписанная в треугольник ABC , делит сторону AB в точке касания D на два отрезка: $AD = 5$ см и $DB = 6$ см. Определите периметр треугольника ABC , если известно, что $BC = 10$ см.

Решение. Пусть D, E, F — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 9.4). Тогда $BE = DB = 6$ см и, следовательно, $CE = 10 - 6 = 4$ (см). $CF = CE = 4$ см, $AF = AD = 5$ см. Отсюда $AC = AF + CF = 9$ см. Таким образом, периметр данного треугольника равен $11 + 10 + 9 = 30$ (см).

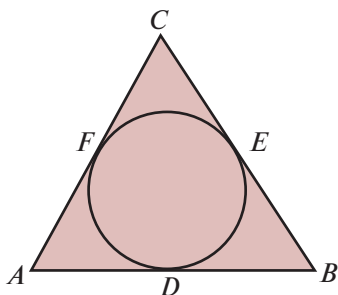


Рис. 9.4

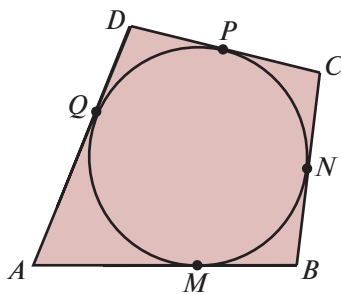


Рис. 9.5

ПРИМЕР 2. Докажите, что если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

Решение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, в который вписана окружность, касающаяся его сторон в точках M, N, P, Q (рис. 9.5). Докажем, что $AB + CD = BC + AD$. Действительно, из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, следуют равенства: $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Поэтому $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC = AD + BC$.

Утверждение, доказанное в примере 2, называется свойством описанного четырёхугольника.

Вопросы

1. Какой многоугольник называется описанным около окружности?
2. Какая окружность называется вписанной в многоугольник?
3. Во всякий ли треугольник можно вписать окружность?
4. Где находится центр вписанной в треугольник окружности?
5. Можно ли вписать окружность в правильный многоугольник?

Задачи

1. Можно ли вписать окружность в: а) остроугольный треугольник; б) прямоугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник?
2. Нарисуйте треугольники, описанные около данной окружности.
3. Может ли центр вписанной в треугольник окружности находиться вне этого треугольника?
4. Какой вид имеет треугольник, если: а) центры вписанной и описанной около треугольника окружностей совпадают; б) центр вписанной в него окружности принадлежит одной из его высот?
5. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, которые равны 4 см и 3 см, считая от основания. Определите периметр треугольника.
6. К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные (рис. 9.6). Периметры отсечённых треугольников равны p_1 , p_2 , p_3 . Найдите периметр данного треугольника.
7. В равнобедренном треугольнике боковые стороны делятся точками касания вписанной в треугольник окружности в отношении $7:5$, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника, если его основание равно 10 см.
8. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, описанный около данной окружности.
9. Докажите, что в треугольник можно вписать единственную окружность.
10. Стороны прямоугольного треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите радиус вписанной в него окружности.
11. Постройте правильные треугольник, четырёхугольник и шестиугольник, описанные около данных окружностей.

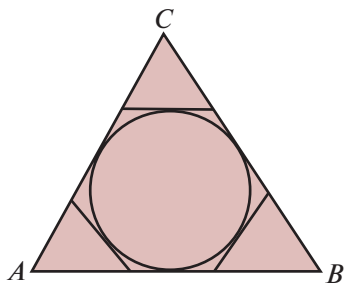


Рис. 9.6

12. Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) квадрат; д) дельтоид (рис. 9.7)?
13. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание и расположены по разные стороны от него. Можно ли в образованный ими выпуклый четырёхугольник вписать окружность?
14. Какой вид имеет четырёхугольник, если центр вписанной в него окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей?
15. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 18 см. Найдите её среднюю линию.
16. В трапецию, периметр которой равен 56 см, вписана окружность. Три последовательные стороны трапеции относятся как $2 : 7 : 12$. Найдите стороны трапеции.
17. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 1 см и 3 см. Найдите периметр и среднюю линию трапеции.
18. Сторона ромба равна 4 см, острый угол — 30° . Найдите радиус вписанной окружности.
19. Три последовательные стороны четырёхугольника, в который можно вписать окружность, равны 6 см, 8 см и 9 см. Найдите четвёртую сторону и периметр этого четырёхугольника.
20. Противоположные стороны четырёхугольника, описанного около окружности, равны 7 см и 10 см. Можно ли по этим данным найти периметр четырёхугольника?
21. Чему равна сторона правильного четырёхугольника, описанного около окружности радиуса R ?
- *22. Докажите, что если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.
- *23. Приведите пример невыпуклого четырёхугольника, суммы противоположных сторон которого равны, но в который нельзя вписать окружность.
24. Докажите, что если в равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$) вписана окружность, то её боковые стороны AD и BC равны средней линии EF .

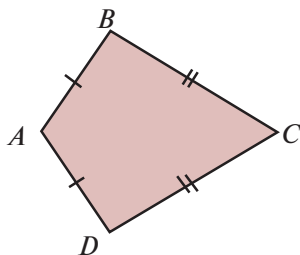


Рис. 9.7

25. Докажите, что если в трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$) вписана окружность с центром O , то углы AOD и BOC равны 90° .
26. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из оставшихся сторон.
- *27. Докажите, что если в пятиугольник можно вписать окружность, то сумма любых двух его несоседних сторон меньше суммы оставшихся сторон.
- *28. Докажите, что если в шестиугольник можно вписать окружность, то сумма любых трёх его несоседних сторон равна сумме оставшихся сторон.
- *29. В шестиугольнике $ABCDEF$, описанном около окружности, $AB = 3$, $CD = 4$, $EF = 2$. Найдите периметр этого шестиугольника.

§10 Замечательные точки в треугольнике

К числу замечательных точек в треугольнике относятся:

- точка пересечения биссектрис;
- точка пересечения серединных перпендикуляров сторон;
- точка пересечения высот или их продолжений;
- точка пересечения медиан.

Рассмотрим каждую из этих точек в отдельности. Как мы видели ранее, три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.

Также было доказано, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной окружности.

Рассмотрим оставшиеся точки.

ТЕОРЕМА

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (**ортоцентр** треугольника).

Доказательство. Через вершины данного треугольника ABC проведём прямые, параллельные противоположным сторонам (рис. 10.1). Эти прямые образуют новый треугольник DEF , для которого A , B и C служат серединами сторон. В самом деле,

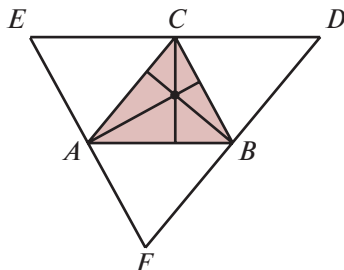


Рис. 10.1

$CE = AB$ и $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограммов $AECB$ и $ACDB$. Следовательно, $EC = CD$. Точно так же $FB = BD$, $FA = AE$. Отсюда следует, что высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами треугольника DEF , а поэтому пересекаются в одной точке.

Заметим, что высоты треугольника могут не пересекаться. На рисунке 10.2 изображён тупоугольный треугольник ABC , в котором продолжения высот AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке H , а сами высоты не пересекаются.

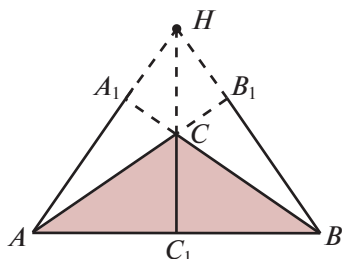


Рис. 10.2

ТЕОРЕМА

Медианы треугольника пересекаются в одной точке (*центроид* треугольника) и делятся в этой точке в отношении $2:1$, считая от вершин.

Доказательство. В треугольнике ABC проведем медианы AD и CE и их точку пересечения обозначим через M (рис. 10.3). Через точку E проведем прямую, параллельную прямой AD , и обозначим F её точку пересечения с отрезком BC . Отрезок EF будет средней линией треугольника ABD . Следовательно, $BF = DF$. Так как $BD = CD$, то $CD:DF = 2:1$. Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что $CM:ME = 2:1$. Таким образом, медиана AD делит медиану CE в точке M в отношении $2:1$. Аналогичным образом доказывается, что медиана, проведенная из вершины B , делит медиану CE в отношении $2:1$. Следовательно, эта медиана также будет проходить через точку M . Значит, все три медианы будут пересекаться в одной точке и делиться в этой точке в отношении $2:1$.

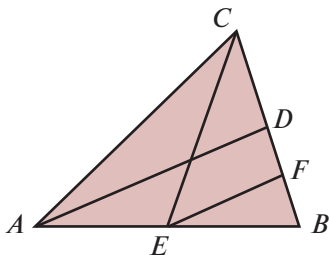


Рис. 10.3

Заметим, что в физике центроид треугольника называют центром масс.

ПРИМЕР 1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 (рис. 10.4, а). Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на высотах треугольника ABC .

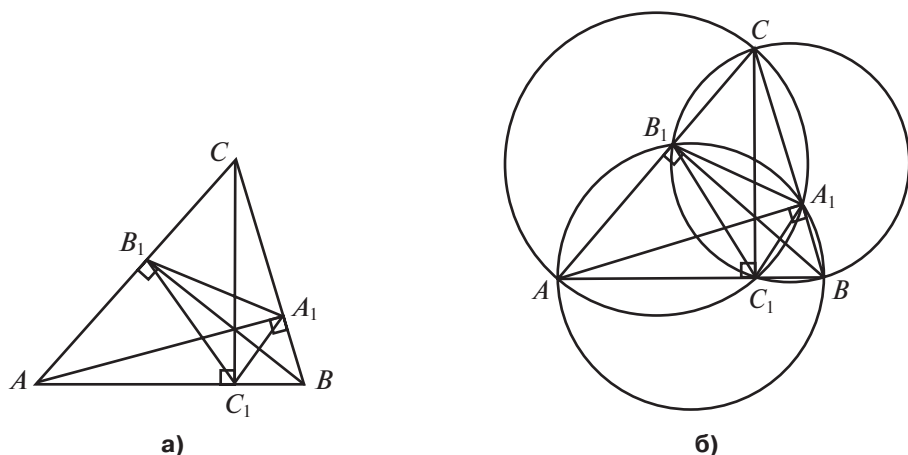


Рис. 10.4

Решение. На сторонах треугольника ABC , как на диаметрах, построим окружности (см. рис. 10.4, б). Они будут проходить через основания высот A_1 , B_1 , C_1 .

Докажем равенство углов A_1C_1C и B_1C_1C . Вписанные углы A_1C_1C и A_1AC опираются на одну дугу, значит, они равны. Вписанные углы $A_1C_1B_1$ и A_1BB_1 опираются на одну дугу, значит, они равны. Вписанные углы B_1BC и B_1C_1C опираются на одну дугу, значит, они равны. Из равенства всех этих углов следует равенство углов A_1C_1C и B_1C_1C . Аналогичным образом доказывается равенство углов A_1B_1B и C_1B_1B , B_1A_1A и C_1A_1A .

ПРИМЕР 2. В треугольнике соединены середины его сторон.

Докажите, что точка пересечения медиан полученного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC точки A_1 , B_1 , C_1 — середины соответствующих сторон (рис. 10.5), A_2 , B_2 , C_2 — точки пересечения медиан треугольника ABC со сторонами треугольника $A_1B_1C_1$. Четырёхугольник $AC_1A_1B_1$ — параллелограмм. Следовательно, его диа-

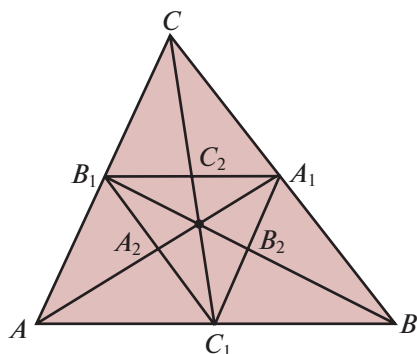


Рис. 10.5

гонали в точке пересечения делятся пополам, и, значит, $B_1A_2 = A_2C_1$, т. е. A_1A_2 — медиана треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что B_1B_2 , C_1C_2 — медианы треугольника $A_1B_1C_1$. Таким образом, точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC .

Вопросы

1. Какие точки относятся к числу замечательных точек в треугольнике?
2. Всегда ли высоты треугольника пересекаются?
3. Какой замечательной точкой является центр вписанной в треугольник окружности?
4. Какой замечательной точкой является центр описанной около треугольника окружности?
5. В каком отношении делятся медианы треугольника точкой их пересечения?

Задачи

1. Может ли точка пересечения биссектрис треугольника находиться вне этого треугольника?
2. Может ли точка пересечения медиан треугольника находиться вне этого треугольника?
3. Может ли точка пересечения высот или их продолжений находиться вне этого треугольника?
4. Может ли вершина треугольника быть точкой пересечения его высот?
5. Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров сторон для: а) прямоугольного треугольника; б) остроугольного треугольника; в) тупоугольного треугольника?
6. Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой?
7. К какой из сторон треугольника ближе расположен центр описанной окружности?
8. К какой из вершин треугольника ближе расположен центр вписанной окружности?
9. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 10° и 100° . Найдите углы BOC и COA , где O — центр описанной окружности.
10. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и DCA принадлежат диагонали BD и делят её на три равные части.

11. Разделите данный отрезок на три равные части, не пользуясь построением параллельных прямых.
12. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что A — точка пересечения продолжения высот треугольника BHC .
- *13. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AHB , BHC , CHA , равны между собой.
14. Докажите, что если какие-нибудь из замечательных точек треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний.
15. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите углы ACO и BCO , если $\angle AOB = 136^\circ$.
16. Выясните, для каких четырёхугольников биссектрисы всех углов пересекаются в одной точке.
17. Пусть CC_1 , CC_2 , CC_3 — соответственно высота, биссектриса и медиана, выходящие из вершины C треугольника ABC . Луч CC_2 пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D . Докажите, что DC_3 параллельна CC_1 .
18. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Луч AO пересекает описанную окружность в точке D . Докажите, что $OD = DB = DC$.
19. Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что O является центром окружности, касающейся прямых AB , BC и AC .
- *20. Окружность называется **вневыписанной** по отношению к данному треугольнику, если она касается одной стороны и продолжения двух других сторон этого треугольника (рис. 10.6). Докажите, что для любого треугольника существуют вневыписанные окружности. Сколько таких окружностей? Где находятся их центры?
- *21. Для данного треугольника постройте вневыписанные окружности.
- *22. Пусть в треугольнике ABC точки A_1 , B_1 , C_1 обозначают сере-

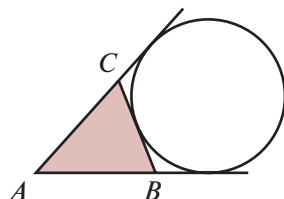


Рис. 10.6

дины сторон, противоположных соответствующим вершинам; H — точка пересечения высот треугольника; A_2, B_2, C_2 — основания высот, опущенных из соответствующих вершин; A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH и CH (рис. 10.7). Докажите, что точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ принадлежат одной окружности, называемой **окружностью девяти точек**, или **окружностью Эйлера**.

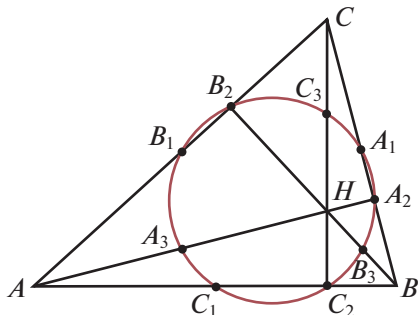


Рис. 10.7

- *23. Для треугольника ABC , углы которого меньше 120° , укажите способ построения точки T , из которой стороны этого треугольника видны под углом 120° . Эта точка называется **точкой Торричелли** (рис. 10.8).

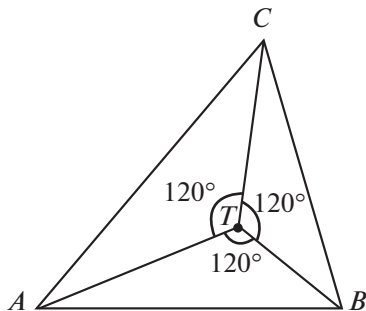


Рис. 10.8

- *24. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности противоположных сторон этого треугольника, пересекаются в одной точке, называемой **точкой Жергонна** (рис. 10.9 на с. 59).

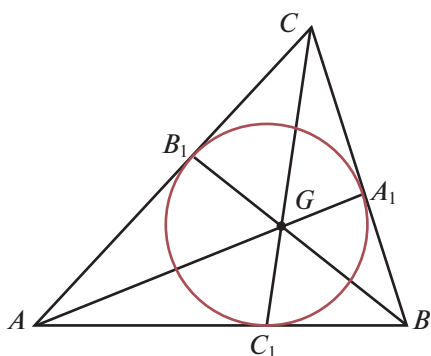


Рис. 10.9

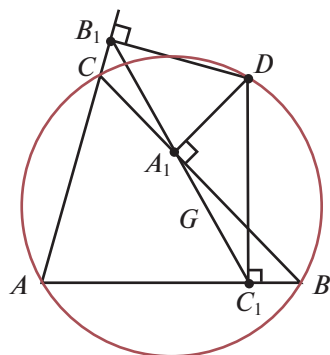


Рис. 10.10

- *25. Докажите, что для произвольного треугольника основания перпендикуляров, опущенных из любой точки описанной окружности на стороны этого треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, называемой *прямой Симсона* (рис. 10.10).

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 11 Подобие треугольников. Первый признак подобия треугольников

Равные фигуры можно представлять себе как фигуры, имеющие равные размеры. Помимо этого, встречаются фигуры, имеющие хотя и разные размеры, но одинаковую форму. Например, все окружности имеют одинаковую форму, все квадраты имеют одинаковую форму, все равносторонние треугольники имеют одинаковую форму и т. д. Такие фигуры в геометрии принято называть подобными. Рассмотрим сначала подобные треугольники.

Два треугольника называются *подобными*, если углы одного соответственно равны углам другого и соответствующие стороны пропорциональны. Коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом подобия*.

Таким образом, треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$, где k — коэффициент подобия (рис. 11.1).

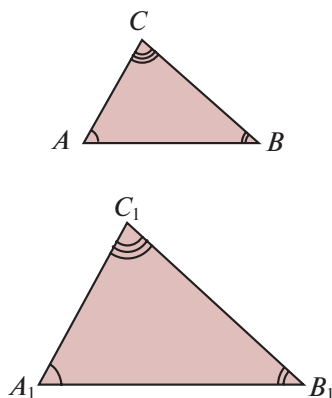


Рис. 11.1

Для установления подобия треугольников, оказывается, не обязательно проверять все перечисленные выше равенства, а достаточно проверить только некоторые из них. Для этого служат признаки подобия треугольников.

ТЕОРЕМА

(Первый признак подобия.) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тогда и $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

Отложим на стороне A_1B_1 отрезок A_1B' , равный AB , и проведём прямую $B'C'$, параллельную стороне B_1C_1 (рис. 11.2). Треугольники ABC и $A_1B'C'$ равны (по второму признаку равенства треугольников). По теореме о пропорциональных отрезках имеет место

$$\frac{A_1B_1}{A_1B'} = \frac{A_1C_1}{A_1C'}.$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

Аналогичным образом доказывается, что имеет место равенство $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$. Следовательно, треугольники подобны.

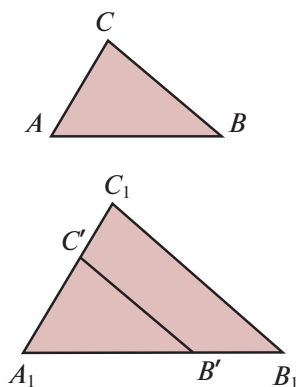


Рис. 11.2

ПРИМЕР. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B (рис. 11.3), и касательная CE (C — точка касания). Докажите, что произведение отрезков AE и BE секущей равно квадрату отрезка CE касательной.

Решение. Треугольники EAC и ECB подобны ($\angle E$ — общий, $\angle ACE = \angle CBE$ как углы, измеряемые половиной дуги AC). Следовательно,

$$\frac{AE}{CE} = \frac{CE}{BE}, \text{ и, значит, } AE \cdot BE = CE^2.$$

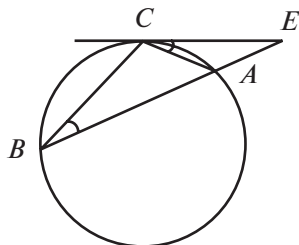


Рис. 11.3

Вопросы

1. Какие треугольники называются подобными?
2. Что называется коэффициентом подобия треугольников?
3. Сформулируйте первый признак подобия треугольников.

Задачи

1. Подобны ли любые два: а) равносторонних треугольника; б) равнобедренных треугольника; в) равнобедренных прямоугольных треугольника?
2. Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) $\frac{1}{2}$; б) 2.
3. Подобны ли прямоугольные треугольники, если у одного из них есть угол 40° , а у другого — угол 50° ?
4. Два треугольника подобны. Два угла одного треугольника равны 55° и 80° . Найдите наименьший угол второго треугольника.
5. В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 5,6$ см, $A_1C_1 = 10,5$ см. Найдите AC и B_1C_1 .
6. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.
7. Стороны треугольника относятся как $5:3:7$. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: а) периметр равен 45 см; б) меньшая сторона равна 5 см; в) большая сторона равна 7 см; г) разность большей и меньшей сторон составляет 2 см.
8. Докажите, что равнобедренные треугольники подобны, если углы при их вершинах, противолежащих основаниям, равны.
9. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если у них есть по равному острому углу.
10. Докажите, что высота прямоугольного треугольника разбивает его на два треугольника, подобных исходному.
11. Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

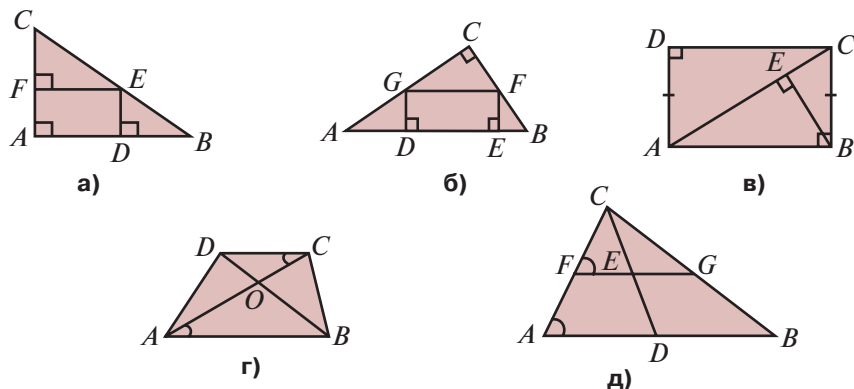


Рис. 11.4

12. На рисунке 11.4 укажите все подобные треугольники.
13. На рисунке 11.5 найдите неизвестный катет.
14. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны соответственно 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.
15. Катеты одного прямоугольного треугольника на 3 см больше катетов другого прямоугольного треугольника. Подобны ли треугольники?
- *16. В треугольник со стороной a и высотой h , опущенной на неё, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на этой стороне треугольника, а другие две — на двух других сторонах треугольника. Найдите сторону квадрата.
- *17. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC . Найдите сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.
- *18. Можно ли треугольник пересечь прямой, непараллельной его сторонам, так, чтобы отсечь от него подобный треугольник? В каком случае это невозможно?
- *19. В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AE и BD . Докажите, что треугольники ABC и EDC подобны.

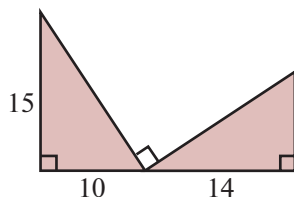


Рис. 11.5

- *20. Докажите, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу. (Средним геометрическим двух положительных чисел a и b называется положительное число c , квадрат которого равен $a \cdot b$.)

- *21. Постройте среднее геометрическое двух данных отрезков.

22. Хорды AD и BE окружности пересекаются в точке C (рис. 11.6). Докажите, что произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, т. е. выполняется равенство $AC \cdot CD = BC \cdot CE$.

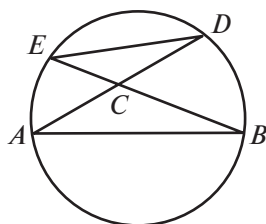


Рис. 11.6

23. Хорды AD и BE окружности пересекаются в точке C , $AC = 3$, $BC = 6$, $CE = 2$. Найдите CD .
24. Хорды AD и BE окружности пересекаются в точке C , $CE = 2$, $CD = 5$, $AC = 4$. Найдите BC .
25. Точка E внутри окружности делит хорду AB этой окружности на отрезки, равные 2 и 5. Через точку E проведена хорда CD , делящаяся точкой E пополам. Найдите длину хорды CD .
26. Точка C принадлежит хорде AB окружности радиусом 4. Найдите $AC \cdot BC$, если точка C удалена от центра окружности на расстояние, равное 2.
27. Стороны угла с вершиной C , расположенной вне окружности, пересекают эту окружность соответственно в точках A, B и D, E (рис. 11.7). Докажите, что произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть, т. е. выполняется равенство $CA \cdot CB = CD \cdot CE$.
28. Стороны угла с вершиной C , расположенной вне окружности, пересекают эту окружность соответственно в точках A, B и D, E (рис. 11.7), причём $CB = 9$, $CE = 8$, $CA = 24$. Найдите CD .

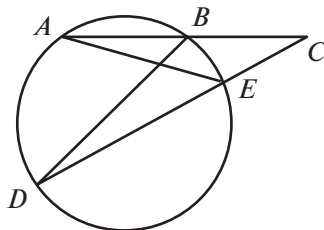


Рис. 11.7

29. Стороны угла с вершиной C , расположенной вне окружности, пересекают эту окружность соответственно в точках A , B и D , E (рис. 11.7 на с. 64), причём $CA = 15$, $CD = 18$, $CB = 6$. Найдите CE .

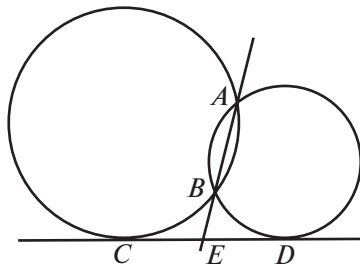


Рис. 11.8

30. Докажите, что прямая, проходящая через точки A , B пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок CD их общей касательной (рис. 11.8).

§ 12 Второй и третий признаки подобия треугольников

ТЕОРЕМА

(Второй признак подобия.) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ вы-

полняются равенства $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ и $\angle A = \angle A_1$. На стороне A_1B_1 отложим отрезок A_1B' , равный AB , и проведём прямую $B'C'$, параллельную B_1C_1 (рис. 12.1).

Треугольники $A_1B'C'$ и $A_1B_1C_1$ подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{A_1B_1}{A_1B'} = \frac{A_1C_1}{A_1C'}.$$

Из этого равенства и равенства $A_1B' = AB$ следует равенство $A_1C' = AC$. Значит, треугольники ABC и $A_1B'C'$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

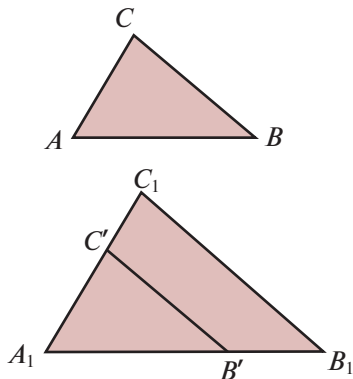


Рис. 12.1

ТЕОРЕМА

(Третий признак подобия.) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ сто-

роны пропорциональны, т. е. $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$. На сто-

роне A_1B_1 отложим отрезок A_1B' , равный AB , и проведём прямую $B'C'$, параллельную B_1C_1 (см. рис. 12.1 на с. 65).

Треугольники $A_1B'C'$ и $A_1B_1C_1$ подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно имеет место ра-

венство $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. Из равенств $A_1B' = AB$ следует

равенства $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{AC'}{AC}$, $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{B'C'}{BC}$. Значит, имеем равен-

ства $AC = A_1C'$, $BC = B'C'$. Таким образом треугольники ABC и $A_1B'C'$ равны (по третьему признаку равенства треугольников) и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

ПРИМЕР 1. Стороны треугольника равны 10, 15 и 20. Произведение сторон подобного ему треугольника равно 24. Найдите стороны второго треугольника.

Решение. Стороны подобного треугольника имеют вид $10k$, $15k$, $20k$, где k — коэффициент подобия. Их произведение равно $3000k^3 = 24$. Откуда $k = 0,2$ и, следовательно, стороны подобного треугольника равны 2, 3, 4.

ПРИМЕР 2. Докажите, что если в треугольнике ABC высота CD , опущенная на сторону AB , является средним геометрическим отрезков AD и BD , то угол C этого треугольника прямой (рис. 12.2).

Решение. То, что CD является средним геометрическим отрезков AD и BD , означает выполнение равенства $CD^2 = AD \cdot BD$. Его можно переписать в виде $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. Из этого равенства и равенства углов ADC и BDC вытекает, что треугольники ACD и

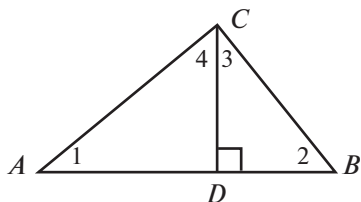


Рис. 12.2

CBD подобны. Обозначим углы этих треугольников цифрами 1, 2, 3, 4, как показано на рисунке 12.2. Из подобия треугольников следует равенство соответствующих углов $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 2$. Значит, для угла C в треугольнике ABC выполнено равенство $\angle C = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$. Так как $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, то отсюда следует, что $\angle C = 90^\circ$, т. е. угол C прямой.

Вопросы

1. Сформулируйте второй признак подобия треугольников.
2. Сформулируйте третий признак подобия треугольников.

Задачи

1. В равностороннем треугольнике ABC проведены его средние линии DE , EG и DG . Среди всех образовавшихся треугольников укажите подобные.
2. Подобны ли два треугольника, если их стороны имеют длины: а) 4, 5, 6 и 8, 10, 12; б) 3, 4, 6 и 9, 15, 18; в) 1, 2, 2 и 1, 1, 0,5?
3. Стороны одного треугольника 4 дм, 3,6 дм и 1,5 дм. Найдите стороны другого треугольника, подобного данному, если коэффициент подобия равен 1,6.
4. Стороны одного треугольника равны 8 см, 6 см и 5 см. Меньшая сторона второго треугольника, подобного первому, равна 2,5 см. Найдите другие стороны второго треугольника.
5. Стороны треугольника 12,6 м, 16,5 м и 18 м. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его меньшая сторона равна большей стороне данного треугольника.
6. Сформулируйте признаки подобия: а) равнобедренных треугольников; б) прямоугольных треугольников.
7. Подобны ли два треугольника, если все их средние линии соответственно пропорциональны?
8. На одной стороне угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AE = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и ABE ?
9. На стороне AC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите стороны треугольника ABD , если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см.

10. В треугольнике ABC $AB = 25$ см, $BC = 20$ см и $AC = 30$ см. На стороне AB отложен отрезок $BK = 4$ см, а на стороне BC взята точка L таким образом, что угол BKL равен углу C . Найдите периметр треугольника BKL .
- *11. Докажите, что если луч, проведенный из вершины угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к этому лучу, то данный луч является биссектрисой угла треугольника.
- *12. Отрезок, соединяющий точки на боковых сторонах трапеции, делит эти стороны в отношении $m : n$. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны соответственно a и b .
- *13. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP = \frac{AD}{n}$; Q — точка пересечения прямых AC и BP . Докажите, что $AQ = \frac{AC}{n+1}$.
- *14. Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения боковых сторон и середины оснований произвольной трапеции принадлежат одной прямой.
- *15. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно целиком накрыть двумя меньшими подобными ему треугольниками.
- *16. На рисунке 12.3 показано, как можно найти ширину реки AD , построив на местности два подобных треугольника — ABC и DEC . Найдите AD , если $BC = 50$ м, $EC = 16$ м и $DC = 17$ м.
- *17. Наблюдатель, находящийся в пункте A (рис. 12.4 на с. 69), видит конец шеста C и верхнюю точку D мачты расположенными на одной прямой. Какова высота мачты, если $AE = 60$ м, $AB = 6$ м и $BC = 3$ м?
18. Используя данные, приведённые на рисунке 12.5 (см. с. 69), найдите расстояние AB от лодки A до берега b .

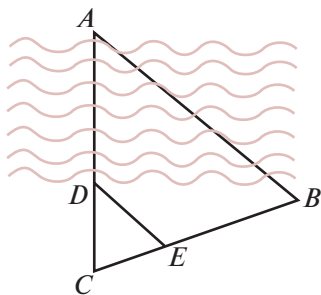


Рис. 12.3

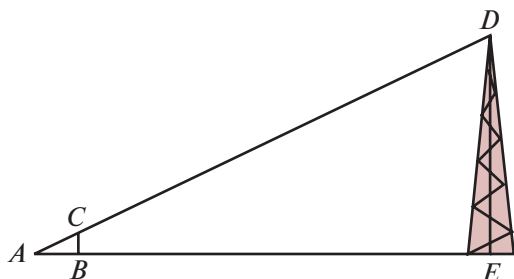


Рис. 12.4

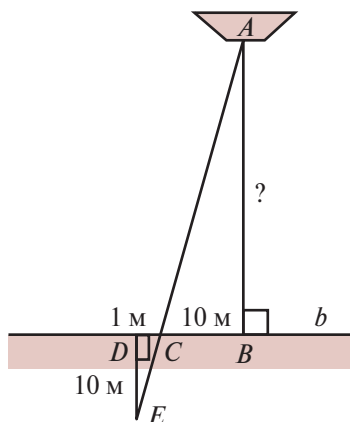


Рис. 12.5

19. Используя данные, приведённые на рисунке 12.6, найдите высоту мачты AB .

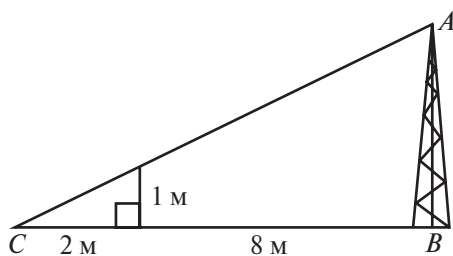


Рис. 12.6

20. Используя данные, приведённые на рисунке 12.7, найдите ширину AB реки.

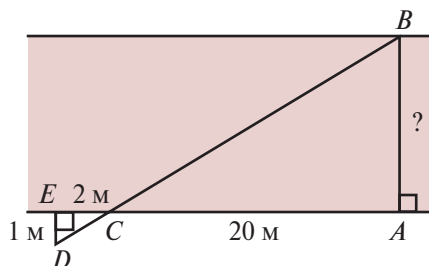


Рис. 12.7

21. Используя данные, приведённые на рисунке 12.8, найдите ширину AB озера.

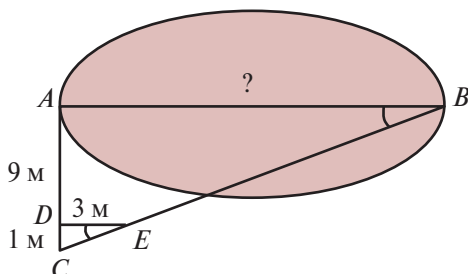


Рис. 12.8

22. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь (рис. 12.9). Тень человека равна 4 шагам. На какой высоте расположен фонарь?

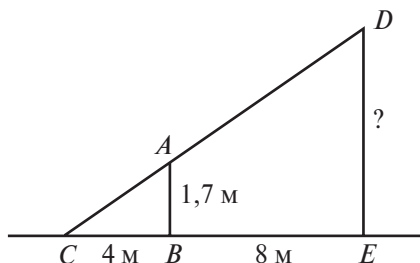


Рис. 12.9

23. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 8,5 м (рис. 12.10). Найдите длину тени человека в метрах.

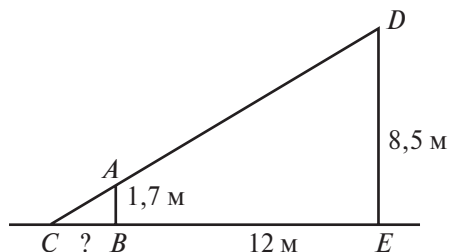


Рис. 12.10

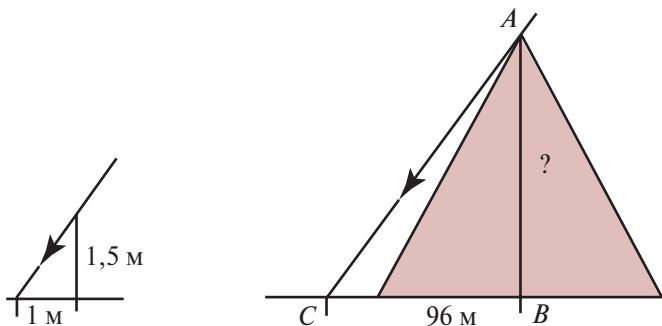


Рис. 12.11

24. Для нахождения высоты египетской пирамиды недалеко от неё был установлен шест длиной 1,5 м (рис. 12.11). Его тень составила 1 м. В тот же момент тень пирамиды была равна 96 м. Чему равна высота пирамиды?

§ 13 Теорема Пифагора

Древнегреческий учёный Пифагор доказал замечательное соотношение между сторонами прямоугольного треугольника. Соответствующая теорема носит его имя.

ТЕОРЕМА

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C (рис. 13.1).

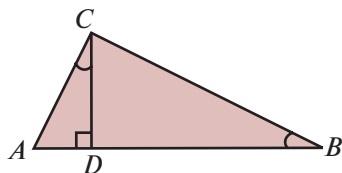


Рис. 13.1

Проведём высоту CD . Треугольники ABC и ACD подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следова-

тельно, $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot AD = AC^2$. Аналогично тре-

угольники ABC и CBD подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно, $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Отсюда

$AB \cdot BD = BC^2$. Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Обозначим стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) соответственно $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Тогда в силу теоремы Пифагора будет иметь место формула

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

С этой теоремой связано открытие Пифагором несоизмеримых отрезков. Два отрезка называются **соизмеримыми**, если их отношение является рациональным числом. Иначе говоря, если один из них принять за единичный отрезок, то длина другого будет выражаться рациональным числом. Оказывается, что, как бы мы ни выбирали единичный отрезок, всегда найдутся **несоизмеримые** с ним отрезки, т. е. такие, длины которых не выражаются рациональными числами.

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с катетами AC и BC , равными единичному отрезку. Докажем, что гипотенуза AB несоизмерима с катетами. Предположим противное, т. е. что она соизмерима с катетами, т. е. её

длина выражается рациональным числом $\frac{p}{q}$. При этом дробь $\frac{p}{q}$ можно предполагать несократимой. Тогда по теореме Пифагора имеет место равенство $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1 + 1 = 2$. Перепишем его в виде

$$p^2 = 2q^2. \quad (*)$$

Из этого равенства следует, что p^2 должно делиться на 2, значит, и p должно делиться на 2, т. е. $p = 2p'$. Подставляя это выражение в равенство (*), получим $(2p')^2 = 2q^2$, и, следовательно, $4(p')^2 = 2q^2$. Сокращая на 2, будем иметь равенство $2(p')^2 = q^2$. Из него следует, что q^2 должно делиться на 2, значит, и q должно делиться на 2.

Таким образом, p и q делятся на 2, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{p}{q}$. Полученное противоречие доказывает: неверным было предположение, что гипотенуза соизмерима с катетами. Следовательно, гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника несоизмерима с его катетами.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пифагор (570—490 гг. до н. э.) — один из величайших учёных Древней Греции, а теорема Пифагора — одна из самых красивых в геометрии. Имеется более 500 различных её доказательств. Простейший случай теоремы Пифагора для треугольника со сторонами 3, 4 и 5 был известен до Пифагора египетским жрецам, а ещё ранее — китайским учёным (около 1100 лет до н. э.). Пифагор, долго живший в Египте, специально изучал науку египетских жрецов и ознакомился с тем, как они строили на земле прямой угол при помощи верёвочного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 единиц. Пифагор обратил внимание на замечательное соотношение между числами 3, 4 и 5, а именно:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

и доказал, что такое соотношение имеет место для сторон произвольного прямоугольного треугольника. Целые числа, представляющие длины сторон прямоугольных треугольников, носят название *пифагорейских чисел*.

В дальнейшем мы рассмотрим некоторые другие доказательства теоремы Пифагора.

ПРИМЕР 1. Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 2, 3, 4?

Решение. Нет. Если бы стороны прямоугольного треугольника выражались числами $2x$, $3x$, $4x$, то в силу теоремы Пифагора должно было бы выполняться равенство $4x^2 + 9x^2 = 16x^2$, что неверно.

ПРИМЕР 2. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 6 см и 8 см.

Решение. Воспользуемся тем, что диагонали ромба перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам. Тогда сторона ромба является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 см и 4 см. Следовательно, она равна 5 см.

ПРИМЕР 3. Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны соответственно 4 и 3. Найдите радиус вписанной окружности (рис. 13.2).

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности, D, E, F — её точки касания соответственно сторон AC, BC, AB треугольника ABC . Обозначим r радиус вписанной окружности. Тогда

$$AF = AD = AC - DC = 4 - r,$$

$$BF = BE = BC - EC = 3 - r.$$

По теореме Пифагора $AB = 5$. Учитывая, что $AB = AF + BF$, получаем равенство

$$5 = 4 - r + 3 - r,$$

из которого находим $r = 1$.

ПРИМЕР 4. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $AB = 6$. Найдите высоту AE , опущенную на боковую сторону (рис. 13.3).

Решение. Пусть CD — высота треугольника ABC , опущенная на основание AB . По теореме Пифагора находим $CD = 4$. Прямоугольные треугольники ABE и CBD подобны по первому признаку подобия треугольников. Следовательно, имеет место равенство отношений $AE : AB = CD : CB$, из которого

$$\text{го находим } AE = 4\frac{4}{5}.$$

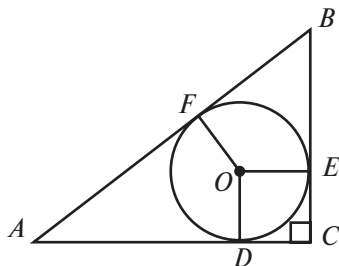


Рис. 13.2

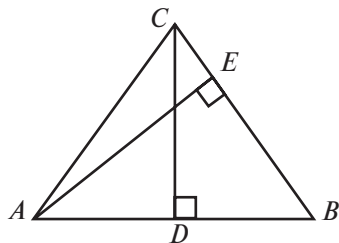


Рис. 13.3

Вопросы

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Какие отрезки называются: а) соизмеримыми; б) несоизмеримыми?
3. Приведите примеры несоизмеримых отрезков.
4. Какие тройки целых чисел называются пифагорейскими?

Задачи

1. У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b . Найдите гипотенузу c , если: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 1$, $b = 1$; в) $a = 5$, $b = 6$.
2. У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза c и катет a . Найдите второй катет, если: а) $c = 5$, $a = 3$; б) $c = 13$, $a = 5$; в) $c = 6$, $a = 5$.
3. Точка, лежащая внутри прямого угла, удалена от его сторон на расстояния, равные a и b . Найдите расстояние от точки до вершины угла.
4. Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?
5. Укажите какие-нибудь тройки пифагорейских чисел.
6. Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором: а) гипотенуза равна 10 см, разность катетов — 2 см; б) гипотенуза равна 26 см, а отношение катетов 5 : 12.
7. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 1 больше одного из катетов, а сумма катетов на 4 больше гипотенузы. Найдите стороны этого треугольника.
8. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 опущена высота на гипотенузу. Найдите эту высоту и отрезки, на которые она делит гипотенузу.
9. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 5 м и 12 м.
10. Диагональ квадрата a . Чему равна сторона квадрата?
11. Найдите расстояние между основаниями равнобедренной трапеции, у которой основания 5 м и 11 м, а боковая сторона 4 м.
12. В правильном треугольнике со стороной 1 найдите: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.
13. В равностороннем треугольнике со стороной a найдите радиусы r и R вписанной и описанной окружностей.
14. Найдите медиану, опущенную на основание равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b .
- *15. Даны две окружности радиусов R и r . Расстояние между их центрами равно $a > R + r$. Найдите длины отрезков их общих касательных.

- *16. Докажите, что верна теорема, обратная теореме Пифагора: «Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то он прямоугольный».
- 17. В треугольнике ABC $AC = 5$, $BC = 4$, высота CH равна 3. Найдите сторону AB .
- 18. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника со сторонами равными 5 и 12.
- *19. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, стороны которого равны 6, 5, 5.
- *20. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, стороны которого равны 6, 5, 5.
- *21. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6, высота равна 7. Найдите радиус описанной окружности.
- *22. Основания равнобедренной трапеции равны 16 и 12, радиус описанной окружности равен 10. Найдите высоту трапеции.
- 23. Мальчик и девочка, расставшись на перекрёстке, пошли по взаимно перпендикулярным дорогам, мальчик со скоростью 4 км/ч, девочка — 3 км/ч. Какое расстояние (в км) будет между ними через 30 мин?
- 24. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?
- 25. На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой 13 м, чтобы верхний её конец оказался на высоте 12 м?
- 26. В 12 м одна от другой растут две сосны. Высота одной — 11 м, а другой — 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.
- *27. Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м. Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды (рис. 13.4 на с. 77). Найдите глубину озера в месте, где растёт камыш.

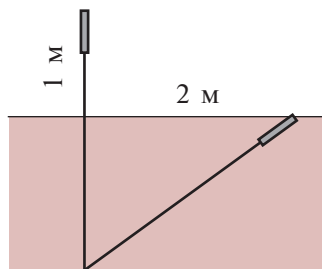


Рис. 13.4

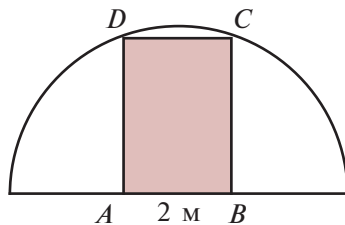


Рис. 13.5

- *28. Туннель имеет форму полукруга радиусом 3 м. Какой наибольшей высоты должна быть машина шириной 2 м (рис. 13.5), чтобы она могла проехать по этому туннелю?

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 14 Тригонометрические функции острого угла

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) и его острый угол A (рис. 14.1).

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

Синус угла A обозначается $\sin A$. По определению

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Косинус угла A обозначается $\cos A$. По определению

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему.

Тангенс угла A обозначается $\operatorname{tg} A$. По определению

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

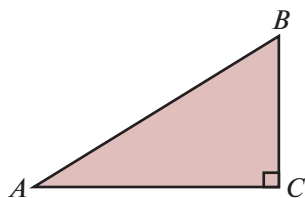


Рис. 14.1

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему.

Котангенс угла A обозначается $\operatorname{ctg} A$. По определению

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Непосредственно из этих определений следуют равенства:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

ТЕОРЕМА

Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника зависят только от угла и не зависят от выбора прямоугольного треугольника, т. е. у двух прямоугольных треугольников с соответственно равными углами значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов равных острых углов совпадают.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника ($\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$), у которых $\angle A = \angle A_1$. Тогда эти треугольники подобны (по первому признаку подобия треугольников). Поэтому $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$, $B_1C_1 = k \cdot BC$. Следовательно,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1, \quad \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \operatorname{tg} A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \operatorname{ctg} A_1.$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс называют **тригонометрическими функциями острого угла**. Из определения тригонометрических функций следует:

- 1) катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего угла;
- 2) катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус прилежащего угла;
- 3) катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс противолежащего угла;
- 4) катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс прилежащего угла.

Найдём значения тригонометрических функций угла 45° . Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) с углом A , равным 45° . Этот треугольник равнобедренный. Пусть $AC = BC = a$. Тогда по теореме Пифагора $AB^2 = 2a^2$, и, следовательно, $AB = \sqrt{2}a$. Поэтому

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos 45^\circ &= \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{BC}{AC} = 1, & \operatorname{ctg} 45^\circ &= \frac{AC}{BC} = 1.\end{aligned}$$

Найдём значения тригонометрических функций угла 30° . Для этого рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a и проведём в нём биссектрису AD . Тогда треугольник ADB прямоугольный и $\angle DAB = 30^\circ$, $DB = \frac{a}{2}$. Тогда по теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3}, & \operatorname{ctg} 30^\circ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Первое из этих равенств можно переформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА

Катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

Для тригонометрических функций составлены специальные таблицы. Для вычисления тригонометрических функций применяют также микрокалькуляторы.

ПРИМЕР 1. Для каких острых углов A выполняется неравенство $\sin A < \cos A$?

Решение. Это неравенство выполняется, когда противолежащий катет меньше прилежащего и, следовательно, когда угол A меньше 45° .

ПРИМЕР 2*. Найдите тригонометрические функции угла BAC , изображённого на рисунке 14.2.

О т в е т. $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$,
 $\operatorname{ctg} A = \frac{4}{3}$.

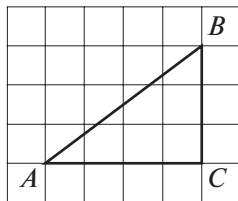


Рис. 14.2

Вопросы

1. Что называется синусом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Что называется косинусом острого угла прямоугольного треугольника?
3. Что называется тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
4. Что называется котангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
5. Что называется тригонометрическими функциями острого угла?
6. Как связаны между собой гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника?
7. Чему равны тригонометрические функции угла: а) 45° ; б) 30° ?
8. Чему равен катет, лежащий против угла в 30° ?

Задачи

1. Найдите значения тригонометрических функций угла в 60° .
2. Нарисуйте с помощью транспортира углы, равные: а) 24° ; б) 40° ; в) 75° , и найдите приближённые значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса этих углов.
3. Постройте угол, косинус которого равен: а) $3\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{9}$; в) 0,5; г) 0,8.
4. Может ли синус (косинус) угла быть равен $\sqrt{2}$?
5. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 5 см. Найдите все тригонометрические функции его меньшего угла A .
6. Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 8 см, основание равно 12 см. Найдите синус и косинус угла A при основании треугольника.
7. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а угол при основании 30° . Найдите боковую сторону.
8. В треугольнике ABC угол A равен 60° , $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Найдите AC .

9. У прямоугольного треугольника один катет равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен 0,8. Найдите гипотенузу и второй катет.
10. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите угол между диагоналями.
11. В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны 1 и 3. Найдите его острые углы.
12. Найдите углы ромба, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и 2.
13. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найдите высоту h , опущенную на гипотенузу.
14. Найдите значения тригонометрических функций угла AOB , изображённого на рисунке 14.3.

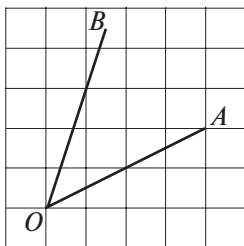


Рис. 14.3

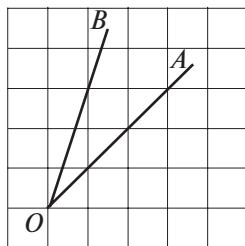


Рис. 14.4

15. Найдите значения тригонометрических функций угла AOB , изображённого на рисунке 14.4.
16. Мальчик прошёл от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошёл 600 м. Используя таблицу тригонометрических функций, выясните, под каким углом к направлению на запад он должен идти, чтобы вернуться домой? В ответе укажите целое число градусов.
17. Лестница имеет ступеньки, ширина которых равна 30 см, а высота — 18 см. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол подъёма лестницы. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.
18. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол подъёма в градусах. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.

19. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите ширину реки, если человек ростом 1,7 м, стоящий на противоположном берегу реки, виден под углом 1° .
20. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите приближённое значение угла, под которым виден столб высотой 3 м, находящийся от наблюдателя на расстоянии 100 м. В ответе укажите целое число градусов.

21. Расстояние от наблюдателя до башни главного здания МГУ имени М. В. Ломоносова равно 150 м, а угол, под которым видно здание, равен 58° (рис. 14.5). Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту башни. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу метров.

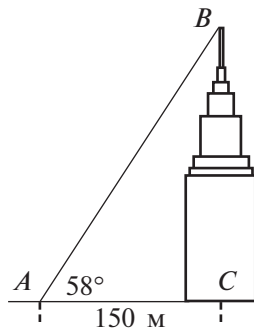


Рис. 14.5

22. Высота башни главного здания МГУ имени М. В. Ломоносова равна 240 м. Под каким углом видна эта башня с расстояния 200 м? В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу градусов.
23. Вершина радиомачты видна с расстояния 300 м от её основания под углом 10° (рис. 14.6). Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту радиомачты.

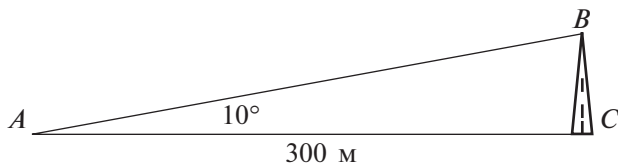


Рис. 14.6

24. Высота Останкинской телевизионной башни в Москве — 540 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол в градусах, под которым видна башня с расстояния 2000 м (рис. 14.7 на с. 84).

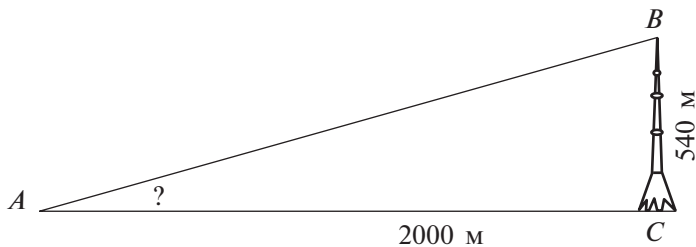


Рис. 14.7

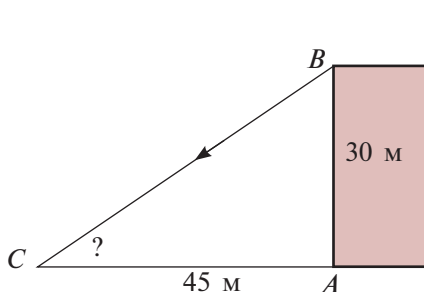


Рис. 14.8

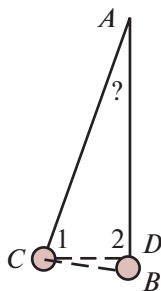


Рис. 14.9

25. Строение высотой 30 м бросает тень длиной 45 м (рис. 14.8). Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол наклона солнечных лучей. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.
26. Маятник AB длиной 50 см отклонили от положения равновесия на расстояние CD , равное 12 см (рис. 14.9). Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол, который образует новое положение AC маятника с положением равновесия AB . В ответе укажите целое число градусов.

§15 Тригонометрические тождества

Непосредственно из определений тригонометрических функций острого угла следует, что имеют место следующие тождества:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - A) &= \cos A, & \cos(90^\circ - A) &= \sin A; \\ \operatorname{tg}(90^\circ - A) &= \operatorname{ctg} A, & \operatorname{ctg}(90^\circ - A) &= \operatorname{tg} A.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА

Синус и косинус острого угла связаны между собой основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Доказательство. По определению синуса и косинуса в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) имеем

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, следовательно,

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Основное тригонометрическое тождество позволяет выразить косинус угла через его синус и наоборот, а именно:

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}, \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$$

ПРИМЕР 1. Найдите $\operatorname{tg} A$, если $\cos A = \frac{2}{3}$.

Решение. В этом случае

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

ПРИМЕР 2. Докажите тождество $1 + \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$.

Решение. Имеем

$$1 + \operatorname{tg}^2 A = 1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

Вопросы

1. Какие тригонометрические тождества непосредственно следуют из определений тригонометрических функций острого угла?
2. В чём заключается основное тригонометрическое тождество?
3. Как выражаются синус угла через его косинус и, наоборот, косинус угла через его синус?

Задачи

1. Найдите $\sin A$, если: а) $\cos A = \frac{1}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Найдите $\cos A$, если: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3. Существует ли угол A , для которого $\sin A = \cos A$?
4. Могут ли синус и косинус одного угла равняться:
- а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$?
5. Докажите, что тангенсы острых углов прямоугольного треугольника взаимно обратны, т. е. их произведение равно единице.
6. Докажите тождество $1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.
7. Найдите $\operatorname{tg} A$, если: а) $\cos A = \frac{5}{13}$; б) $\cos A = 0,6$; в) $\sin A = \frac{3}{5}$; г) $\sin A = 0,8$.
8. Докажите, что синус большего угла больше, а косинус меньше.
9. Какой из углов больше — A или B , если: а) $\operatorname{tg} A = 2,1$, $\operatorname{tg} B = 2,5$; б) $\operatorname{tg} A = \frac{8}{3}$, $\operatorname{tg} B = \frac{5}{2}$?
10. Выразите тангенс угла через его косинус.
11. Дан равнобедренный треугольник ABC . Из середины M основания AB опущен перпендикуляр MN на сторону BC . Докажите, что: а) $CN = BC \cos^2 \frac{C}{2}$; б) $BN = BC \sin^2 \frac{C}{2}$.
12. Докажите, что если синусы острых углов равны, то и сами углы равны.
- *13. Докажите, что углы на рисунке 15.1 равны.
14. Упростите выражение:
- а) $1 - \sin^2 A$;
 б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$;
 в) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A + \cos^2 A$.
15. Упростите выражение: а) $\frac{1}{\cos^2 A} - 1$; б) $\frac{1}{\sin^2 A} - 1$.
16. Найдите $\sin A$ и $\cos A$, если $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = 2,5$.

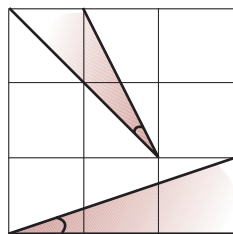


Рис. 15.1

§ 16 Тригонометрические функции тупого угла

Определим тригонометрические функции углов $90^\circ \leq \angle A < 180^\circ$ (рис. 16.1), положив:

$$\sin 90^\circ = 1 \text{ и } \sin A = \sin(180^\circ - A), \text{ если } 90^\circ < \angle A < 180^\circ;$$

$$\cos 90^\circ = 0 \text{ и } \cos A = -\cos(180^\circ - A), \text{ если } 90^\circ < \angle A < 180^\circ.$$

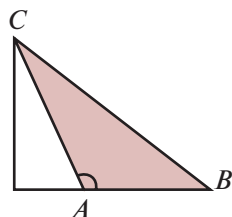


Рис. 16.1

Тангенс и котангенс углов определяются, как и ранее, а именно:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \angle A \neq 90^\circ; \quad \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Положим также $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$.

ТЕОРЕМА

Для углов A , $0^\circ < \angle A < 180^\circ$, имеет место основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Доказательство. Для углов, меньших 90° , это тождество было доказано ранее. Если $\angle A = 90^\circ$, то $\sin A = 1$, $\cos A = 0$. Следовательно, требуемое тождество выполняется. Если $90^\circ < \angle A < 180^\circ$, то для $\angle B = 180^\circ - \angle A$ будут выполняться неравенство $0^\circ < \angle B < 90^\circ$ и равенства $\sin A = \sin B$, $\cos A = -\cos B$. Следовательно, $\sin^2 A + \cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 B = 1$.

ПРИМЕР 1. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла в 135° .

Решение. Имеем: $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = -1$; $\operatorname{ctg} 135^\circ = \frac{\cos 135^\circ}{\sin 135^\circ} = -1$.

ПРИМЕР 2. Упростите выражение $(1 - \cos A)(1 + \cos A)$.

Решение. Имеем: $(1 - \cos A)(1 + \cos A) = 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$.

Вопросы

1. Чему равен синус угла в 90° ?
2. Чему равен синус угла A в случае $90^\circ < \angle A < 180^\circ$?
3. Чему равен косинус угла в 90° ?
4. Чему равен косинус угла A в случае $90^\circ < \angle A < 180^\circ$?
5. В чём заключается основное тригонометрическое тождество для случая $0^\circ < \angle A < 180^\circ$?

Задачи

1. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла:
а) 120° ; б) 150° .
2. Найдите $\operatorname{tg} A$, если: а) $\cos A = -\frac{1}{2}$; б) $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $90^\circ < \angle A < 180^\circ$.
3. Известно, что $\operatorname{tg} A = -\frac{5}{12}$. Найдите $\sin A$ и $\cos A$.
4. Найдите $\sin A$ и $\cos A$, если $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = \frac{5}{2}$.
5. Докажите, что для острых углов A имеют место равенства $\sin(90^\circ + A) = \cos A$, $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$.
6. Докажите, что тангенсы смежных углов противоположны, т. е. их сумма равна нулю.
7. Докажите, что для углов $90^\circ < \angle A < 180^\circ$ имеют место тождества
 $1 + \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.
8. Упростите выражение: а) $1 - \sin^2 A$;
б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$; в) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A + \cos^2 A$.
9. Расположите в порядке возрастания тангенсы углов: 70° , 80° , 100° .
10. Расположите в порядке возрастания котангенсы углов: 60° , 110° , 120° .
11. Найдите значения тригонометрических функций угла AOB , изображённого на рисунке 16.2.
12. Найдите значения тригонометрических функций угла AOB , изображённого на рисунке 16.3.

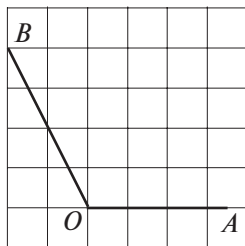


Рис. 16.2

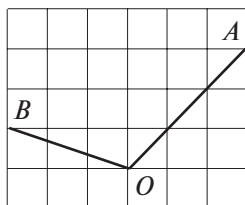


Рис. 16.3

ПЛОЩАДЬ

**§ 17 Измерение площадей.
Площадь прямоугольника**

Измерение площади фигуры, как и измерение длины отрезка, основано на сравнении этой фигуры с фигурой, площадь которой принимается за единицу.

За единицу измерения площади принимается квадрат со стороной, равной единице измерения длины. Он называется **единичным квадратом**. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой квадрат называется квадратным миллиметром, квадратным сантиметром или квадратным метром соответственно.

Так же как и единичный отрезок, единичный квадрат можно разбивать на равные части. Например, его можно разбить на 100 равных квадратов со стороной, равной одной десятой единичного отрезка (рис. 17.1). Площадь каждого такого маленького квадрата считается равной одной сотой. Единичный квадрат можно разбить на 10 000 равных квадратов со стороной, равной одной сотой единичного отрезка. Площадь каждого такого маленького квадрата считается равной одной десятитысячной и т. д.

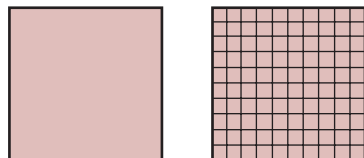


Рис. 17.1

Для измерения площади фигуры Φ рассмотрим сетку на плоскости, составленную из единичных квадратов и покрывающую фигуру Φ (рис. 17.2). Выясним, сколько единичных квадратов этой сетки целиком содержится в фигуре Φ . Если единичный квадрат укладывается n раз без остатка, то процесс измерения на этом заканчивается и полученное число n считается площадью фигуры Φ .

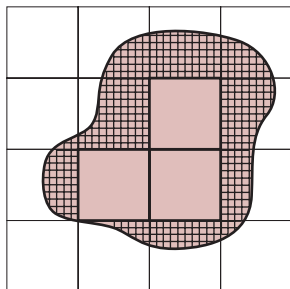


Рис. 17.2

Если единичный квадрат укладывается в фигуре Φ с остатком Φ' , то число n считается приближённым значением площади. (На рисунке 17.2 число n равно 3.) В этом случае единичные квадраты разбиваются на 100 квадратов со стороной, равной одной десятой единичного отрезка. Подсчитывается число m этих квадратов, целиком содержащихся в остатке Φ' . (На рисунке 17.2 число m равно 368.) Если при этом квадраты укладываются в фигуре Φ' без остатка, то процесс измерения считается законченным и число $n + m \cdot 0,01$ считается площадью фигуры Φ .

Если квадраты укладываются в фигуре Φ' с остатком Φ'' , то единичные квадраты разбиваются на 10 000 квадратов со стороной, равной одной сотой единичного отрезка, и повторяется описанная процедура измерения.

В результате процесс измерения площади может на некотором шаге закончиться. В этом случае площадь фигуры будет выражаться конечной десятичной дробью. Однако может случиться, что процесс измерения не закончится ни на каком шаге. В этом случае площадь фигуры может выражаться бесконечной десятичной дробью.

Можно сказать, что *площадь фигуры* — это число, получающееся в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре.

Две фигуры называются *равновеликими*, если они имеют одинаковую площадь.

Площадь фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после этого числа указывают единицу измерения площади. Например, $S \text{ мм}^2$, $S \text{ см}^2$, $S \text{ м}^2$.

Можно доказать, что для площадей плоских фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам длин отрезков.

Свойство 1. Равные фигуры имеют равные площади.

Свойство 2. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2 (рис. 17.3), то площадь фигуры Φ равна сумме площадей фигур Φ_1 и Φ_2 , т. е. $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$.

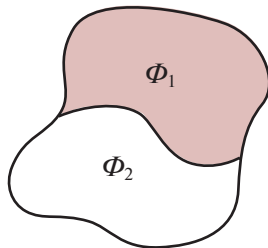


Рис. 17.3

Из этих свойств, в частности, следует, что если фигура Φ разбита на n равных неперекрывающихся частей, то площадь каждой части равна одной n -й площади всей фигуры Φ .

Простейшей фигурой с точки зрения вычисления площади является прямоугольник.

Свойство 3. Площадь прямоугольника (рис. 17.4) равна произведению его смежных сторон, т. е. площадь S прямоугольника, смежные стороны которого равны a и b , выражается формулой

$$S = a \cdot b.$$

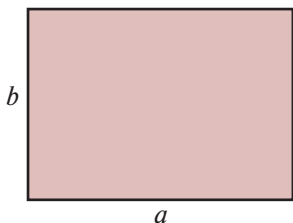


Рис. 17.4

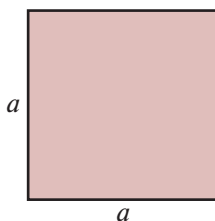


Рис. 17.5

В частности, площадь квадрата (рис. 17.5) со стороной a вычисляется по формуле

$$S = a^2.$$

ТЕОРЕМА

Из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Доказательство. Рассмотрим квадрат $ABCD$ и прямоугольник $AEFH$ того же периметра, отличный от квадрата, расположенные так, как показано на рисунке 17.6.

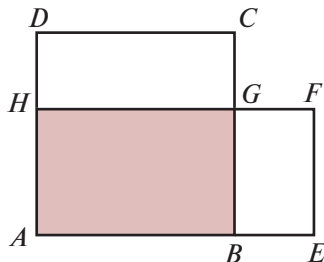


Рис. 17.6

Докажем, что площадь квадрата $ABCD$ больше площади прямоугольника $AEFH$. Квадрат $ABCD$ состоит из прямоугольников $ABGH$ и $HGCD$. Прямоугольник $AEFH$ состоит из прямоугольников $ABGH$ и $BEFG$. Так как прямоугольник $ABGH$ у них общий, то достаточно доказать, что площадь прямоугольника $HGCD$ больше площади прямоугольника $BEFG$.

Из равенства периметров квадрата и прямоугольника следует равенство $AB + AD = AE + AH$. Из равенства вытекает равенство $AD - AH = AE - AB$, означающее, что сторона HD прямоугольника $HGCD$ равна стороне BE прямоугольника $BEFG$.

Сторона HG прямоугольника $HGCD$ равна стороне квадрата $ABCD$, а сторона BG прямоугольника $BEFG$ меньше стороны этого квадрата. Следовательно, площадь прямоугольника $HGCD$ больше площади прямоугольника $BEFG$. Значит, площадь квадрата $ABCD$ больше площади прямоугольника $AEFH$.

Следствие. Среднее геометрическое $(\sqrt{ab})$ двух положительных чисел a и b не превосходит их среднего арифметического $\left(\frac{a+b}{2}\right)$, т. е. имеет место неравенство $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Причём равенство достигается только в случае $a = b$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник со сторонами a и b . Его площадь равна ab . Площадь квадрата с тем же периметром равна $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Следовательно, имеет место неравенство $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, равенство в котором достигается только в случае $a = b$. Ясно, что последнее неравенство равносильно неравенству $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

ПРИМЕР 1. Найдите площадь квадрата, если его периметр равен 80 см.

Решение. Сторона квадрата равна $80 : 4 = 20$ (см). Поэтому его площадь равна $20^2 = 400$ (см²).

ПРИМЕР 2. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 17.7, а (см. с. 93). Стороны клеток равны 1.

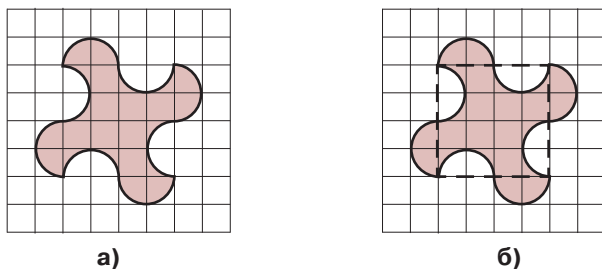


Рис. 17.7

Решение. Площадь данной фигуры равна площади квадрата, изображённого на рисунке 17.7, б пунктирной линией. Эта площадь равна 16.

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения площади?
2. Что такое площадь фигуры?
3. Как измеряется площадь фигуры?
4. Сформулируйте свойства площади.
5. Какие фигуры называются равновеликими?
6. Сформулируйте теорему о площади прямоугольника.

Задачи

1. Сколько единичных квадратов целиком укладывается в фигуру, изображённой на рисунке 17.8?
2. На рисунке 17.9 укажите равновеликие фигуры.

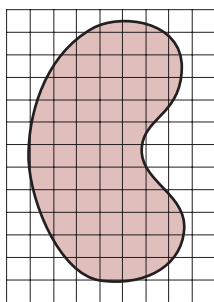


Рис. 17.8

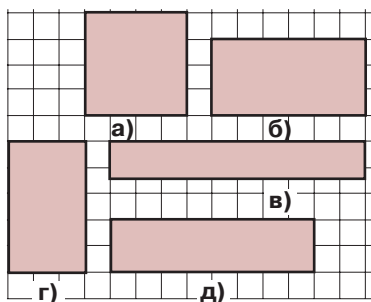


Рис. 17.9

3. Какую площадь имеют части квадрата со стороной a , на которые он разбивается своими диагоналями?
4. Как изменится площадь прямоугольника, если его стороны: а) увеличатся в 2 раза; б) уменьшатся в 3 раза; в) изменятся в k раз?

5. Докажите, что если фигура Φ' содержится в фигуре Φ'' , то имеет место неравенство $S(\Phi') \leq S(\Phi'')$.
6. Стороны прямоугольника равны 12 см и 3 см. Нарисуйте: а) равновеликий ему прямоугольник, сторона которого равна 10 см; б) равновеликий ему прямоугольник, стороны которого относятся как 3 : 4; в) равновеликий ему квадрат.
7. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 17.10. Стороны клеток равны 1.
8. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 72 см^2 , а отношение соседних сторон равно 1 : 2.
9. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м^2 .
10. Найдите площади фигур, изображённых на рисунке 17.11.

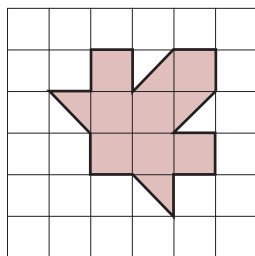


Рис. 17.10

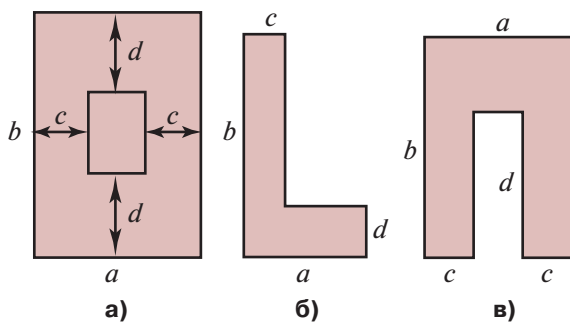


Рис. 17.11

11. Найдите площадь S квадрата по его диагонали a .
12. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 8 м и 18 м.
13. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?
14. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 17.12. Стороны клеток равны 1.

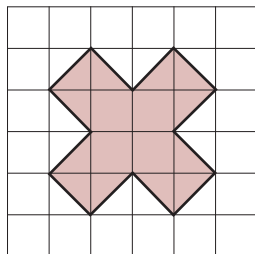


Рис. 17.12

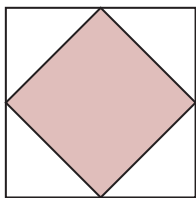


Рис. 17.13

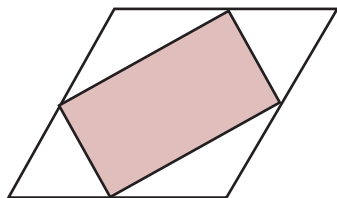


Рис. 17.14

- *15. Площадь квадрата равна 10 (рис. 17.13). Найдите площадь квадрата, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата.
- *16. Диагонали ромба равны 6 и 8 (рис. 17.14). Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон этого ромба.
- *17. Докажите, что из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.
- *18. Вершина одного единичного квадрата находится в центре другого единичного квадрата (рис. 17.15). Найдите площадь их общей части.
19. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольный участок земли, ограниченный забором, периметр которого равен 80 м?

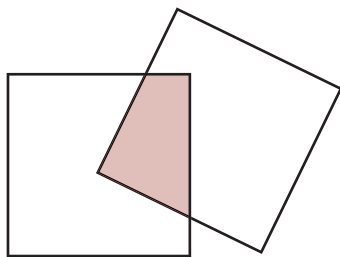


Рис. 17.15

§18 Площадь параллелограмма

ТЕОРЕМА

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

Доказательство. Пусть дан параллелограмм $ABCD$, отличный от прямоугольника, с острым углом A (рис. 18.1).

Из вершин C и D опустим перпендикуляры соответственно CE и DF на прямую AB . Так как

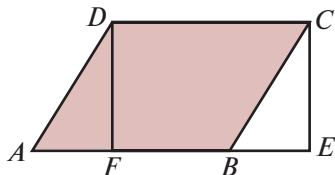


Рис. 18.1

четырёхугольник $AECD$ составлен из параллелограмма $ABCD$ и треугольника BCE , то площадь этого параллелограмма равна площади четырёхугольника $AECD$ минус площадь треугольника BCE . С другой стороны, четырёхугольник $AECD$ можно представить составленным из прямоугольника $FECD$ и треугольника ADF . Следовательно, площадь этого прямоугольника равна площади четырёхугольника $AECD$ минус площадь треугольника ADF . Так как прямоугольные треугольники ADF и BCE равны по гипотенузе и катету ($AD = BC$, $DF = CE$), то площадь параллелограмма $ABCD$ будет равна площади прямоугольника $FECD$, т. е. равна произведению стороны параллелограмма на высоту, проведённую к этой стороне.

Итак, площадь S параллелограмма со стороной a и высотой h , проведённой к ней, вычисляется по формуле

$$S = a \cdot h.$$

Следствие. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

Доказательство. Высота DF параллелограмма $ABCD$ равна стороне AD , умноженной на синус угла A . Значит, площадь S параллелограмма выражается формулой

$$S = a \cdot b \cdot \sin \varphi,$$

где a , b — смежные стороны параллелограмма, φ — угол между ними.

ПРИМЕР 1. Стороны параллелограмма равны 15 см и 9 см. Высота, опущенная на первую сторону, равна 6 см (рис. 18.2). Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

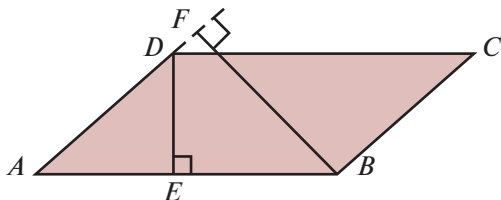


Рис. 18.2

Решение. Площадь S параллелограмма равна $15 \cdot 6 = 90$ (см²).

С другой стороны, $S = 9 \cdot h$. Следовательно, искомая высота h равна $90 : 9 = 10$ (см).

ПРИМЕР 2. Соседние стороны параллелограмма равны a и b . Какой угол должен быть между ними, чтобы площадь параллелограмма была наибольшей?

Решение. В случае, когда угол между соседними сторонами острый или тупой, высота h , опущенная на сторону a , меньше b , и, следовательно, площадь параллелограмма меньше $a \cdot b$. Если этот угол прямой, то высота равна b , и, следовательно, площадь параллелограмма равна $a \cdot b$. Таким образом, параллелограмм со сторонами a и b имеет наибольшую площадь в случае, если угол между этими сторонами равен 90° , т. е. параллелограмм является прямоугольником.

Вопросы

1. Что называется высотой параллелограмма?
2. Сформулируйте теорему о площади параллелограмма.
3. Как выражается площадь параллелограмма через соседние стороны и угол между ними?

Задачи

1. Постройте прямоугольник, равновеликий данному параллелограмму.
2. На рисунке 18.3 укажите равновеликие параллелограммы.

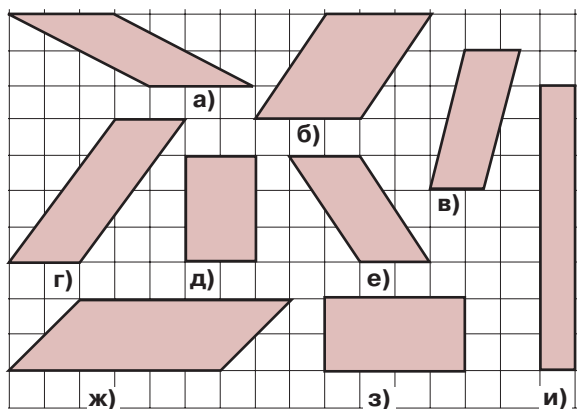
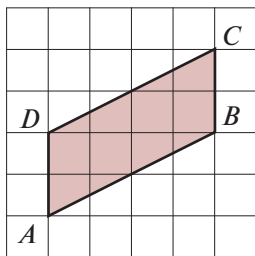
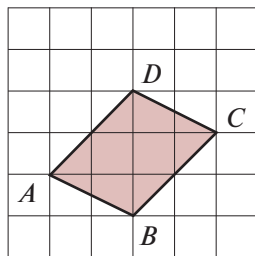


Рис. 18.3



а)



б)

Рис. 18.4

3. Найдите площади параллелограммов, изображённых на рисунке 18.4. Стороны клеток равны 1.
4. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 18.5) CF и CE — высоты. Докажите, что $AB \cdot CF = AD \cdot CE$.
5. Площадь параллелограмма равна 40 см^2 , стороны — 5 см и 10 см. Найдите высоты этого параллелограмма.
6. Стороны параллелограмма равны 6 см и 4 см. Одна из высот равна 5 см. Найдите другую высоту. Сколько решений имеет эта задача?
7. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 4 см и 5 см, а угол между ними равен 30° .
8. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 10 см, а один из углов равен 150° .
9. Найдите площадь ромба, если его углы относятся как $1:5$, а сторона равна a .
10. Острый угол параллелограмма равен 30° , а высоты, проведённые из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.
11. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны. Какая из этих фигур имеет большую площадь? Почему?
12. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Сравните их площади.

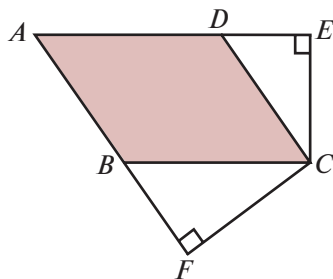


Рис. 18.5

13. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.
- *14. Найдите площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ 13 см.
- *15. Найдите геометрическое место вершин параллелограммов, равновеликих данному и имеющих с ним одну общую сторону.
- *16. Из всех параллелограммов данного периметра укажите параллелограмм наибольшей площади.
- *17. Из всех параллелограммов с данным периметром и данным острым углом найдите параллелограмм наибольшей площади.

§ 19 Площадь треугольника

ТЕОРЕМА

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC . Достроим его до параллелограмма $ABDC$ (рис. 19.1). Треугольники ABC и DCB равны. Следовательно, равны и их площади. Поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$.

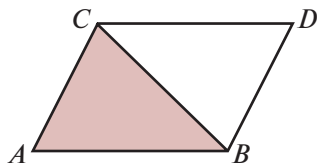


Рис. 19.1

Сторона AB этого параллелограмма равна стороне треугольника, а высота, проведённая к этой стороне, — высоте треугольника. Следовательно, площадь треугольника ABC равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

Итак, площадь S треугольника со стороной a и высотой h , проведённой к ней, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Следствие 1. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Доказательство. В треугольнике ABC проведём высоту BH (рис. 19.2). Имеем $BH = BC \cdot \sin C$. Следовательно, площадь ABC равна

$$\frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C.$$

Таким образом, площадь S треугольника со сторонами a, b и углом C между ними вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C.$$

Следствие. Если на сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки соответственно A_1 и B_1 (рис. 19.3) такие, что $A_1C = k \cdot AC$, $B_1C = l \cdot BC$, то для площади S_1 треугольника A_1B_1C имеет место формула

$$S_1 = k \cdot l \cdot S,$$

где S — площадь треугольника ABC .

Действительно,

$$S_1 = \frac{1}{2} A_1C \cdot B_1C \cdot \sin C = \frac{1}{2} k \cdot AC \cdot l \cdot BC \cdot \sin C = k \cdot l \cdot S.$$

ТЕОРЕМА

Для радиуса r окружности, вписанной в треугольник ABC , имеет место формула.

$$r = \frac{2S}{a+b+c},$$

где S — площадь треугольника ABC , a, b, c — его стороны соответственно BC, AC, AB .

Доказательство. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 19.4). Рассмотрим треугольники OBC , OAC , OAB . Их удвоенные площади рав-

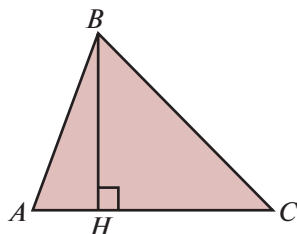


Рис. 19.2

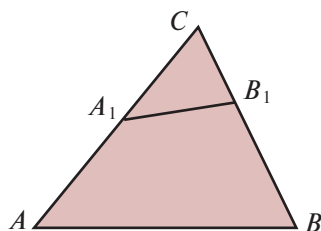


Рис. 19.3

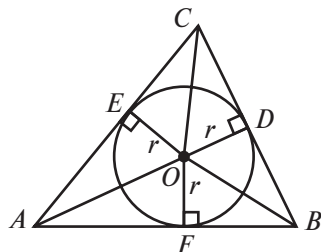


Рис. 19.4

ны соответственно $a \cdot r$, $b \cdot r$, $c \cdot r$. Сумма этих площадей равна удвоенной площади треугольника ABC . Следовательно, имеет место формула

$$2S = a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r,$$

из которой непосредственно следует требуемая формула для радиуса r вписанной окружности.

ТЕОРЕМА

Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD параллелограмма равны соответственно a и b , угол между ними равен φ (рис. 19.5). Докажем, что для площади S этого параллелограмма имеет место формула

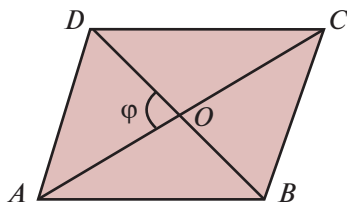


Рис. 19.5

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \varphi.$$

Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то они разбивают этот параллелограмм на четыре треугольника одинаковой площади. Площадь треугольника AOD равна $\frac{1}{2}OA \cdot OD \cdot \sin \varphi = \frac{1}{8}ab \cdot \sin \varphi$. Следовательно, площадь параллелограмма равна $\frac{1}{2}ab \cdot \sin \varphi$.

ПРИМЕР 1. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a .

Решение. Высота этого треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Поэтому площадь S равностороннего треугольника со стороной a будет выражаться формулой $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

ПРИМЕР 2. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4.

Решение. Гипотенуза этого треугольника равна 5. Его удвоенная площадь равна 12. Следовательно, радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 1.

Вопросы

1. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
2. Чему равна площадь прямоугольного треугольника?
3. Как выражается площадь треугольника через две его стороны и угол между ними?

Задачи

1. На рисунке 19.6 укажите равновеликие треугольники.

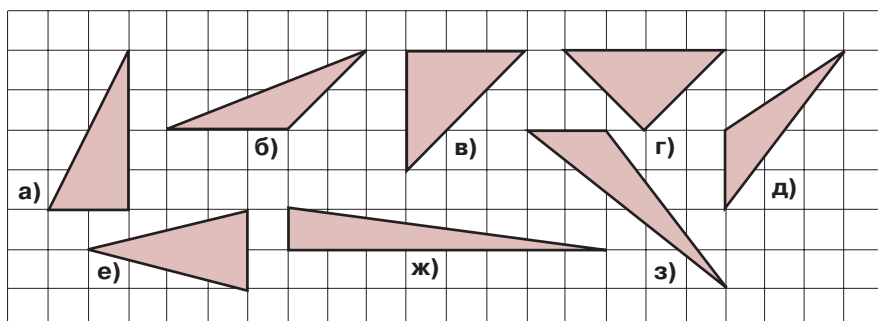


Рис. 19.6

2. Две стороны треугольника равны 6 см и 5 см. Может ли его площадь быть равна: а) 10 см^2 ; б) 15 см^2 ; в) 20 см^2 ?
3. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 7 см; б) 1,2 м и 35 дм.
4. В треугольнике ABC сторона AB в три раза больше стороны AC . Чему равно отношение высот, проведённых из вершин B и C ?
5. Как изменится площадь треугольника, если: а) не изменяя его сторону, увеличить опущенную на неё высоту в два раза; б) не изменяя его высоту, уменьшить сторону, на которую она опущена, в три раза; в) одну сторону увеличить в четыре раза, а высоту, опущенную на неё, уменьшить в семь раз?
6. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 см и 7 см, а угол между ними равен 30° .
7. Площадь треугольника равна 48 см^2 . Найдите высоту треугольника, проведённую к стороне, равной 32 см.
8. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 200 см^2 .

9. Докажите, что если два треугольника имеют по две равные стороны, а углы, заключённые между ними, в сумме составляют 180° , то эти треугольники равновелики.
10. В параллелограмме одна из его вершин соединена с серединами противоположных сторон и с противоположной вершиной. Докажите, что образовавшиеся при этом треугольники равновелики.
11. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, отсекаемого его средней линией?
12. В треугольнике проведены все средние линии. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, образованного этими линиями?
13. Середины сторон параллелограмма последовательно соединены между собой. Какой получился четырёхугольник и какова его площадь, если площадь данного параллелограмма равна 16 см^2 ?
14. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
15. Найдите геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному треугольнику и имеющих с ним одну общую сторону.
16. В треугольнике ABC две стороны равны a и b . При каком угле между ними площадь треугольника будет наибольшей?
- *17. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.
- *18. Докажите, что если два треугольника имеют по равному углу, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.
- *19. Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см , а площадь больше 1 м^2 ?
- *20. Докажите, что наименьший периметр среди всех треугольников с данной площадью и данной стороной имеет равнобедренный треугольник, основанием которого является данная сторона.
- *21. Будет ли площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей равносторонних треугольников, построенных на его катетах?

- *22. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки равностороннего треугольника до его сторон постоянна и равна высоте этого треугольника.
- *23. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC , стороны которого равны 10, 12, 12.
- *24. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD . Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F (рис. 19.7). Найдите площадь треугольника ADF , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

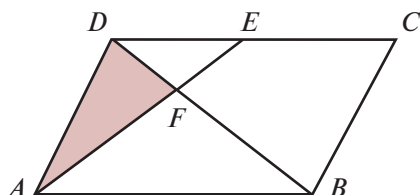


Рис. 19.7

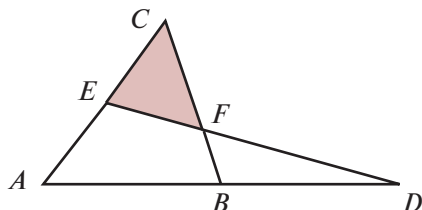


Рис. 19.8

- *25. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка D , $AB = BD$. Через неё и середину E стороны AC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке F (рис. 19.8). Найдите площадь треугольника CEF , если площадь треугольника ABC равна 1.
- *26. Точка C_1 — середина стороны AB треугольника ABC . Точка O — середина отрезка CC_1 . Прямая AO пересекает сторону BC в точке A_1 (рис. 19.9). Найдите площадь треугольника COA_1 , если площадь треугольника ABC равна 1.
- *27. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1 : 2. Точка B_1 делит сторону AC в отношении 2 : 1.

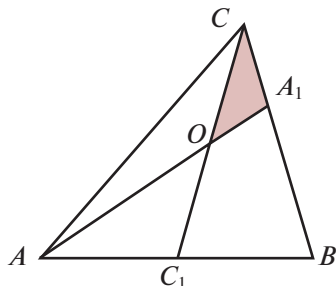


Рис. 19.9

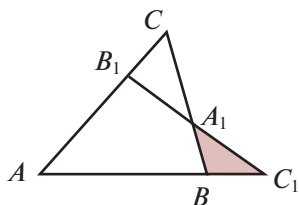


Рис. 19.10

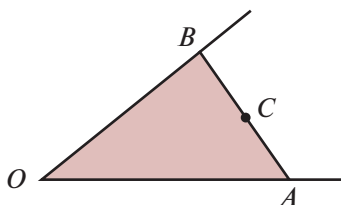


Рис. 19.11

Прямая A_1B_1 пересекает продолжение стороны AB в точке C_1 (рис. 19.10). Найдите площадь треугольника BA_1C_1 , если площадь треугольника ABC равна 1.

- *28. Через точку, расположенную внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади (рис. 19.11).
- *29. В треугольнике ABC заданы стороны $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 19.12). Докажите, что радиус r_c вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AB и AC , выражается формулой

$$r_c = \frac{2S}{a + b - c},$$

где S — площадь этого треугольника.

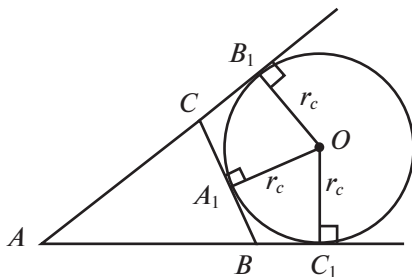


Рис. 19.12

- *30. Для правильного треугольника, стороны которого равны 1, найдите радиус вневписанной окружности.
- *31. Найдите радиусы вневписанных окружностей для равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого равны 1.
- *32. Найдите радиусы вневписанных окружностей для равнобедренного треугольника, основание которого равно 8, а боковые стороны равны 5.

§ 20 Площадь трапеции

ТЕОРЕМА

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Доказательство. Пусть дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, рис. 20.1). Диагональ AC разбивает её на два треугольника, основаниями которых служат основания трапеции и высоты которых равны высоте трапеции h . Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников, т. е.

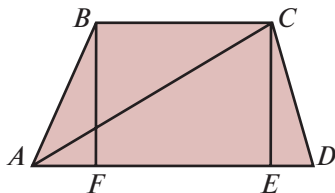


Рис. 20.1

$$S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC} = \frac{1}{2}AD \cdot h + \frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h.$$

Итак, площадь S трапеции с основаниями a , b и высотой h вычисляется по формуле

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

Следствие. Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

Это следует из того, что средняя линия трапеции равна полусумме её оснований.

ПРИМЕР 1. Основания трапеции равны 10 см и 35 см, площадь равна 225 см^2 . Найдите её высоту.

Решение. Средняя линия трапеции равна $\frac{10 + 35}{2} = 22,5$ (см).

Значит, высота трапеции равна $\frac{225}{22,5} = 10$ (см).

ПРИМЕР 2. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания, делит эту трапецию на две равновеликие части.

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$), EF — средняя линия, MN — прямая, проходящая через середину G средней линии и пересекающая основания в точках M

и N (рис. 20.2). Трапеции $AMND$ и $MBCN$ имеют равные средние линии EG и GF соответственно и высоты, равные высоте исходной трапеции. Следовательно, площади этих трапеций равны, т. е. они равновелики.

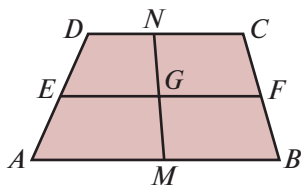


Рис. 20.2

Вопросы

1. Что называется высотой трапеции?
2. Сформулируйте теорему о площади трапеции.
3. Как найти площадь трапеции, зная её среднюю линию и высоту?

Задачи

1. Постройте треугольник, равновеликий данной трапеции.
2. Постройте прямоугольник, равновеликий данной трапеции.
3. Найдите площадь трапеции, основания которой 12 см и 16 см, а высота 15 см.
4. Основания трапеции равны 36 см и 12 см, боковая сторона, равная 7 см, образует с одним из оснований трапеции угол 150° . Найдите площадь трапеции.
5. Основание трапеции равно 26 см, высота 10 см, а площадь 200 см^2 . Найдите второе основание трапеции.
6. Высота трапеции равна 20 см, площадь — 400 см^2 . Найдите среднюю линию трапеции.
7. Площадь трапеции равна 36 см^2 , высота равна 2 см. Найдите основания трапеции, если они относятся как 4 : 5.
8. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 3 см и 1 см, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45° .
9. Найдите площадь трапеции, у которой средняя линия равна 10 см, боковая сторона — 6 см и составляет с одним из оснований угол 150° .
10. Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135° , а высота, проведённая из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.

11. В трапеции проведены диагонали (рис. 20.3). Укажите пары равновеликих треугольников.
12. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, разбивает её на две равновеликие части.
13. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания, делит эту трапецию на две равновеликие части.
14. В треугольнике ABC через точку M пересечения его медиан проведены отрезки, параллельные сторонам треугольника (рис. 20.4). Докажите, что образовавшиеся при этом три трапеции равновелики.
15. В трапеции $ABCD$ точка E — середина боковой стороны AD . Докажите, что площадь треугольника BCE равна половине площади трапеции $ABCD$.
- *16. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найдите её площадь, если площади треугольников, прилежающих к основаниям трапеции, равны S_1 и S_2 .
- *17. Отрезок, соединивший середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, разделил его площадь пополам. Докажите, что этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.
- *18. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь этой трапеции, если её средняя линия равна 4.

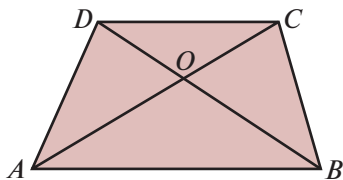


Рис. 20.3

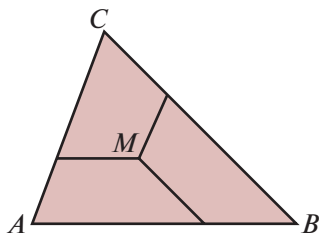


Рис. 20.4

§21 Площадь многоугольника

Площадь произвольного многоугольника можно находить, разбивая его на треугольники. При этом площадь многоугольника будет равна сумме площадей этих треугольников.

ТЕОРЕМА

Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

Доказательство. Многоугольник, описанный около окружности, можно представить составленным из треугольников, сторонами $a_1, \dots, a_n$ которых являются стороны данного многоугольника, а высоты $h_1, \dots, h_n$ равны радиусу r вписанной окружности (рис. 21.1). Поэтому площадь S многоугольника равна сумме площадей треугольников:

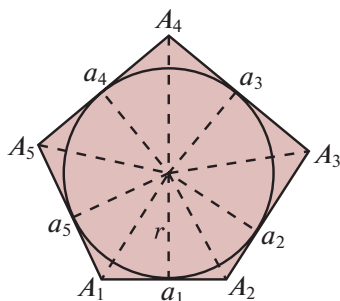


Рис. 21.1

$$S = \frac{1}{2}a_1 \cdot r + \dots + \frac{1}{2}a_n \cdot r = \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_n) \cdot r,$$

т. е. равна половине произведения периметра многоугольника на радиус вписанной окружности.

Итак, площадь S многоугольника с периметром P , описанного около окружности радиусом r , вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}P \cdot r.$$

Следствие. Радиус r окружности, вписанной в многоугольник, выражается формулой

$$r = \frac{2S}{P},$$

где S — площадь многоугольника, P — его периметр.

ПРИМЕР 1. Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности радиусом 1 см.

Решение. Сторона правильного шестиугольника равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. Следовательно, его площадь равна $2\sqrt{3}$ см².

ТЕОРЕМА

Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. Пусть $ABCD$ выпуклый четырёхугольник, O — точка пересечения диагоналей (рис. 21.2). Площадь треугольника AOB равна половине произведения сторон AO и OB на синус угла AOB . Площадь треугольника BOC равна половине произведения сторон BO и OC на синус угла BOC . Складывая эти площади и учитывая, что синусы углов AOB и BOC равны, получаем, что площадь треугольника ABC равна половине произведения AC и OB на синус угла AOB . Аналогично площадь треугольника ACD равна половине произведения AC и OD на синус угла AOD . Складывая эти площади и учитывая, что синусы углов AOB и AOD равны, получаем, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна половине произведения AC и BD на синус угла между ними.

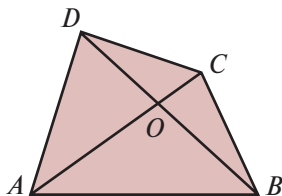


Рис. 21.2

ПРИМЕР 2. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, диагонали которого равны 4 и 6, а угол между ними равен 30° .

Ответ. 6.

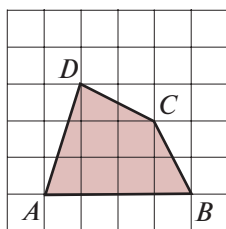
Вопросы

1. Сформулируйте теорему о площади многоугольника, описанного около окружности.
2. Чему равна площадь правильного n -угольника?
3. Чему равна площадь выпуклого четырёхугольника?

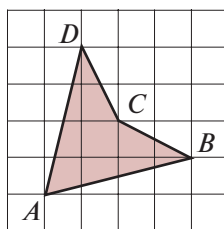
Задачи

1. Около окружности, радиуса 3 см, описан многоугольник, периметром 24 см. Найдите его площадь.
2. Площадь многоугольника, описанного около окружности радиусом 3 см, равна 30 см^2 . Найдите периметр многоугольника.
3. Периметр четырёхугольника равен 100 м. Может ли его площадь быть меньше 1 м^2 , если этот четырёхугольник: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат; д) трапеция?
4. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны и равны 4 см и 5 см. Найдите площадь этого четырёхугольника.
5. Найдите площадь правильного: а) шестиугольника; б) восьмиугольника, стороны которого равны 1.

6. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите площадь четырёхугольника CA_1MB_1 , если площадь данного треугольника равна 12.
7. Середины сторон выпуклого четырёхугольника последовательно соединены между собой. Найдите площадь получившегося четырёхугольника, если площадь данного четырёхугольника равна 16.
8. Вершины A и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соединены отрезками с серединами E и F сторон BC и AD соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $AECF$, если площадь данного четырёхугольника равна 12.
9. Вершины A, B, C, D параллелограмма соединены отрезками с серединами его сторон BC, CD, DA, AB соответственно. Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного этими отрезками, если площадь данного параллелограмма равна 15.
10. Найдите площади четырёхугольников, изображённых на клетчатой бумаге (рис. 21.3), клетками которой являются единичные квадраты.



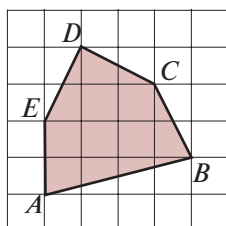
а)



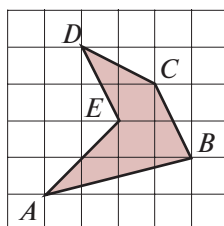
б)

Рис. 21.3

11. Найдите площади пятиугольников, изображённых на клетчатой бумаге (рис. 21.4), клетками которой являются единичные квадраты.



а)



б)

Рис. 21.4

12. Найдите площади многоугольника, изображённого на клетчатой бумаге (рис. 21.5), клетками которой являются единичные квадраты.
13. Вершины квадрата соединены с серединами его сторон, как показано на рисунке 21.6. Найдите площадь закрашенного восьмиугольника, если стороны квадрата равны 12.

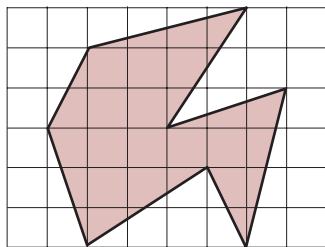


Рис. 21.5

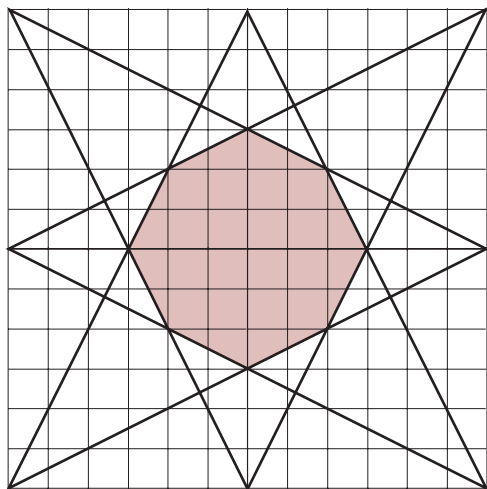


Рис. 21.6

14. Докажите, что если через вершины четырёхугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, образованного этими прямыми, в два раза больше площади данного четырёхугольника.
15. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны равны и параллельны. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.
- *16. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырёхугольника.

- *17. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.
- *18. Около окружности описан четырёхугольник. Найдите площадь четырёхугольника, если две его противоположные стороны равны a и b , радиус окружности равен R .
- *19. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине произведения этих диагоналей.
- *20. Докажите, что из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

§ 22* Равносоставленность и задачи на разрезание

Две фигуры называются *равносоставленными*, если они могут быть разложены на одинаковое число попарно равных фигур.

Из свойств площади следует, что равносоставленные фигуры равновелики. В частности, равносоставленные многоугольники равновелики. Например, изображённые на рисунке 22.1 правильный шестиугольник и параллелограмм — равносоставленные фигуры, так как оба они составлены из шести равных равносторонних треугольников.

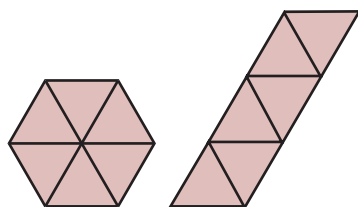


Рис. 22.1

Естественно поставить обратный вопрос: «Всякие ли два равновеликих многоугольника равносоставлены?» Утвердительный ответ был получен в XIX веке.

ТЕОРЕМА

Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Доказательство этой теоремы будет получено как результат применения нескольких теорем.

ТЕОРЕМА 1

Две фигуры, равноставленные с одной и той же фигурой, равноставлены.

Доказательство. Действительно, пусть фигуры Φ' и Φ'' равноставлены с фигурой Φ . Рассмотрим линии, разбивающие фигуру Φ на части, из которых можно составить фигуру Φ' , и, кроме того, линии, разбивающие фигуру Φ на части, из которых можно составить фигуру Φ'' (рис. 22.2). Те и другие линии разбивают фигуру Φ на более мелкие части, из которых можно составить как фигуру Φ' , так и фигуру Φ'' . Таким образом, фигуры Φ' и Φ'' равноставлены.

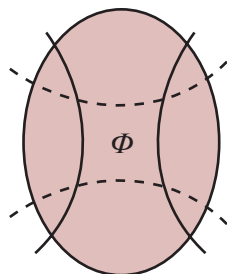


Рис. 22.2

ТЕОРЕМА 2

Любые два равновеликих параллелограмма равноставлены.

Доказательство. Рассмотрим сначала два параллелограмма с равными основаниями (рис. 22.3). По условию они равновелики, значит, имеют равные высоты. Проведём внутри каждого параллелограмма отрезки, параллельные сторонам другого параллелограмма. Тогда оба параллелограмма разобьются на одинаковое число попарно равных фигур, т. е. они равноставлены.

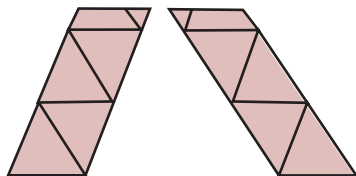


Рис. 22.3

Пусть теперь параллелограммы не имеют равных сторон. Построим третий параллелограмм, имеющий с первым равные сторону и высоту, опущенную на неё. Поскольку при этом другую сторону третьего параллелограмма можно выбирать произвольно, сделаем её равной одной из сторон второго параллелограмма. Тогда третий параллелограмм будет равновелик и с первым, и со вторым параллелограммом и с каждым из них будет иметь по равной

стороне. Следовательно, он равноставлен и с первым, и со вторым. В силу теоремы 1 первый и второй параллелограммы равноставлены.

ТЕОРЕМА 3

Любые два равновеликих треугольника равноставлены.

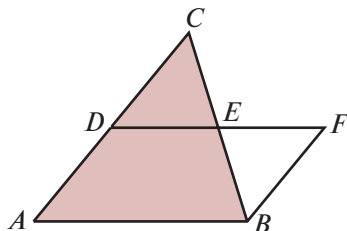


Рис. 22.4

Доказательство. Каждый треугольник продолжением средней линии преобразуется в равновеликий ему параллелограмм (рис. 22.4). Поэтому два равновеликих треугольника преобразуются в два равновеликих параллелограмма. В силу теоремы 2 эти параллелограммы равноставлены, и, следовательно, равноставлены исходные треугольники.

ТЕОРЕМА 4

Всякий многоугольник равноставлен с некоторым треугольником.

Доказательство. Рассмотрим многоугольник $ABCDE\dots$ и одну из его вершин, например C , перенесём параллельно диагонали BD на продолжение стороны DE (рис. 22.5). При этом исходный многоугольник преобразуется в равновеликий многоугольник с числом сторон, на единицу меньшим. Имея в виду, что мы заменили один треугольник другим — равновеликим, а остальная часть многоугольника осталась неизменной, получим, что новый многоугольник будет равноставлен с исходным. Продолжая этот процесс, мы превратим исходный многоугольник в равноставленный с ним треугольник.

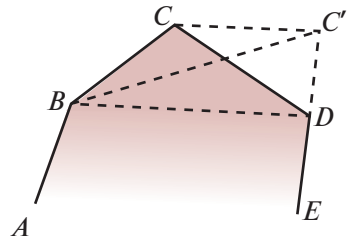


Рис. 22.5

Приступим теперь к доказательству основной теоремы.

Пусть M' и M'' — равновеликие многоугольники. Рассмотрим равноставленные с ними треугольники T' и T'' соответственно. Эти треугольники равновелики, а следовательно, равноставлены. Значит, равноставлены и исходные многоугольники M' и M'' .

Доказанная теорема позволяет, в принципе, разрезать один из двух равновеликих многоугольников на части и складывать из них другой многоугольник. Однако это приводит к большому числу мелких многоугольников. В конкретных примерах, как правило, можно указать гораздо более рациональный способ разрезания.

В качестве применения метода разрезания рассмотрим доказательство теоремы Пифагора. С точки зрения площадей её можно переформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА

Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a , b и гипотенузой c . Доказательство следует из рассмотрения двух равных квадратов со стороной, равной сумме катетов данного прямоугольного треугольника, в которых проведены отрезки, как показано на рисунках 22.6, 22.7. В первом случае квадрат разобьётся на квадрат, построенный на гипотенузе данного треугольника, и четыре треугольника, равных данному. Во втором случае квадрат разобьётся на два квадрата, построенных на катетах данного треугольника, и четыре треугольника, равных данному. Таким образом, $c^2 = a^2 + b^2$.

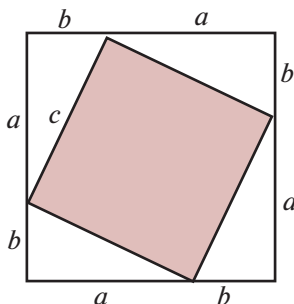


Рис. 22.6

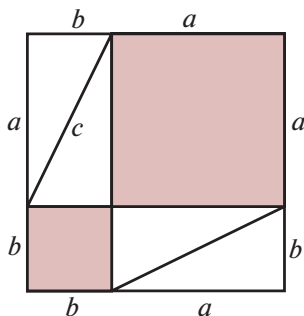


Рис. 22.7

ПРИМЕР 1. Треугольник разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

Решение. Решение показано на рисунке 22.8 (см. с. 117).

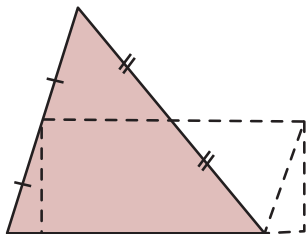


Рис. 22.8

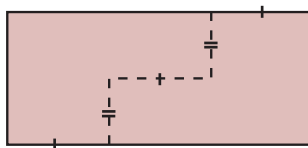


Рис. 22.9

ПРИМЕР 2. Прямоугольник со сторонами 4 и 9 разрежьте на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

Решение. Решение показано на рисунке 22.9.

Дополнительная литература

Смирнова И. М., Смирнов В. А. Многоугольники. — М.: Мнемозина, 2007.

Вопросы

1. Какие фигуры называются равносоставленными?
2. Какие фигуры называются равновеликими?
3. Как связаны между собой равновеликость и равносоставленность произвольных фигур?
4. Как связаны между собой равновеликость и равносоставленность многоугольников?

Задачи

1. Параллелограмм разрежьте на две части, из которых можно сложить прямоугольник.
2. Треугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить параллелограмм.
3. Трапецию разрежьте на две части, из которых можно сложить треугольник.
4. Трапецию разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.
5. Данный прямоугольник разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить: а) треугольник; б) параллелограмм; в) трапецию.
6. Правильный шестиугольник разрежьте на две части, из которых можно составить параллелограмм.
7. Разрежьте правильный восьмиугольник на ромбы.

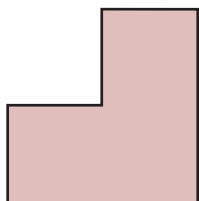


Рис. 22.10

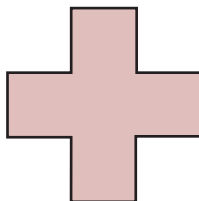


Рис. 22.11

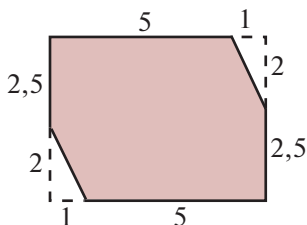


Рис. 22.12

8. Разрежьте изображённую на рисунке 22.10 фигуру, составленную из трёх квадратов, на четыре равные части.
9. Греческий крест (рис. 22.11) разрежьте на несколько частей и составьте из них квадрат.
10. Шестиугольник, изображённый на рисунке 22.12, разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.
11. Используя разрезания, докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.
12. Стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ площади 1 разбиты на n равных частей, AD и BC — на m равных частей. Точки деления соединены так, как показано на рисунке 22.13, где $n = 3$, $m = 4$. Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?
13. Докажите, что никакой выпуклый тринадцатиугольник нельзя разрезать на параллелограммы.
14. Докажите, что всякий правильный $2n$ -угольник можно разрезать на ромбы. Чему равно наименьшее число таких ромбов?
15. Докажите, что всякий выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы.
16. Прямоугольник со сторонами 36 и 64 разрежьте на две части и сложите из них квадрат.

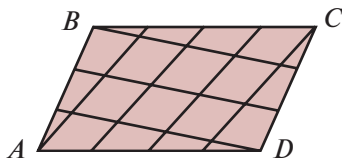


Рис. 22.13

- *17. Докажите, что прямоугольник со сторонами 25 и 49 нельзя разрезать на такие две части, из которых можно сложить квадрат.
- *18. Прямоугольник со сторонами 25 и 49 разрежьте на пять частей и сложите из них квадрат.

§ 23* Использование программы GeoGebra для моделирования фигур на плоскости

Программа GeoGebra — это бесплатная, свободно распространяемая программа. Она позволяет моделировать и решать различные алгебраические и геометрические задачи, строить графики функций, находить наибольшие и наименьшие значения, пределы, производные, интегралы, получать изображения плоских и пространственных фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков.

Кроме того, эта программа позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между геометрическими величинами и мн. др.

Здесь мы рассмотрим возможности GeoGebra для моделирования фигур на плоскости.

Рабочее окно этой программы имеет вид, показанный на рисунке 23.1.

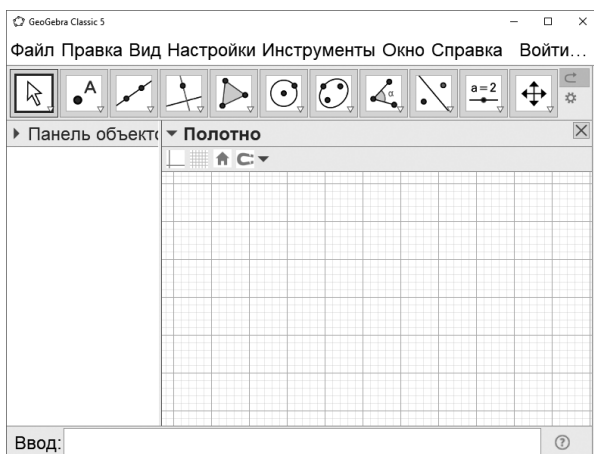


Рис. 23.1

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

1. С помощью инструмента «Прямая» проведём прямую AB .
2. Через точку B проведём прямую BC .
3. С помощью инструмента «Параллельная прямая» через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB .
4. Через точку A проведём прямую, параллельную прямой BC .
5. С помощью инструмента «Пересечение» найдём точку D пересечения этих прямых.
6. С помощью инструмента «Многоугольник» изобразим четырёхугольник с вершинами A, B, C, D .
7. Скроем построенные прямые.
8. Получим параллелограмм $ABCD$ (рис. 23.2).

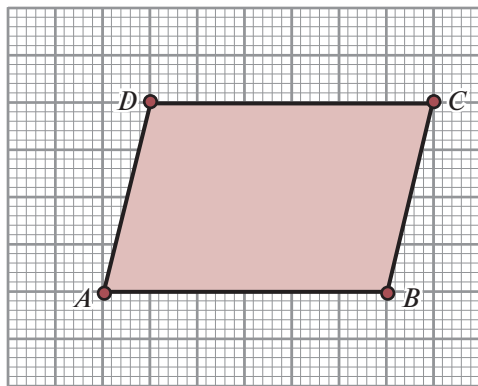


Рис. 23.2

Перемещая «мышкой» точки A, B, C , можно менять форму этого параллелограмма. Также можно менять размеры точек, толщину линий, цвет параллелограмма и др.

ПРЯМОУГОЛЬНИК

1. С помощью инструмента «Прямая» проведём прямую AB .
2. С помощью инструмента «Перпендикулярная прямая» проведём прямую через точку B , перпендикулярную прямой AB .
3. С помощью инструмента «Точка» на этой прямой отметим точку C .
4. Через точку C проведём прямую, перпендикулярную прямой BC .

5. Через точку A проведём прямую, перпендикулярную прямой AB .
6. Найдём точку D пересечения этих прямых.
7. Изобразим четырёхугольник с вершинами A, B, C, D .
8. Скроем построенные прямые.
9. Получим прямоугольник $ABCD$ (рис. 23.3).

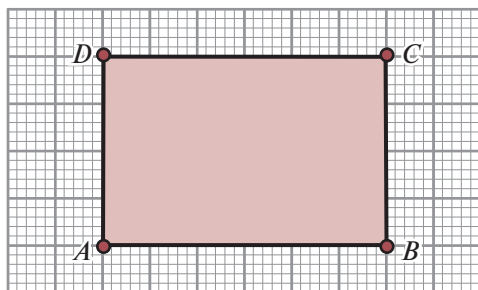


Рис. 23.3

РОМБ

1. С помощью инструмента «Прямая» проведём прямую AB .
2. Через точку B проведём прямую BC .
3. С помощью инструмента «Окружность по центру и точке» проведём окружность с центром B и точкой A .
4. Найдём точку пересечения этой окружности с прямой BC .
5. С помощью инструмента «Переименовать» обозначим C эту точку пересечения.
6. Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB .
7. Через точку A проведём прямую, параллельную прямой BC .
8. Найдём точку D пересечения этих прямых.
9. С помощью инструмента «Многоугольник» изобразим четырёхугольник с вершинами A, B, C, D .
10. Скроем построенные прямые и окружность.
11. Получим ромб $ABCD$ (рис. 23.4).

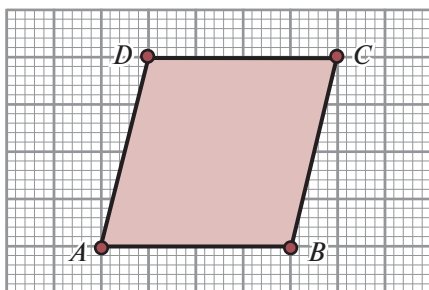
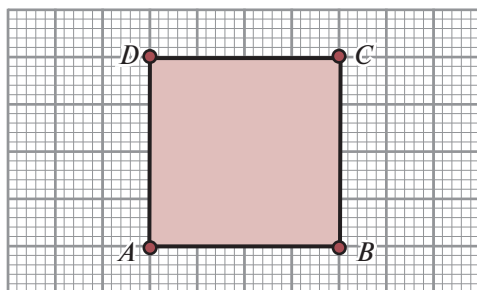


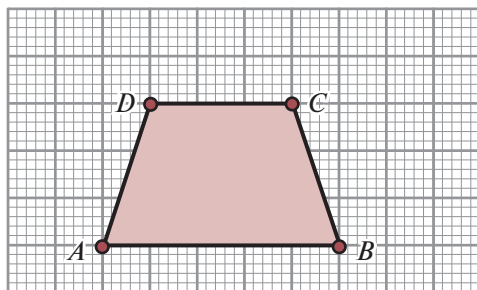
Рис. 22.4

КВАДРАТ

1. С помощью инструмента «Правильный многоугольник» отметим точки A и B .
2. В открывшемся окне поставим 4 и нажмём «Enter».
3. Получим квадрат (рис. 23.5).

**Рис. 23.5****ТРАПЕЦИЯ**

1. С помощью инструмента «Прямая» проведём прямую AB .
2. Через точку B проведём прямую BC .
3. Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB .
4. Через точку A проведём прямую, параллельную прямой BC .
5. Отметим на этой прямой точку D .
6. С помощью инструмента «Многоугольник» изобразим четырёхугольник с вершинами A, B, C, D .
7. Скроем построенные прямые.
8. Получим трапецию $ABCD$ (рис. 23.6).

**Рис. 23.6**

МНОГОУГОЛЬНИК

1. С помощью инструмента «Многоугольник» укажем по очереди все вершины многоугольника, а затем снова укажем первую из них.

2. Получим многоугольник.

На рисунке 23.7 показан пятиугольник, полученный таким образом.

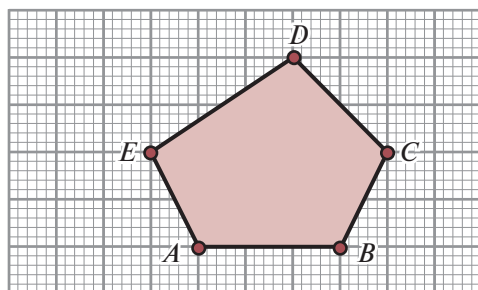


Рис. 23.7

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

1. С помощью инструмента «Правильный многоугольник» отметим точки A и B.

2. В открывшемся окне поставим число сторон правильного многоугольника и нажмём «Enter».

3. Получим правильный многоугольник с заданным числом сторон.

На рисунке 23.8 показан правильный шестиугольник, полученный таким образом.

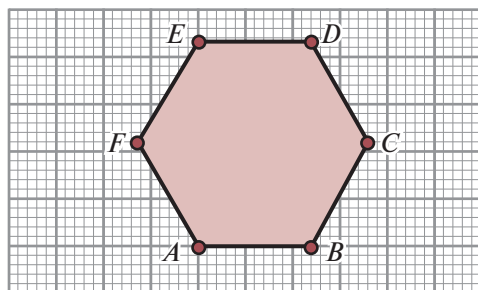


Рис. 23.8

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. С помощью инструмента «Многоугольник» построим треугольник ABC .

2. С помощью инструмента «Середина или центр» отметим середины сторон AC и BC .

3. С помощью инструмента «Отрезок» соединим отмеченные точки отрезком.

4. Получим среднюю линию треугольника ABC (рис. 23.9).

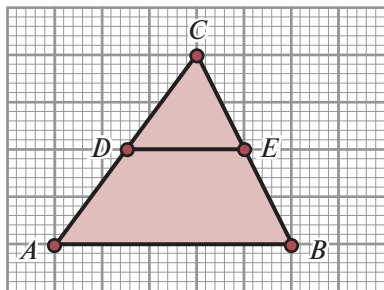


Рис. 23.9

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

1. Построим трапецию $ABCD$.

2. С помощью инструмента «Середина или центр» отметим середины сторон AD и BC .

3. С помощью инструмента «Отрезок» соединим отмеченные точки отрезком.

4. Получим среднюю линию трапеции $ABCD$ (рис. 23.10).

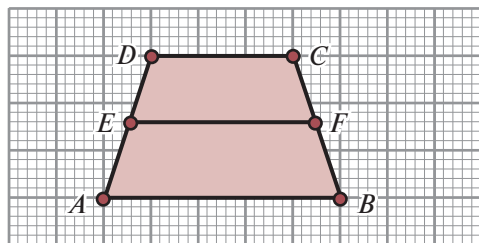


Рис. 23.10

ТЕОРЕМА О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ

1. С помощью инструмента «Луч» построим лучи AB и AC .

2. Проведём прямую BC .

3. На луче AB отметим точку D .

4. Проведём через точку D прямую, параллельную прямой BC .

5. Найдём точку E пересечения прямых AC и EF .

6. С помощью инструмента «Текст» в режиме LaTeX-формула наберём $AB/AD =$. Откроем «пустую рамку» и в ней наберём AB/AD . Нажмём «ОК» и получим текст $AB/AD = 1.5$ (в программе используется десятичная точка вместо запятой).

7. Аналогичным образом получим текст $AC/AE = 1.5$ (рис. 23.11).

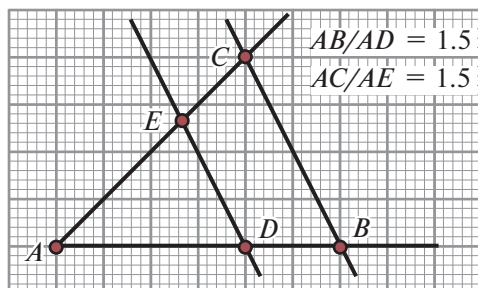


Рис. 23.11

8. Перемещая точки B , C , D , убеждаемся, что имеет место равенство отношений AB/AD и AC/AE .

ВПИСАННЫЙ УГОЛ

1. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построим окружность с центром O и радиусом 3.
2. Отметим на этой окружности какую-нибудь точку C .
3. С вершиной в точке C проведём два луча пересекающие окружность в точках A и B .
4. С помощью инструмента «Угол» найдём величину угла ACB (рис. 23.12).

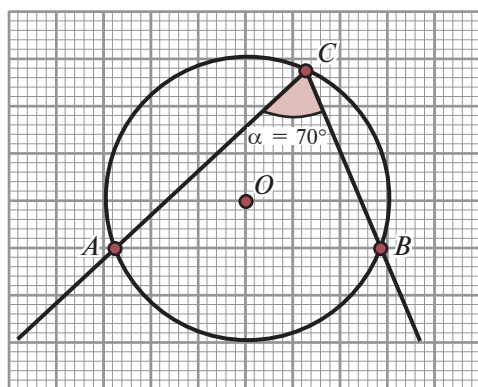


Рис. 23.12

5. Перемещая точку C по дуге окружности, убеждаемся, что величина этого угла остаётся неизменной.

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Построим треугольник ABC .

2. С помощью инструмента «Серединный перпендикуляр» проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC . Их точка пересечения O будет центром описанной окружности.

3. Построим окружность с центром O и точкой A . Она будет искомой окружностью, описанной около данного треугольника (рис. 23.13).

4. Заметим, что эту окружность можно было получить непосредственно, используя инструмент «Окружность по трём точкам».

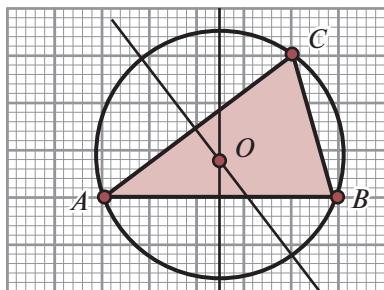


Рис. 23.13

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

1. Построим треугольник ABC .

2. С помощью инструмента «Биссектриса угла» построим биссектрисы углов BAC и ABC . Их точка пересечения O будет центром вписанной окружности.

3. Через точку O проведём прямую, перпендикулярную прямой AB . Обозначим D их точку пересечения.

4. С центром в точке O через точку D проведём окружность (любым подходящим инструментом). Она будет искомой окружностью, вписанной в треугольник ABC (рис. 23.14).

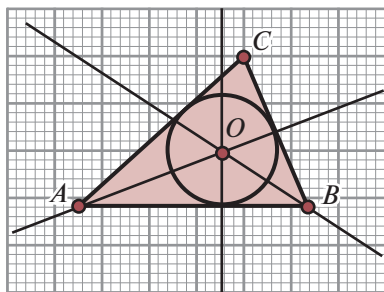


Рис. 23.14

ВЫСОТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Построим треугольник ABC .

2. Проведём прямые AB , AC , BC .

3. Через точки A , B , C проведём прямые, перпендикулярные соответственно прямым BC , AC , AB . Обозначим A_1 , B_1 , C_1 их точки пересечения.

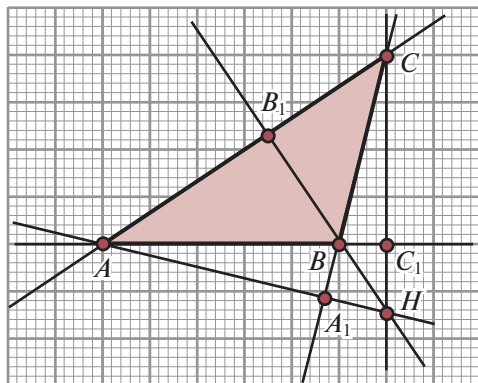


Рис. 23.15

4. Отметим, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 содержат высоты треугольника ABC и пересекаются в одной точке.

5. Изменяя положения точек A , B , C , можно убедиться, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (рис. 23.15).

МЕДИАНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Построим треугольник ABC .
2. Отметим середины его сторон.
3. Проведём отрезки, соединяющие вершины этого треугольника с серединами противоположных сторон.
4. Изменяя форму треугольника ABC , можно убедиться, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 23.16).

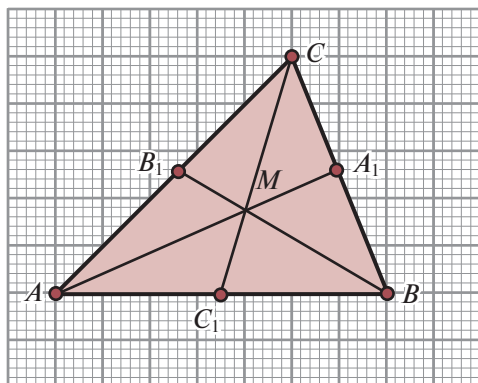


Рис. 23.16

ОКРУЖНОСТЬ ЭЙЛЕРА

1. Построим треугольник ABC .

2. Построим середины сторон AB , AC , BC . Обозначим их соответственно C_1 , B_1 , A_1 .

3. Проведём высоты AA_2 , BB_2 , CC_2 . Обозначим H их точку пересечения.

4. Отметим середины отрезков AH , BH , CH . Обозначим их соответственно A_3 , B_3 , C_3 .

5. Через какие-нибудь три точки из полученных девяти точек проведём окружность. Убедимся в том, что она пройдёт и через все оставшиеся точки (рис. 23.17).

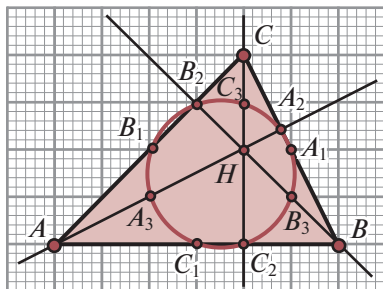


Рис. 23.17

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

1. Построим лучи AB и AD .

2. Через точку B проведём прямую, перпендикулярную прямой AD . Обозначим C её точку пересечения с прямой AD .

3. С помощью инструмента «Угол» найдём величину угла A .

4. С помощью инструмента «Текст» в режиме LaTeX-формула наберём $\sin A =$. Откроем «пустую рамку» и в ней наберём BC/AB . Нажмём «ОК», и для данного угла получим текст $\sin A = 0.62$.

5. Аналогичным образом получим текст $\cos A = 0.78$.

6. Перемещая точку B , получаем значения тригонометрических функций различных углов A (рис. 23.18).

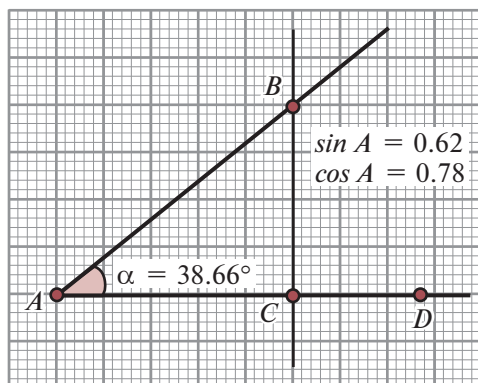


Рис. 23.18

ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Построим многоугольник.
2. С помощью инструмента «Площадь» найдём его площадь (рис. 23.19).

Задачи

1. Изобразите параллелограмм, стороны которого равны 3, 4, а один из углов равен 30° .
2. Изобразите ромб, стороны которого равны 5, а один из углов равен 60° .
3. Изобразите правильный пятиугольник.
4. Изобразите среднюю линию треугольника (рис. 23.20).

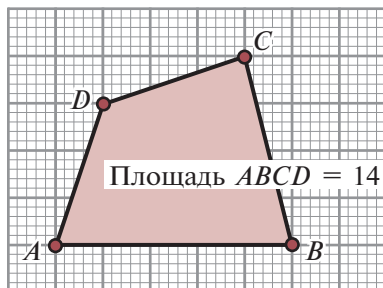


Рис. 23.19

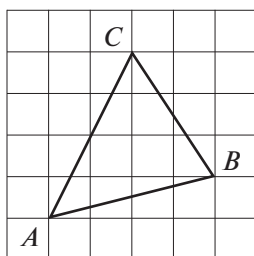


Рис. 23.20

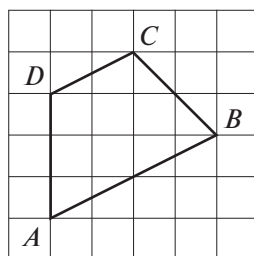


Рис. 23.21

5. Изобразите среднюю линию трапеции (рис. 23.21).
6. Найдите величину острого угла, опирающегося на хорду AB (рис. 23.22).

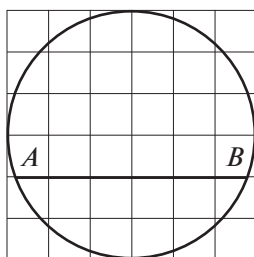


Рис. 23.22

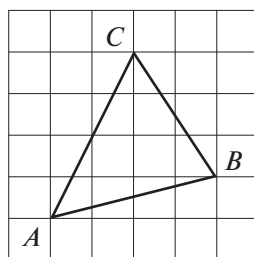


Рис. 23.23

7. Изобразите окружность, описанную около треугольника (рис. 23.23). Найдите её радиус.

8. Изобразите окружность, вписанную в треугольник (рис. 23.24). Найдите её радиус.

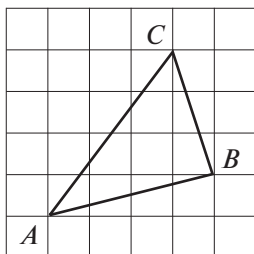


Рис. 23.24

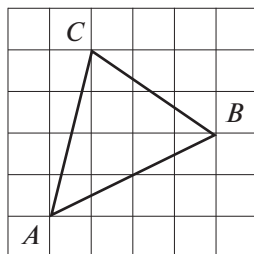


Рис. 23.25

9. Изобразите точку пересечения высот треугольника (рис. 23.25).
 10. Изобразите точку пересечения медиан треугольника (рис. 23.26).

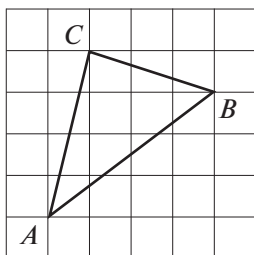


Рис. 23.26

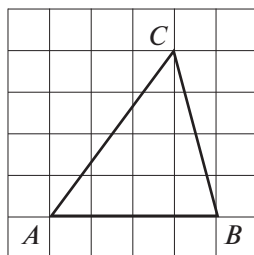


Рис. 23.27

11. Для треугольника ABC изобразите внеписанную окружность, касающуюся стороны BC (рис. 23.27).
 12. Изобразите окружность Эйлера треугольника ABC (рис. 23.28).

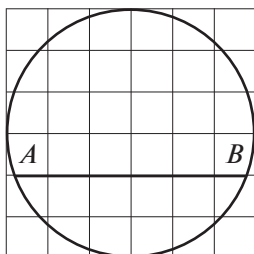


Рис. 23.28

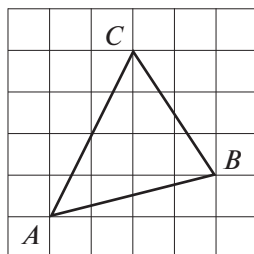


Рис. 23.29

13. Изобразите прямую Симсона (рис. 23.29 на с. 130).
14. Найдите площадь треугольника (рис. 23.30).

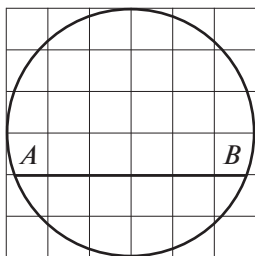


Рис. 23.30

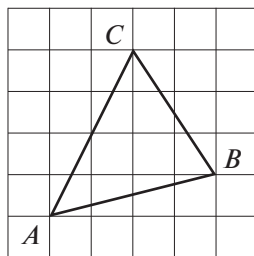


Рис. 23.31

15. Найдите площадь четырёхугольника (рис. 23.31).

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ

1. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

1. Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите большую сторону параллелограмма.

2. Периметр параллелограмма равен 30. Одна сторона параллелограмма в два раза меньше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

3. Две стороны параллелограмма относятся как $3 : 4$, а периметр его равен 70. Найдите большую сторону параллелограмма.

4. Один угол параллелограмма больше другого на 70° . Найдите больший угол параллелограмма.

5. Сумма двух углов параллелограмма равна 130° . Найдите один из оставшихся углов.

6. Разность двух углов параллелограмма равна 80° . Найдите меньший угол параллелограмма.

7. Один угол параллелограмма в два раза больше другого. Найдите больший угол параллелограмма.

8. Найдите меньший угол параллелограмма, если два его угла относятся как $4 : 5$.

9. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 26° и 34° . Найдите больший угол параллелограмма.

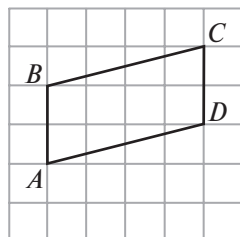
10. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне.

11. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $3:4$, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.

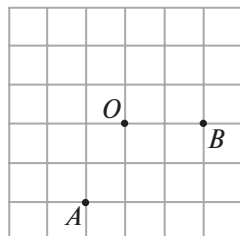
12. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.

13. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.

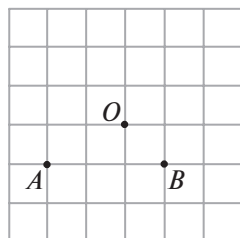
14. Найдите высоту параллелограмма $ABCD$, опущенную на сторону AB , если стороны квадратных клеток равны 1.



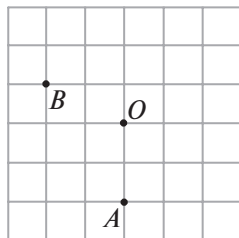
15. Изобразите параллелограмм $ABCD$, двумя вершинами которого являются точки A , B , а O — точка пересечения диагоналей.



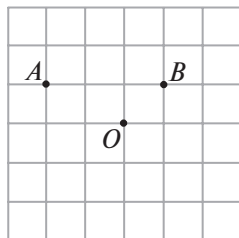
16. Изобразите параллелограмм $ABCD$, двумя вершинами которого являются точки A , B , а O — точка пересечения диагоналей.



17. Изобразите параллелограмм $ABCD$, двумя вершинами которого являются точки A , B , а O — точка пересечения диагоналей.



18. Изобразите параллелограмм $ABCD$, двумя вершинами которого являются точки A , B , а O — точка пересечения диагоналей.



2. ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ

1. Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 28, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 24.

2. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 34, диагональ AC равна 13. Найдите периметр треугольника ABC .

3. Угол между диагональю ромба и его стороной равен 30° . Найдите угол между другой диагональю ромба и той же стороной.

4. Диагональ прямоугольника образует с его стороной угол 58° . Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

5. Угол между диагоналями прямоугольника равен 30° . Найдите угол, который образует диагональ этого прямоугольника с его большей стороной.

6. Один из углов ромба равен 50° . Найдите больший из углов, которые образуют диагонали этого ромба с его сторонами.

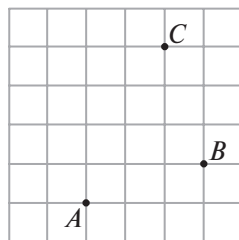
7. Меньшая сторона прямоугольника равна 6, диагонали пересекаются под углом 60° . Найдите диагональ прямоугольника.

8. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении $1:2$, меньшая его сторона равна 8. Найдите диагональ данного прямоугольника.

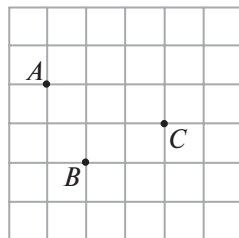
9. Расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до одной из его сторон равно 7. Найдите периметр этого квадрата.

10. Найдите меньшую диагональ ромба, стороны которого равны 2, а острый угол равен 60° .

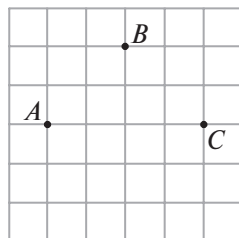
11. Изобразите квадрат $ABCD$, тремя вершинами которого являются точки A , B , C .



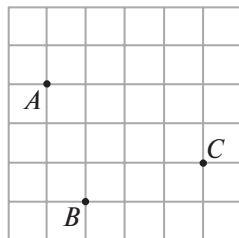
12. Изобразите квадрат $ABCD$, тремя вершинами которого являются точки A , B , C .



13. Изобразите квадрат $ABCD$, тремя вершинами которого являются точки A , B , C .



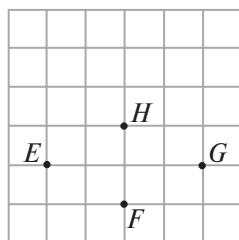
14. Изобразите квадрат $ABCD$, тремя вершинами которого являются точки A , B , C .



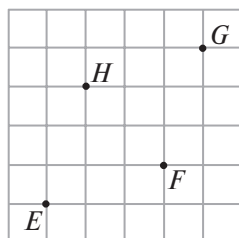
15. Изобразите ромб, диагонали которого равны 2 и 4. Стороны квадратных клеток равны 1.

16. Изобразите ромб, диагонали которого равны 6 и 2. Стороны квадратных клеток равны 1.

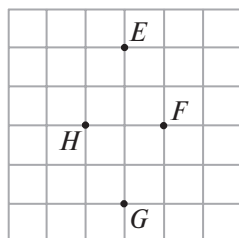
17. Изобразите прямоугольник, серединами сторон которого являются точки E , F , G , H .



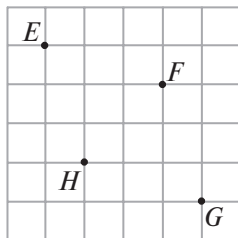
18. Изобразите прямоугольник, серединами сторон которого являются точки E , F , G , H .



19. Изобразите прямоугольник, серединами сторон которого являются точки E , F , G , H .



20. Изобразите прямоугольник, серединами сторон которого являются точки E , F , G , H .



3. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА. ТРАПЕЦИЯ

1. Середины последовательных сторон прямоугольника, диагональ которого равна 5, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.

2. Периметр треугольника равен 30. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

3. Диагонали четырёхугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

4. Периметр треугольника ABC равен 24, DE — средняя линия, параллельная AB . Найдите периметр треугольника CDE .

5. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 220° . Найдите меньший угол трапеции.

6. Разность двух углов равнобедренной трапеции равна 50° . Найдите больший угол трапеции.

7. Один угол равнобедренной трапеции в два раза больше другого. Найдите меньший угол этой трапеции.

8. Два противоположных угла равнобедренной трапеции относятся как 4 : 5. Найдите меньший угол трапеции.

9. Угол между основанием и диагональю равнобедренной трапеции равен 30° . Найдите угол между диагоналями трапеции.

10. Угол между диагоналями равнобедренной трапеции равен 76° . Найдите угол между основанием и диагональю трапеции.

11. Найдите среднюю линию трапеции, если её основания равны 30 и 16.

12. Средняя линия трапеции равна 28, а основание равно 18. Найдите другое основание трапеции.

13. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

14. В равнобедренной трапеции большее основание равно 25, боковая сторона равна 10, угол между ними 60° . Найдите меньшее основание.

15. В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 27, острый угол равен 60° . Найдите её периметр.

16. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.

17. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 4. Найдите среднюю линию этой трапеции.

18. Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен 45° . Найдите высоту трапеции.

19. Периметр трапеции равен 50, а сумма непараллельных сторон равна 20. Найдите среднюю линию трапеции.

20. Боковые стороны трапеции равны 24 и 26. Средняя линия равна 28. Найдите периметр трапеции.

21. Основания трапеции относятся как $2 : 3$, а средняя линия равна 5. Найдите меньшее основание.

22. Периметр равнобедренной трапеции равен 80, её средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции.

23. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из её оснований больше другого на 4. Найдите большее основание трапеции.

24. Средняя линия трапеции равна 12. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 2. Найдите большее основание трапеции.

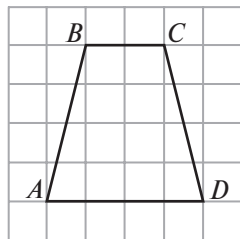
25. Основания трапеции равны 6 и 4. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

26. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите её среднюю линию.

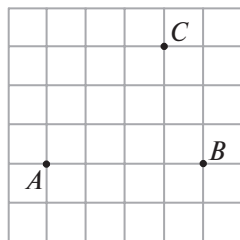
27. Диагонали четырёхугольника равны 3 и 7. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

28. Периметр трапеции равен 24. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне через вершину меньшего основания, отсекает треугольник, периметр которого равен 12. Найдите меньшее основание трапеции.

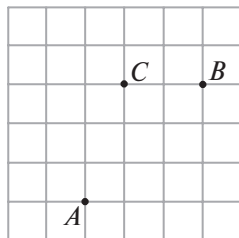
29. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



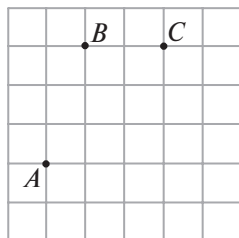
30. Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$, тремя вершинами которой являются точки A , B , C .



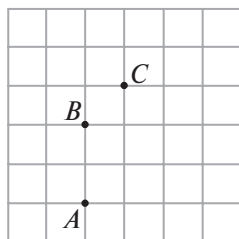
31. Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$, тремя вершинами которой являются точки A , B , C .



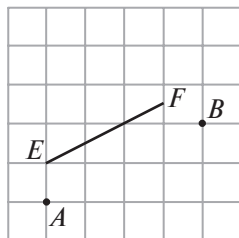
32. Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$, тремя вершинами которой являются точки A , B , C .



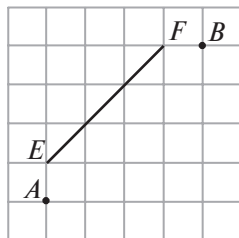
33. Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$, тремя вершинами которой являются точки A , B , C .



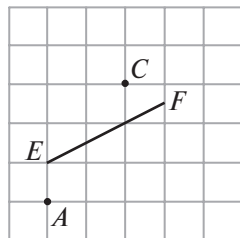
34. Изобразите трапецию $ABCD$, двумя вершинами которой являются точки A и B , а средней линией — отрезок EF .



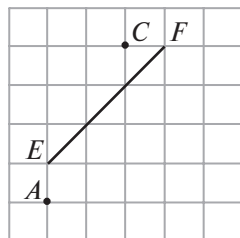
35. Изобразите трапецию $ABCD$, двумя вершинами которой являются точки A и B , а средней линией — отрезок EF .



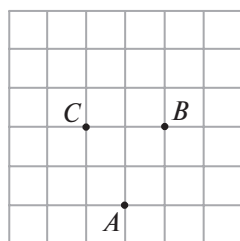
36. Изобразите трапецию $ABCD$, двумя вершинами которой являются точки A и C , а средней линией — отрезок EF .



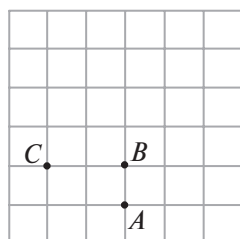
37. Изобразите трапецию $ABCD$, двумя вершинами которой являются точки A и C , а средней линией — отрезок EF .



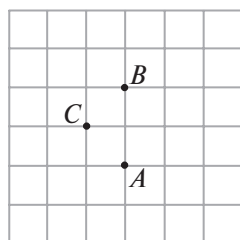
38. Изобразите треугольник, серединами сторон которого являются точки A , B , C .



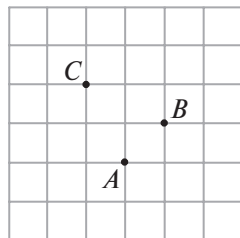
39. Изобразите треугольник, серединами сторон которого являются точки A , B , C .



40. Изобразите треугольник, серединами сторон которого являются точки A , B , C .



41. Изобразите треугольник, серединами сторон которого являются точки A , B , C .



4. УГЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

1. Вписанный угол на 36° меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.

2. Центральный угол на 38° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите центральный угол.

3. Найдите центральный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{6}$ окружности.

4. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности.

5. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 10 % окружности.

6. Найдите острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности.

7. Найдите тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности.

8. Радиус окружности равен 1. Найдите острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную $\sqrt{2}$.

9. Радиус окружности равен 1. Найдите тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную $\sqrt{2}$.

10. Радиус окружности равен 1. Найдите острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную $\sqrt{3}$.

11. Радиус окружности равен 1. Найдите тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную $\sqrt{3}$.

12. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $5:7$. Под какими углами видна эта хорда из точек меньшей дуги окружности?

13. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $5:7$. Под какими углами видна эта хорда из точек большей дуги окружности?

14. Хорда AB стягивает дугу окружности в 92° . Найдите угол между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B .

15. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32° . Найдите градусную величину дуги, стягиваемой хордой AB .

16. Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC . Найдите угол ACB .

17. Касательные CA и CB (A и B — точки касания) к окружности образуют угол ACB , равный 122° . Найдите градусную величину меньшей дуги окружности, стягиваемой точками касания.

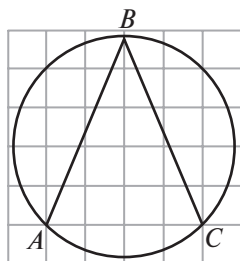
18. Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности в точке A , O — центр окружности, а дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 64° .

19. Угол ACO равен 28° . Его сторона CA касается окружности в точке A , O — центр окружности. Найдите градусную величину меньшей дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла.

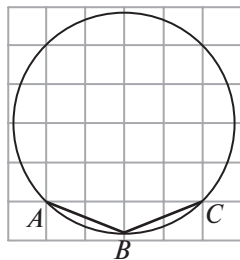
20. Угол ACD равен 24° . Его сторона CA касается окружности в точке A , сторона CD содержит диаметр BD окружности. Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла.

21. Найдите угол ACD , если его сторона CA касается окружности в точке A , сторона CD содержит диаметр BD , а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 116° .

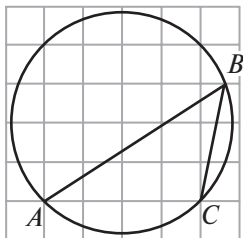
22. Найдите величину угла ABC .



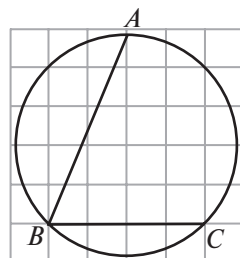
23. Найдите величину угла ABC .



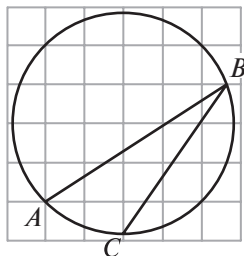
24. Найдите величину угла ABC .



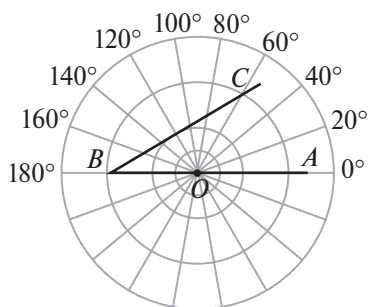
25. Найдите градусную величину дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC .



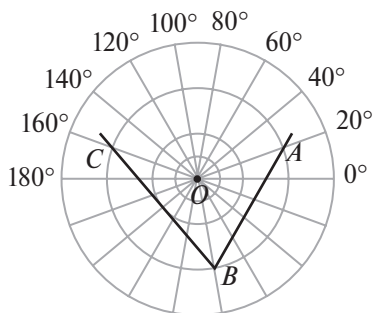
26. Найдите градусную величину дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC .



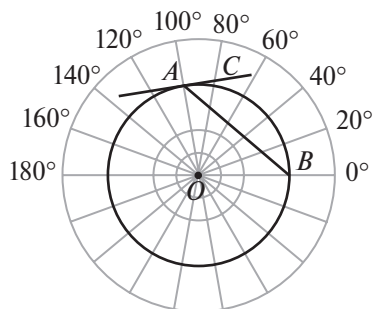
27. Найдите величину угла ABC .



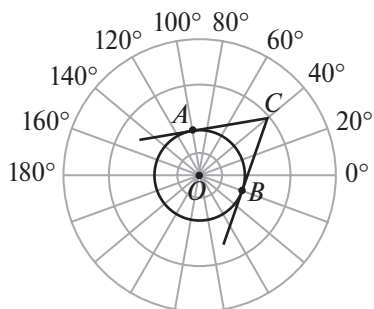
28. Найдите величину угла ABC .



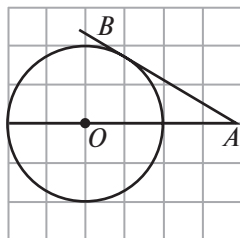
29. Найдите величину угла CAB между касательной AC и хордой AB окружности.



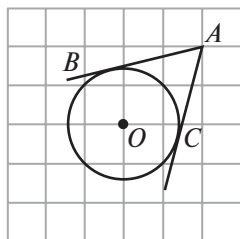
30. Найдите величину угла ACB , стороны которого касаются окружности в точках A и B .



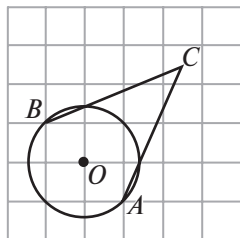
31. Через точку A проведена касательная AB к окружности. Найдите угол OAB .



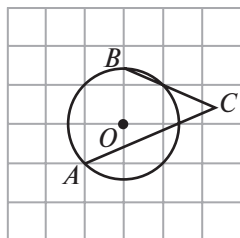
32. Через точку A проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания) к окружности. Найдите угол BAC .



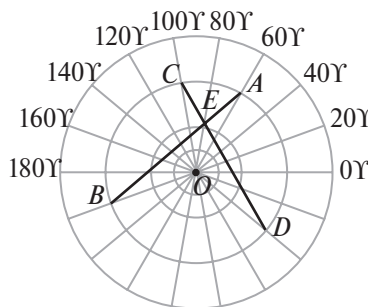
33. Найдите величину угла ACB .



34. Найдите угол ACB .



35. Найдите величину угла BED .



5. МНОГОУГОЛЬНИКИ, ВПИСАННЫЕ В ОКРУЖНОСТЬ

1. Точки A , B , C , расположенные на окружности, делят её на три дуги, градусные величины которых относятся как $1 : 3 : 5$. Найдите меньший угол треугольника ABC .

2. Точки A , B , C , расположенные на окружности, делят её на три дуги, градусные величины которых относятся как $3 : 2 : 4$. Найдите больший угол треугольника ABC .

3. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 58° . Найдите угол C четырёхугольника.

4. Угол B четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 110° . Найдите угол D четырёхугольника.

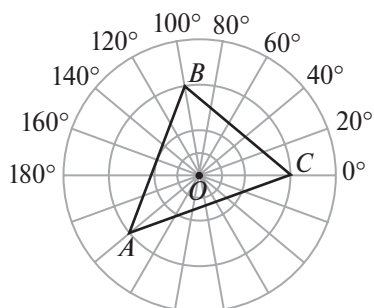
5. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 82° и 58° . Найдите меньший из оставшихся углов.

6. Стороны четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги AB , BC , CD и DA описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95° , 49° , 71° , 145° . Найдите угол A четырёхугольника.

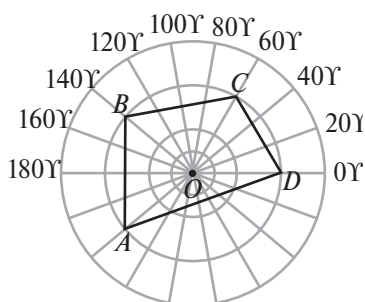
7. Стороны четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги AB , BC , CD и DA описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 96° , 44° , 68° , 152° . Найдите острый угол между диагоналями этого четырёхугольника.

8. Углы A , B и C четырёхугольника $ABCD$ относятся как $1:2:3$. Найдите угол D , если около данного четырёхугольника можно описать окружность.

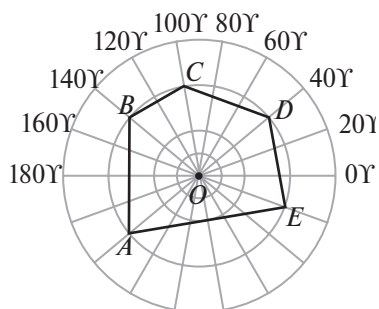
9. Найдите угол B треугольника ABC .



10. Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$.



11. Найдите угол A пятиугольника $ABCDE$.



12. Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

13. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.

14. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности.

15. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.

16. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.

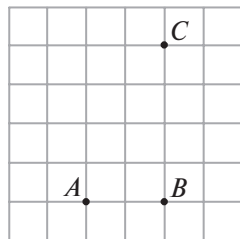
17. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.

18. Меньшая сторона прямоугольника равна 6. Угол между диагоналями равен 60° . Найдите диаметр описанной окружности.

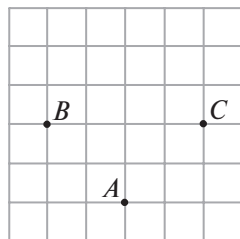
19. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 6?

20. Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.

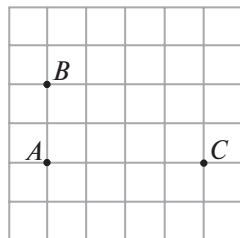
21. Отметьте центр окружности, проходящей через точки A , B и C .



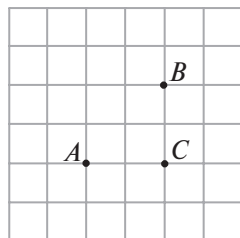
22. Отметьте центр окружности, проходящей через точки A , B и C .



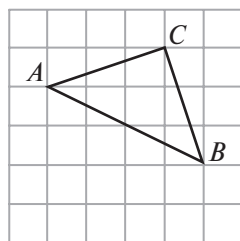
23. Отметьте центр окружности, проходящей через точки A , B и C .



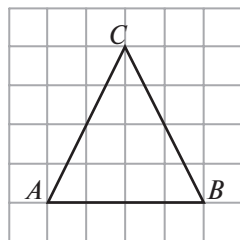
24. Отметьте центр окружности, проходящей через точки A , B и C .



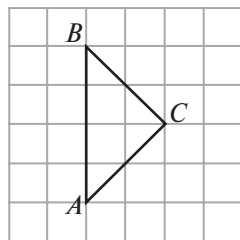
25. Отметьте центр окружности, описанной около треугольника ABC .



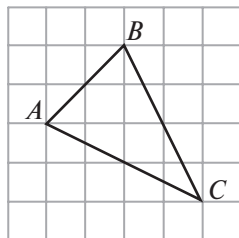
26. Отметьте центр окружности, описанной около треугольника ABC .



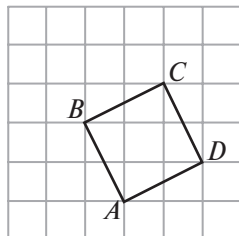
27. Отметьте центр окружности, описанной около треугольника ABC .



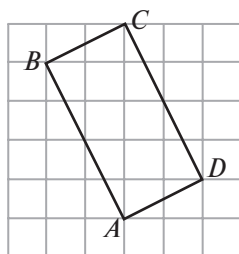
28. Отметьте центр окружности, описанной около треугольника ABC .



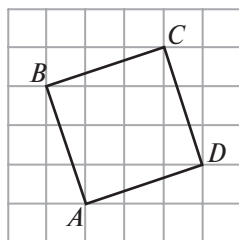
29. Отметьте центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$.



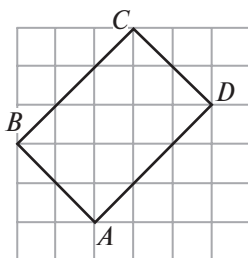
30. Отметьте центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$.



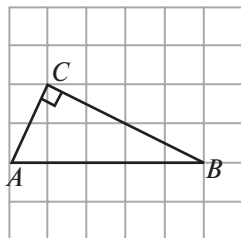
31. Отметьте центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$.



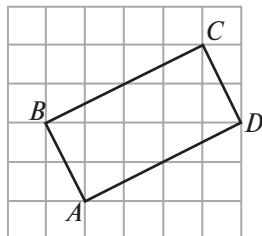
32. Отметьте центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$.



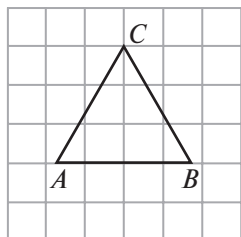
33. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC , если стороны квадратных клеток равны 1.



34. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



35. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



6. МНОГУГОЛЬНИКИ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ

1. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.

2. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.

3. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат со стороной 4.

4. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности радиуса 4.

5. Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 1.

6. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника.

7. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

8. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите её среднюю линию.

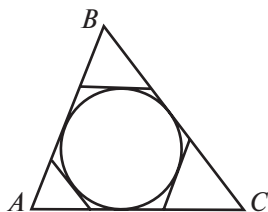
9. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 16$. Найдите периметр четырёхугольника.

10. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из оставшихся сторон.

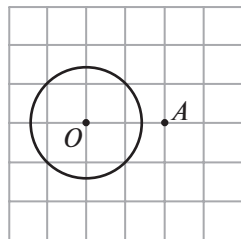
11. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 11$ и $CD = 15$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

12. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $1 : 2 : 3$. Найдите бо́льшую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 32.

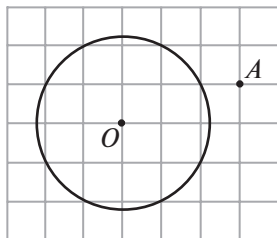
13. К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсечённых треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



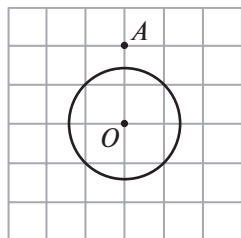
14. Проведите касательную к окружности, проходящую через точку A . Отметьте точку касания.



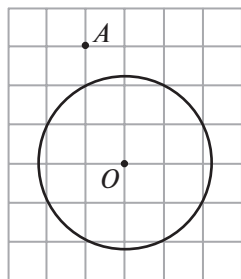
15. Проведите касательную к окружности, проходящую через точку A . Отметьте точку касания.



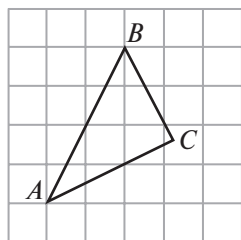
16. Проведите касательную к окружности, проходящую через точку A . Отметьте точку касания.



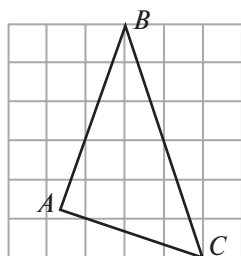
17. Проведите касательную к окружности, проходящую через точку A . Отметьте точку касания.



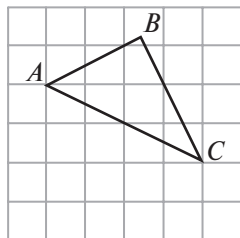
18. Отметьте центр окружности, вписанной в треугольник ABC .



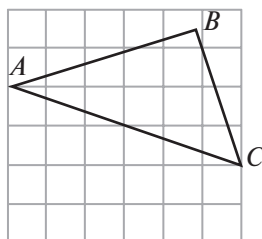
19. Отметьте центр окружности, вписанной в треугольник ABC .



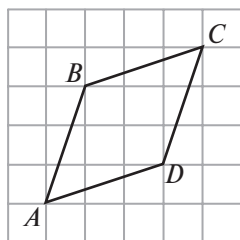
20. Отметьте центр окружности, вписанной в треугольник ABC .



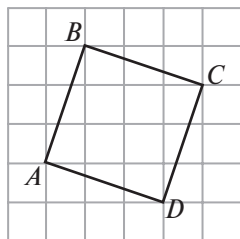
21. Отметьте центр окружности, вписанной в треугольник ABC .



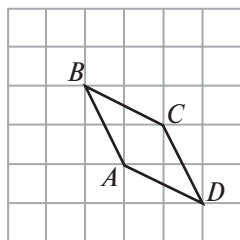
22. Отметьте центр окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$.



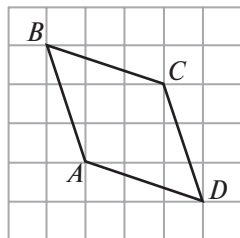
23. Отметьте центр окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$.



24. Отметьте центр окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$.



25. Отметьте центр окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$.



7. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $AC = 12$, $BC = 15$, $CE = 10$, угол ABC равен углу DEC . Найдите CD .

2. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $AC = 6$, $BC = 9$, $CD = 4$, угол ABC равен углу DEC . Найдите CE .

3. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $AB = 6$, $BC = 12$, $CE = 8$, угол ABC равен углу DEC . Найдите DE .

4. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $AB = 9$, $BC = 15$, $DE = 3$, угол ABC равен углу DEC . Найдите CE .

5. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $AB = 6$, $AC = 12$, $CD = 4$, угол ABC равен углу DEC . Найдите DE .

6. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $AB = 12$, $AC = 9$, $DE = 4$, угол ABC равен углу DEC . Найдите CD .

7. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $CE = 6$, $CD = 4$, $BC = 15$, угол BAC равен углу EDC . Найдите AC .

8. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $CE = 8$, $CD = 10$, $AC = 25$, угол BAC равен углу EDC . Найдите BC .

9. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $DE = 10$, $CE = 8$, $BC = 20$, угол BAC равен углу EDC . Найдите AB .

10. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $DE = 12$, $CE = 9$, $AB = 20$, угол BAC равен углу EDC . Найдите BC .

11. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $DE = 6$, $CD = 9$, $AC = 15$, угол BAC равен углу EDC . Найдите AB .

12. Точки D и E принадлежат сторонам соответственно AC и BC треугольника ABC , $DE = 9$, $CD = 12$, $AB = 15$, угол BAC равен углу EDC . Найдите AC .

13. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $AE = 8$, $BE = 6$, $CE = 3$, AB параллельна CD . Найдите DE .

14. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $AE = 10$, $BE = 6$, $DE = 5$, AB параллельна CD . Найдите CE .

15. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $AB = 8$, $BE = 4$, $CE = 2$, AB параллельна CD . Найдите CD .

16. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $AB = 9$, $BE = 6$, $CD = 3$, AB параллельна CD . Найдите CE .

17. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $AB = 12$, $AE = 15$, $DE = 5$, AB параллельна CD . Найдите CD .

18. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $AB = 15$, $AE = 9$, $CD = 5$, AB параллельна CD . Найдите DE .

19. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $CE = 4$, $DE = 6$, $AE = 9$, AB параллельна CD . Найдите BE .

20. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $CE = 3$, $DE = 6$, $BE = 2$, AB параллельна CD . Найдите AE .

21. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $CE = 3$, $CD = 8$, $BE = 9$, AB параллельна CD . Найдите AB .

22. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $CE = 3$, $CD = 6$, $AB = 8$, AB параллельна CD . Найдите BE .

23. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $DE = 4$, $CD = 2$, $AE = 10$, AB параллельна CD . Найдите AB .

24. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E , $DE = 5$, $CD = 3$, $AB = 12$, AB параллельна CD . Найдите AE .

25. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $AE = 10$, $AD = 6$, $DF = 5$. Найдите DB .

26. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $AE = 8$, $AD = 6$, $DB = 3$. Найдите DF .

27. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $AE = 12$, $DE = 6$, $DF = 4$. Найдите BF .

28. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $AE = 10$, $DE = 8$, $BF = 4$. Найдите DF .

29. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $AD = 6$, $DE = 9$, $BF = 3$. Найдите BD .

30. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $AD = 6$, $DE = 8$, $BD = 3$. Найдите BF .

31. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $BD = 3$, $BF = 4$, $AD = 9$. Найдите DE .

32. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $BD = 2$, $BF = 4$, $DE = 12$. Найдите AD .

33. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $BD = 4$, $DF = 2$, $AD = 6$. Найдите AE .

34. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $BD = 6$, $DF = 8$, $AE = 12$. Найдите AD .

35. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $BF = 4$, $DF = 5$, $AE = 15$. Найдите DE .

36. Точки D , E и F принадлежат сторонам соответственно AB , AC и BC треугольника ABC , DF параллельна AC , DE параллельна BC , $BF = 2$, $DF = 5$, $DE = 8$. Найдите AE .

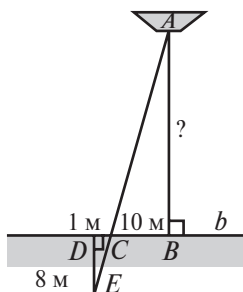
37. $ABCD$ и $AEFG$ — прямоугольники, точки B и D принадлежат сторонам соответственно AE и AG , точка C принадлежит диагонали AF , $AB = 9$, $AD = 6$, $AE = 12$. Найдите AG .

38. $ABCD$ и $AEFG$ — прямоугольники, точки B и D принадлежат сторонам соответственно AE и AG , точка C принадлежит диагонали AF , $AB = 6$, $AD = 4$, $AG = 6$. Найдите AE .

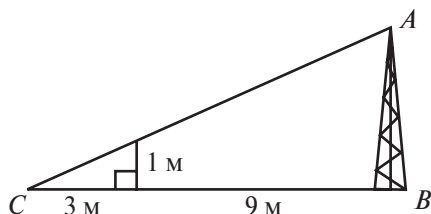
39. $ABCD$ и $AEFG$ — прямоугольники, точки B и D принадлежат сторонам соответственно AE и AG , точка C принадлежит диагонали AF , $AE = 12$, $AG = 9$, $AB = 8$. Найдите AD .

40. $ABCD$ и $AEFG$ — прямоугольники, точки B и D принадлежат сторонам соответственно AE и AG , точка C принадлежит диагонали AF , $AE = 15$, $AG = 10$, $AD = 6$. Найдите AB .

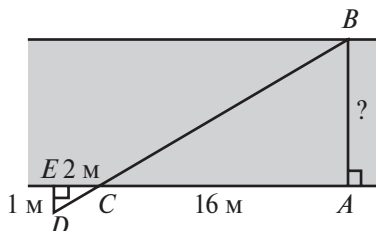
41. Используя данные, приведённые на рисунке, найдите расстояние AB от лодки A до берега b .



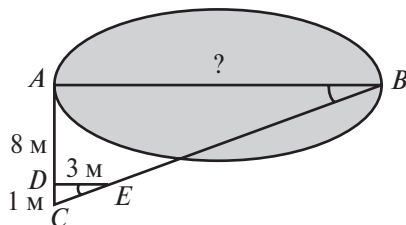
42. Используя данные, приведённые на рисунке, найдите высоту мачты AB .



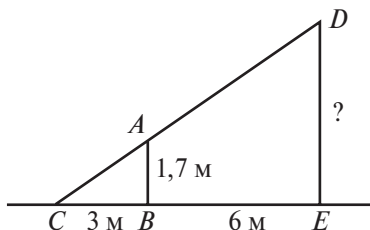
43. Используя данные, приведённые на рисунке, найдите ширину AB реки.



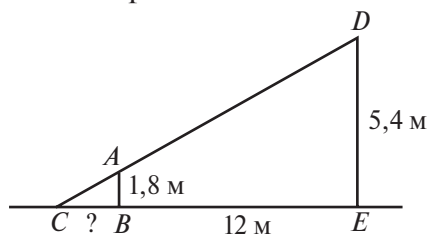
44. Используя данные, приведённые на рисунке, найдите ширину AB озера.



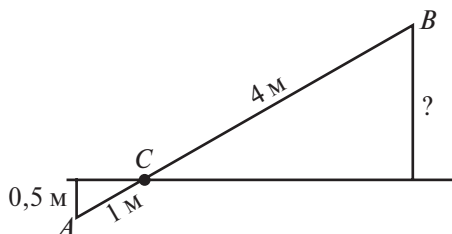
45. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырём шагам. На какой высоте расположен фонарь?



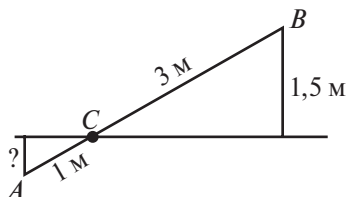
46. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.



47. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное плечо — 4 м. На какую высоту поднимается конец длинного плеча, когда конец короткого плеча опускается на 0,5 м?



48. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное плечо — 3 м. На какую высоту опускается конец короткого плеча, когда конец длинного плеча поднимается на 1,5 м?



8. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите гипотенузу.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26. Один из его катетов равен 10. Найдите другой катет.

3. В треугольнике ABC $AB = BC = AC = \sqrt{3}$. Найдите высоту CH .
4. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $\sqrt{3}$. Найдите стороны этого треугольника.
5. Один катет прямоугольного треугольника в два раза больше другого. Гипотенуза равна $2\sqrt{5}$. Найдите больший катет.
6. Один катет прямоугольного треугольника в три раза больше другого. Гипотенуза равна $2\sqrt{10}$. Найдите меньший катет.
7. Один катет прямоугольного треугольника равен 4. Гипотенуза на 2 больше другого катета. Найдите гипотенузу.
8. Один катет прямоугольного треугольника равен $4\sqrt{2}$. Другой катет в три раза меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу.
9. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10. Основание равно 12. Найдите высоту, опущенную на основание.
10. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 13. Высота, опущенная на основание, равна 12. Найдите основание.
11. Основание равнобедренного треугольника равно 16. Высота, опущенная на основание, равна 6. Найдите боковую сторону.
12. Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{8}$.
13. Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{18}$.
14. Найдите сторону ромба, диагонали которого равны 10 и 24.

15. Стороны ромба равны 5. Одна из его диагоналей равна 6. Найдите другую диагональ.

16. В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 9, боковые стороны равны 5. Найдите высоту трапеции.

17. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 4. Высота равна 4. Найдите боковую сторону.

18. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 6. Меньшая боковая сторона равна 8. Найдите вторую боковую сторону трапеции.

19. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 3. Большая боковая сторона равна 5. Найдите меньшую боковую сторону.

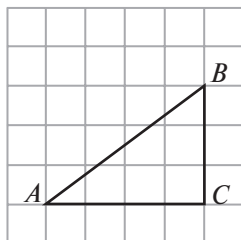
20. Мальчик прошёл от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошёл 600 м. На каком расстоянии от дома оказался мальчик?

21. Мальчик и девочка, расставшись на перекрёстке, пошли по перпендикулярным дорогам, мальчик со скоростью 4 км/ч, девочка — 3 км/ч. Какое расстояние (в км) будет между ними через 30 мин?

22. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?

23. В 12 м одна от другой растут две сосны. Высота одной равна 11 м, а другой — 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.

24. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника. Стороны квадратных клеток равны 1.



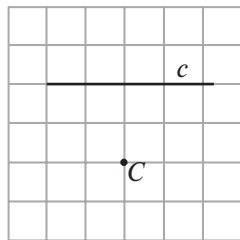
25. Изобразите отрезок, длина которого равна $\sqrt{10}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

26. Изобразите отрезок, длина которого равна $\sqrt{5}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

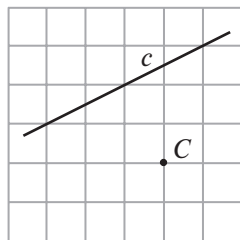
27. Изобразите отрезок, длина которого равна $\sqrt{13}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

28. Изобразите отрезок, длина которого равна $3\sqrt{2}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

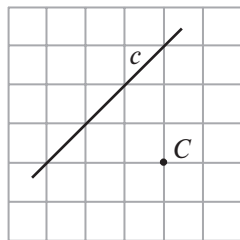
29. На прямой c отметьте точки, удалённые от точки C на расстояние, равное $\sqrt{5}$. Стороны квадратных клеток равны 1.



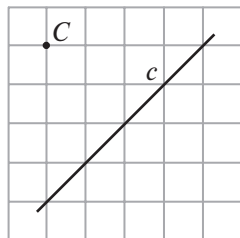
30. На прямой c отметьте точки, удалённые от точки C на расстояние, равное $\sqrt{10}$. Стороны квадратных клеток равны 1.



31. На прямой c отметьте точки, удалённые от точки C на расстояние, равное $\sqrt{5}$. Стороны квадратных клеток равны 1.



32. На прямой c отметьте точки, удалённые от точки C на расстояние, равное $\sqrt{10}$. Стороны квадратных клеток равны 1.



33. Изобразите треугольник со сторонами, равными $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

34. Изобразите треугольник со сторонами, равными 3, 4, 5. Стороны квадратных клеток равны 1.

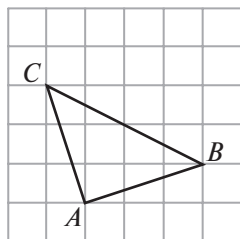
35. Изобразите треугольник со сторонами, равными 4, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

36. Изобразите треугольник со сторонами, равными 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

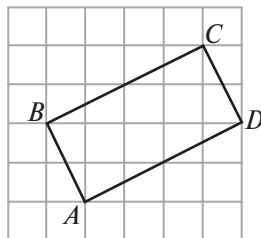
37. Изобразите ромб, диагонали которого равны $\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

38. Изобразите ромб, диагонали которого равны $2\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Стороны квадратных клеток равны 1.

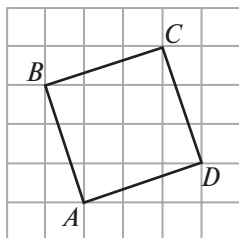
39. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную на сторону BC . Стороны квадратных клеток равны 1.



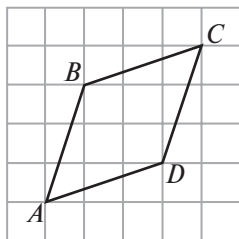
40. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$. Стороны квадратных клеток равны 1.



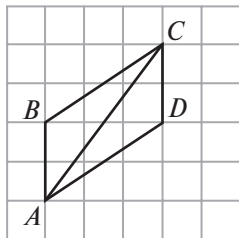
41. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$. Стороны квадратных клеток равны 1.



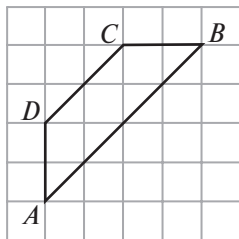
42. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$. Стороны квадратных клеток равны 1.



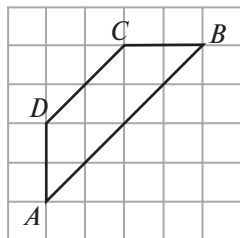
43. Найдите диагональ AC параллелограмма $ABCD$. Стороны квадратных клеток равны 1.



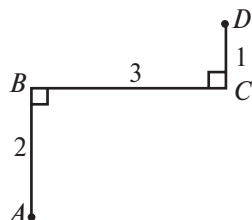
44. Найдите высоту трапеции $ABCD$. Стороны квадратных клеток равны 1.



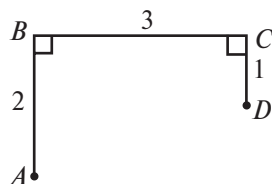
45. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$. Стороны квадратных клеток равны 1.



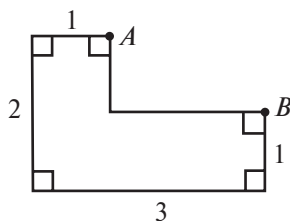
46. На рисунке отрезки AB и CD перпендикулярны BC . Найдите квадрат расстояния между точками A и D .



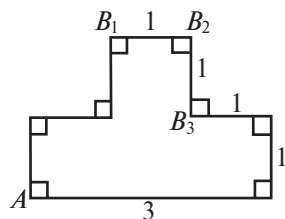
47. На рисунке отрезки AB и CD перпендикулярны BC . Найдите квадрат расстояния между точками A и D .



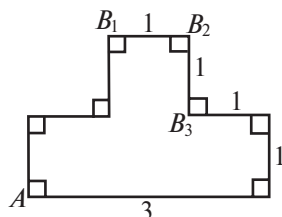
48. Найдите квадрат расстояния между точками A и B , изображёнными на рисунке.



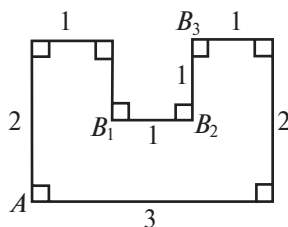
49. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_1 , изображёнными на рисунке.



50. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_2 , изображёнными на рисунке.



51. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_3 , изображёнными на рисунке.



52. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_1 , изображёнными на рисунке.

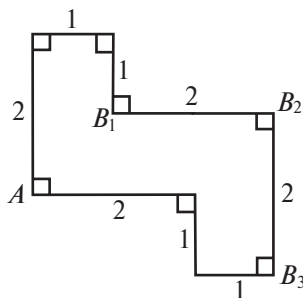
53. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_2 , изображёнными на рисунке.

54. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_3 , изображёнными на рисунке.

55. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_1 , изображёнными на рисунке.

56. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_2 , изображёнными на рисунке.

57. Найдите квадрат расстояния между точками A и B_3 , изображёнными на рисунке.



9. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $AC = 8$. Найдите $\sin A$.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $BC = 6$. Найдите $\cos A$.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $AC = 8$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $BC = 6$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,6$. Найдите $\cos A$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,8$. Найдите $\sin A$.

7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,6$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,8$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите $\sin A$.

10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите $\cos A$.

11. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,6$. Найдите $\cos B$.

12. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,8$. Найдите $\sin B$.

13. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AC = 10$, $AH = 8$. Найдите $\cos B$.

14. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 10$, $BH = 6$. Найдите $\cos A$.

15. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 10$, высота CH равна 6. Найдите $\sin B$.

16. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 5$, высота CH равна 4. Найдите $\sin A$.

17. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AC = 10$, $AH = 8$. Найдите $\sin B$.

- 18.** В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 10$, $BH = 6$. Найдите $\sin A$.
- 19.** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 10$, высота CH равна 6. Найдите $\cos B$.
- 20.** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 10$, высота CH равна 8. Найдите $\cos A$.
- 21.** В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 12$. Найдите $\sin A$.
- 22.** В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 12$. Найдите $\cos A$.
- 23.** В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Найдите $\operatorname{tg} A$.
- 24.** В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 16$, высота CH равна 6. Найдите $\operatorname{tg} A$.
- 25.** В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота AH равна 8. Найдите $\sin A$.
- 26.** В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота AH равна 8. Найдите $\cos A$.
- 27.** В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, AH — высота, $BH = 6$. Найдите $\cos A$.
- 28.** В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, AH — высота, $\sin A = 0,8$. Найдите косинус угла BAH .
- 29.** В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, AH — высота, $BH = 6$. Найдите $\sin A$.
- 30.** В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, AH — высота, $\sin A = 0,8$. Найдите синус угла BAH .
- 31.** В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 5$, CH — высота, $AH = 4$. Найдите синус угла ACB .
- 32.** В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AB = 10$, высота CH равна 8. Найдите косинус угла ABC .

33. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, CH — высота, $AB = 10$, $BH = 6$. Найдите синус угла ABC .

34. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 16$, высота CH равна 8. Найдите синус угла ACB .

35. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, высота CH равна 6. Найдите косинус угла ACB .

36. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 5$, CH — высота, $AH = 4$. Найдите косинус угла ACB .

37. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, высота CH равна 8, $AH = 16$. Найдите тангенс угла ACB .

38. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AB = 10$, высота CH равна 8. Найдите синус угла ABC .

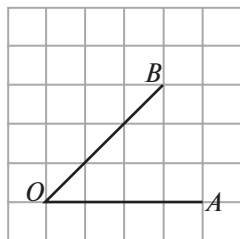
39. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, CH — высота, $AB = 10$, $BH = 6$. Найдите косинус угла ABC .

40. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, высота CH равна 8, $BH = 4$. Найдите тангенс угла ABC .

41. Найдите синус угла AOB .

42. Найдите косинус угла AOB .

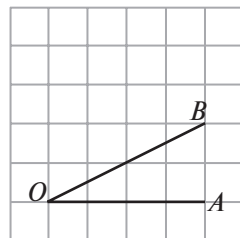
43. Найдите тангенс угла AOB .



44. Найдите синус угла AOB .

45. Найдите косинус угла AOB .

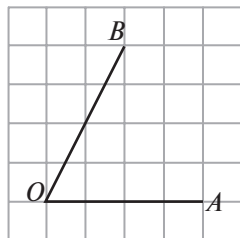
46. Найдите тангенс угла AOB .



47. Найдите синус угла AOB .

48. Найдите косинус угла AOB .

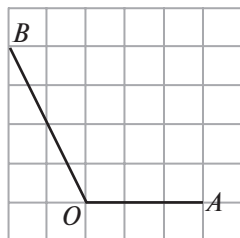
49. Найдите тангенс угла AOB .



50. Найдите синус угла AOB .

51. Найдите косинус угла AOB .

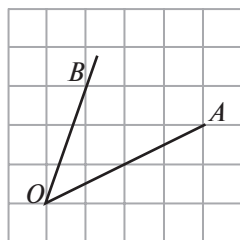
52. Найдите тангенс угла AOB .



53. Найдите синус угла AOB .

54. Найдите косинус угла AOB .

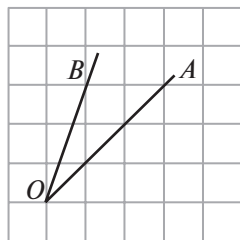
55. Найдите тангенс угла AOB .



56. Найдите синус угла AOB .

57. Найдите косинус угла AOB .

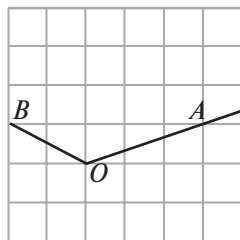
58. Найдите тангенс угла AOB .



59. Найдите синус угла AOB .

60. Найдите косинус угла AOB .

61. Найдите тангенс угла AOB .



10. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AB = 4$. Найдите BC .

2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $BC = 3$. Найдите AB .

3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC .

4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB .

5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите BC .

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $BC = 2\sqrt{3}$. Найдите AC .

7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите BC .

8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $BC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB .

9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AB = 2$. Найдите AC .

10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AC = 2$. Найдите AB .

11. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите BC .

12. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $BC = 2\sqrt{3}$. Найдите AC .

13. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° , $AB = 2\sqrt{2}$. Найдите BC .

14. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° , $AC = 2\sqrt{2}$. Найдите AB .

15. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° , $AC = 3$. Найдите BC .

16. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 4$, $\sin A = 0,8$. Найдите AB .

17. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{2}{3}$, $AC = 8$. Найдите AB .

18. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,75$, $BC = 9$. Найдите AC .

19. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,6$, $AC = 4$. Найдите AB .

20. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,8$, $BC = 3$. Найдите AB .

21. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,75$, $AC = 8$. Найдите AB .

22. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .

23. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 30° , $AB = 2$. Найдите AH .

24. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 30° , $AB = 4$. Найдите BH .

25. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° , $AB = 2$. Найдите высоту CH .

26. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AB = 25$, $\cos A = 0,8$. Найдите AH .

27. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AB = 25$, $\sin A = 0,6$. Найдите BH .

28. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .

29. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 60° , $AB = 4$. Найдите AH .

30. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 60° , $AB = 12$. Найдите BH .

31. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\cos A = 0,6$. Найдите AB .

32. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 18$, $\cos A = 0,6$. Найдите AC .

33. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\sin A = 0,8$. Найдите AB .

34. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 18$, $\sin A = 0,8$. Найдите AC .

35. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, $\sin A = 0,6$. Найдите высоту CH .

36. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите высоту CH .

37. В треугольнике ABC $AC = BC = 4$, угол C равен 30° . Найдите высоту AH .

38. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 4, угол C равен 30° . Найдите AC .

39. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{2}$, угол C равен 45° . Найдите высоту AH .

40. В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\sin A = 0,8$. Найдите высоту AH .

41. В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\cos A = 0,6$. Найдите высоту AH .

42. В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\sin A = 0,8$, AH — высота. Найдите BH .

43. В остроугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\cos A = 0,6$, AH — высота. Найдите BH .

44. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, $\sin C = 0,6$. Найдите высоту CH .

45. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, $\cos C = 0,8$, CH — высота. Найдите AH .

46. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, $\cos C = 0,8$. Найдите высоту CH .

47. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 5$, $\sin C = 0,6$, CH — высота. Найдите AH .

48. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{3}$, угол C равен 120° . Найдите высоту AH .

49. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC .

50. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB .

51. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{2}$, угол C равен 135° . Найдите высоту AH .

52. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 150° . Найдите высоту AH .

53. Мальчик прошёл от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошёл 600 м. Под каким углом к направлению на запад он должен идти, чтобы вернуться домой? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)

54. Грибник, войдя в лес, в течение двух часов шёл по направлению на север, а затем с той же скоростью в течение полутора часов — на восток. Под каким углом к направлению на юг он должен идти, чтобы вернуться к месту, где он вошёл в лес? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)

55. Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла ещё 100 м. Под каким углом к направлению на восток она должна идти, чтобы вернуться домой? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)

56. Маятник длиной 50 см отклонили от положения равновесия на расстояние, равное 12 см. Найдите угол, который образует новое положение маятника с положением равновесия. В ответе укажите целое число градусов.

57. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Найдите угол подъёма в градусах. В ответе укажите целое число градусов.

58. Человек, пройдя вверх по склону холма 1000 м, поднялся на 90 м над плоскостью основания холма. Найдите (в среднем) угол наклона холма в градусах. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.

59. Найдите приближённое значение угла, под которым виден столб высотой 3 м, находящийся от наблюдателя на расстоянии 100 м. В ответе укажите целое число градусов.

60. Строение высотой 30 м бросает тень длиной 45 м. Найдите угол наклона солнечных лучей. В ответе укажите целое число градусов.

61. Найдите угол наклона солнечных лучей, если длина тени стоящего человека в два раза меньше его роста. В ответе укажите целое число градусов.

62. Лестница длиной 10 м приставлена к стене. Её нижний конец отстоит от стены на 6 м. Найдите угол наклона лестницы. В ответе укажите целое число градусов.

63. Лестница имеет ступеньки, ширина которых равна 30 см, а высота — 18 см. Найдите угол подъёма лестницы. В ответе укажите приближённое значение, выраженное целым числом градусов.

64. Высота башни главного здания МГУ имени М. В. Ломоносова равна 240 м. Под каким углом видна эта башня с расстояния 150 м? В ответе укажите целое число градусов.

65. Высота Останкинской телевизионной башни — 540 м. Найдите угол в градусах, под которым видна башня с расстояния 2000 м. В ответе укажите целое число градусов.

11. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

1. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.

2. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 2.

3. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 4 и 9.

4. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна сумме площадей квадратов со сторонами 5 и 12.

5. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна разности площадей квадратов со сторонами 10 и 6.

6. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его стороны увеличить в три раза?

7. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18 и одна сторона на 3 больше другой.

8. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 30, а отношение соседних сторон равно $1 : 2$.

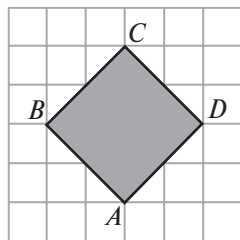
9. Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.

10. Площадь квадрата равна 12. Найдите площадь квадрата, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата.

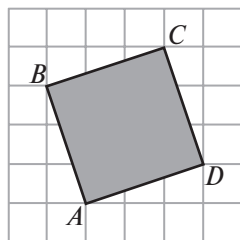
11. Площадь квадрата, описанного около окружности, равна 36. Найдите площадь квадрата, вписанного в эту окружность.

12. Площадь квадрата, вписанного в окружность, равна 8. Найдите площадь квадрата, описанного около этой окружности.

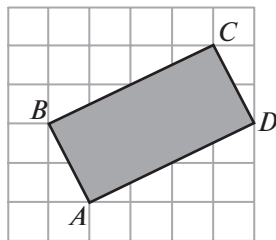
13. Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



14. Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



15. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



12. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

1. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 8 и 10, а угол между ними равен 30° .

2. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 1, а один из углов равен 150° .

3. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

4. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

5. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите бóльшую высоту этого параллелограмма.

6. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол 30° .

7. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.

8. Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.

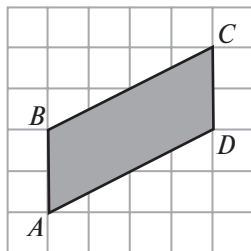
9. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.

10. Середины сторон параллелограмма последовательно соединены между собой. Найдите площадь образовавшегося четырёхугольника, если площадь данного параллелограмма равна 20.

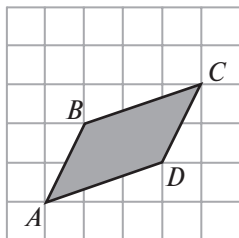
11. Площадь прямоугольника равна 12. Найдите площадь ромба, вершинами которого являются середины сторон данного прямоугольника.

12. Найдите площадь ромба, стороны которого равны 3, а радиус вписанной в него окружности равен 1.

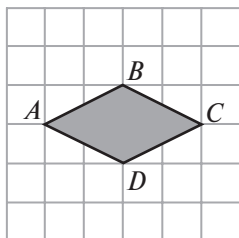
13. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



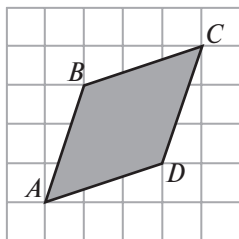
14. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



15. Найдите площадь ромба $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



16. Найдите площадь ромба $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



13. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 5 и 8.

2. Площадь прямоугольного треугольника равна 16. Один из его катетов равен 4. Найдите другой катет.

3. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.

4. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.

5. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30° .

6. Площадь треугольника равна 4. Найдите площадь треугольника, отсекаемого от данного его средней линией.

7. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

8. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.

9. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 9.

10. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 100.

11. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.

12. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

13. Периметр треугольника равен 14, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

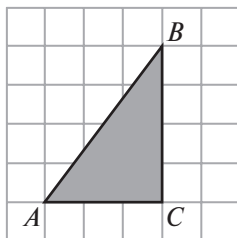
14. Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.

15. Площадь треугольника равна 54, а его периметр 36. Найдите радиус вписанной окружности.

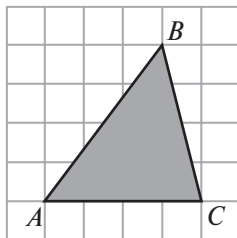
16. Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 15, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

17. Площадь треугольника равна 20. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

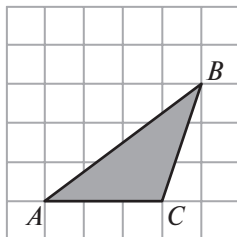
18. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



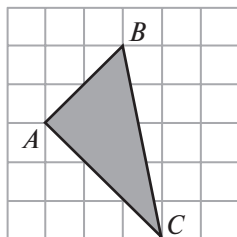
19. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



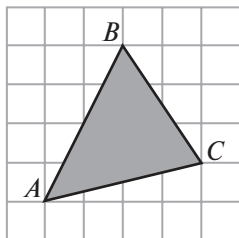
20. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



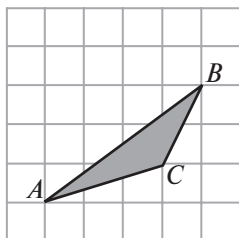
21. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



22. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



23. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



14. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

1. Основания трапеции равны 1 и 3, высота 1. Найдите площадь трапеции.

2. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 3 и 2. Найдите площадь трапеции.

3. Основания трапеции равны 8 и 34, площадь равна 168. Найдите её высоту.

4. Основание трапеции равно 13, высота равна 5, а площадь равна 50. Найдите второе основание трапеции.

5. Высота трапеции равна 10, площадь равна 150. Найдите среднюю линию трапеции.

6. Средняя линия трапеции равна 12, площадь равна 96. Найдите высоту трапеции.

7. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а её периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.

8. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а её площадь равна 40. Найдите периметр трапеции.

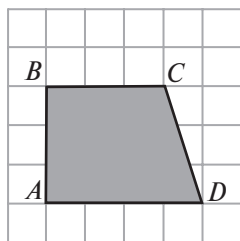
9. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 6 и 2, бо́льшая боковая сторона составляет с основанием угол 45° .

10. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Её площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции.

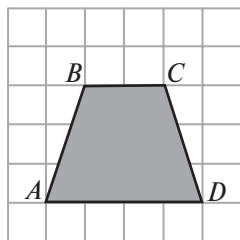
11. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150° . Найдите площадь трапеции.

12. Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне.

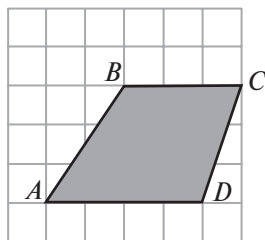
13. Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



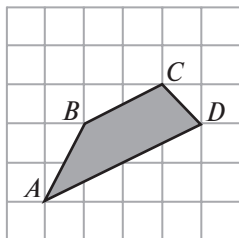
14. Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



15. Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



16. Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



15. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3 : 5. Площадь меньшего многоугольника равна 18. Найдите площадь большего многоугольника.

2. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, площадь которого равна 33. Найдите его периметр.

3. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.

4. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.

5. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны и равны 4 и 6. Найдите площадь этого четырёхугольника.

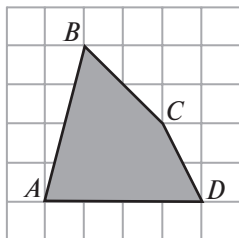
6. Диагонали четырёхугольника образуют угол 30° и равны 4 и 6. Найдите площадь этого четырёхугольника.

7. Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна 4, E , F — середины его сторон AB и CD . Найдите площадь четырёхугольника $AECF$.

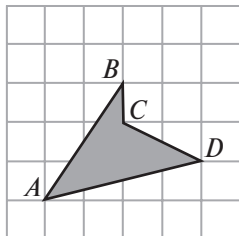
8. Площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна 6, а его противоположные стороны равны и параллельны. Найдите площадь треугольника ACE .

9. Площадь правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$ равна 8. Найдите площадь четырёхугольника $ABEF$.

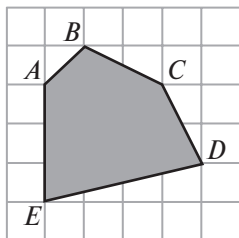
10. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



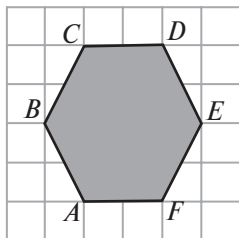
11. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



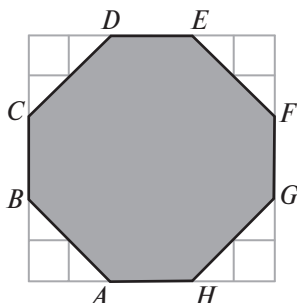
12. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



13. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



14. Найдите площадь восьмиугольника $ABCDEFGH$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



**Таблица приближённых значений
тригонометрических функций**

A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$
$30'$	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

Боковые стороны трапеции 22

Второй признак

- параллелограмма 9
- подобия треугольников 65

Высота

- параллелограмма 4
- трапеции 22

Единичный квадрат 89

Замечательные точки треугольника 53

Квадрат 14

Косинус 78

Котангенс 79

Коэффициент

- подобия 60
- пропорциональности 27

Многоугольник

- вписанный в окружность 43
- описанный около окружности 48

Окружность

- вневписанная 57
- вписанная в многоугольник 48
- описанная около многоугольника 43
- Эйлера 58

Ортоцентр треугольника 53

Основание трапеции 22

Отношение отрезков 27

Отрезки

- несоизмеримые 72
- соизмеримые 72

Параллелограмм 4

Первый признак

- параллелограмма 8
- подобия треугольников 61

Пифагор 73

Пифагорейские числа 73

Площадь

- многоугольника 108
- параллелограмма 95
- прямоугольника 91
- трапеции 106
- треугольника 99
- фигуры 90

Подобные треугольники 60

Признак

- параллелограмма 8
- прямоугольника 13
- ромба 13

Прямая Симсона 59

Прямоугольник 13

Равновеликие фигуры 90

Равносоставленность 113

Ромб 13

Синус 78

Средняя линия

- трапеции 22
- треугольника 17

Тангенс 78

Теорема

- Пифагора 71
- о пропорциональных отрезках 27
- Фалеса 26

Точка

- Жергонна 58
- Торричелли 58

Трапеция 22

- прямоугольная 22
- равнобедренная 22

Третий признак подобия треугольников 66**Тригонометрические**

- тождества 84
- функции 79

Углы

- вписанные в окружность 35
- связанные с окружностью 35
- центральные 35

Фалес 29**Центроид треугольника** 54

ОТВЕТЫ

§ 1

1. 9. 2. 3. 3. 10 см и 15 см. 4. 150° , 30° , 150° . 5. Параллелограммом. 6. Нет. 7. а) 40° , 140° , 40° , 140° ; б) 50° , 130° , 50° , 130° ; в) 80° , 100° , 80° , 100° . 8. а) 70° , 110° , 70° , 110° ; б) 30° , 150° , 30° , 150° . 9. 54° , 126° , 54° , 126° . 10. 60° , 120° , 60° , 120° . 11. 60° , 90° , 120° , 90° . 12. Перпендикулярны. 13. Параллельны. 14. Да. 15. а), б) Нет; в), г) да. 16. а) 11 см, 13 см, 11 см, 13 см; б) 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см, 8 см, 16 см. 17. 0,6 м, 0,8 м, 0,6 м, 0,8 м. 18. 3 см и 4 см. 19. 10 м. 21. 28.

§ 2

1. Да. 2. Нет. 3. Нет. 5. R . 9. Да. 10. Да. 11. Да. 13. Да. 14. Одна сторона в два раза больше другой. 15. Параллелограмм.

§ 3

1. Прямоугольник. 2. 10 см. 3. Да. 4. Нет. 7. 3 см. 8. 10 см. 9. 30° и 60° . 10. 1:2. 11. 13 см. 12. 25° и 65° . 13. а) 36° и 54° ; б) 18° . 14. 4 см и 9 см. 15. a . 19. 80° , 100° , 80° , 100° . 20. 60° , 120° , 60° , 120° . 24. а) 90° ; б) 45° . 25. 40 см.

§ 4

1. 4 см, 5 см и 6 см. 2. 9 см и 18 см. 3. 12 см. 4. 6,15 см. 5. 7,5 см, 10 см, 12,5 см. 7. 5 см, 5 см, 6 см. 10. $a + b$. 11. 80 см. 15. Проходит через середины двух отрезков, соединяющих данные точки. Три. 21. 90° . 22. 1.

§ 5

1. Да. 2. а), б) Нет. 3. Необязательно. 4. Равные. 5. Ромб. 6. 21 см. 7. 21 см. 8. 15 см. 9. 40 см. 10. 20 см. 11. 5 см и 9 см. 12. 4 м и 6 м. 13. 70° , 110° , 70° , 110° . 17. 5 см. 18. 1,7 м. 19. 8 см и 12 см. 20. 2 см и 5 см. 21. $2a$ и $2b$. 23. 60° , 120° , 60° , 120° . 25. Нет.

§ 6

1. а) Да; б) нет. 2. a , e и b , d . 3. 8 см. 6. 4,5 см. 7. а) 2 см; б) 12 см и 20 см; в) 4 см и 10 см. 5. 4, 5, 9, 13,5. 8. 1 см, 7 см и 8 см. 9. p . 11. $3\frac{3}{4}$ см. 12. 4,5 см, 9 см, 13,5 см. 13. 16 см и 18 см. 18. 1:2. 19. 2:3. 20. 1:2. 21. 2:1. 22. 3:1. 23. 4:5. 24. 2:1.

§ 7

1. CAD , CAE , DAE , FBD , ADB . 2. 90° . 3. 35° и 70° . 4. а) 30° ; б) 18° . 5. а) $67,5^\circ$; б) 45° . 6. Окружность с диаметром AC , за исключением точек A и C . 7. а) ГМТ, лежащих вне окружности диаметром AB и не принадлежащих прямой AB ; б) ГМТ, лежащих внутри окружности диаметром AB и не принадлежащих отрезку AB . 9. 80° и 100° . 11. 30° , 45° и 105° . 12. 100° , 120° , 80° , 60° . 13. 60° . 14. 22° . 18. 50° . 19. 20° . 20. 80° , 60° , 40° . 21. 70° . 22. 31° . 23. 25° . 24. 20° . 25. 58° . 27. 48° . 28. 128° . 29. 50° . 30. 228° . 31. 40° . 32. а), б) 45° . 33. Дуги двух окружностей одинакового радиуса, опирающиеся на отрезок AB , без концов этого отрезка. 34. а) 90° ; б) 45° .

§ 8

4. а), б), в) Да. 5. На гипотенузе. 6. 5 см. 7. $12^\circ 25' 30''$, $12^\circ 25' 30''$, $155^\circ 9'$. 8. 50° , 65° , 65° . 9. Против угла в 30° . 11. 12 см. 12. R . 13. а), г), д) Да; б), в), е) нет. 14. а), в) Да; б), г) нет. 15. 100° и 120° . 16. 90° . 17. 5 см. 18. 5 см и 5 см. 19. В середине большего основания. 20. 30° . 21. 3. 22. 150° . 23. 2. 24. 70° .

§ 9

1. а), б), в) Да. 3. Нет. 4. а) Равносторонний; б) равнобедренный. 5. 22 см. 6. $p_1 + p_2 + p_3$. 7. 34 см. 10. 1 см. 12. а), б) Нет; в), г), д) да. 13. Да. 14. Ромб. 15. 4,5 см. 16. 4 см, 14 см, 24 см, 14 см. 17. 8 см, 2 см. 18. 1 см. 19. 7 см, 30 см. 20. Да, 34 см. 21. $2R$. 26. 7. 29. 9.

§ 10

1. Нет. 2. Нет. 3. Да. 4. Да. 5. а) В середине гипотенузы; б) внутри треугольника; в) вне треугольника. 6. Нет. 7. К большей стороне. 8. К вершине, лежащей против большей стороны. 9. 140° , 20° . 15. 46° и 46° . 16. Четырёхугольники, в которые можно вписать окружность. 20. Три окружности с центрами в точках пересечения биссектрис внешних углов треугольника.

§ 11

1. а), в) Да; б) нет. 2. а) 2,5 см, 4 см и 5 см; б) 10 см, 16 см и 20 см. 3. Да. 4. 45° . 5. $AC = 15$ см, $B_1C_1 = 7$ см. 6. $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м. 7. а) 15 см, 9 см, 21 см; б) $8\frac{1}{3}$ см, 5 см, $11\frac{2}{3}$ см; в) 5 см,

3 см, 7 см; г) 2,5 см, 1,5 см, 3,5 см. 12. а) ABC , FEC , DBE ; б) ABC , GFC , AGD , FBE ; в) ABC , CDA , AEB , BEC ; г) AOB , COD ; д) ABC и FGC ; ADC и FEC ; DBC и EGC . 13. $9\frac{1}{3}$. 14. 13,6 см. 15. Нет. 16. $\frac{ah}{a+h}$.
17. $\frac{bc}{b+c}$. 18. Можно, если треугольник не равносторонний. 23. 4.
24. 10. 25. $2\sqrt{10}$. 26. 12. 28. 27. 29. 5.

§ 12

2. а), в) Да; б) нет. 3. 6,4 дм, 5,76 дм, 2,4 дм. 4. 4 см, 3 см.
5. 18 м, $23\frac{4}{7}$ м, $25\frac{5}{7}$ м. 7. Да. 8. Да. 9. 8 см, $5\frac{1}{3}$ см и $3\frac{5}{9}$ см. 10. 15 см.
12. $\frac{na+mb}{n+m}$. 16. $AD = 36\frac{1}{8}$ м. 17. 30 м. 18. 100 м. 19. 5 м. 20. 10 м.
21. 30 м. 22. 5,1 м. 23. 3 м. 24. 144 м.

§ 13

1. а) 5; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{61}$. 2. а) 4; б) 12; в) $\sqrt{11}$. 3. $\sqrt{a^2+b^2}$. 4. Нет.
5. Например, 3, 4, 5; 5, 12, 13. 6. а) 6 см, 8 см, 10 см; б) 10 см,
24 см, 26 см. 7. 5, 12 и 13. 8. 2,4; 1,8 и 3,2. 9. 6,5 м. 10. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
11. $\sqrt{7}$ м. 12. а), б), в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 13. $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$; $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. 14. $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$.
15. $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$, $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$. 17. $4 \pm \sqrt{7}$. 18. 6,5. 19. 1,5. 20. $3\frac{1}{8}$.
21. 5. 22. 14 или 2. 23. 2,5 км. 24. 50 км. 25. 5 м. 26. 13 м. 27. 1,5 м.
28. $2\sqrt{2}$ м.

§ 14

1. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 4. Нет.
5. $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} A = 2,4$. 6. $\sin A = 0,8$,
 $\cos A = 0,6$. 7. $8\sqrt{3}$ см. 8. $\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ см. 9. 10 см и 6 см. 10. 60° . 11. 30° ,
 60° . 12. 60° , 120° . 13. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 14. $\sin \angle AOB = \cos \angle AOB = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg} \angle AOB = \operatorname{ctg} \angle AOB = 1$. **15.** $\sin \angle AOB = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \angle AOB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} \angle AOB = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg} \angle AOB = 2$. **16.** 37° . **17.** 31° . **18.** 2° . **19.** 100 м. **20.** 2° .
21. 240 м. **22.** 50° . **23.** 54 м. **24.** 15° . **25.** 34° . **26.** 14° .

§ 15

1. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **3.** Да, 45° . **4.** а) Нет; б) да.
7. а) 2,4; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{4}{3}$. **9.** а) B ; б) A . **10.** $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A}$.
14. а) $\cos^2 A$; б) 2; в) 1. **15.** а) $\operatorname{tg}^2 A$; б) $\operatorname{ctg}^2 A$. **16.** $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

§ 16

1. а) $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos A = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} A = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} A = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sin A = \frac{1}{2}$,
 $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} A = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} A = -\sqrt{3}$. **2.** а) $-\sqrt{3}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) -1 .
3. $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = -\frac{12}{13}$. **4.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **8.** а) $\cos^2 A$; б) 2; в) 1.
9. $\operatorname{tg} 100^\circ < \operatorname{tg} < 70^\circ < \operatorname{tg} 80^\circ$. **10.** $\operatorname{ctg} 120^\circ < \operatorname{ctg} 110^\circ < \operatorname{ctg} 60^\circ$.
11. $\sin \angle AOB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \angle AOB = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \angle AOB = -2$, $\operatorname{ctg} \angle AOB =$
 $= -0,5$. **12.** $\sin \angle AOB = 255$, $\cos \angle AOB = -55$, $\operatorname{tg} \angle AOB = -2$,
 $\operatorname{ctg} \angle AOB = -0,5$.

§ 17

1. 40. **2.** а) и д), в) и г). **3.** $\frac{1}{4}a^2$. **4.** а) Увеличится в 4 раза;
 б) уменьшится в 9 раз; в) изменится в k^2 раз. **7.** 9. **8.** 36 см. **9.** 12 дм
 и 25 дм. **10.** а) $2(ad + bc - 2cd)$; б) $ad + bc - cd$; в) $ab + 2cd - ad$.
11. $\frac{a^2}{2}$. **12.** 12 м. **13.** В два раза. **14.** 10. **15.** 5. **16.** 12. **18.** $\frac{1}{4}$. **19.** 400 м².

§ 18

2. а), в), д), е); г), з), и). 3. а) 8; б) 6. 5. 8 см и 4 см. 6. $3\frac{1}{3}$ см.
 7. 10 см^2 . 8. 50 см^2 . 9. $\frac{a^2}{2}$. 10. 12 см^2 . 11. Прямоугольник. 12. Площадь квадрата больше. 13. 30° . 14. $202,8 \text{ см}^2$. 15. Две параллельные прямые. 16. Квадрат. 17. Ромб.

§ 19

1. а), г), е), ж), з); б), д). 2. а), б) Да; в) нет. 3. а) 14 см^2 ; б) $2,1 \text{ м}^2$. 4. $3 : 1$. 5. а) Увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 3 раза; в) уменьшится в $1\frac{3}{4}$ раза. 6. $5,25 \text{ см}^2$. 7. 3 см. 8. $20\sqrt{2}$ см. 11. Одну четвёртую. 12. Одну четвёртую. 13. Параллелограмм, 8 см^2 . 15. Две параллельные прямые. 16. 90° . 19. Да. 21. Да. 23. $3\frac{1}{3}$. 24. $\frac{1}{6}$. 25. $\frac{1}{3}$.
 26. $\frac{1}{6}$. 27. $\frac{1}{9}$. 30. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 31. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. 32. 3, 12.

§ 20

3. 210 см^2 . 4. 84 см^2 . 5. 14 см. 6. 20 см. 7. 16 см и 20 см. 8. 4 см^2 .
 9. 30 см^2 . 10. $4,76 \text{ см}^2$. 11. ABD и ABC , ACD и BCD , AOD и BOC .
 16. $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. 18. 16.

§ 21

1. 36 см^2 . 2. 20 см. 3. а), б), в), д) Да; г) нет. 4. 10 см^2 . 5. а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
 б) $2 + 2\sqrt{2}$; в) 4. 7. 8. 8. 6. 9. 3. 10. а) 7,5; б) 6. 11. а) 10; б) 6.
 12. 20. 13. 24. 16. 14. 17. 48. 18. $(a + b)R$.

§ 22*

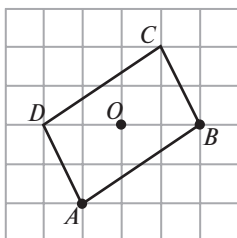
12. $\frac{1}{nm + 1}$.

Обобщающее повторение

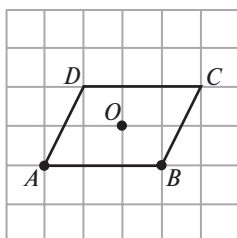
1. Параллелограмм

1. 13. 2. 5. 3. 20. 4. 125° . 5. 115° . 6. 50° . 7. 120° . 8. 80° . 9. 120° . 10. 90° .
11. 28. 12. 10. 13. 20. 14. 4.

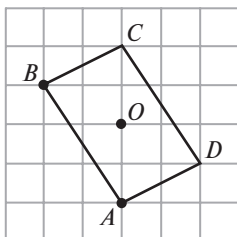
15.



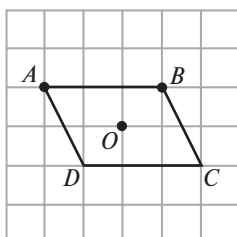
16.



17.



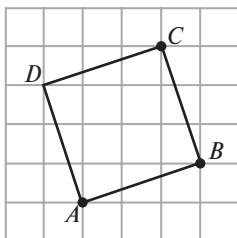
18.



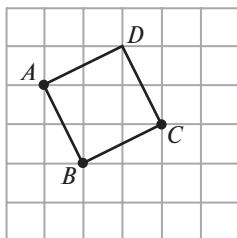
2. Прямоугольник, ромб, квадрат

1. 10. 2. 30. 3. 60° . 4. 64° . 5. 15° . 6. 65° . 7. 12. 8. 16. 9. 56. 10. 2.

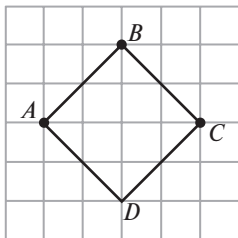
11.



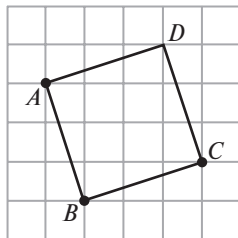
12.



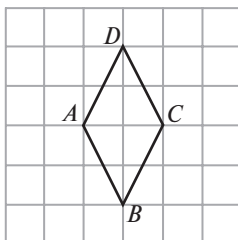
13.



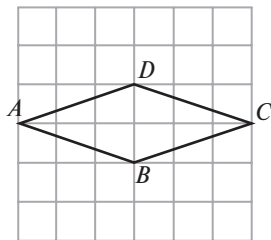
14.



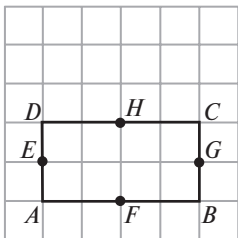
15.



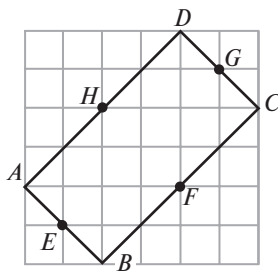
16.



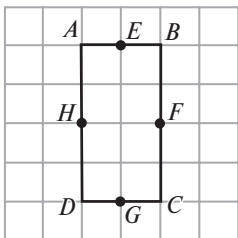
17.



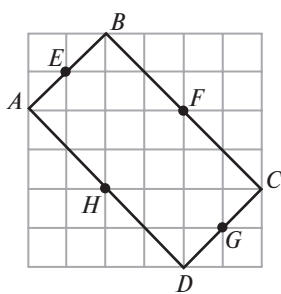
18.



19.



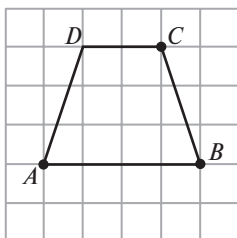
20.



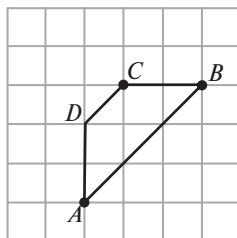
3. Средняя линия треугольника. Трапеция

1. 10. 2. 15. 3. 18. 4. 12. 5. 70° . 6. 115° . 7. 60° . 8. 80° .
9. 60° . 10. 38° . 11. 23. 12. 38. 13. 5. 14. 15. 15. 69. 16. 23. 17. 10. 18. 3. 19. 15.
20. 106. 21. 4. 22. 20. 23. 9. 24. 14. 25. 1. 26. 12. 27. 10. 28. 6. 29. 3.

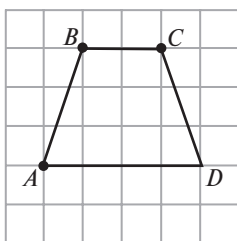
30.



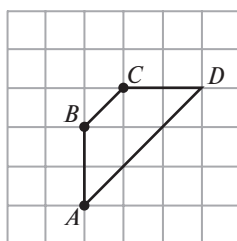
31.



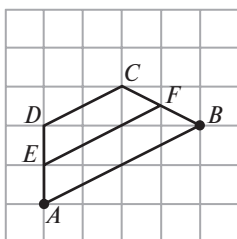
32.



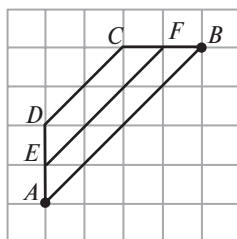
33.



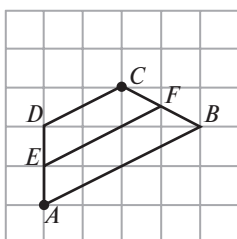
34.



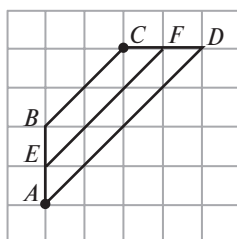
35.



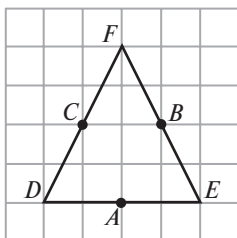
36.



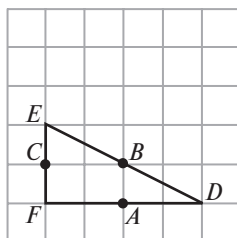
37.



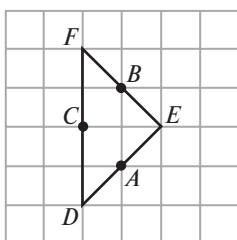
38.



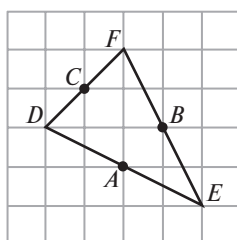
39.



40.



41.



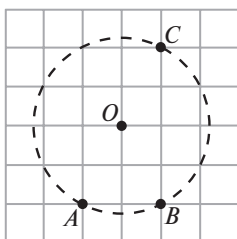
4. Углы, связанные с окружностью

1. 36° . 2. 76° . 3. 60° . 4. 36° . 5. 18° . 6. 30° . 7. 150° . 8. 45° .
9. 135° . 10. 60° . 11. 120° . 12. 105° . 13. 75° . 14. 46° . 15. 64° .
16. 118° . 17. 58° . 18. 26° . 19. 62° . 20. 114° . 21. 26° . 22. 45° .
23. 135° . 24. 45° . 25. 135° . 26. 45° . 27. 30° . 28. 70° . 29. 50° . 30. 60° . 31. 30° .
32. 60° . 33. 45° . 34. 45° . 35. 80° .

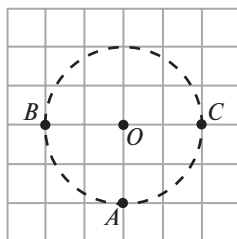
5. Многоугольники, вписанные в окружность

1. 20° . 2. 80° . 3. 122° . 4. 70° . 5. 98° . 6. 60° . 7. 82° . 8. 90° . 9. 70° . 10. 110° .
11. 80° . 12. 2. 13. 4,5. 14. 6. 15. 8. 16. 2. 17. 10. 18. 12. 19. 6. 20. 24.

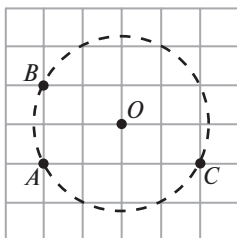
21.



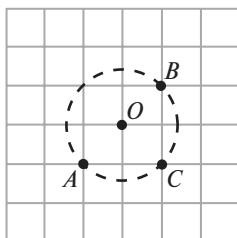
22.



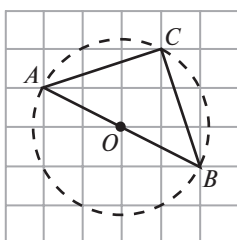
23.



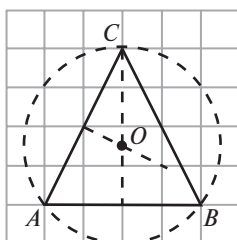
24.



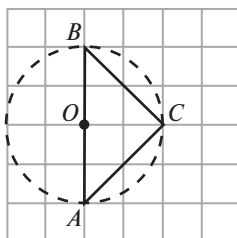
25.



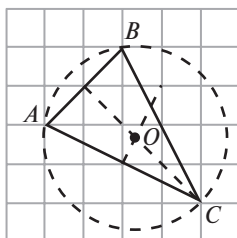
26.



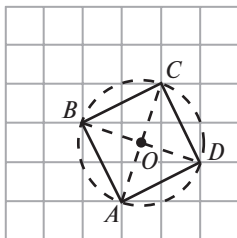
27.



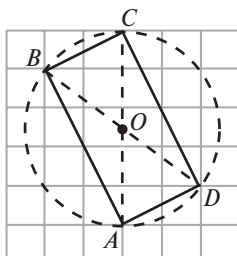
28.



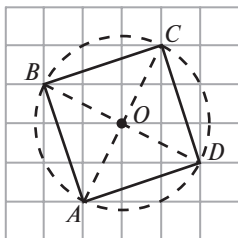
29.



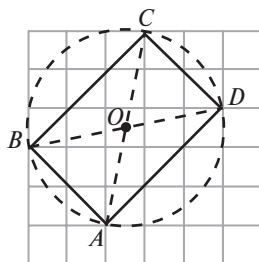
30.



31.



32.

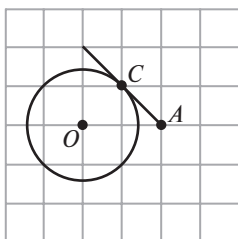


33. 2,5. 34. 2,5. 35. 2.

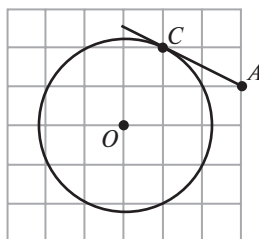
6. Многоугольники, описанные около окружности

1. 2. 2. 18. 3. 2. 4. 8. 5. 2. 6. 22. 7. 4. 8. 10. 9. 52. 10. 7. 11. 14. 12. 12. 13. 24.

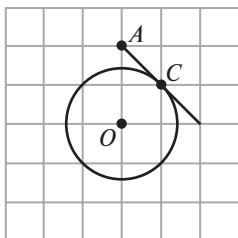
14.



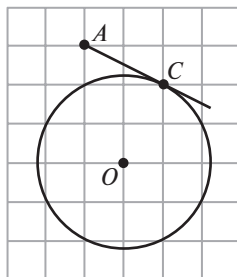
15.



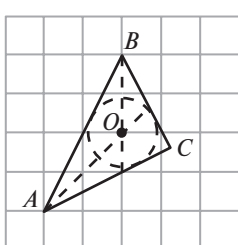
16.



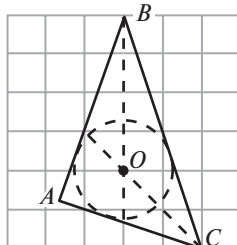
17.



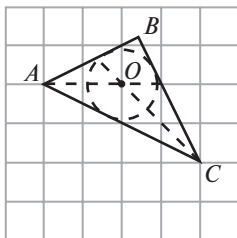
18.



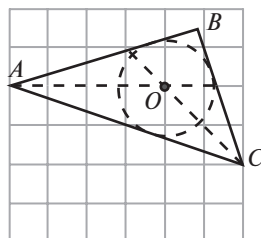
19.



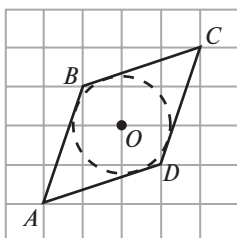
20.



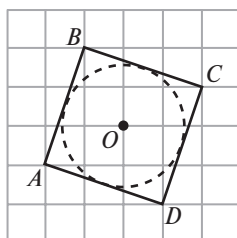
21.



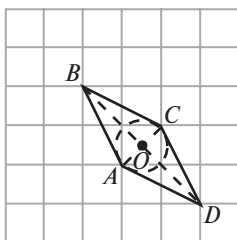
22.



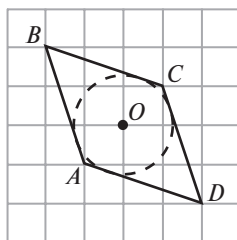
23.



24.



25.



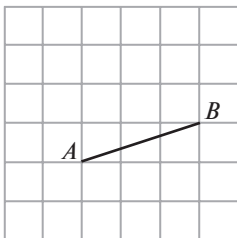
7. Подобие треугольников

1. 8. 2. 6. 3. 4. 4. 5. 5. 2. 6. 3. 7. 10. 8. 20. 9. 25. 10. 15. 11. 10. 12. 20. 13. 4.
14. 3. 15. 4. 16. 2. 17. 4. 18. 3. 19. 6. 20. 4. 21. 24. 22. 4. 23. 5. 24. 20. 25. 3. 26. 4.
27. 2. 28. 5. 29. 2. 30. 4. 31. 12. 32. 6. 33. 3. 34. 9. 35. 12. 36. 20. 37. 8. 38. 9. 39. 6.
40. 9. 41. 80 м. 42. 4 м. 43. 8 м. 44. 27 м. 45. 5,1 м. 46. 6 м. 47. 2 м.
48. 0,5 м.

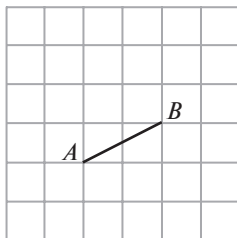
8. Теорема Пифагора

1. 10. 2. 24. 3. 1,5. 4. 2. 5. 4. 6. 2. 7. 5. 8. 6. 9. 8. 10. 10. 11. 10. 12. 2. 13. 3.
14. 13. 15. 8. 16. 4. 17. 5. 18. 10. 19. 4. 20. 1000 м. 21. 2,5 км. 22. 50 км.
23. 13 м. 24. 5.

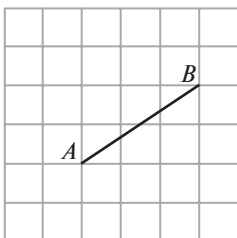
25.



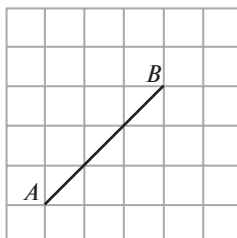
26.



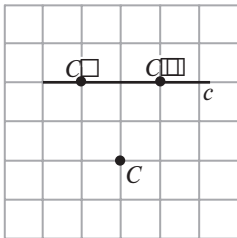
27.



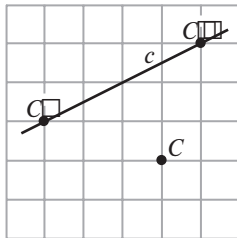
28.



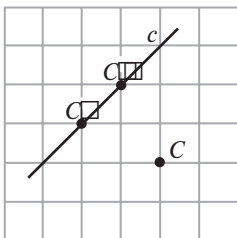
29.



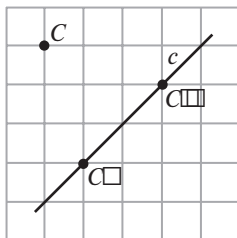
30.



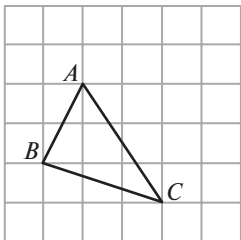
31.



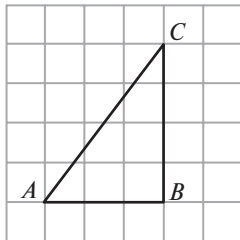
32.



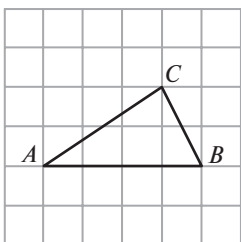
33.



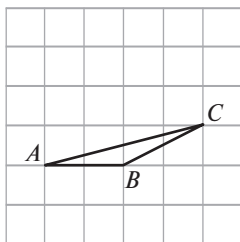
34.



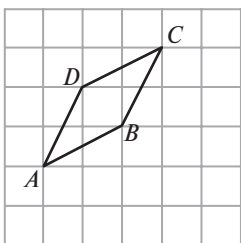
35.



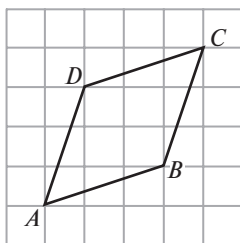
36.



37.



38.



39. $\sqrt{5}$. 40. $6\sqrt{5}$. 41. $4\sqrt{10}$. 42. $4\sqrt{10}$. 43. 5. 44. $\sqrt{2}$. 45. $3\sqrt{2}$.
46. 18. 47. 10. 48. 5. 49. 5. 50. 8. 51. 5. 52. 2. 53. 5. 54. 8. 55. 2. 56. 10. 57. 10.

9. Тригонометрические функции острого угла

1. 0,6. 2. 0,8. 3. 0,75. 4. 0,75. 5. 0,8. 6. 0,6. 7. 0,75. 8. 0,75. 9. 0,6.
10. 0,8. 11. 0,6. 12. 0,8. 13. 0,6. 14. 0,8. 15. 0,8. 16. 0,6. 17. 0,8. 18. 0,6.
19. 0,6. 20. 0,8. 21. 0,8. 22. 0,6. 23. 0,75. 24. 0,75. 25. 0,8. 26. 0,6. 27. 0,6.
28. 0,8. 29. 0,8. 30. 0,6. 31. 0,6. 32. $-0,6$. 33. 0,8. 34. 0,5. 35. 0,8. 36. 0,8.
37. 0,5. 38. 0,8. 39. $-0,6$. 40. -2 . 41. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 42. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 43. 1. 44. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 45. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

46. 0,5. 47. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 48. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 49. 2. 50. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 51. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. 52. -2. 53. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 54. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 55. 1. 56. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 57. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 58. 0,5. 59. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 60. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 61. -1.

10. Решение треугольников

1. 2. 2. 6. 3. 3. 4. 4. 5. 2. 6. 6. 7. 3. 8. 4. 9. 1. 10. 4. 11. 6. 12. 2. 13. 2. 14. 4.
 15. 3. 16. 5. 17. 12. 18. 12. 19. 5. 20. 5. 21. 10. 22. 1,5. 23. 1,5. 24. 1. 25. 1.
 26. 16. 27. 9. 28. 1,5. 29. 1. 30. 9. 31. 12. 32. 15. 33. 12. 34. 15. 35. 1,5. 36. 1,5. 37. 2.
 38. 8. 39. 2. 40. 24. 41. 24. 42. 18. 43. 18. 44. 6. 45. 8. 46. 6. 47. 4. 48. 3. 49. 2. 50. 6.
 51. 2. 52. 1. 53. 37°. 54. 37°. 55. 37°. 56. 14°. 57. 2°. 58. 5°. 59. 2°. 60. 34°. 61. 64°. 62. 53°. 63. 31°. 64. 58°. 65. 15°.

11. Площадь прямоугольника

1. 0,5. 2. 2. 3. 6. 4. 13. 5. 8. 6. 9. 7. 18. 8. 50. 9. 48. 10. 6. 11. 18. 12. 16.
 13. 8. 14. 10. 15. 10.

12. Площадь параллелограмма

1. 40. 2. 0,5. 3. 30°. 4. 6. 5. 8. 6. 8. 7. 24. 8. 3. 9. 2. 10. 10. 11. 6. 12. 6.
 13. 8. 14. 5. 15. 4. 16. 8.

13. Площадь треугольника

1. 20. 2. 8. 3. 25. 4. 100. 5. 24. 6. 1. 7. 24. 8. 12. 9. 6. 10. 20. 11. 30° или 150°. 12. 6. 13. 7. 14. 24. 15. 3. 16. 75. 17. 5. 18. 6. 19. 8. 20. 4,5. 21. 6. 22. 7. 23. 2,5.

14. Площадь трапеции

1. 2. 2. 6. 3. 8. 4. 7. 5. 15. 6. 8. 7. 160. 8. 30. 9. 16. 10. 45°. 11. 42. 12. 30°. 13. 10,5. 14. 9. 15. 10,5. 16. 4,5.

15. Площадь многоугольника

1. 50. 2. 22. 3. 30. 4. 1. 5. 12. 6. 6. 7. 2. 8. 3. 9. 4. 10. 9. 11. 4. 12. 10,5. 13. 12. 14. 28.

| | |
|--|-----|
| Введение | 3 |
|
ГЛАВА I. ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ | |
| § 1. Параллелограмм | 4 |
| § 2. Признаки параллелограмма | 8 |
| § 3. Прямоугольник, ромб, квадрат | 13 |
| § 4. Средняя линия треугольника | 17 |
| § 5. Трапеция | 22 |
| § 6. Теорема Фалеса | 26 |
|
ГЛАВА II. МНОГОУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТЬ | |
| § 7. Углы, связанные с окружностью | 35 |
| § 8. Многоугольники, вписанные в окружность | 43 |
| § 9. Многоугольники, описанные около окружности | 48 |
| § 10. Замечательные точки в треугольнике | 53 |
|
ГЛАВА III. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ | |
| § 11. Подобие треугольников. Первый признак подобия
треугольников | 60 |
| § 12. Второй и третий признаки подобия треугольников | 65 |
| § 13. Теорема Пифагора | 71 |
|
ГЛАВА IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ | |
| § 14. Тригонометрические функции острого угла | 78 |
| § 15. Тригонометрические тождества | 84 |
| § 16. Тригонометрические функции тупого угла | 87 |
|
ГЛАВА V. ПЛОЩАДЬ | |
| § 17. Измерение площадей. Площадь прямоугольника | 89 |
| § 18. Площадь параллелограмма | 95 |
| § 19. Площадь треугольника | 99 |
| § 20. Площадь трапеции | 106 |
| § 21. Площадь многоугольника | 108 |

| | |
|---|------------|
| § 22*. Равносоставленность и задачи на разрезание | 113 |
| § 23*. Использование программы GeoGebra
для моделирования фигур на плоскости | 119 |
| ГЛАВА VI. ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ | 132 |
| Таблица приближённых значений тригонометрических функций | 188 |
| Предметный указатель | 189 |
| Ответы | 191 |

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна,
Смирнов Владимир Алексеевич

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для общеобразовательных организаций

Редакторы *В. В. Черноруцкий, И. В. Рекман*

Оформление и художественное редактирование: *Е. А. Адамов*

Технический редактор *О. Б. Резникова*

Корректоры *В. И. Антонов, С. В. Никитина*

Компьютерная вёрстка и графика: *А. В. Челюканов*

Формат 60×90¹/16.

Гарнитура «Newton». Усл. печ. л. 13.

Издательство «Мнемозина».

111033, Москва, ул. Волочаевская, 40г.

Тел.: 8 (495) 181 6888.

E-mail: ioc@mnemozina.ru

www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.

Тел.: 8 (495) 640 9399.

www.shop.mnemozina.ru