И.М. СМИРНОВА, В.А. СМИРНОВ

Г Е О М Е Т Р И Я

8 КЛАСС

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

Часть I

Учебное пособие

для общеобразовательных учреждений

МНЕМОЗИНА

Москва 2009

Настоящая тетрадь по геометрии предназначена для работы в 8-м классе по учебнику: И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия: Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2008.

Она соответствует программе по математике для общеобразовательных учреждений и будет полезна для более эффективной организации учебного процесса: при изучении теоретического материала, решении задач, выполнении классных и домашних работ, а также при проведении различного рода самостоятельных и индивидуальных заданий для учащихся.

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие ребята! Вы изучаете один из самых увлекательных и важных разделов математики - геометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она знакомит с разнообразием форм, формирует необходимые пространственные представления, что позволяет правильно ориентироваться в окружающем нас мире.

Во-вторых, геометрия даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А.Д.Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в которой они взаимно организуют и направляют друг друга ("...лед и пламень не столь различны меж собой").

Кроме этого, изучение геометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в измерении геометрических величин (длин, углов, площадей).

Наконец, геометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых ученых: Пифагора, Евклида, Архимеда, И.Кеплера, Р.Декарта, Л.Эйлера, Н.И.Лобачевского и многих других.

Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: "Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса - немой трактат по геометрии, а греческая архитектура - внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора". Вот какой замечательной наукой вы занимаетесь.

Данное пособие начинается с пункта 27. Пункты 1 – 26 были рассмотрены в Рабочей тетради для 7 класса тех же авторов. Весь собранный в пособии материал разбит на отдельные пункты. В каждом из них даны задания, которые могут быть использованы как для классной, так и для домашней работ, а также для самостоятельных и индивидуальных работ. Задания подобраны и представлены таким образом, чтобы освободить вас от вспомогательной и непроизводительной работы, например, копирования условий задачи или чертежа, от выполнения несущественных дополнительных построений и т.п. Упражнения весьма разнообразны. В ряде из них вам нужно будет выбрать верные (или неверные) утверждения из предложенных. В других нужно будет заполнить пропуски в формулировках определений, доказательствах теорем или в решениях задач. Много, так называемых, задач по готовому чертежу. В них нужно ответить на предложенный вопрос, или выполнить дополнительные построения, или самим сформулировать и решить задачу. Решение предложенных задач поможет вам в изучении курса геометрии.

Желаем успехов в изучении геометрии!

27. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

27.1. Закончите предложения.

1. Две прямые на плоскости называются параллельными, если ____

2. Две прямые пересекаются, если ____

27.2. С помощью математической символики запишите, что:

а) прямые a и b параллельны; б) прямые c и d пересекаются; в) прямая l пересекает прямую m и параллельна прямой n; г) прямые g и h пересекаются в точке O, прямая k пересекает их в точке, отличной от точки O, а прямая p параллельна прямой h .

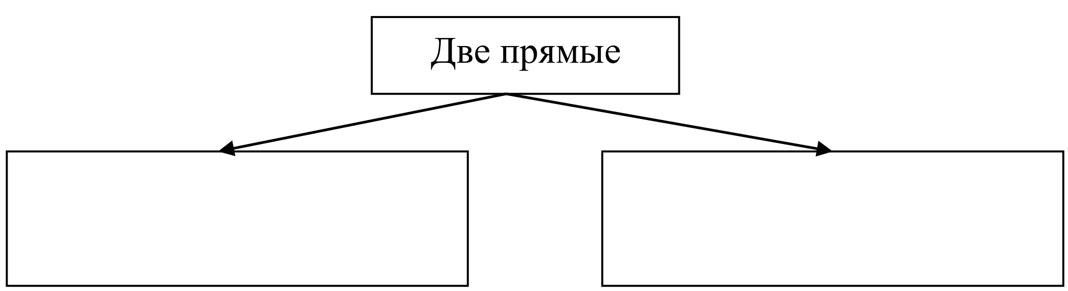
Ответ. а)____;

б)____;

в)____;

г)____;

27.3. Заполните схему взаимного расположение двух прямых на плоскости.



27.4. Какие две прямые на плоскости являются не параллельными?

Ответ. ____

____

27.5. Закончите предложения.

1) Прямая, пересекающая каждую из двух данных прямых называется____

2) Два отрезка называются параллельными, если ____________________

____

3) Представление о параллельных прямых дают: ___________________

____

____

27.6. Укажите на рисунке 1 следующие углы:

а) внутренние накрест лежащие; б) внешние накрест лежащие; в) внутренние односторонние; г) внешние односторонние; д) соответственные.

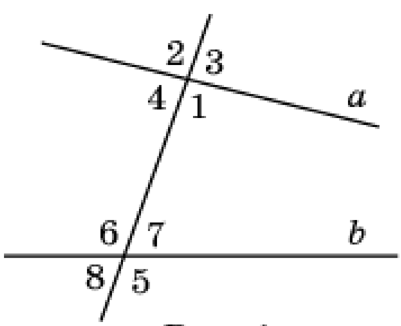


Рис. 1

Ответ. а)_______________________________________;

б) ____;

в) ____;

г)____;

д) ____ .

27.7. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему – признак параллельности двух прямых.

Формулировка.____

____

____

____

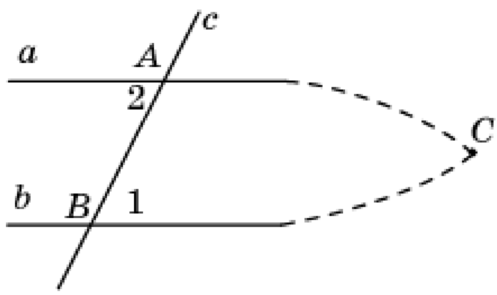


Рис. 2

Дано:______________________________________

____

Доказать:___________________________________

____

Доказательство. Предположим, что данные прямые *a* и *b*

____

Рассмотрим треугольник *ABC*. Для него угол 2 является ______________________________ и, следовательно, должен быть ___________________________ внутреннего угла 1, что противоречит

____

Значит, прямые *a* и *b* ____

27.8. Сформулируйте следствия из теоремы – признака параллельности двух прямых.

Следствие 1. ____

____

____

____

Следствие 2. ____

____

____

____

Следствие 3. ____

____

____

____

27.9. В чём заключается основное свойство (аксиома) параллельных прямых?

Ответ. ____

____

____

____

____

27.10. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему, обратную признаку параллельности двух прямых.

Формулировка.____

____

____

____

____

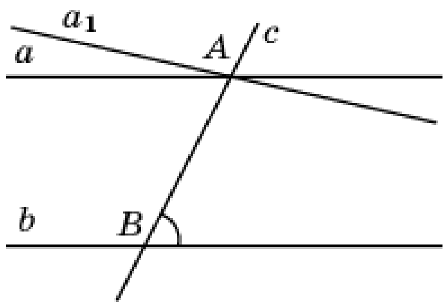


Рис. 3

Дано:_______________________________

____

____

____

Доказать:_______________________________

____

____

Доказательство. Проведём через точку A прямую a_1 таким образом, чтобы ____

____

____. Тогда по признаку параллельности двух прямых_______________________________

____

Поскольку через точку A проходит _______________________ прямая, параллельная b, то прямая a _______________________________

Следовательно, ____

____

____

27.11. Сформулируйте следствия из теоремы, обратной признаку параллельности двух прямых.

Следствие 1. ____

____

____

____

Следствие 2. ____

____

____

____

27.12. На рисунке 4 постройте прямую *a*, проходящую через точку *A* и параллельную прямой *b*.

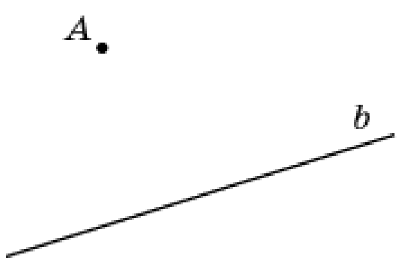


Рис. 4

Построение. ___________________________

____

____

____

____

____

____

____

27.13. При пересечении двух параллельных прямых третьей сумма двух внешних соответственных углов оказалась равной $100°$. Найдите остальные углы.

Ответ. ____

____

27.14. При пересечении двух параллельных прямых третьей разность двух внутренних односторонних углов оказалась равной $40°$. Найдите остальные углы.

Ответ. ____

____

27.15. Используя обозначения углов на рисунке 1, укажите верные утверждения.

1) Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a || b$.

2) Если $\angle 4 = \angle 7$, то $a || b$.

3) Если $\angle 2 = \angle 6$, то $a || b$.

4) Если $\angle 4 + \angle 6 = 180°$, то $a || b$.

5) Если $\angle 3 + \angle 7 = 180°$, то $a || b$.

6) Если $\angle 8 + \angle 1 = 180°$, то $a || b$.

7) Если $\angle 2 = \angle 5$, то $a || b$.

8) Если $\angle 1 = \angle 3$, то $a || b$.

Ответ. ____

____

27.16. По рисунку 5 определите, будут ли прямые *m* и *n* параллельны.

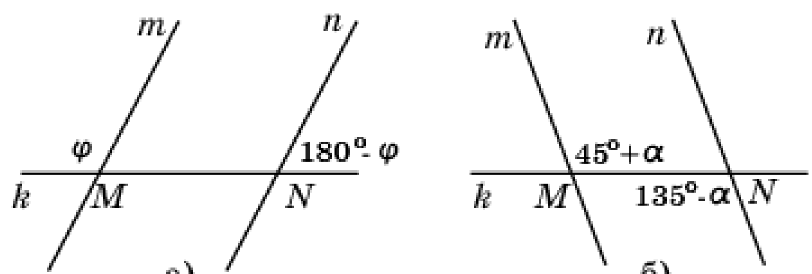


Рис. 5

Ответ. а)____

б) ____

27.17. По рисунку 6 докажите параллельность прямых c и d.

Формулировка задачи. ____

____

____

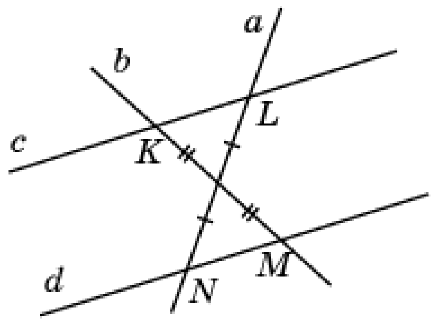


Рис. 6

Дано: ____

____

____

Доказать: ____

____

____

Решение. Рассмотрим ____

____

____

____

____

____

____

27.18. Укажите неверные утверждения.

1) Две прямые на плоскости параллельны, если они не перпендикулярны.

2) Две прямые пересекаются, если они перпендикулярны.

3) Если прямая, перпендикулярна каждой из двух данных прямых, то они параллельны.

4) Если при пересечении двух прямых третьей, внутренние односторонние углы равны, то прямые параллельны.

5) Если в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD образует со всеми его сторонами равные углы, то противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны.

6) Биссектрисы внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, параллельны.

7) Биссектрисы внешних накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, параллельны.

8) Биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, параллельны.

Ответ. ____

____

____

____

____

____

____

28. СУММА УГЛОВ МНОГОУГОЛЬНИКА

28.1. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о сумме углов произвольного треугольника.

Формулировка____

____

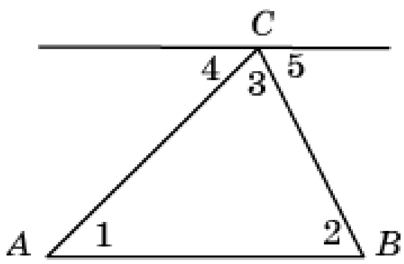


Рис. 7

Дано: ΔABC____________________

Доказать__________________________

____

Доказательство. Через вершину C данного треугольника проведём____

Тогда $\angle 1=$_________________, $\angle 2=$________________________

Следовательно, ____

____

28.2. Сформулируйте следствия из теоремы о сумме углов произвольного треугольника.

Следствие 1. ____

____

____

Следствие 2. ____

____

____

28.3. Укажите верные утверждения.

1) Любые три угла, сумма которых равна $180°$, могут быть углами треугольника.

2) Если сумма двух углов треугольника меньше $90°$, то он тупоугольный.

3) Если сумма двух углов треугольника равна $90°$, то он прямоугольный.

4) Если сумма двух углов треугольника больше $90°$, то он остроугольный.

5) Если один из углов треугольника больше суммы двух других его углов, то треугольник - остроугольный.

6) Угол между высотами равностороннего треугольника равен $60°$.

7) Сумма внешних углов произвольного треугольника равна $180°$.

8) Только один внешний угол треугольника может быть острым.

9) Только один внешний угол треугольника может быть тупым.

10) Только один внешний угол треугольника может быть прямым.

Ответ____

____

____

28.4. Один из углов прямоугольного треугольника равен: а) $35°$; б) $72°$. Найдите остальные углы треугольника.

Ответ. а)____;

б)____.

28.5. В равнобедренном треугольнике один из углов при основании равен: а) $43°$; б) $84°$. Найдите остальные углы треугольника.

Ответ. а)______________________________;
б)______________________________.

28.6. Один из углов равнобедренного треугольника равен $98°$. Найдите остальные его углы.

Ответ.______________________________

28.7. Найдите углы равностороннего треугольника.

Ответ.______________________________

28.8. По рисунку 8 найдите углы *X*, *Y* и *Z*.

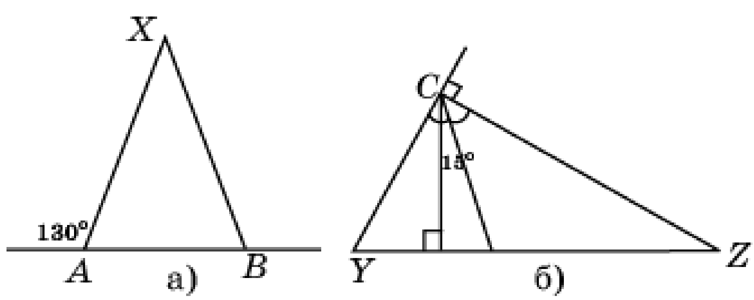


Рис. 8

Ответ. $\angle X$=______________, $\angle Y$=______________, $\angle Z$=______________ .

28.9. По рисунку 9 найдите углы K, L и M, если $KN||LM$.

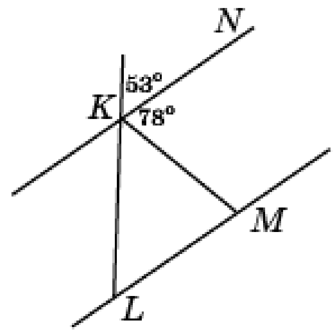


Рис. 9

Ответ. $\angle K$=___________, $\angle L$=____________, $\angle M$=_______________

28.10. По рисунку 10 докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

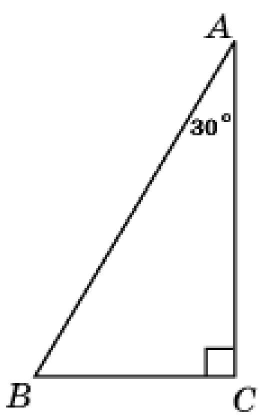


Рис. 10

Дано: ________________________________
____
____

Доказать: ____________________________
____
____

Решение. Проведем в треугольник ABC отрезок CD таким образом, чтобы ____
____.

Тогда ____
____

Значит, ____
____

28.11. Изобразите: а) выпуклый; б) невыпуклый многоугольник.

28.12. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о сумме углов произвольного выпуклого n-угольника.

Формулировка.____

____

____

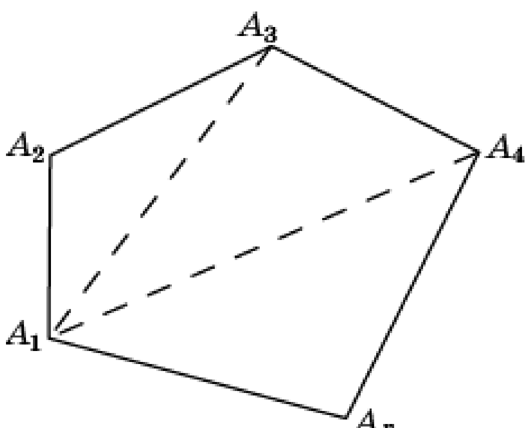


Рис. 11

Дано: ______________________________

____

____

Доказать:__________________________

____

____

Доказательство. Из какой-нибудь вершины данного n-угольника, например_______, проведём все _________________________________. Тогда n-угольник разобьётся на ___________________________________. В каждом треугольнике сумма____

___________________________. Углы треугольников составляют

____

Следовательно, ____

____

28.13. По рисунку 12 определите угол *HMG*.

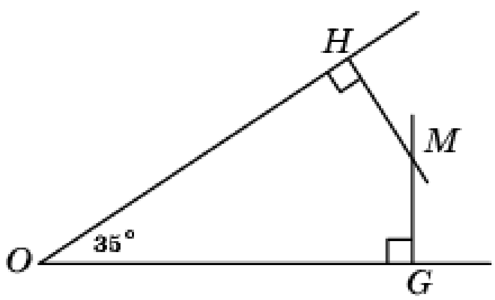


Рис. 12

Ответ. $\angle HMG$=________________

28.14. Найдите угол каждого правильного многоугольника, изображённого на рисунке 13.

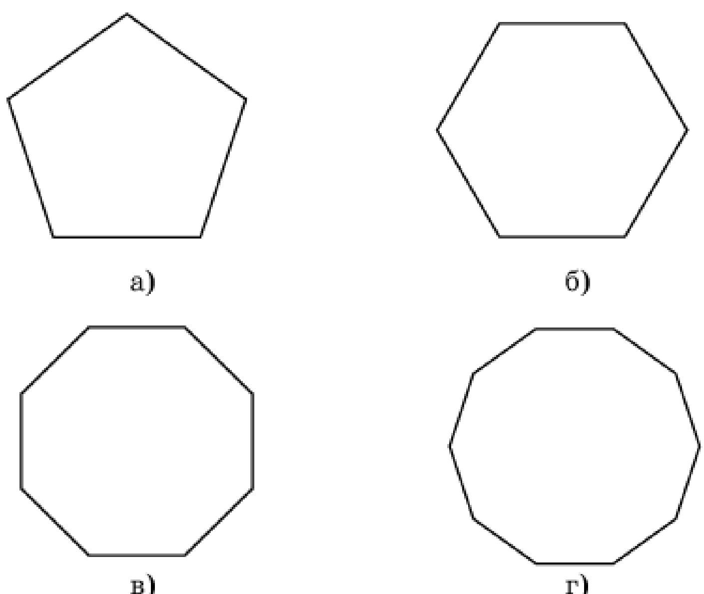


Рис. 13

Ответ. а)__________________; б) ________________________________;

в) _____________________________; г) ________________________________

28.15. Используя рисунок 14, найдите сумму внешних углов выпуклого n-угольника.

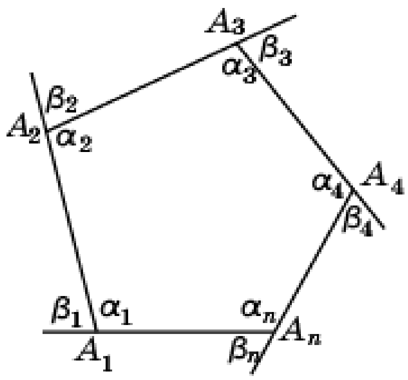


Рис. 14

Дано:____________________________

____

____

Найти:__________________________

____

____

Решение. $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=$ ___________________________________:

$\beta_1=180°-$___________, $\beta_2=180°-$___________, … $\beta_n=180°-$____________.

Значит,____

____

____. Таким образом, ____

____

____

____

28.16. Найдите сумму внешних углов правильных многоугольников, изображенных на рисунке 13.

Ответ. ____

____

28.17. Укажите верные утверждения.

В выпуклом *n*-угольнике (*n*>3) может быть:

а) только 3 острых угла;

б) не меньше3 острых углов;

в) не больше 3 острых углов;

г) 0, 1, 2, 3, …, *n* острых углов;

д) только 3 тупых угла;

е) только 3 прямых угла;

ж) *n* тупых углов;

з) *n* прямых углов.

Ответ.____

____

____

28.18. На рисунке 15 найдите углы, равные углу *T*.

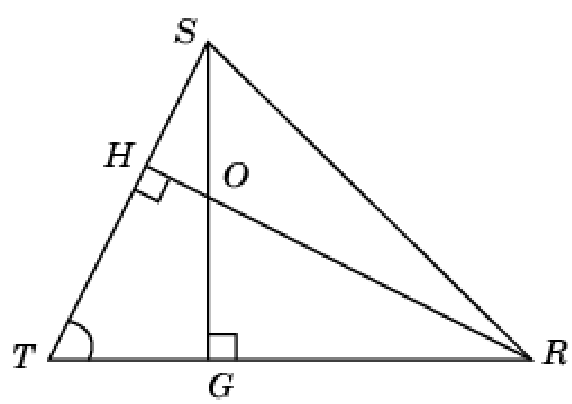


Рис. 15

Ответ.____

____

____

28.19. По рисунку 16 найдите угол X.

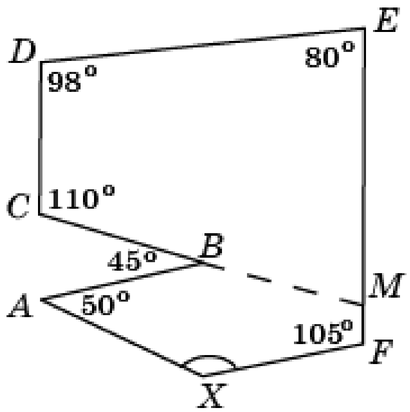


Рис. 16

Ответ. ______________________________

28.20. Используя рисунок 17, найдите сумму углов A, B, C, D и E.

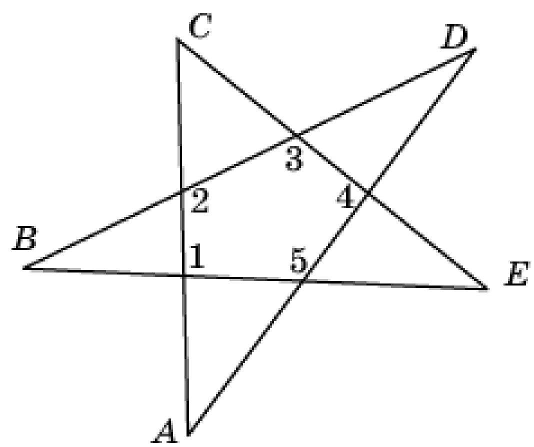


Рис. 17

Решение. $\angle A + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 =$ ____________________________________;

$\angle B + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 =$ ____;

$\angle C + \angle 4 + \angle 5 + \angle 1 =$ ____;

$\angle D + \angle 5 + \angle 1 + \angle 2 =$ ____;

$\angle E + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$ ____.

Учитывая, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 =$ ____________________,

получим ____.

Отсюда ____

29. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

29.1. Закончите предложение.

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого____

____

29.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первое свойство параллелограмма.

Формулировка.____

____

____

____

Рис. 18

Дано: $ABCD$ - параллелограмм

Доказать______________________

____

____

Доказательство. $\angle A+\angle B=$____

____

____

____

____

29.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, второе свойство параллелограмма.

Формулировка.____

____

____

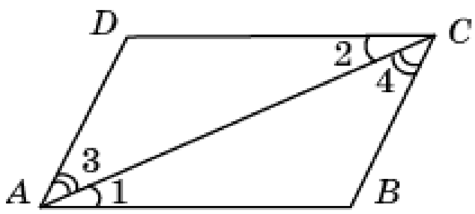


Рис. 19

Дано: $ABCD$ - параллелограмм

Доказать:___________________________

____

____

Доказательство. Проведём диагональ AC и рассмотрим треугольники

____

____

____

____

____

____

29.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, третье свойство параллелограмма.

Формулировка.____

____

____

____

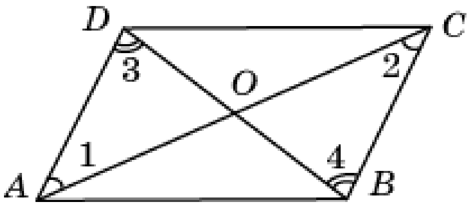


Рис. 20

Дано: $ABCD$ – параллелограмм

____

Доказать:__________________________

____

Доказательство. Проведём диагонали AC и AD, которые пересекутся в точке O. Рассмотрим треугольники ____

____

____

____

____

____

____

____

29.5. На рисунке 21 изображён параллелограмм $CDEF$. Найдите равные треугольники.

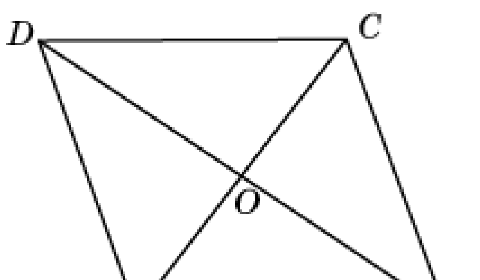


Рис. 21

Ответ.____________________________________

____

____

____

____

____

____

29.6. По рисунку 22 найдите углы параллелограмма *KLMN*.

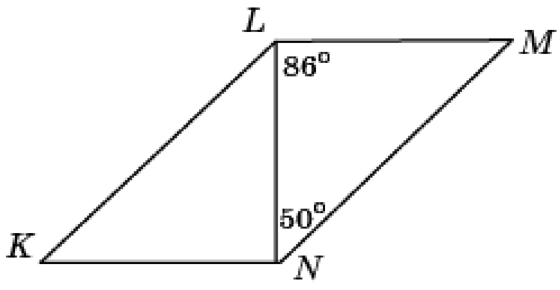


Рис. 22

Ответ.

29.7.

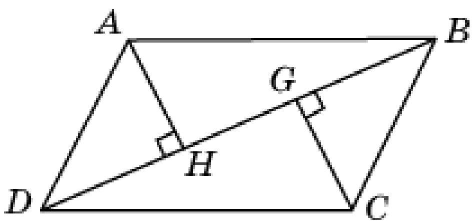


Рис. 23

Дано: *ABCD* – параллелограмм;

$AH \perp BD$; $CG \perp BD$

Доказать: $BH = DG$.

Решение. Рассмотрим

29.8.

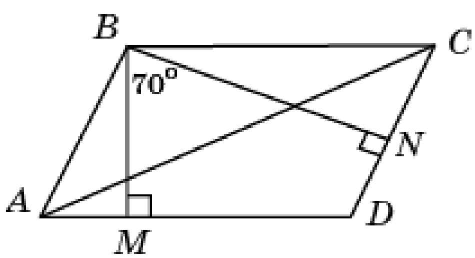


Рис. 24

Дано: *ABCD* – параллелограмм;

$BM \perp AD$; $BN \perp CD$; $\angle MBN = 70°$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$.

Ответ.

29.9. Постройте параллелограмм со сторонами 2, 5 и диагональю, равной 5.

Построение.____

____

____

____

29.10.

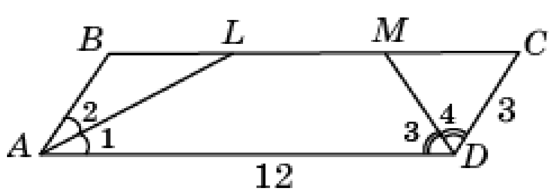


Рис. 25

Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $AD = 12$; $CD = 3$

Найти: LM.

Решение.____

____

____

____

29.11. Постройте параллелограмм по диагоналям, равным 3, 4, и углу между ними в $40°$.

Построение.

29.12.

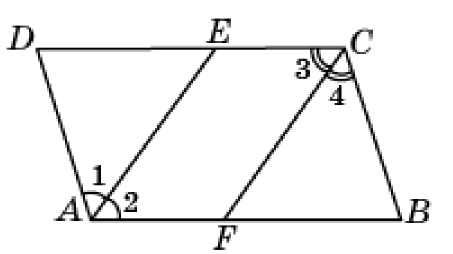


Рис. 26

Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

$\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$.

Определить: вид четырёхугольника $AECF$.

Решение.

29.13. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки параллелограмма до всех его сторон – постоянная величина. Чему она равна?

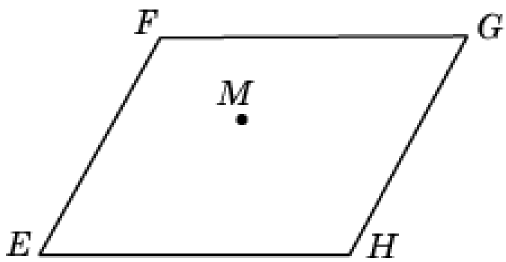


Рис. 27

Дано: $EFGH$ – параллелограмм;

M – его внутренняя точка.

Доказать:________________________

____

Решение.____

____

____

____

____

29.14. Проведите прямые в параллелограмме $ABCD$ (рис. 28), которые разделят его на: а) 2; б) 4; в) 6; г) 8 равных треугольников.

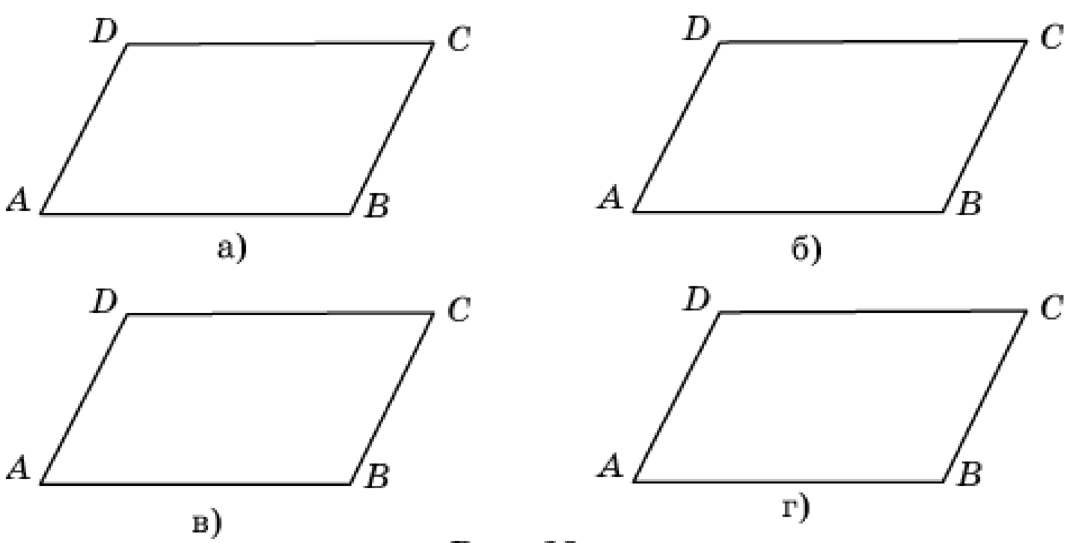


Рис. 28

29.15. Восстановите параллелограмм *ABCD* по трём его вершинам *A*, *B* и *C* (рис. 29).

Рис. 29

Решение.____

29.16. Восстановите параллелограмм *ABCD* по двум его вершинам *A*, *B* и точке *O* – точке пересечения диагоналей (рис. 30).

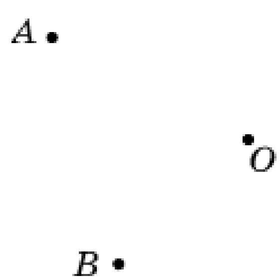


Рис. 30

Решение.____

30. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

30.1. Закончите предложение.

Признаки параллелограмма, т.е. ______________________________ условия, из выполнимости которых для ___________________________ следует, что он является____

30.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему - первый признак параллелограмма.

Формулировка.____

____

____

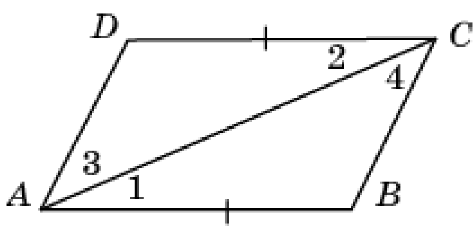


Рис. 31

Дано: *ABCD* – параллелограмм;

AD=________; *AD*||____________

Доказать:______________________

____

Доказательство. Проведём диагональ *AC*, треугольники_________ и __________ равны по ____, так как у них ____

____

Следовательно, прямые ___________ и ______________параллельны.
Таким образом, ____

____

30.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему - второй признак параллелограмма.

Формулировка.____

____

____

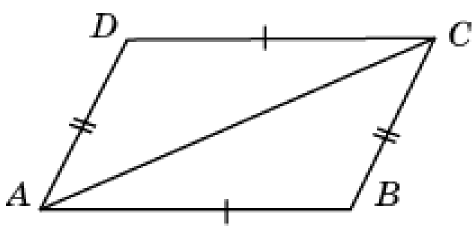


Рис. 32

Дано: $ABCD$ – параллелограмм

AD=___________; AB=__________

Доказать:______________________

____

Доказательство. Проведём какую-нибудь диагональ, например________________. Тогда треугольники________________ и ______________ равны по______________________________________

____

так как____ Значит, прямые ______________ и ______________ параллельны. Таким образом,

____

____

____

____

30.4. Укажите неверные предложения.

1) Если в четырёхугольнике равны противоположные стороны, то он является параллелограммом.

2) Если в четырёхугольнике равны два противоположных угла, то он является параллелограммом.

3) Если в четырёхугольнике стороны попарно параллельны, то он является параллелограммом.

4) Если в четырёхугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом.

5) Если в четырёхугольнике равны противоположные углы, то он является параллелограммом.

6) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны и параллельны, то он является параллелограммом.

7) Если две стороны четырёхугольнике параллельны, а две другие - равны, то он является параллелограммом.

8) Если в четырёхугольнике сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°, то он является параллелограммом.

Ответ____

____

30.5. Постройте четырёхугольник, вершинами которого являются концы двух равных и параллельных отрезков. Будет ли он параллелограммом?

Ответ.____

30.6. На клетчатой бумаге (рис. 33) отмечены четыре точки E, F, G и H. Будут ли прямые EH и FG параллельны? Почему?

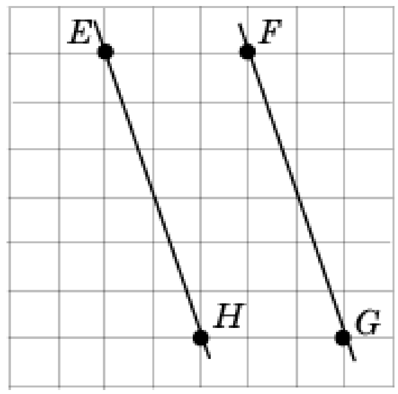


Рис. 33

Ответ.____

____

____

30.7. На клетчатой бумаге (рис. 34) отмечены четыре точки K, L, M и N. Будут ли прямые KL и MN параллельны? Почему?

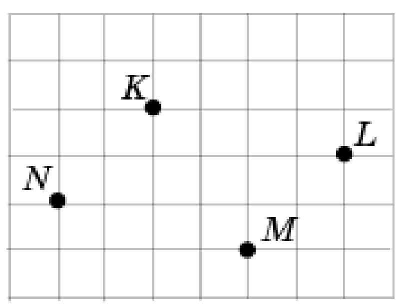


Рис. 34

Ответ.____

____

____

30.8. На рисунке 35 $AB=CD$, $AB||CD$, $AK=CM$ и $AL=CN$. Укажите четырёхугольники, которые являются параллелограммами. Почему?

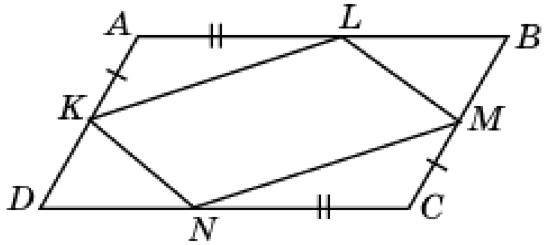


Рис. 35

Ответ.____

____

____

30.9. На рисунке 36 $AC=DF$, $AF=CD$, $AH\perp CF$ и $DG\perp CF$. Укажите четырёхугольники, которые являются параллелограммами. Почему?

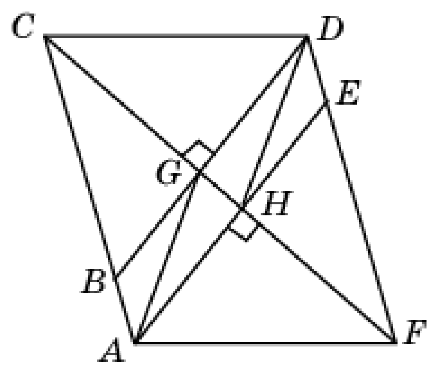


Рис. 36

Ответ.____

____

____

30.10. На рисунке 37 укажите четырёхугольники, которые являются параллелограммами. Почему?

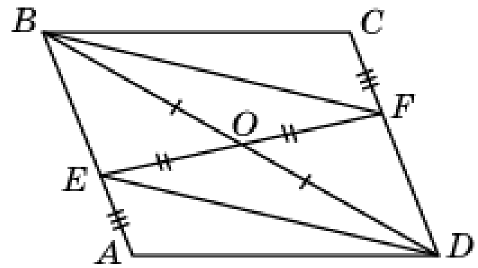


Рис. 37

Ответ.____

____

____

30.11. На рисунке 38 укажите четырёхугольники, которые являются параллелограммами. Почему?

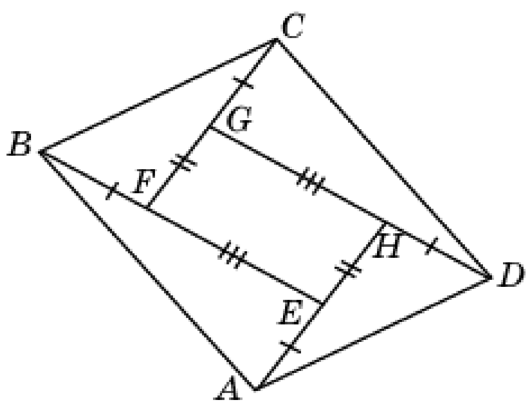


Рис. 38

Ответ.____

____

____

30.12. Постройте параллелограмм $ABCD$ по стороне $AD=a$, высоте $BH=h$ и диагонали $AC=d$ (рис. 39).

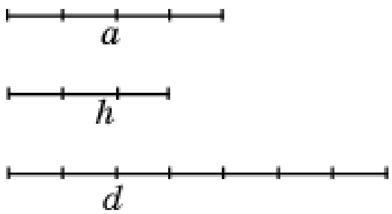


Рис. 39

Построение.

30.13. Постройте параллелограмм по двум сторонам, равным 2 и 3, и одному из углов, равному $120°$.

Построение.

30.14. Постройте параллелограмм по двум сторонам, равным 3 и 4, и высоте, равной 2.

Построение.____

30.15. Постройте параллелограмм по углу в 60° и высотам, равным 2 и 2,5.

Построение.____

____

____

____

____

30.16. По рисунку 40 сформулируйте и решите задачу.

Формулировка. ____

____

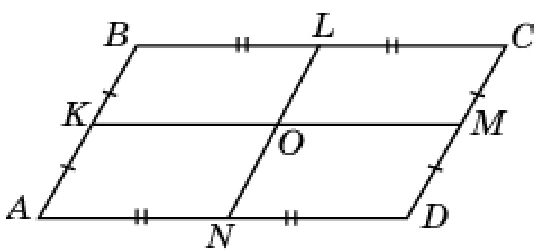


Рис. 40

Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

K, L, M, N – середины его сторон;
$O=KM\cap LN$.

Доказать: $AC\cap BD=O$.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $KLMN$ (рис. 40), он является______________________________, потому что __________________

____

____. Точка O

является в нём ____

____

Следовательно, ____

____

____

30.17. Через произвольную точку D основания BC равнобедренного треугольника ABC проведены прямые $DE||AB$ и $DF||AC$, где точки E и F принадлежат соответственно сторонам AC и AB. Сделайте чертёж и докажите, что периметр четырёхугольника $AEDF$ не зависит от выбора точки D.

Дано:____

____

Доказать:____

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $AEDF$, он является ____, так как __________

____

Следовательно, $AF=$__________________, $DF=$____________________. Треугольники BFD и CED являются ____________________________, так как ____, откуда $DF=$_______________ и $DE=$__________________. Таким образом,

____

____

____

30.18. Восстановите параллелограмм по трём точкам – серединам трёх его сторон (рис. 41).

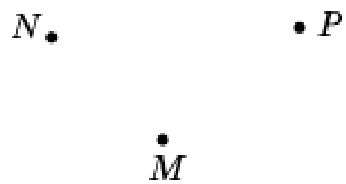


Рис. 41

Построение.

30.19. Верно ли следующее утверждение: «Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон выпуклого четырехугольника, является параллелограммом.»?

Ответ.

31. ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ

31.1. Заполните пропуски.

1) Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется

____.

2) Четырёхугольник, у которого ___________________________

____

____________________________, называется прямоугольником.

31.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему - признак прямоугольника.

Формулировка.____

____

____

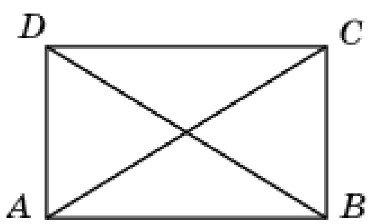


Рис. 42

Дано: *ABCD* – ___________________________;

AC=___________________________________

Доказать:______________________________

____

Доказательство. Рассмотрим треугольники *ABC* и *DCA*, они ____________________, так как ________________________________,

откуда $\angle BAD$=_________________, но они в сумме составляют _________, значит, каждый из них равен _________________________.

____

____

____.

31.3. Существует ли четырёхугольник, который не является прямоугольником, но у которого равны диагонали? Если да, изобразите такой четырёхугольник.

Ответ.____
____
____

31.4. Изобразите ГМТ, которые одинаково удалены от вершин прямоугольника *ABCD* (рис. 43).

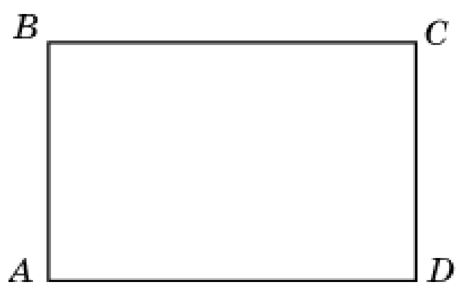


Рис. 43

Ответ.____
____

31.5. Постройте прямоугольник по его диагонали, равной 3, и углу между диагоналями, равному $100°$.

Построение.____

____

____

____

____

31.6. Закончите предложения.

1) Прямоугольник, у которого ______________________________

____

называется ромбом.

2) Параллелограмм, у которого ___________________________

____ называется ромбом.

3) Четырёхугольник, у которого __________________________

____

называется ромбом.

31.7. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему - признак ромба.

Формулировка. ____

____

____

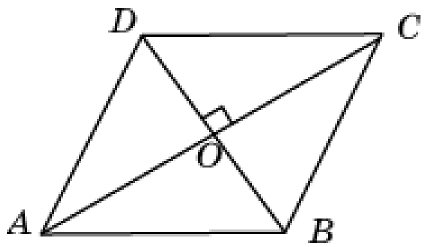


Рис. 44

Дано: *ABCD* – ______________________;

*AC*______________________________

Доказать:__________________________

____

Доказательство. Рассмотрим треугольники *AOB* и *AOD*, они ________________, так как ____________________________,

____

____

____.

31.8. Определите вид четырёхугольника *KLMN* на рисунке 45, если *ABCD* – параллелограмм.

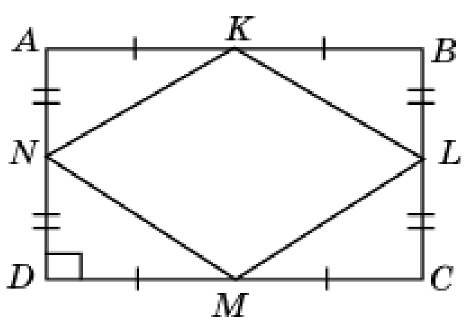


Рис. 45

Ответ. ____

____

31.9. Нарисуйте: а) 2; б) 4 равных треугольника, из которых можно сложить ромб.

Ответ. а) ____;
б) ____.

31.10. С помощью одно линейки постройте ромб.

Построение. ____
____
____

31.11. Изобразите отрезок и с помощью одной линейки постройте к нему серединный перпендикуляр (длина отрезка больше ширины линейки).

Построение. ____
____
____

31.12. Закончите предложения.

1) Прямоугольник, у которого ____________________________________
____ называется квадратом.

2) Ромб, у которого ____
____ называется квадратом.

3) Параллелограмм, у которого __________________________________
____
_______________________________________ называется квадратом.

4) Четырёхугольник, у которого _________________________________
____
____
______________________________________ называется квадратом.

31.13. Перечислите, какими свойствами: а) прямоугольника; б) ромба обладает квадрат.

Ответ. а) ____

____

____;

б) ____

____

____.

31.14. Изобразите на клетчатой бумаге: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат с вершинами в вершинах клеток.

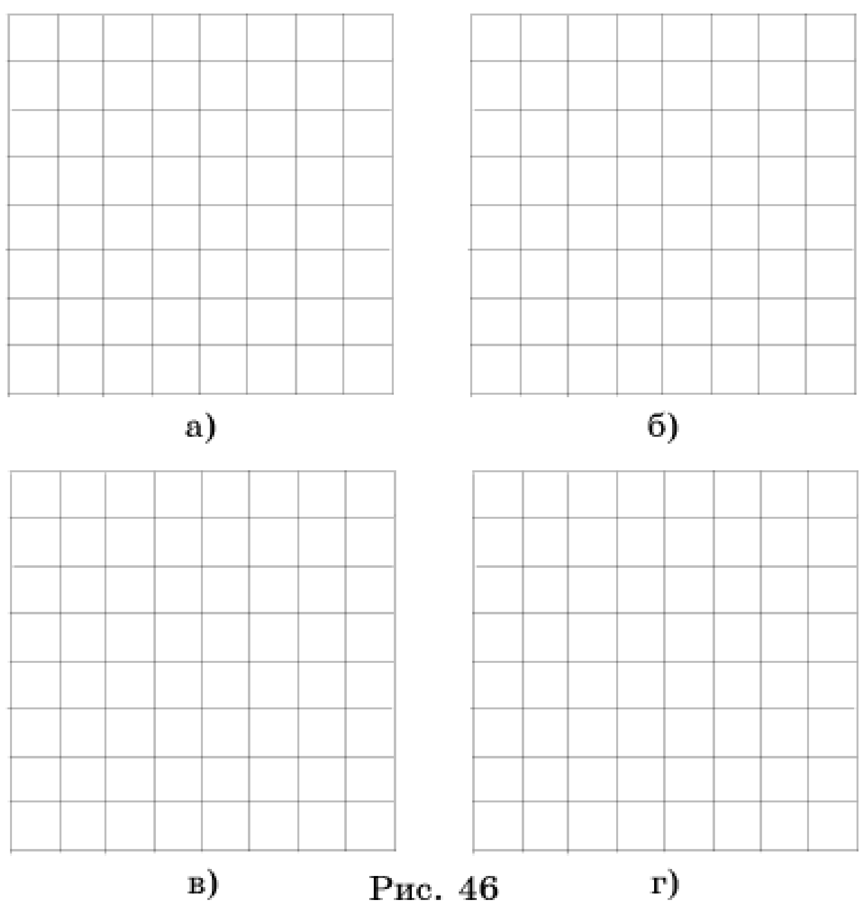


Рис. 46

31.15. Укажите верные утверждения.

1) Если в четырёхугольнике диагонали являются биссектрисами всех его углов, то этот четырёхугольник – ромб.

2) Если в четырёхугольнике все стороны равны, то он является ромбом.

3) Ромбом является четырёхугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.

4) Если в четырёхугольнике диагонали равны между собой и являются биссектрисами углов четырёхугольника, то этот четырёхугольник является квадратом.

5) Если в четырёхугольнике диагонали взаимно перпендикулярны и равны между собой, то этот четырёхугольник является квадратом.

6) Если в четырёхугольнике диагонали взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник является квадратом

Ответ. ____

____

31.16. На рисунке 47 определите вид четырёхугольника *EFGH*, если *ABCD* – квадрат.

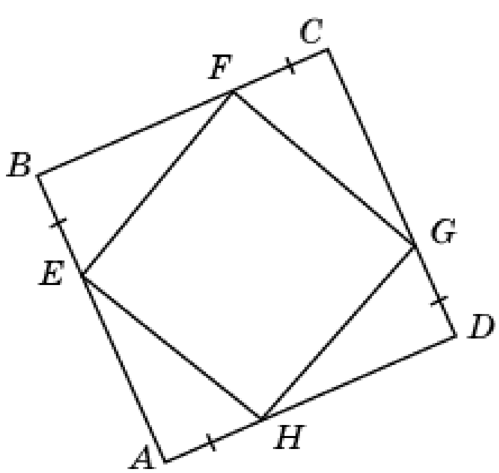


Рис. 47

Ответ. ______________________________

____

____

____

31.17. На рисунке 48 определите вид четырёхугольника *LHNP*, если *KLMN* – квадрат.

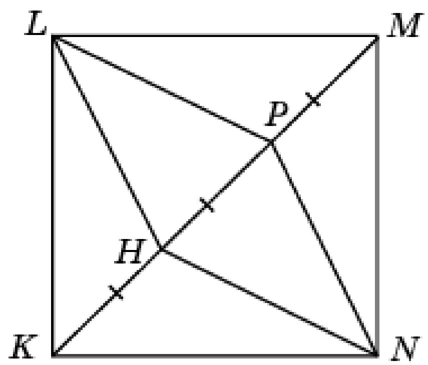


Рис. 48

Ответ. ______________________________

____

____

31.18. Постройте квадрат с вершинами в данных точках *X* и *Y* (рис. 49). Сколько таких квадратов можно построить?

Рис. 49

Построение. ______________________________

____

____

____

____

31.19. На рисунке 50 изображена доска, имеющая прямоугольную форму. Покажите, как нужно отрезать её левый конец под углом $45°$.

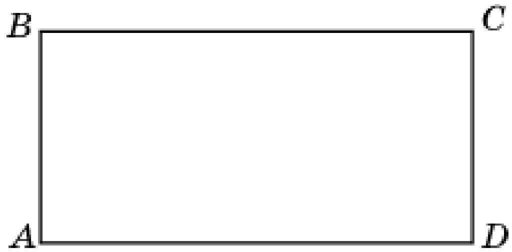


Рис. 50

Решение. ____

____

____

31.20. На рисунке 51 изображён правильный пятиугольник. Проведите две его диагонали из соседних вершин и определите виды образовавшихся треугольников и четырёхугольника.

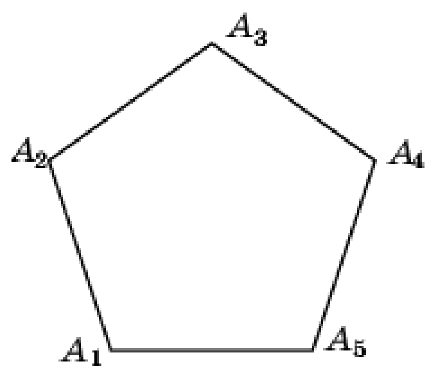


Рис. 51

Решение.____

____

____

____

____

31.21.

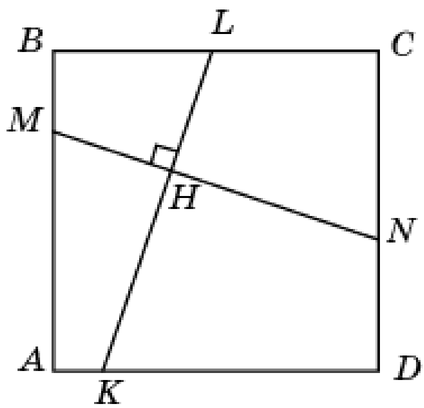


Рис. 52

Дано: $ABCD$ – квадрат; $KL \perp MN$.

Доказать: $KL = MN$.

Решение. Проведём $LG \perp AD$ и $NP \perp AB$, где $G \in AD$ и $P \in$______________. Рассмотрим прямоугольные треугольники KLG и __________________. Они равны, так как ___________________________________

____

____

Значит, ____

____

31.22.

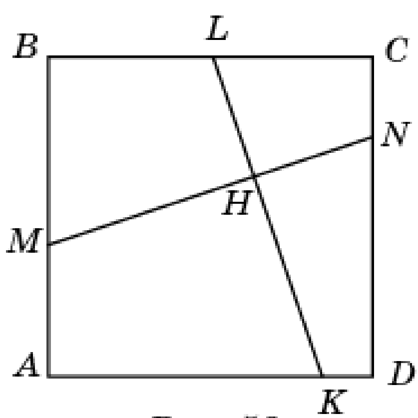


Рис. 53

Дано: $ABCD$ – квадрат; $KL = MN$.

Доказать: $KL \perp MN$.

Решение. Проведём $LG \perp AD$ и $NP \perp AB$, где $G \in AD$ и $P \in$______________. Рассмотрим прямоугольные треугольники KLG и __________________. Они равны, так как

____

____

Значит, ____

____

31.23. Восстановите квадрат по четырём точкам K, L, M, N, по одной на каждой из его сторон. Сколько решений имеет задача? Объясните решение по рисунку 54.

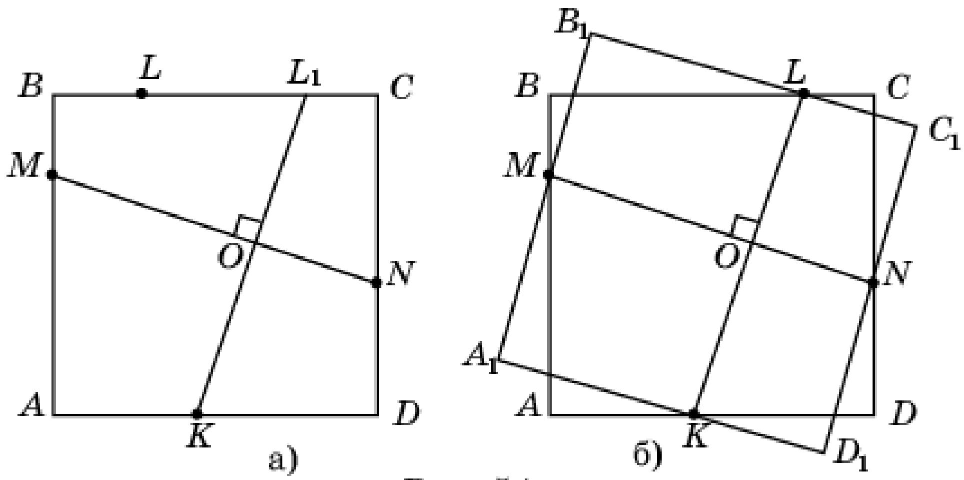


Рис. 54

Решение. ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

32. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

32.1. Закончите предложения.

1) Средней линией треугольника называется ____________________

____

2) Любой треугольник имеет __________________ (количество) средних линий.

32.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о средней линии треугольника.

Формулировка____

____

____

____

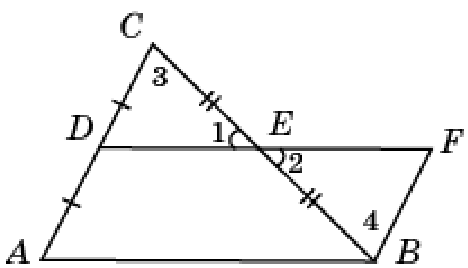


Рис. 55

Дано: ΔABC; $AD=DC$; $CE=EB$.

Доказать: 1)__________________________

2)____________________________________

Доказательство. Продолжим DE и отложим на продолжении отрезок EF=_____________, соединим точку F с _________________. Рассмотрим треугольники CDE и ____________. Они _______________, так как ____, откуда следует, что AD=__________, значит, ___________= DC и $\angle 2$=________, откуда $AB \parallel$___________. Следовательно, _________________________________

____

____

____

32.3. На рисунке 56 изображён треугольник ABC со сторонами a, b, c. Постройте его среднии линии и найдите периметр треугольника, образованного ими.

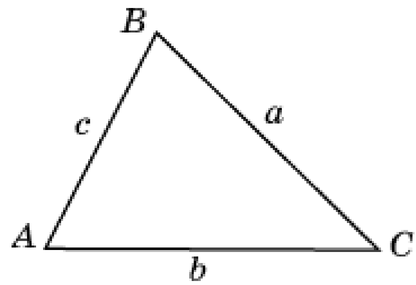


Рис. 56

Решение. ____

____

____

____

32.4. На рисунке 57 изображён треугольник ABC со сторонами a, b, c. причём его сторонами являются средние линии треугольника $A_1B_1C_1$. Постройте этот треугольник и найдите его периметр.

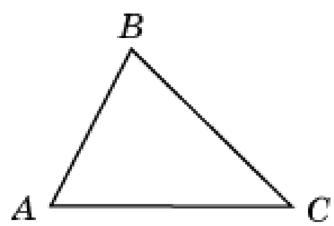


Рис. 57

Решение. ____

____

____

____

32.5. В треугольнике CDE (рис. 58) из вершины E проведены всевозможные наклонные к стороне CD. Постройте ГМ середин этих наклонных.

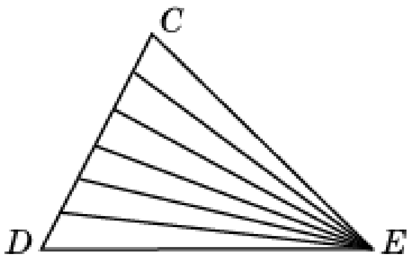


Рис. 58

Построение. ______________________

____

____

____

____

____

____

32.6. Каждая диагональ параллелограмма $ABCD$ разделена на 4 равные части и точки деления соединены так, как показано на рисунке 59. Определите вид четырёхугольника $KLMN$ и найдите его периметр, если перимпетр $ABCD$ равен 36 и $AB:BC$=5:4.

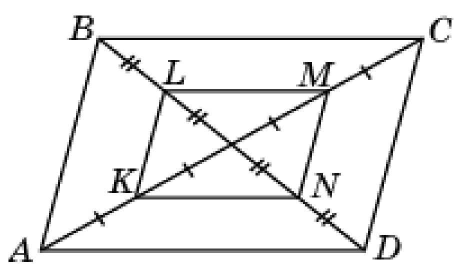


Рис. 59

Решение. ______________________________________

____

____

____

____

32.7. Середины сторон произвольного выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соединены отрезками так, как показано на рисунке 60. Найдите длины этих отрезков, если не пересекающая их диагональ равна 17.

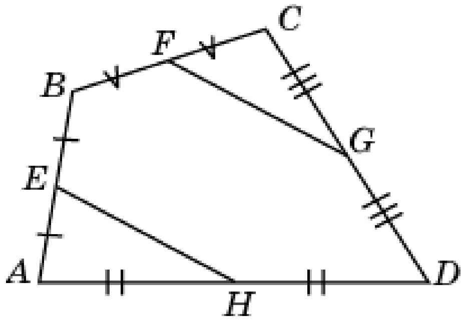


Рис. 60

Ответ. ______________________________

32.8.

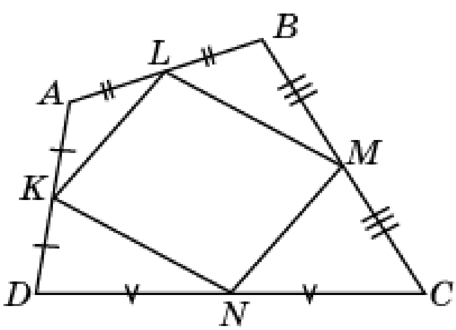


Рис. 61

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник; K, L, M, N – середины его сторон.

Определить: вид четырёхугольника $KLMN$.

Ответ. ______________________________

32.9.

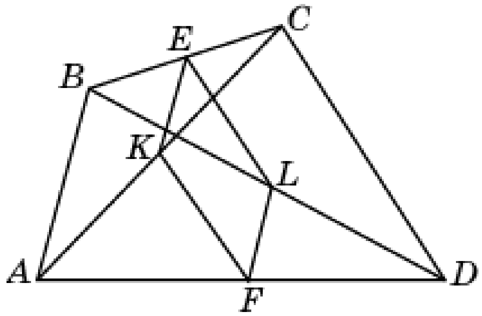


Рис. 62

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник;

$BE=EC$; $AF=FD$; $AK=KC$; $BL=LD$.

Определить: вид четырёхугольника $KELF$.

Ответ. ____

32.10.

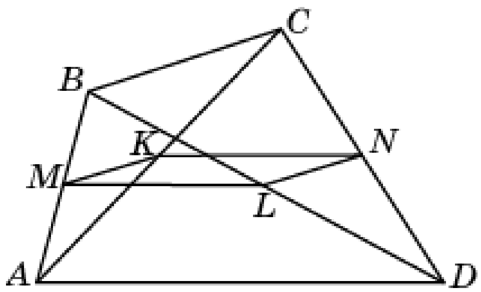


Рис. 63

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник;

$AM=MB$; $CN=ND$; $AK=KC$; $BL=LD$.

Определить: вид четырёхугольника $KMLN$.

Ответ. ____

32.11.

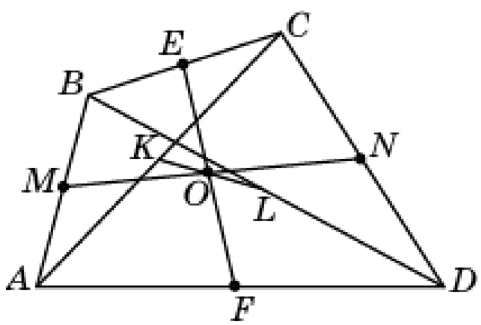


Рис. 64

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник;
$AM=MB$; $BE=EC$; $CN=ND$; $AF=FD$;
$AK=KC$; $BL=LD$; $O=MN\cap EF$

Доказать: 1) точки K, O, L принадлежат одной прямой;

2) $KO= OL$.

Решение. 1) Рассмотрим четырёхугольник *MENF,* он явлется ______________________________, так как ___________________________ ____,
значит, точка *O* является точкой ________________________________
____, а в ней диагонали ____
____.

2) Рассмотрим четырёхугольник *KELF* (или *KMLN*), он является ________________________, так как ____________________________
____. Его диагонали *EF* и _____________ (или *MN* и _______________) в точке пересечения диагоналей делятся ___________________________, значит, точка *O* является серединой ______________________________
____
____

32.12. На рисунке 65 дан план дачного участка с тремя постройками, обозначенными A, B, C. Где на нём проложить дорожку (отметьте на плане), которая была бы одинаково удалена от каждой из них? Сколько решений имеет задача?

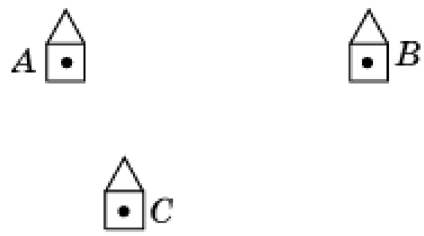


Рис. 65

Ответ. ____

____

____

32.13. В параллелограмме $ABCD$ сторона BC продолжена на отрезок $CE=BC$. Отрезок AE пересекает CD в точке F. Докажите, что $P_{ABE}=2P_{ADF}$.

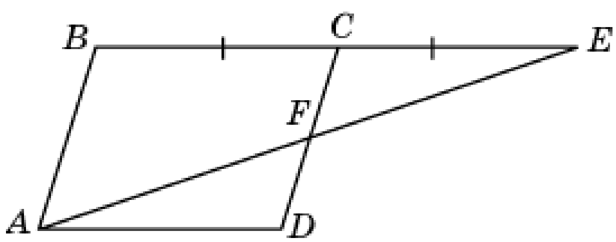


Рис. 66

Дано: $ABCD$;____________________

____

____

Доказать: ____________________

Решение. ____

____

____

____

____

32.14. Восстановите, используя понятие средней линии треугольника, параллелограмм по серединам двух его смежных сторон и точке пересечения диагоналей (на рисунке 67 точка O). Сколько решений может иметь задача?

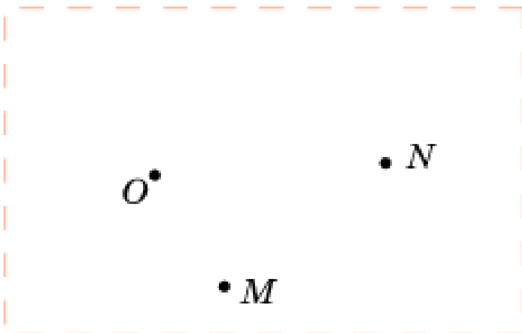


Рис. 67

Построение. ______________________________

____

____

____

____

____

____

32.15. Объясните, как на местности, используя понятие средней линии треугольника, провести прямую, параллельную данной прямой через точку, не принадлежащую ей.

Построение. ______________________________

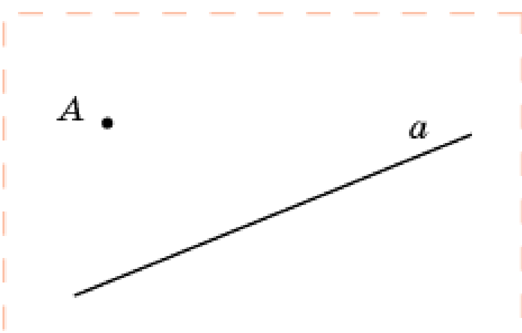


Рис. 68

____

____

____

____

____

____

33. ТРАПЕЦИЯ

33.1. Закончите предложения.

1) Трапецией называется ______________________________

____

2) Основаниями трапеции называются ____________________

____

3) Боковыми сторонами трапеции называются ______________

____

4) Средней линией трпеции называется __________________

____

5) Трапеция называется равнобедренной, если ______________

____

6) Трапеция называется прямоугольной, если _______________

____

33.2. Изобразите: а) равнобедренную; б) прямоугольную трапецию.

33.3. Найдите суммы углов трапеции, прилежащих к каждой боковой стороне. Сделайте вывод.

Ответ. ____

____

____.

33.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о средней линии трапеции.

Формулировка.____

____

____

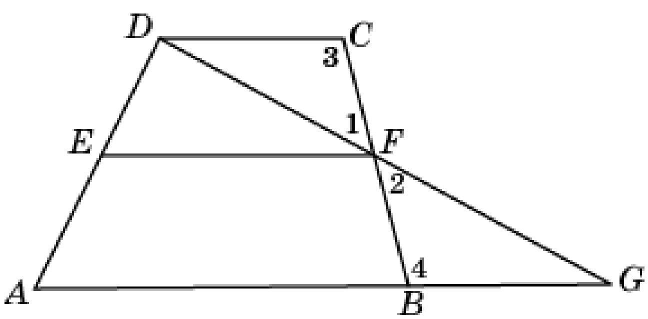


Рис. 69

Дано: $ABCD$ - __________;

$AB \parallel$________;

AE=_______; CF=______;

Доказать: 1)_________________;

2)_________________.

Доказательство. Проведём прямую DF и её точку пересечения с AB назовём G. $\Delta DFC = \Delta$______, так как____________________________

____________________________, значит, DF=____ и DC=____.;

Таким образом, EF для треугольника _______ является ____________________________________, тогда по теореме ____EF=_

____________________________ и $EF \parallel$___________. Следовательно,

____

____.

33.5. Сформулируйте и докажите, используя рисунок 69, следствие изх теоремы о средней линии трапеции.

Формулировка. ____

____

____

Дано: $ABCD$ - ______________________;

$AM=$ __________; $MN||$__________.

Доказать: ____.

Доказательство.____

____

____

____.

33.6. Могут ли три угла трапеции быть острыми? Если да, изобразите такую трапецию.

Ответ. ____.

33.7. Могут ли углы трапеции, прилежащие к одному основанию, быть: а) острыми; б) тупыми; в) один острым, другой – тупым? Если да, изобразите такую трапецию.

Ответ. а) ______________________; б) ____________________________;
в) ______________________________.

33.8. Могут ли противоположные углы трапеции быть: а) острыми; б) тупыми; в) прямыми? Если да, изобразите такую трапецию.

Ответ. а) __________________; б) _________________________________;
в) ______________________________.

33.9.

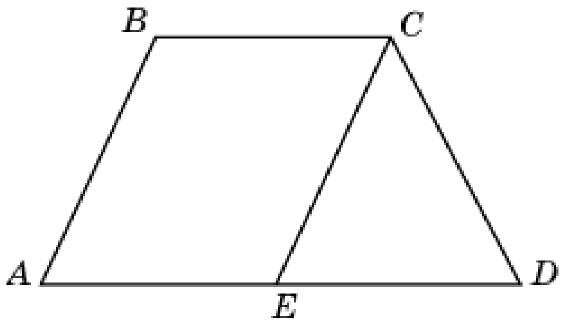


Рис. 70

Дано: $ABCD$ - трапеция;

$AD||BC$; $CE||AB$; BC=7; P_{CDE}=20;

Найти: P_{ABCD}.

Решение. ____

____

____

____

____

____

____

33.10. Средняя линия трапеции равна 18. Найдите её основания, если одно из них: а) больше другого в 2 раза; б) меньше другого в 3 раза.

Ответ. а) ____

____

____;

б) ____

____

____.

33.11. Сформулируйте свойства равнобедренной трапеции.

1) В равнобедренной трапеции углы ____________________________

____.

2) В равнобедренной трапеции диагонали ________________________

____.

33.12. Закончите предложения.

1) Если в трапеции один из углов прямой, то ____________________

____.

2) Если в трапеции углы при основании равны, то ________________

____.

3) Если диагонали трапеции равны, то __________________________

____.

33.13. Средняя линия трапеции делит одну из её диагоналей на отрезки, равные a и b. Сделайте чертёж и найдите основания данной трапеции.

Ответ. ____

____.

33.14. Изобразите на клетчатой бумаге: а) произвольную трапецию; б) равнобедренную трапецию; в) прямоугольную трапецию; г) произвольный выпуклый четырёхугольник с вершинами в вершинах клеток.

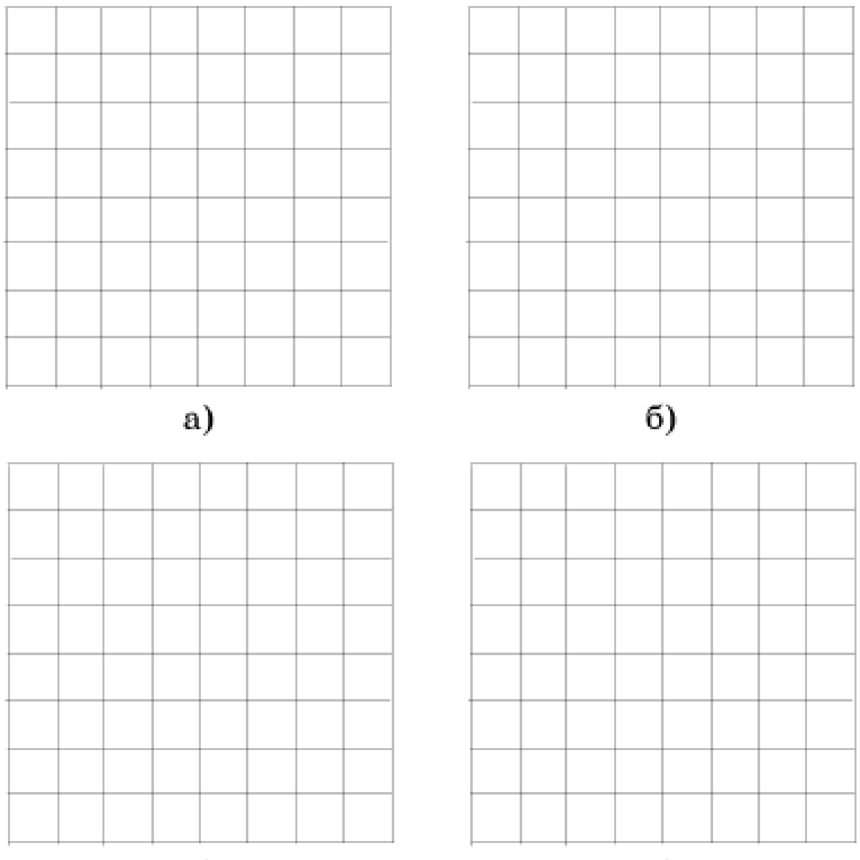


Рис. 71

33.15.

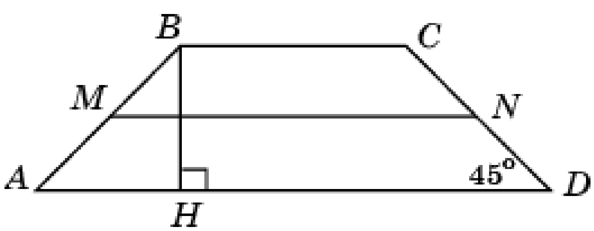


Рис. 72

Дано: *ABCD* - трапеция;

$AD \parallel BC$; $AB=CD$; $\angle D=45°$; $BC=4$;

$BH=3$; $AM=MB$; $CN=ND$.

Найти: *MN*.

Решение. Рассмотрим треугольник ABH, у него _______________

____.

Проведём $CP\perp$_________, тогда __________________________________.

Таким образом, ____

____. Итак, MN= ___________.

33.16. Покажите, как можно из двух равных трапеций (рис. 73) сложить трапецию.

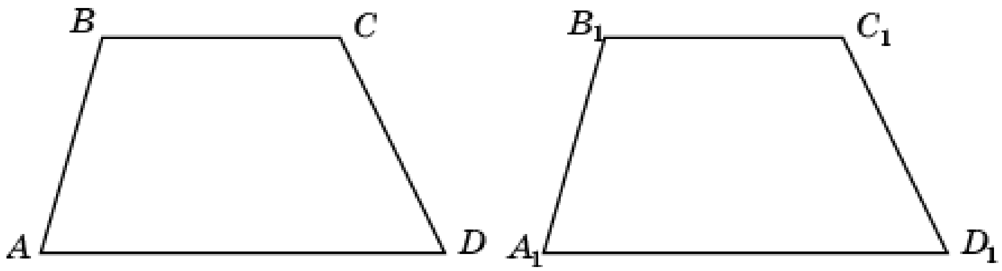


Рис. 73

33.17.

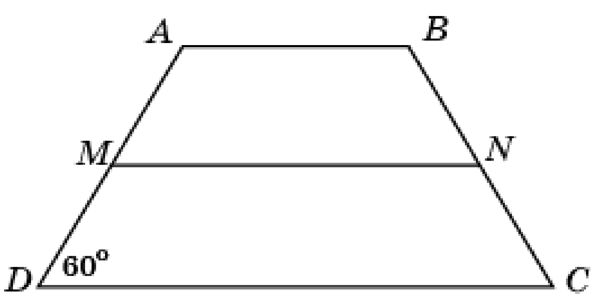


Рис. 74

Дано: $ABCD$ - трапеция;

$AB\|CD$; $AD=BC$; $\angle D=60°$; $AD=3{,}5$;

$CD=5{,}5$; $AM=MD$; $BN=NC$.

Найти: MN.

Решение. Проведём $AH\perp$ _______ и

$BP\perp$_______, тогда в ___________

треугольниках ____________ *ADH* и *BCP* ____________________________,

значит, они ____

____.

Итак, MN= _______.

33.18. Из четырех равных прямоугольных треугольников (рис. 75) сложите трапецию.

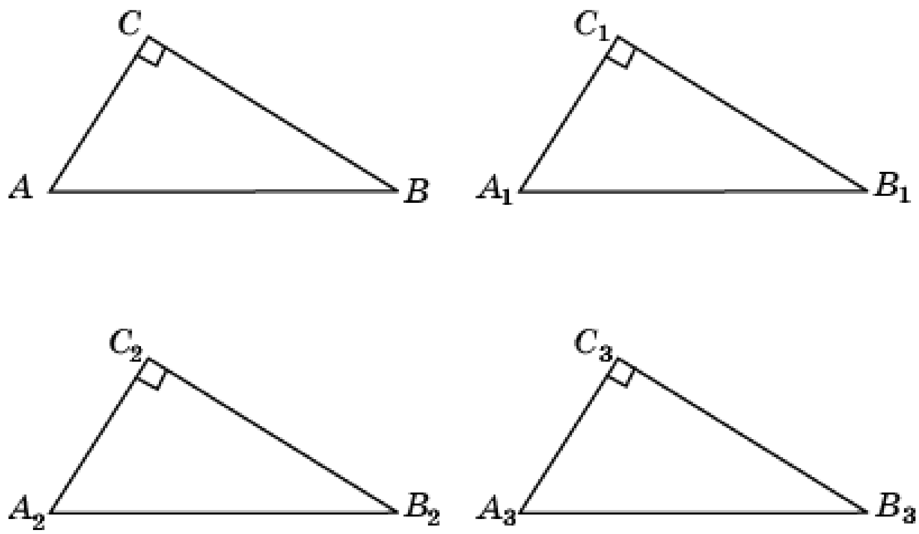


Рис. 75

33.19.

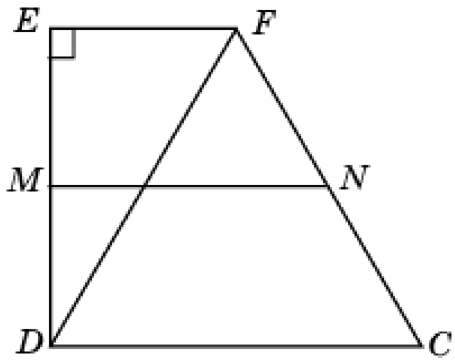


Рис. 76

Дано: *CDEF* - трапеция;

EF||*CD*; $\angle E=90°$; *DF*=4;

ΔCDF - равносторонний;

EM=*MD*; *FN*=*NC*.

Найти: *MN*.

Решение. Поскольку ΔCDF – равносторонний, *DF*=___=4 и $\angle C$=_____=_____=_____. Таким образом, в ____________________ ΔDEF $\angle EDF$=_________, откуда *EF*=________. Итак, *MN*= _______.

33.20. Постройте равнобедренную трапецию *ABCD* по меньшему основанию *BC*=2, боковой стороне *AB*=5 и диагонали *AC*=6.

Построение. ____

____

____

____

____.

34. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

34.1. Заполните пропуски в предложении: «Фалес жил около __________________ в городе ______________________________, который располагался на берегу ____.

34.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему Фалеса.

Формулировка.____

____

____

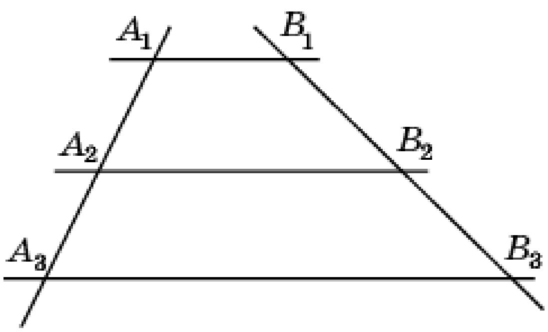


Рис. 77

Дано: $\angle O$; $A_1B_1 \| A_2B_2 \|$_____ ;

$A_1A_2=$______________________________

Доказать: ________________________

____

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $A_1B_1B_3A_3$, он является __________________________, так как ________________________. Поскольку $A_1A_2=$___________, то A_2B_2 является ___________________________________ ___________________ в ____.

Тогда ____

____

____

____

34.3. Разделите данный отрезок на: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6 равных частей.

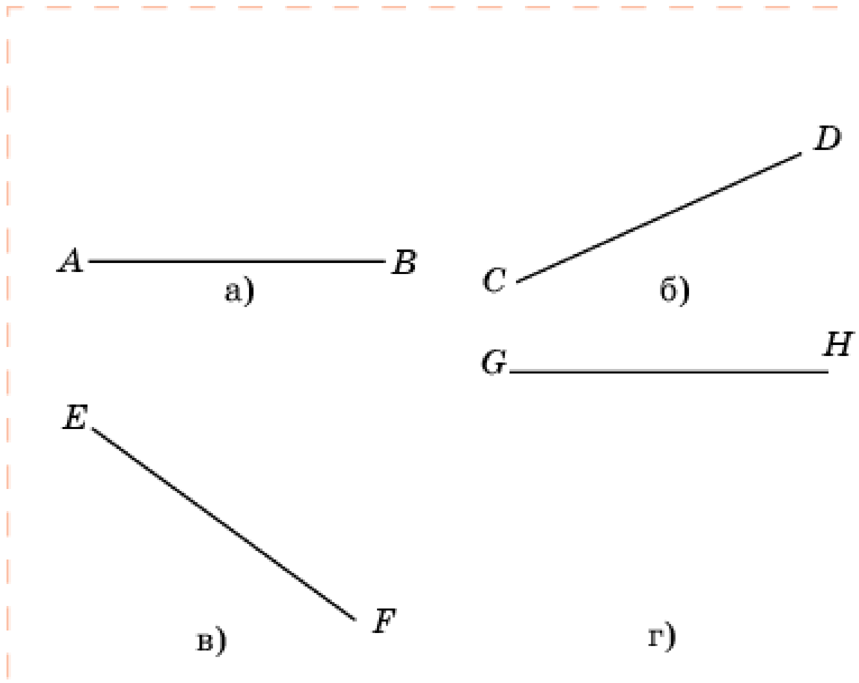


Рис. 78

Построение: а) ____

____

____

б) ____

____

в) ____

____

г) ____

____

34.4. Заполните пропуски.

1) Отношением $\frac{CD}{EF}$ двух отрезков CD и EF называется ________, показывающее, сколько раз ________________________________ укладывается в ________________. Если отрезое EF принять за единичный, то отношение $\frac{CD}{EF}$ бвудет равно ______________________. Отношение отрезков CD и EF обозначается также ______________________.

2) Говорят, что отрезки KL, MN пропорциональны отрезкам K_1L_1, M_1N_1, если ____, т.е. ________=__________$=k$. Число k называется __________________ ____.

34.5. Даны два отрезка a=15 см и b=35 см. Найдите отношение этих отрезков. Выразите их длины в миллиметрах, дециметрах, метрах. Изменится ли при этом отношение взятых отрезков? Объясните, почему отношение отрезков не зависит от выбора единицы измерения.

Ответ. ____
____
____
____
____
____
____.

34.6. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о пропорциональных отрезках.

Формулировка.____

____

____

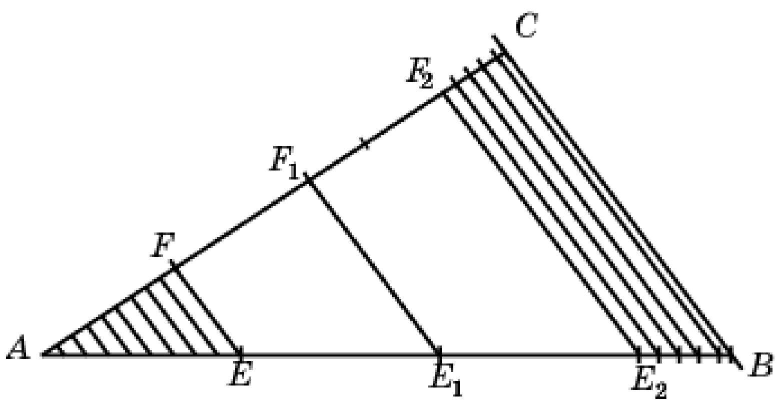


Рис. 79

Дано: $\angle A$; $BC \| EF$.

Доказать: $\dfrac{AB}{AE} =$________

Доказательство. Заметим, что отношение $\dfrac{AB}{AE}$ показывает ______________________укладывается в отрезке AB, а отношение $\dfrac{AC}{AF}$ показывает_______________________________

____.

Теорема Фалеса позволяет установить соответствие между процессами измерения отрезков AB и AC. Действительно, прямые, параллельные BC, переводят равные отрезки на прямой AB в ______________________ на прямой ___. Отрезок AE переходит в отрезок ____. Одна десятая часть отрезка AE переходит в одну десятую часть отрезка ___ и т.д. Поэтому, если отрезок AE и его части укладываются в отрезке AB k раз, то отрезок AF и его части будут укладываться в ____________________, т.е. $\dfrac{AB}{AE} =$_________=_________.

34.7. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, следствие из теоремы о пропорциональных отрезках.

Формулировка.____

____

____

Дано: $\angle A$; $BC \| EF$.

Доказать: _________

Доказательство. Заметим, что $AB=AE+$___ и $AC=AF+$___. Подставляя эти выражения в равенство ____________, получим равенство___________________. Следовательно, выполняется ____.

34.8. Разделите данный отрезок в отношении: а) 1:2; б) 3:2.

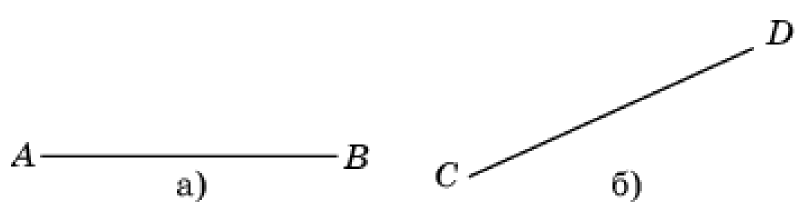


Рис. 80

Построение: а) ____

____

____

б) ____

____

____

34.9. Точка M делит отрезок KL в отношении: а) $\frac{KM}{ML} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{KM}{ML} = \frac{3}{2}$. Найдите отношение отрезков $\frac{KM}{KL}$ и $\frac{ML}{KL}$.

Ответ. а) ____;
б) ____.

34.10. Расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом приблизительно равно 600 км. Изобразите это расстояние на рисунке в виде отрезка, определив соответствующий масштаб.

Ответ. Масштаб ______________________________________,
искомый отрезок равен ____________________________________.

34.11. Определите расстояние между двумя пунктами на местности, если на карте оно изображено отрезком, равным 2. Масштаб карты 1:200000.

Ответ. а) ____;
б) ____.

34.12. Выберите пары пропорциональных отрезков.

1) a=10, b=5 и c=12, d=6;

2) a=3, b=4 и c=8, d=6;

3) a=0,6, b=0,1 и c=60, d=12;

4) a=4,2, b=7 и c=0,6, d=1;

5) a=12, b=16 и c=0,1, d=0,4;

6) a=25, b=3 и c=75, d=15;

7) a=0,1, b=0,5 и c=0,12, d=0,6;

8) a=100, b=0,5 и c=1,2, d=0,6.

9) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{7}$ и $c = \frac{7}{5}$, $d = \frac{1}{2}$;

10) $a = 3\frac{1}{6}$, $b = 2\frac{2}{3}$ и $c = 38$, $d = 32$.

Ответ. 1)____;

2)____;

3) ____;

4) ____;

5) ____;

6) ____;

7) ____;

8) ____;

9) ____;

10) ____.

34.13. Точка A делит отрезок EF в отношении 8:3, считая от конца E. Большая часть длиннее меньшей на 2,5. Найдите длины всех отрезков.

Ответ. ____

____.

34.14. Закончите предложения.

1) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то ad=________________________________.

2) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, и $\frac{a}{b}=\frac{c}{y}$, то x=__________________________.

3) Если $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$, то x=________________________________.

4) Если $\frac{x}{b}=\frac{y}{b}$, то x=________________________________.

5) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{b}{a}$=________________________________.

6) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a+c}{b+d}$=_____________________________.

7) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c}$=________________________________.

8) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{d}{b}$=________________________________.

34.15. Даны три отрезка, равные 4, 6 и 7. Какой длины нужно взять четвёртый отрезок: а) меньший; б) больший из данных, чтобы полученные две пары отрезков были пропорциональны.?

Ответ. а) ____;

б) ____.

34.16. По рисунку 81 сформулируйте и решите задачу.

Формулировка. ______________________________

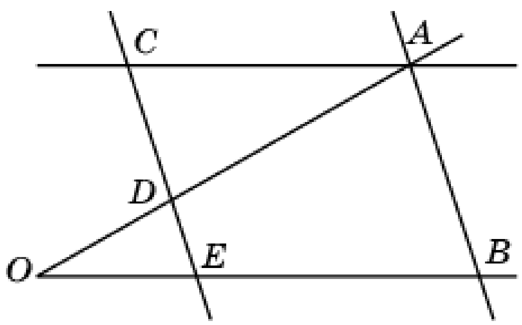


Рис. 81

Дано: $AB || CE$; $AC || BE$

Доказать: $\dfrac{OE}{AC} = \dfrac{OD}{AD}$.

Решение. ______________________________

34.17. В треугольнике ABC медиана AM в точке D делится пополам. Отрезок BD пересекает сторону AC в точке E. Найдите отношение $\dfrac{AE}{EC}$.

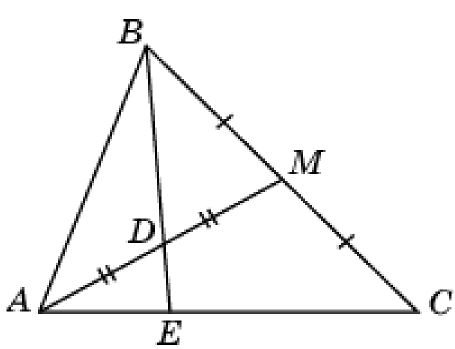


Рис. 82

Дано: ______________________________

Найти: ______________________________

Решение. Сделаем дополнительное построение, а именно, проведём $MN||BE$, где $N \in AC$. Рассмотрим угол ECB, EC точкой N делится в отношении ______________________________, потому что ____
____. Теперь рассмотрим угол CAM, AC=__________________, так как ____
____. Таким образом, $\frac{AE}{EC}=$ ____.

34.18. Объясните, заполняя пропуски, по рисунку 83 построение отрезка x, если известны три отрезка a, b, c и $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$. Отрезок x называется четвёртым пропорциональным к трём данным отрезкам a, b и c.

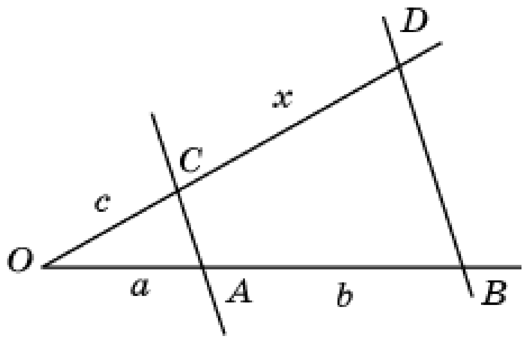


Рис. 83

Дано: ________________________
____

Построить: __________________
____

Решение. Возьмём произвольный угол O и отложим на одной из его сторон отрезки _____=_____ и _____=_____. На другой стороне угла отложим отрезок _____= _____. Проведём прямую AC и через точку B проведём ____. Отрезок _____________ будет искомым, так как ____

34.19. Даны три отрезка a=2, b=3 и c=6. Постройте: а) наименьший; б) наибольший четывёртый пропорциональный к ним отрезок.

Построение. а) ____

____

____

____

____;

б) ____

____

____

____

____.

35. УГЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

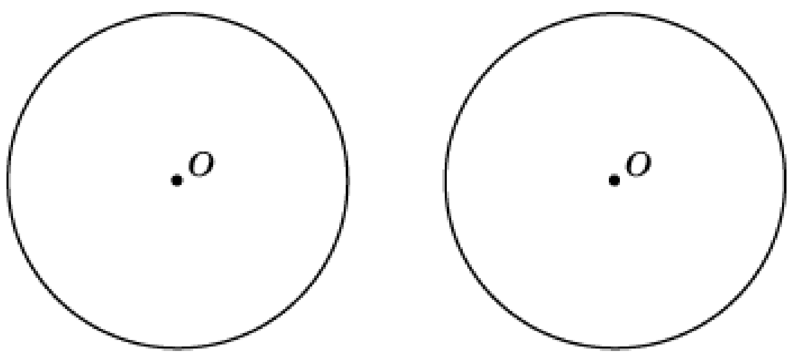
35.1. Закончите предложения.

1) Центральным углом называется ______________________________
____.

2) Вписанным углом называется ________________________________
____.

3) Каждый центральный и вписанный углы данной окружности определяют ____. Они состоят из точек ____
____.

35.2. Изобразите: а) центральный; б) вписанный угол данной окружности (рис. 84). Сделайте соответствующие записи.



а) б)

Рис. 84

Запись: а) ____
____;
б) ____
____
____.

35.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о вписанном угле.

Формулировка. ____

____

____.

Дано: ____

Доказать: ____

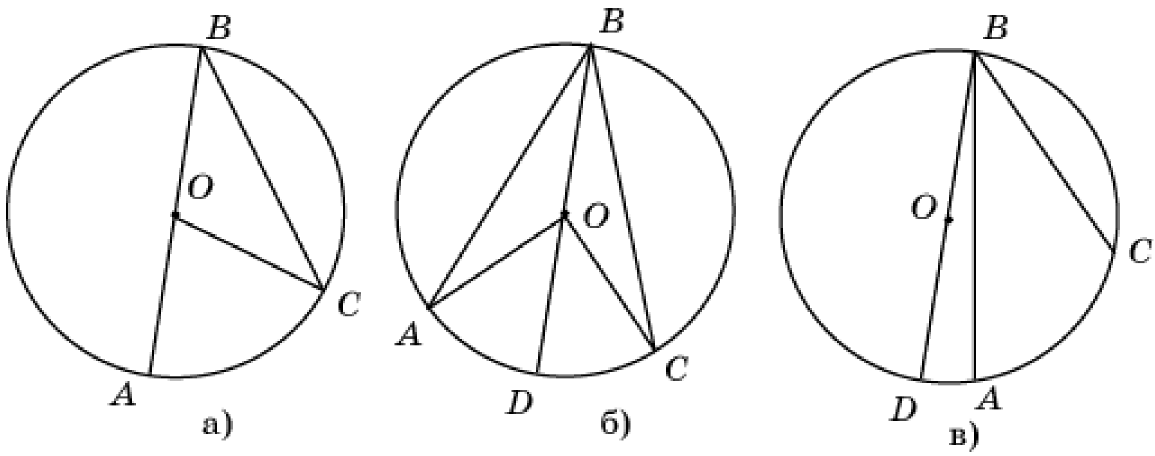


Рис. 85

Доказательство. 1) Рассмотрим случай, когда одна из сторон угла *ABC*, например *AB*, проходит через центр *O* окружности (рис. 85, а). Треугольник *BOC* - _____________ и, следовательно, $\angle B$=___. Угол *AOC* – __________ угол треугольника *BOC* и, значит, равен _________________, поэтому $\angle ABC$ =_______.

2) В случае, если центр *O* окружности лежит внутри угла *ABC* (рис. 85, б), проведём диаметр *BD* и рассмотрим углы *ABD* и _____________. По доказанному выше $\angle ABD$=__________ и $\angle DBC$=_____________________. Следовательно, $\angle ABC$=___________.

3) Центр *O* лежит вне угла *ABC* (рис. 85, в), проведём диаметр____

____

____

____

____.

35.4. Сформулируйте и докажите следствие из теоремы о вписанном угле.

Формулировка. ____

____

____.

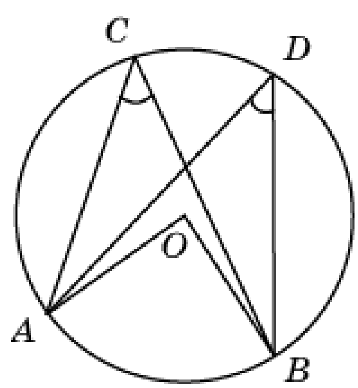


Рис. 86

Дано: __________________________________

____

Доказать: ______________________________

____

Доказательство. Действительно, если вписанные углы *ACB* и _____ опираются на одну и ту же дугу ____ (рис. 86), то у них один и тот же ___________________________________. По доказанной теореме данные вписанные углы равны __________________________________ и, следовательно, ____________________ между собой.

35.5. Закончите предложение.

Вписанный угол измеряется половиной ___________________________

____

____.

35.6. Найдите по рисунку 87 углы X, Y и Z.

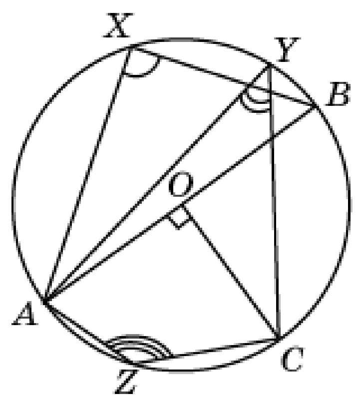


Рис. 87

Ответ. $\angle X$=____________, $\angle Y$=___________, $\angle Z$=_________________.

35.7. Найдите по рисунку 88 углы B, C и D.

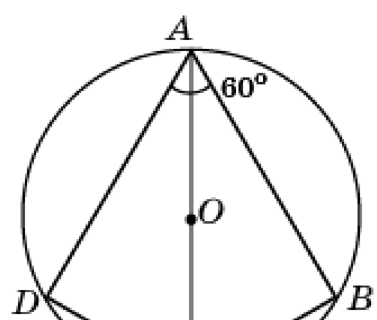


Рис. 88

Ответ. $\angle A$=____________, $\angle B$=___________, $\angle D$=_________________.

35..8. При помощи одного чертёжного угольника с углов в $30°$ постройте на данной окружности (рис. 89) дугу в $120°$.

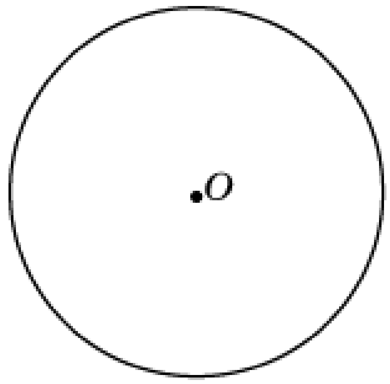


Рис. 89

Построение. Поместив вершину данного угла в какую-нибудь точку окружности, построим ________________________ угол, равный ______________, тогда дуга, на которую он опирается, будет содержать__________. Затем ____
____
____.

35.9. По рисунку 90 определите дугу *BC*.

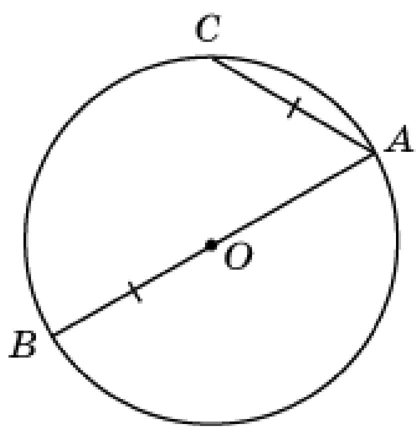


Рис. 90

Ответ. ____.

35.10. Закончите предложения.

1) Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен ____.

2) Вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $\frac{1}{9}$ окружности, равен ____.

3) Вписанный угол, опирающийся на дугу, составляющую 10% окружности, равен ____.

4) Вписанный угол, равный 53°, опирается на дугу, равную ____.

5) Вписанный угол, равный $13^\circ 30'$, опирается на дугу, равную ____.

6) Дуга составлет $\frac{1}{6}$ окружности, тогда угол с вершиной в её точке, под которым видна стягивающая её хорда, равен ____.

35.11. Через концы дуги в 60° проведены касательные (рис. 91). Найдите угол между ними.

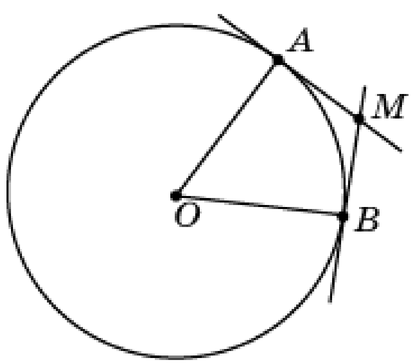


Рис. 91

Ответ. ________________________

____

35.12. Докажите, что угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри угла.

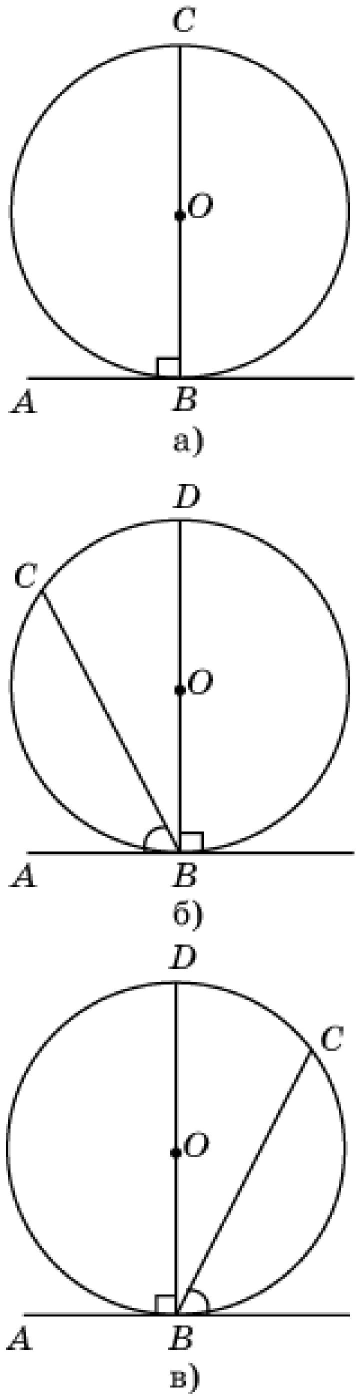


Рис. 92

Дано: $\angle ABC$,

AB -____________; BC - ______________________

Доказать: $\angle ABC$ - __________________________

____

Решение. а) $\angle ABC$ – прямой (рис. 92, а), тогда BC является ______________________ окружности, следовательно, $\angle ABC$ измеряется _______________

____

____;

б) $\angle ABC$ – острый (рис. 92, б), проведём диаметр BD, тогда $\angle ABC = \angle ABD$ -______________, поскольку $\angle ABD$ измеряется ___________________, а $\angle CBD$ измеряется _____________________, то $\angle ABC$ измеряется _____________________________;

в) $\angle ABC$ – тупой (рис. 92, в), проведём диаметр BD, тогда $\angle ABC = \angle ABD$________________, поскольку $\angle ABD$ измеряется ___________________, а $\angle CBD$ измеряется _____________________, то $\angle ABC$ измеряется _____________________________.

35.13. Найдите по рисунку 93 $\angle LMN$ и $\angle KMN$, если дуга MN составляет $\frac{5}{8}$ окружности.

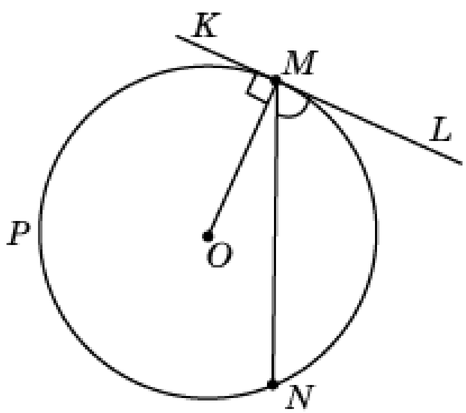


Рис. 93

Ответ. $\angle LMN$=________________________

____;

$\angle KMN$=________________________________

____.

35.14. Найдите по рисунку 94 $\angle MAB$ и $\angle NAC$, если дуга BDC составляет $\frac{21}{36}$ окружности.

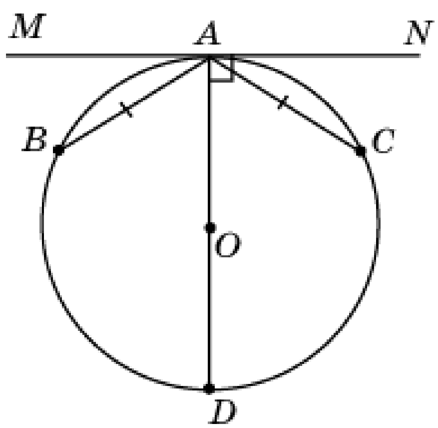


Рис. 94

Ответ. $\angle MAB$=____________________

__________________________________;

$\angle NAC$ = ________________________

__________________________________.

35.15. Из точки вне окружности проведены к ней две касательные, которые образуют угол в 60°. Сделайте чертёж и определите вид треугольника, вершинами которого являются точки касания и данная точка.

Ответ. ____

____.

35.16. Докажите, что угол, вершина которого находится внутри окружности, измеряется полусуммой двух дуг, заключённых между его сторонами и их продолжениями.

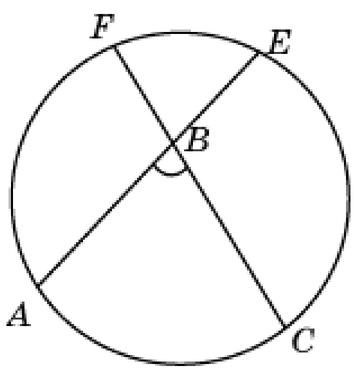


Рис. 95

Дано: $\angle ABC$; точка B лежит __________

_____________________________________;

точки A и C принадлежат ___________

Доказать: $\angle ABC$ измеряется

____

Решение. Рассмотрим треугольник ABF, данный $\angle ABC$ является по отношению к нему ________________________ углом, значит, $\angle ABC$=__________________________; $\angle$____________________ измеряется __________________________________; $\angle$_________________ измеряется ___________________________________. Таким образом, _______________ ____.

35.17. Угол между двумя радиусами окружности равен: а) 65°; б) 131°. Найдите угол между касательными, проведёнными через концы данных радиусов.

Ответ. а) ____; б) ____.

35.18. Докажите, что угол, вершина которого находится вне окружности, а стороны пересекают её, измеряется полуразностью дуг, заключённых между его сторонами.

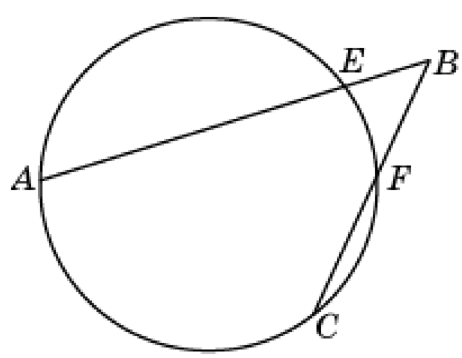


Рис. 96

Дано: $\angle ABC$; точка B лежит _____ _________________________________;

точки A, C принадлежат _________ _________________________________

Доказать: $\angle ABC$ измеряется ______ ____

Решение. Рассмотрим треугольник ABF, $\angle AFC$ является по отношению к нему ________________________ углом, значит, $\angle ABC$=__________________________; $\angle$___________________ измеряется ____________________________________; $\angle$_________________ измеряется ____________________________________. Таким образом, ________________ ____.

35.19. Хорда стягивает дугу в 85°. Найдите углы, которые образует хорда с касательными к окружности, проведёнными через её концы.

Ответ. ____
____
____.

35.20. Хорды одной окружности AB и CD пересекаются в точке P, $\angle APC=44^{\circ}$, дуга BC меньше дуги AD на 22°. Сделайте чертёж и найдите дугу AD.

Дано: AB и CD - _________;

$AB \cap CD$=_______________;

____

Найти: _________________.

Решение. ____
____
____.

35.21. К окружности с центром в точке O (рис. 97) из её точек M и N проведены две касательные, которые пересекаются за пределами рисунка. С помощью одной линейки постройте угол между данными касательными (не выходя за пределы рисунка).

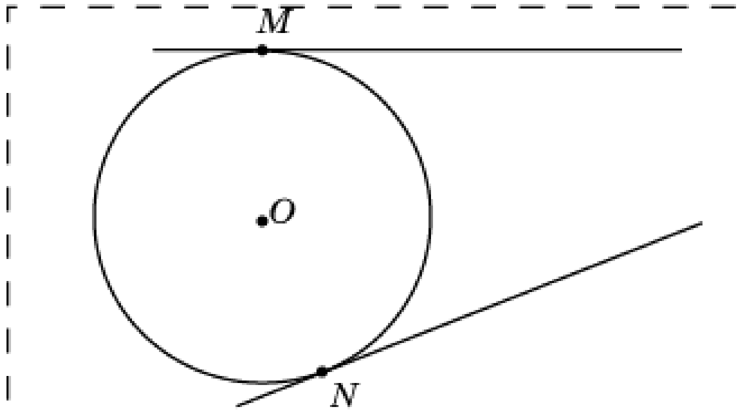


Рис. 97

Построение. ____

____

____.

35.22. Постройте ГМТ, из которых данный отрезок (рис. 98) будет виден под углом 90°.

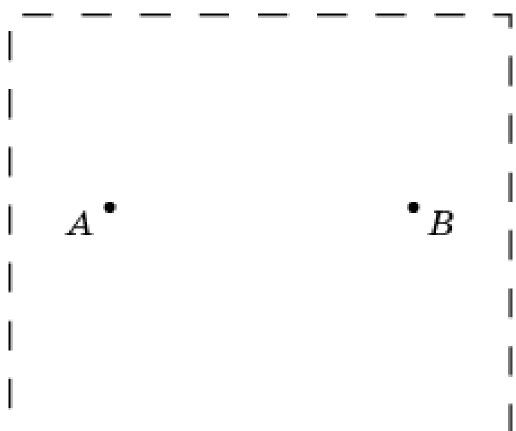


Рис. 98

Построение. ____

____

____

____.

35.23. С помощью одного угольника постройте центр данной окружности (рис. 99).

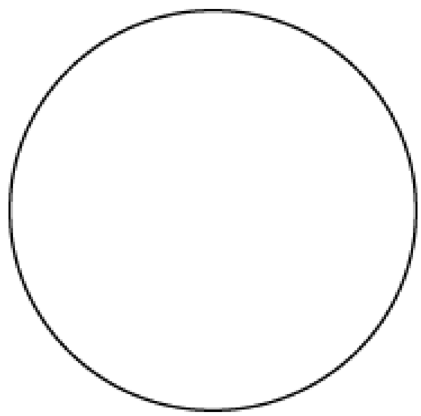


Рис. 99

Построение. ____

____

____

____

____.

36. МНОГОУГОЛЬНИКИ, ВПИСАННЫЕ В ОКРУЖНОСТЬ

36.1. Закончите предложения.

1) Многоугольник называется вписанным в окружность, если

____

____.

2) Окружность называется описанной около многоугольника, если

____

____.

36.2. Изобразите несколько многоугольников, вписанных в данную окружность (рис. 100).

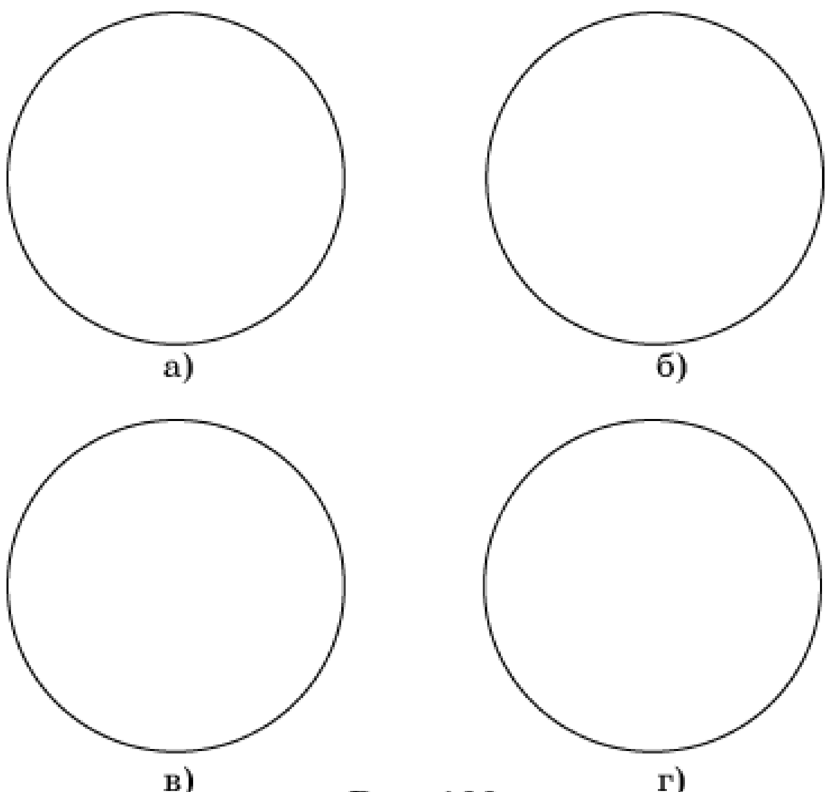


Рис. 100

36.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему об окружности, описанной около треугольника.

Формулировка. ____
____
____.

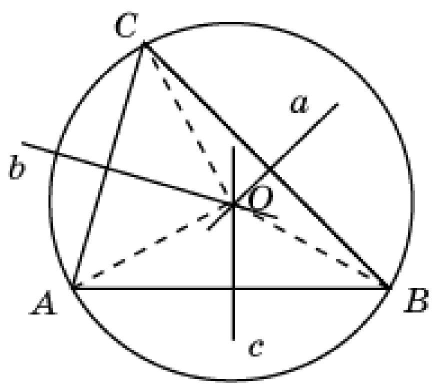


Рис. 101

Дано: ΔABC.

Доказать: __________________________
__________________________________.

Доказательство. К сторонам AB и AC данного треугольника ABC (рис. 101) проведём ________________________________ c и b соответственно. Докажем, что точка O их пересечения является ___________________________________. Для этого достаточно проверить, что выполняются равенства OA=___=___.Поскольку точка $O\in c$, то она одинаково удалена _______________________, т.е. OA=__________. Так как точка O принадлежит _______________________________ отрезка AC, то она одинаково удалена от вершин ____ и ___, т.е. OA=_______. Следовательно, точка O одинаково удалена от вершин A, B, C треугольника ABC, т.е. OA=____=____. Заметим, что из равенства ____=____ следует, что точка O принадлежит серединному перпендикуляру a к стороне BC. Таким образом, все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке____. Окружность с центром в этой точке и радиусом R=____=____=____ будет искомой описанной окружностью.

36.4. Для каждого из данных треугольников (рис. 102) постройте описанную окружность.

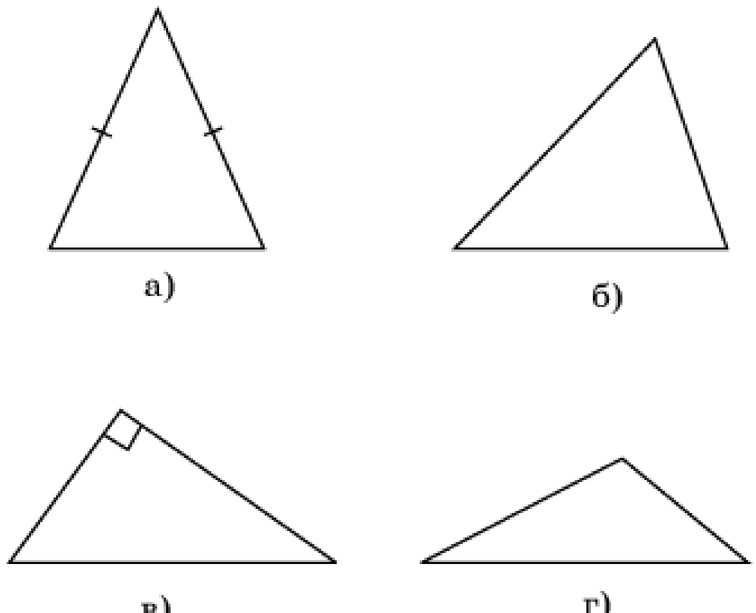


Рис. 102

Построение: а) ____

____;

б) ____

____;

в) ____

____;

г) ____

____.

36.5. Нарисуйте треугольник, у которого центр описанной окружности находится на одной из его: а) высот; б) биссектрис.

36.6. Нарисуйте треугольник, у которого центр описанной окружности находится: а) внутри; б) вне его.

36.7. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

Формулировка. ____
____
____.

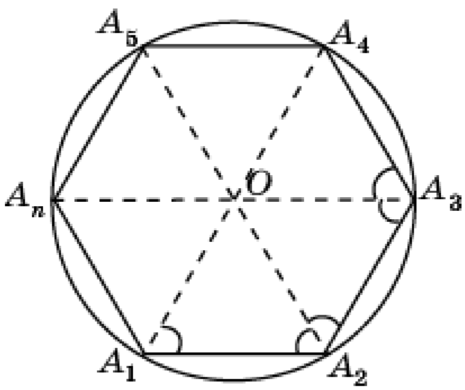


Рис. 103

Дано: $A_1 \ldots A_n$ – ________________________

Доказать: ______________________________.

Доказательство. Опишем около треугольника $A_1A_2A_3$ окружность с центром в точке O и радиусом R. Докажем, что следующая вершина A_4 также ____________________________. Для этого достаточно проверить, что OA_4=___. Имеем OA_1A_2 и _____ – __________ равнобедренные треугольники. Поэтому их углы при основаниях __________ и составляют _____________ угла данного n-угольника. Значит, угол OA_3A_4 также составляет ___________ угла n-угольника. Треугольники OA_3A_2 и OA_3A_4 равны по _____________________________________ (A_2A_3=_____, OA_3 – ________, $\Delta\, OA_3A_2$=______). Следовательно, OA_2=_____=_____. Аналогично показывается, что следующие вершины A_5 и т.д. A_n принадлежат данной окружности. Таким образом, эта окружность является искомой описанной окружностью. Её центром является точка пересечения _______________________ углов многоугольника.

36.8. На рисунке 104 изображён правильный шестиугольник, вписанный в окружность. Найдите: а) его периметр, если радиус окружности равен R; б) радиус окружности, если сторона шестиугольника равна a. Сделайте вывод.

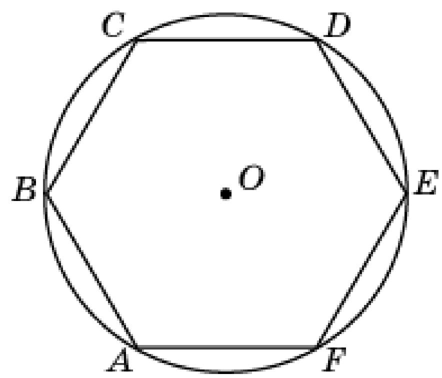


Рис. 104

Решение. а) ____

____

____

____;

б) ____

____

____

____.

Вывод. ____

____

____

____.

36.9. На рисунке 105 изображён равнобедренный треугольник ABC. Найдите его углы, если его основание BC стягивает дугу в $99°$.

Дано: ____

Найти:____.

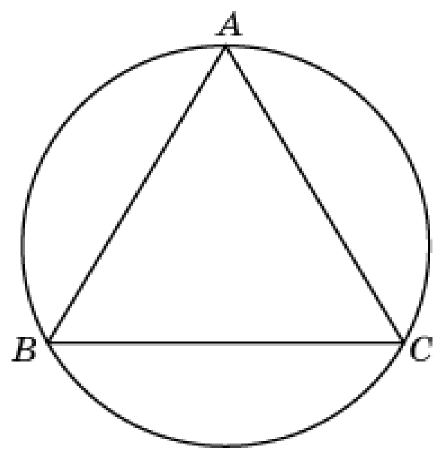


Рис. 105

Решение. ____

____

____

____

____

____

____

____

____.

36.10. Докажите, что суммы противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равны $180°$.

Дано: $ABCD$ - ____;

____

Доказать: $\angle A +$ ________ $= \angle B +$ ________.

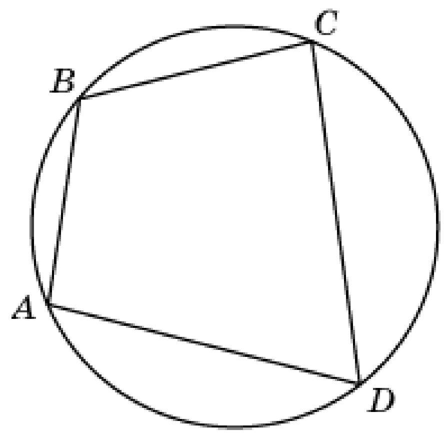


Рис. 106

Решение. Угол A измеряется ___________________________________

____;

угол C измеряется ____

____,

значит, $\angle A + \angle$ ___ измеряется ___________________________________

____

____

____.

36.11. Докажите, что если у четырёхугольника сумма противоположных углов равна $180°$, то около него можно описать окружность.

Дано: $ABCD$ - четырёхугольник; $\angle A+$____$=\angle B+$_____$=$______.

Доказать: ____.

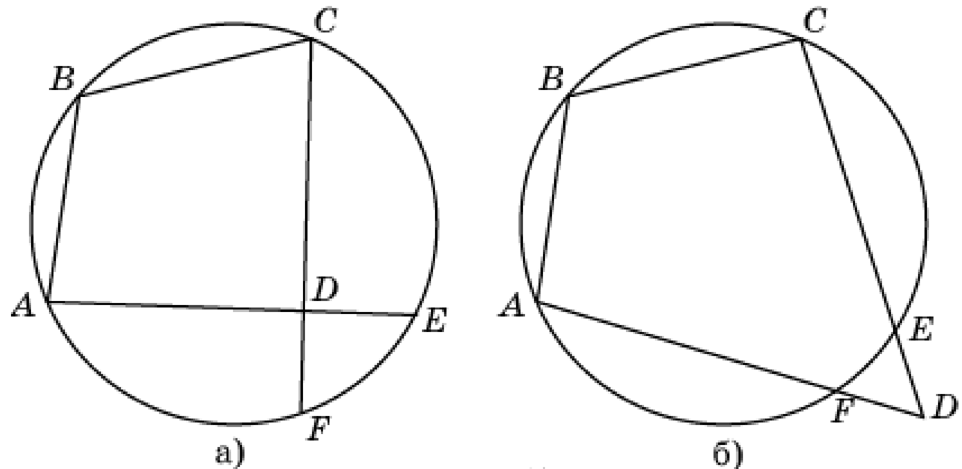


Рис. 107

Решение. Опишем окружность около треугольника ABC, тогда для вершины D возможны три следующих случая: а) лежит внутри; б) лежит вне; в) принадлежит окружности. Докажем, что первые два случая невозможны.

а) Действительно, пусть точка D лежит внутри окружности (рис. 107, а), тогда $\angle D$ четырёхугольника измеряется____, $\angle B$ измеряется ____, значит, $\angle B+\angle D$ измеряется _________________________________, но $\frac{1}{2}(\cup AEFC+\cup$ ____$+\cup$ ____$)>180°$, что противоречит ____. Таким образом, ____;

б) пусть точка D лежит вне окружности так, как показано на рисунке 107, б, тогда $\angle D$ измеряется________________________________, $\angle B$ измеряется ________________________________, значит, $\angle B + \angle D$ измеряется____________________________________, но $\frac{1}{2}(\cup AEFC + \cup$ ____- $\cup$ ____$) < 180°$, что противоречит ________________________________. Таким образом, ____.

Итак, ____
____.

36.12. Изобразите трапецию, вписанную в окружность (рис. 108). Назовите её свойства.

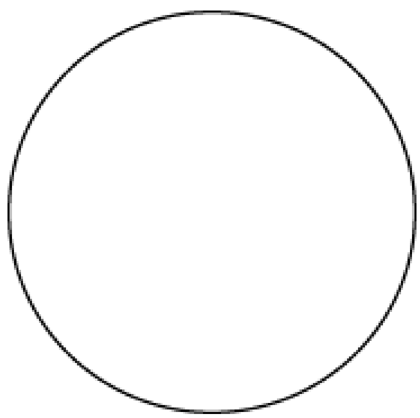


Рис. 108

Ответ. ____
____
____
____
____.

36.13. Трапеция вписана в окружность. Как может располагаться относительно неё центр окружности? Изобразите.

Ответ. ____

____.

36.14. На рисунке 109 изображён многоугольник, который называется дельтоидом. Можно ли описать около него окружность? Если да, где будет её центр?

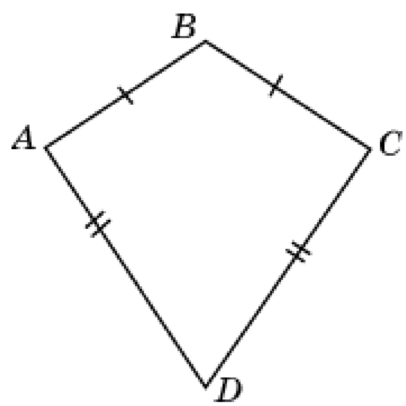


Рис. 109

Ответ. ____

____

____.

36.15. На рисунке 110 изображены: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат; д) прямоугольная трапеция; е) равнобедренная трапеция. Укажите из них четырёхугольники, около которых можно описать окружность и найдите их центры.

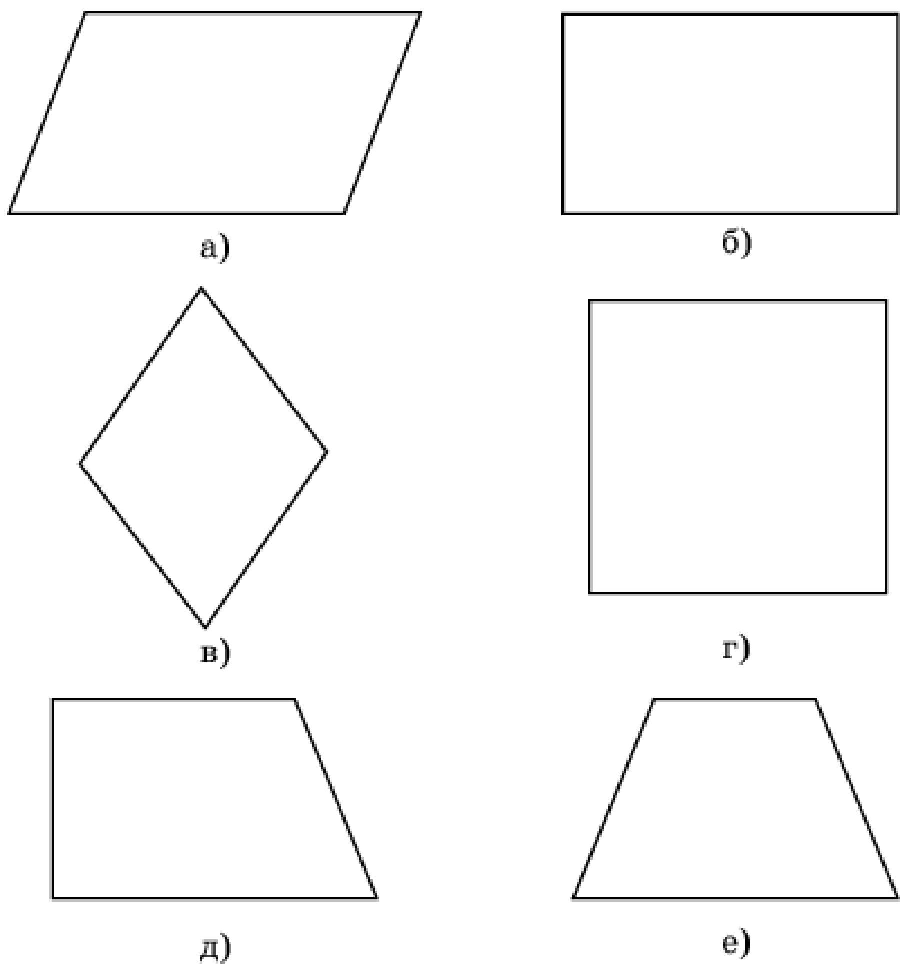


Рис. 110

Ответ. ____

____

____.

36.16. Опишите построение равнобедренного треугольника ABC с основанием AC по боковой стороне, равной a, и радиусу R описанной окружности.

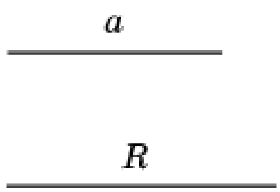


Рис. 111

Построение. Построим треугольник AOB по трём сторонам $AO=BO=R$ и AB=______. Затем ____

____

____.

36.17. Впишите в данную окружность (рис. 112) многоугольник, у которого равные углы, но не равные стороны. Всегда ли это можно сделать?

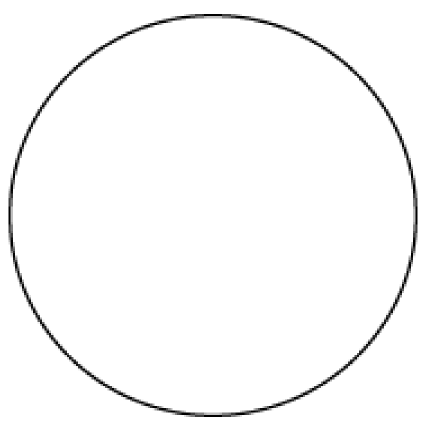


Рис. 112

Ответ. ____

____.

36.18. Впишите в данную окружность (рис.113) многоугольник, у которого равные стороны, но не равные углы. Всегда ли это можно сделать?

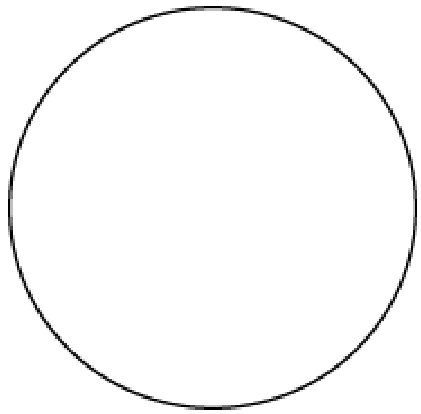


Рис. 113

Ответ____

____

36.19. В данную окружность (рис. 114) впишите четырехугольник с равными диагоналями. Какой вид может иметь четырехугольник?

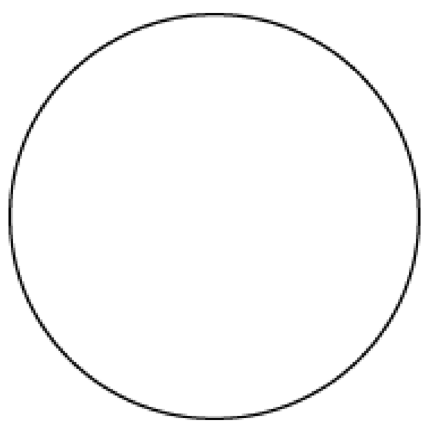


Рис. 114

Ответ____

____

36.20. В данную окружность (рис. 115), пользуясь одной линейкой, впишите прямоугольник?

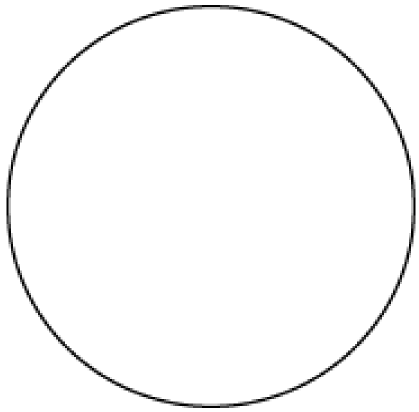


Рис. 115

Построение. ____

____

____.

36.21. Впишите в данную окружность (рис. 116) правильный шестиугольник.

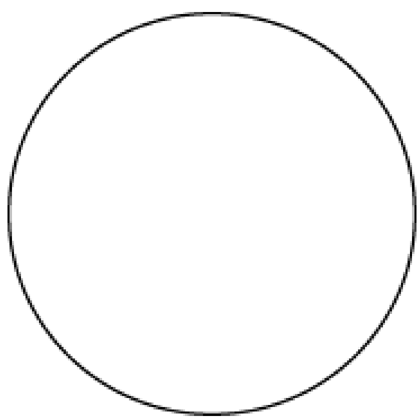


Рис. 116

Построение. ____

____

____.

37. МНОГОУГОЛЬНИКИ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ

37.1. Закончите предложения.

1) Многоугольник называется описанным около окружности, если ____

____.

2) Окружность называется вписанной в многоугольник, если ____

_____ ____.

3) ГМТ, одинаково удалённых от сторон угла, является ____

____.

4) ГМТ, одинаково удалённых от концов отрезка является ____

____.

5) Центром окружности, описанной около треугольника является____

____

____.

6) Центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит одной из его сторон, если ____

____.

37.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему об окружности, описанной около треугольника.

Формулировка. ____

____

____.

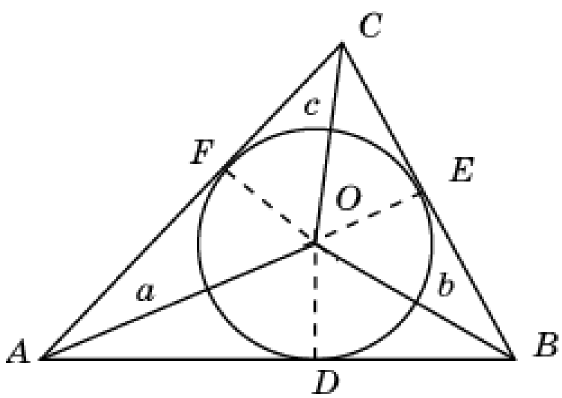


Рис. 117

Дано: ΔABC.

Доказать: _________________________.

Доказательство. Из вершин A и B треугольника ABC (рис. 117) проведём биссектрисы a и b соответственно. Докажем, что точка O их пересечения является _________________________. Для этого достаточно проверить_________________________________

____.

Действительно, так как точка O принадлежит биссектрисе a, то она ____. Так как точка O принадлежит биссектрисе b, _______________ ____________________________________. Значит, точка O одинаково удалена ____________________________. Заметим, что из того, что точка O _____________________________________следует, что она принадлежит биссектрисе c угла C, т.е. все три биссектрисы ___________________________________. Окружность с центром в этой точке и радиусом $r=OD=$_____=_____ _____________________

____.

37.3. Изобразите несколько треугольников, описанных около данной окружности (рис. 118).

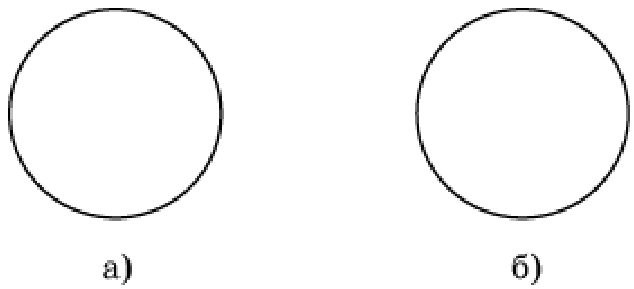


Рис. 118

37.4. Для каждого из данных треугольников (рис. 119) постройте вписанную в него окружность.

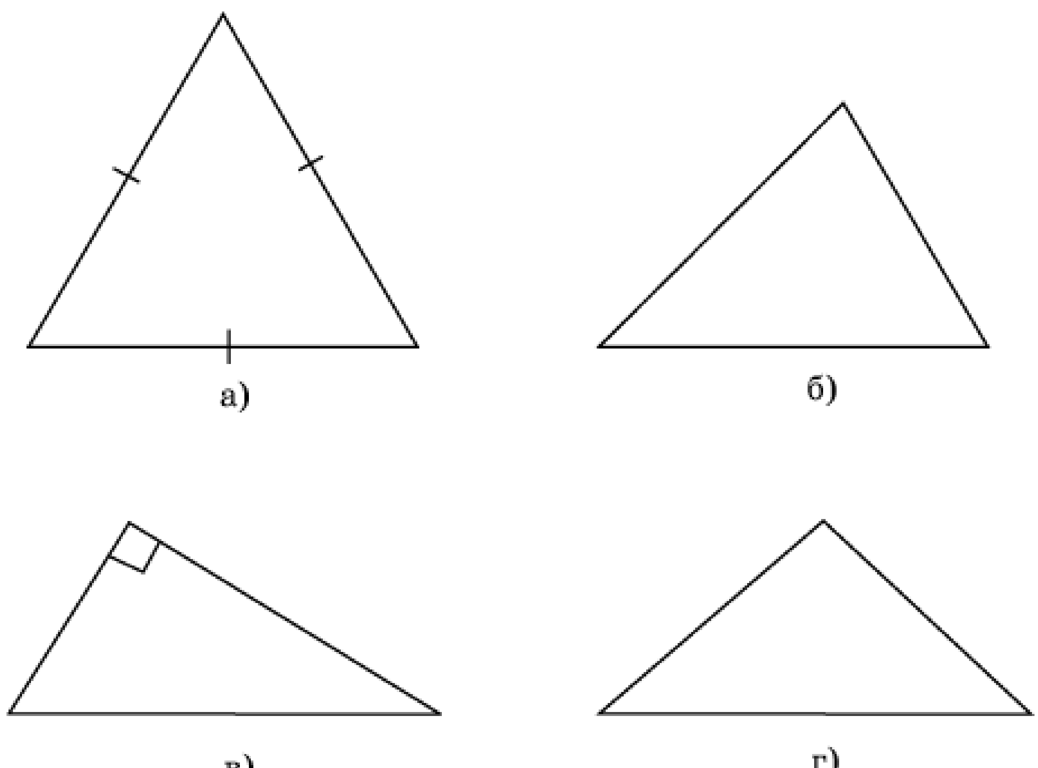


Рис. 119

37.5. Изобразите треугольник, у которого центр вписанной окружности принадлежит одной из его: а) медиан; б) высот.

37.6.

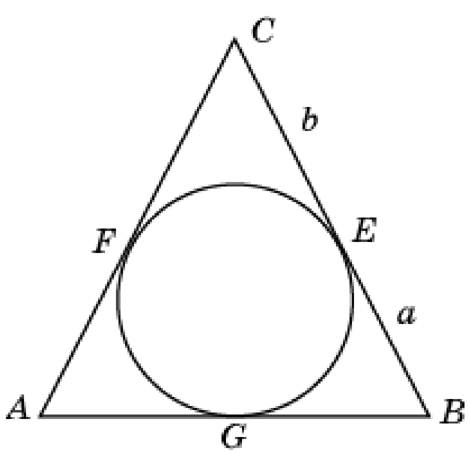


Рис. 120

Дано: ΔABC; $AC=BC$; E, F, G – точки касания вписанной в него окружности; $BE=a$, $CE=b$.

Найти: P_{ABC}.

Решение. ____________________________

37.7. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Формулировка. ____

____

____.

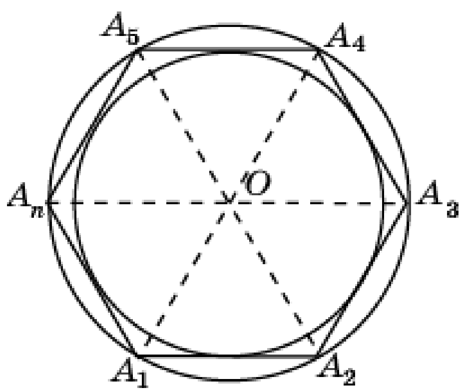


Рис. 121

Дано: $A_1 \ldots A_n$ – ____________________

Доказать: __________________________

____

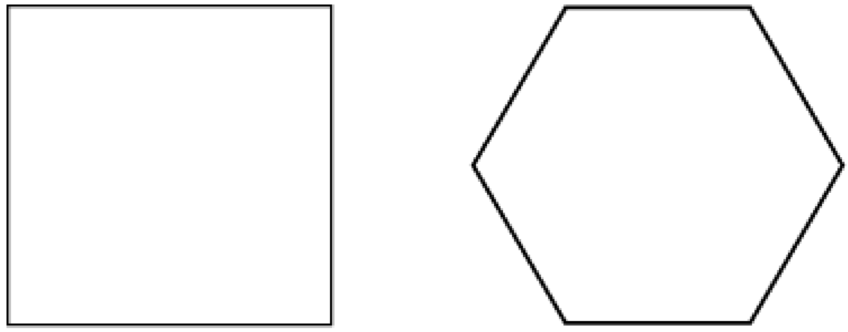
Доказательство. Как было доказано, около этого многоугольника можно _____________________________ окружность, её центром O является точка пересечения ______________________________________. Она одинаково удалена ___________________________________. Обозначим соответствующее расстояние через r. Окружность с центром в точке O и радиусом r будет касаться всех ___________________________

_________________________, т.е. будет ___________________________

____

____.

37.8. Впишите окружность в данный правильный: а) четырёхугольник; б) шестиугольник (рис. 122).



а) б)

Рис. 122

Построение. а)____

____;

б) ____

____.

37.9. Около данной окружности (рис. 123) опишите равнобедренный прямоугольный треугольник.

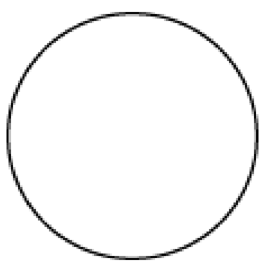


Рис. 123

Построение. ____

____

____

____.

37.10. Докажите, что суммы противоположных сторон описанного около окружности четырёхугольника равны.

Дано: $ABCD$ -____;

K, L, M, N – точки ____

Доказать: AB+_________=________+_________.

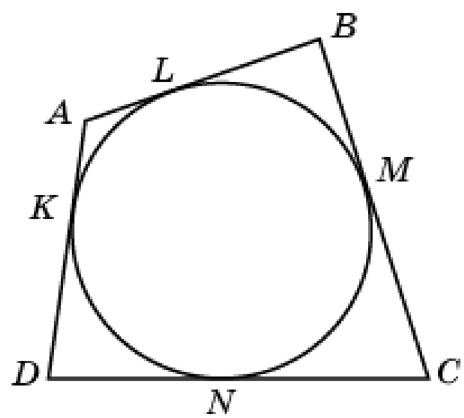


Рис. 124

Решение. AL и AK являются ____, откуда AL=_________. Аналогично, DK=__________, CM=________ и BL=_________. Значит, AB+DC=AL+__________________________________, AD+________=____. Таким образом, AB+________= AD+________.

37.11. Докажите, что если у четырёхугольника равны суммы противоположных сторон, то в него можно вписать окружность.

Дано: $ABCD$ - _____________________; AB+_____=_____+_____.

Доказать: ____.

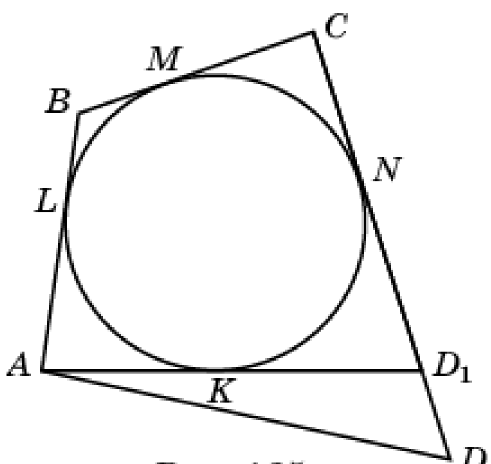


Рис. 125

Решение. Проведём окружность, которая касается сторон AB, BC, CD четырёхугольника (рис. 125). Допустим, что она не касается стороны _____. Проведём из вершины A касательную к окружности и назовём D_1 - ____. Четырёхугольник $ABCD_1$ - ___________________________________ около окружности, поэтому у него AB+_______=AD_1+_______. Вычтем это равенство почленно из данного равенства. Получим, что CD-CD_1=_____-_____, т.е. DD_1=_____-_____, или DD_1+AD_1=______, что невозможно, так как в ΔADD_1 по неравенству треугольника $DD_1+AD_1>$_________. Следовательно, ____ ____.

37.12. Около данной окружности (рис. 126) опишите трапецию. Назовите её свойства

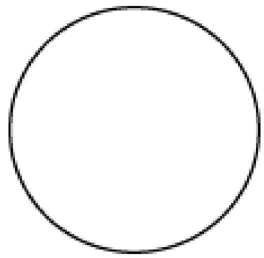


Рис. 126

Ответ. ____

37.13. Укажите верные утверждения.

1) Центры окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, совпадают.

2) Центры окружностей, описанной около треугольника и вписанной в него, совпадают.

3) Если около трапеции можно описать окружность, то она равнобедренная.

4) Если в трапецию можно вписать окружность, то она равнобедренная.

5) В окружность нельзя вписать неравные квадраты.

6) Если в четырёхугольнике противоположные стороны равны, то в него можно вписать окружность.

Ответ. ____.

37.14. На рисунке 127 изображёны: а) квадрат; б) прямоугольник; в) ромб; г) параллелограмм; д) дельтоид; е) равнобедренная трапеция. Укажите из них четырёхугольники, в которые можно вписать окружность и найдите их центры.

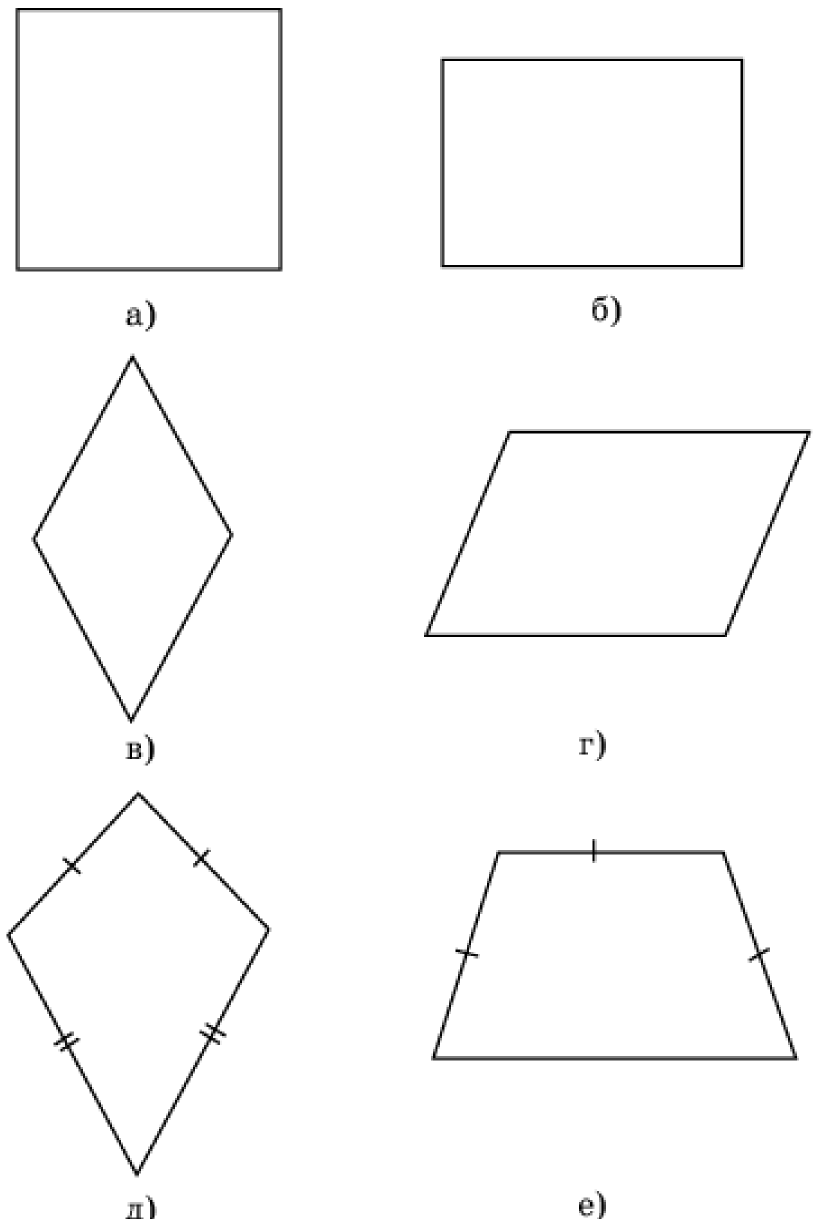


Рис. 127

Ответ. ____

____

____.

37.15. Опишите построение квадрата по радиусу r вписанной в него окружности.

Рис. 128

Построение. ____

____

____.

37.16. Опишите построение ромба по стороне a и радиусу r вписанной в него окружности.

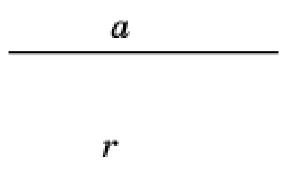


Рис. 129

Построение. ____

____

____.

37.17. Опишите построение равнобедренного треугольника ABC, если заданы его основание $AC=b$ и радиус r вписанной в него окружности.

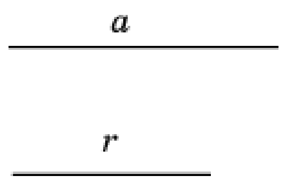


Рис. 130

Построение. ____

____

____.

37.18. Четырёхугольник $AOBM$ (рис. 131) образован отрезками касательных, проведённых из одной точки к окружности, и её радиусами, проведёнными в точки касания. Постройте окружность, вписанную в данный четырёхугольник.

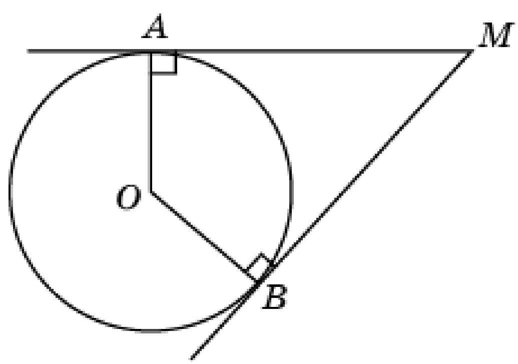


Рис. 131

Построение.____

____

____

37.19. Постройте ГМТ, одинаково удалённых от: а) двух смежных сторон; б) двух противоположных сторон; в) всех сторон; г) двух смежных вершин; д) двух противоположных вершин; е) всех вершин квадрата.

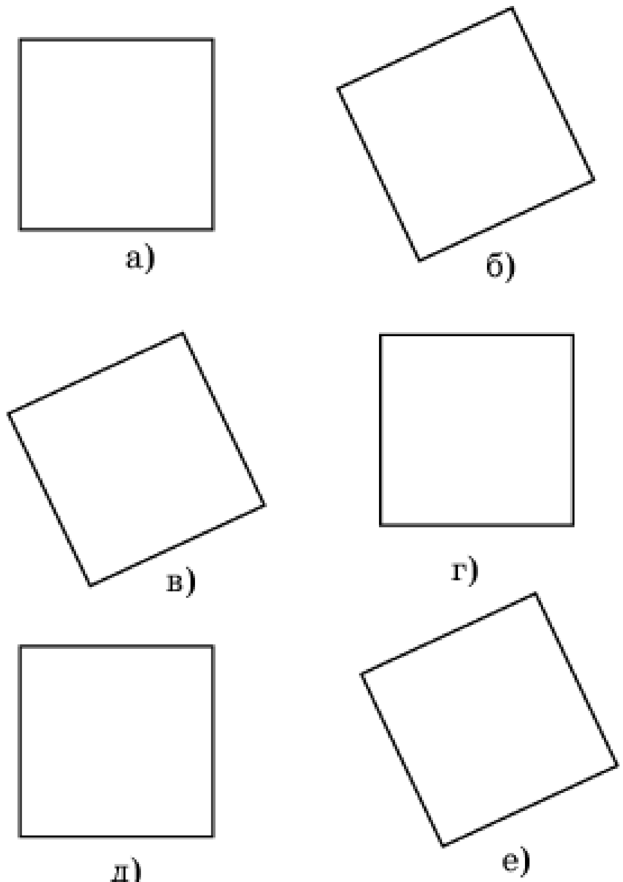


Рис. 132

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____;

д) ____;

е) ____.

38. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

38.1. Продолжите предложение.

К числу замечательных точек в треугольнике относятся: ____
____
____
____.

38.2. Закончите предложения.

1) Центроидом треугольника называется ________________________
____
____.

2) Ортоцентром треугольника называется _______________________
____
____.

3) Центром окружности, описанной около треугольника является
____
____
____.

4) Центром окружности, вписанной в треугольник является
____
____
____.

38.3. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Дано: ΔABC; AA_1, BB_1, CC_1 - ___________________________________.

Доказать: ____.

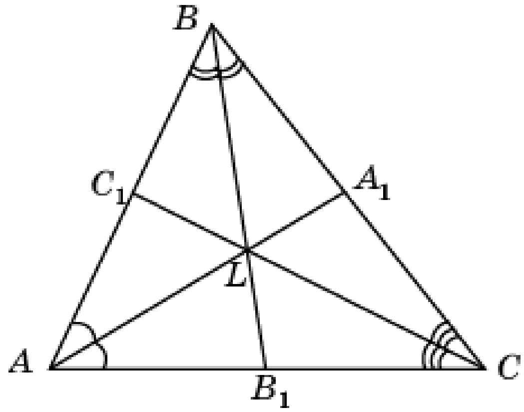


Рис. 133

Решение. Рассмотрим $L = AA_1 \cap BB_1$ (рис. 133), тогда точка L ____,

значит, L принадлежит ____,

так как ____

____.

Таким образом, ____

____

____.

38.4. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Дано: ΔABC; A_1, B_1, C_1 -________________________________;
$a \perp BC$; $b \perp$______; $c \perp$_______; $A_1, \in$______; $B_1 \in$______; $C_1 \in$______.

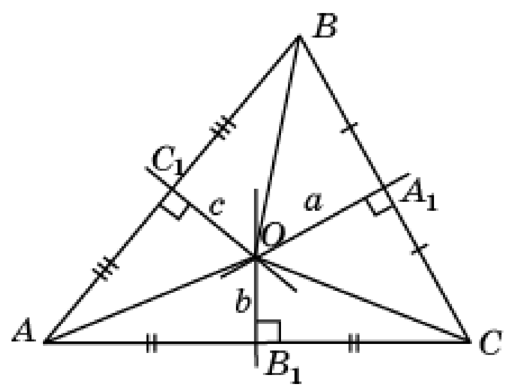


Рис. 134

Доказать: ____.

Решение. Рассмотрим точку $O=a \cap b$ (рис. 134), тогда треугольники AOC и BOC ________________, так как _________________________

____

____, значит, $AO=CO=$_______. Поскольку $AO=$_______, треугольник AOB - ________________________, значит, его высота OC_1 лежит на ____.
Таким образом, ____

____.

38.5. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему об ортоцентре треугольника.

Формулировка. ____
____
____.

Дано: ΔABC; $AA_1 \perp$ ______; $BB_1 \perp$ _______; $CC_1 \perp$ _______.

Доказать: _______________________________________.

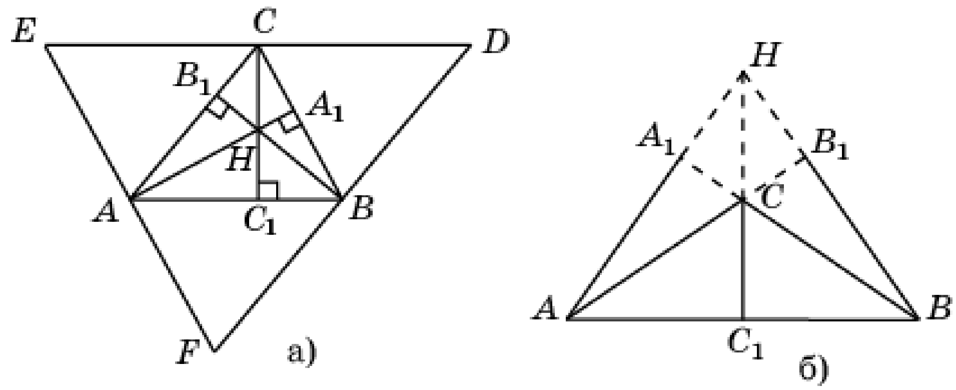


Рис. 135

Доказательство. Через вершины данного треугольника *ABC* проведём прямые, параллельные противоположным сторонам (рис. 135). Эти прямые образуют новый треугольник *DEF*, для которого точки *A*, *B*, и *C* ________________________________. В самом деле, *CE*=_____ и *AB*=______, как противоположные стороны параллелограммов *AECB* и __________. Следовательно, *EC*=________. Точно так же *FB*=_____, *FA*=_____. Отсюда следует, что высоты треугольника *ABC* являются ____ *DEF*, а поэтому ____.

38.6. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о центроиде треугольника.

Формулировка. ____

____

____.

Дано: ΔABC; AD, BE, CF - ________________________________.

Доказать: ____.

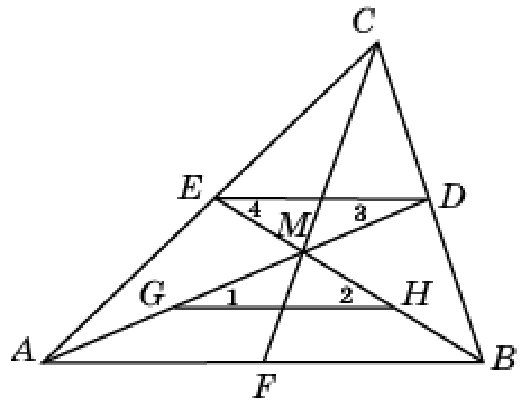


Рис. 136

Доказательство. Обозначим точку пересечения AD и BE через M (рис. 136). Отрезок ED будет ______________________________ ABC. Проведём среднюю линию HG в треугольнике ABM. Треугольники HGM и EDM _________________, так как ____ ___________________________________. Следовательно, HM=______ и GM=______. Таким образом, имеем AG=____=____, BH=____=____, т.е. медианы AD и BE в точке пересечения делятся в отношении ______, считая от соответствующей вершины. Медиана, проведённая из вершины C, также должна делить ________________ в отношении ______ Следовательно, она будет проходить через точку M, т.е. все три медианы ____.

38.7. Постройте ортоцентр для данных треугольников (рис. 137). Где он расположен? Сделайте вывод.

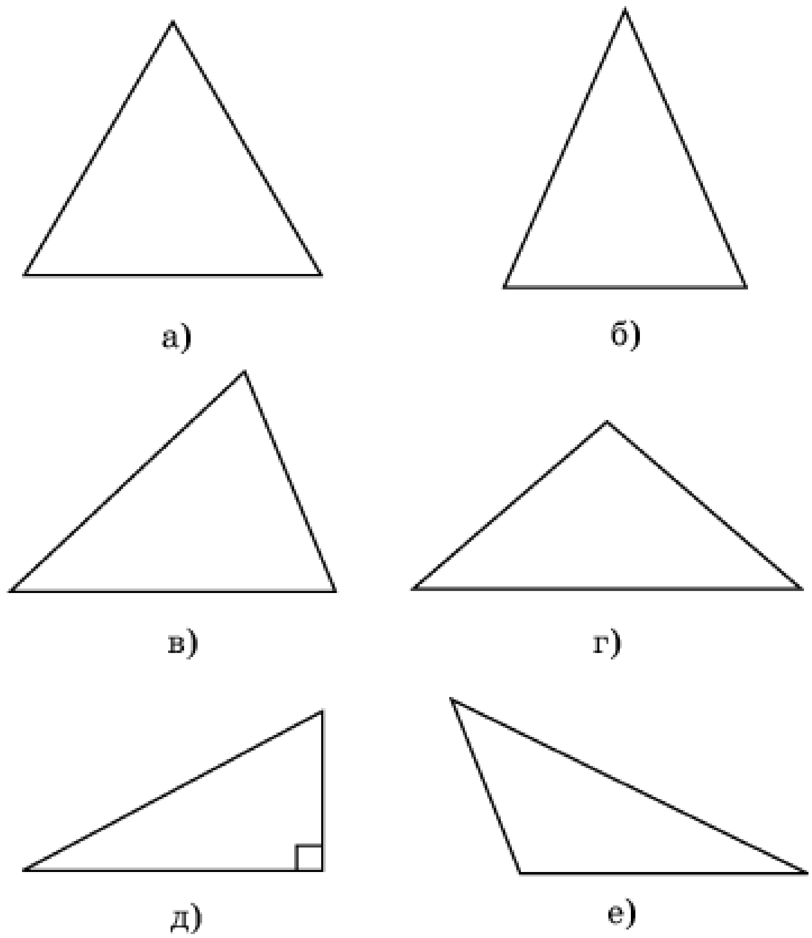


Рис. 137

Ответ. ____

____

____

____

____.

38.8. Постройте центроид для данных треугольников (рис. 138). Где он расположен? Сделайте вывод.

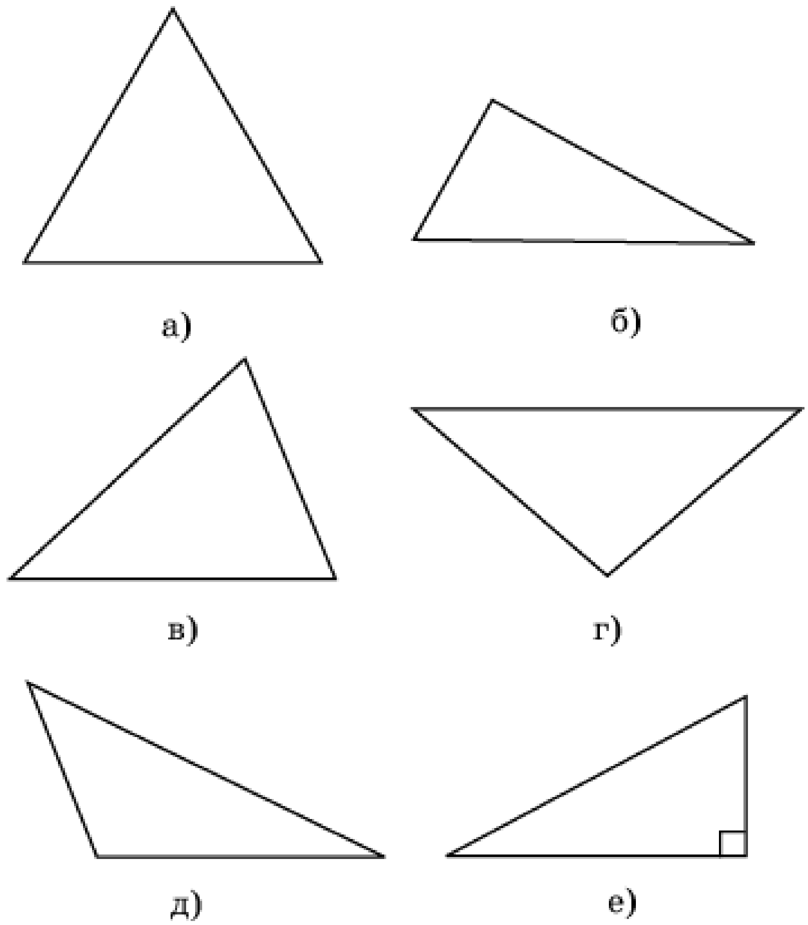


Рис. 138

Ответ. ____

____

____

____

____.

38.9. Докажите, что центроид треугольника совпадает с центроидом треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Дано: ΔABC; A_1, B_1, C_1 - ______________________________________; M - ______________________________; M_1 - ______________________________.

Доказать: ____.

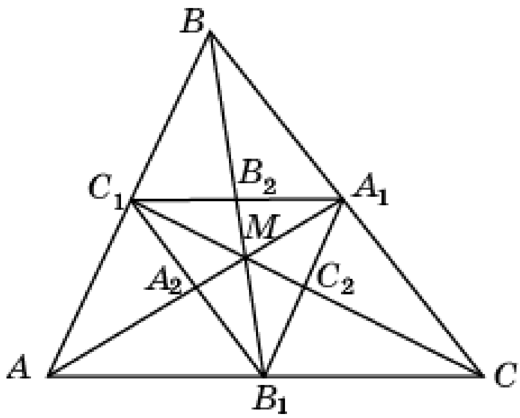


Рис. 139

Решение. Назовём $A_2 = AA_1 \cap B_1C_1$; B_2=________________________; C_2=___________________________. Четырёхугольник $AC_1A_1B_1$ является ________________________, так как A_2 является для него точкой ________________________, значит, C_1A_2=________, т.е. A_1A_2 является ________________________ для треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично, рассматривая параллелограммы $CA_1C_1B_1$ и ______________, получим ____
____. Таким образом, ____
____.

38.10. По рисунку 140 сформулируйте задачу и решите её, заполняя пропуски.

Формулировка. ____
____
____.

Дано: $CDEF$ – параллелограмм; $CK=KD=EL=LF$;

M ____________________; N____________________.

Доказать: $DM=MN=NF$.

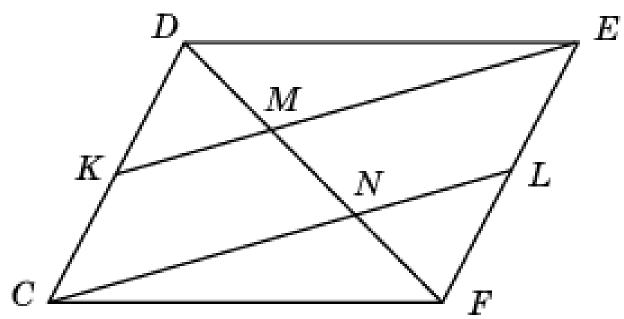


Рис. 140

Решение. Проведём диагональ ______________________ данного параллелограмма, точку пересечения его диагоналей назовём O. Рассмотрим треугольники CDE и _______. Точки M и N являются в них соответственно ____, так как
____
____.

Значит, ____
____.

Таким образом, ____.

38.11. Восстановите треугольник RST по положению двух его вершин R, S и: а) точке O – центру описанной около него окружности; б) точке O – центру вписанной в него окружности; в) L – точке пересечения его биссектрис; г) ортоцентру H; д) центроиду M; е) N - точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

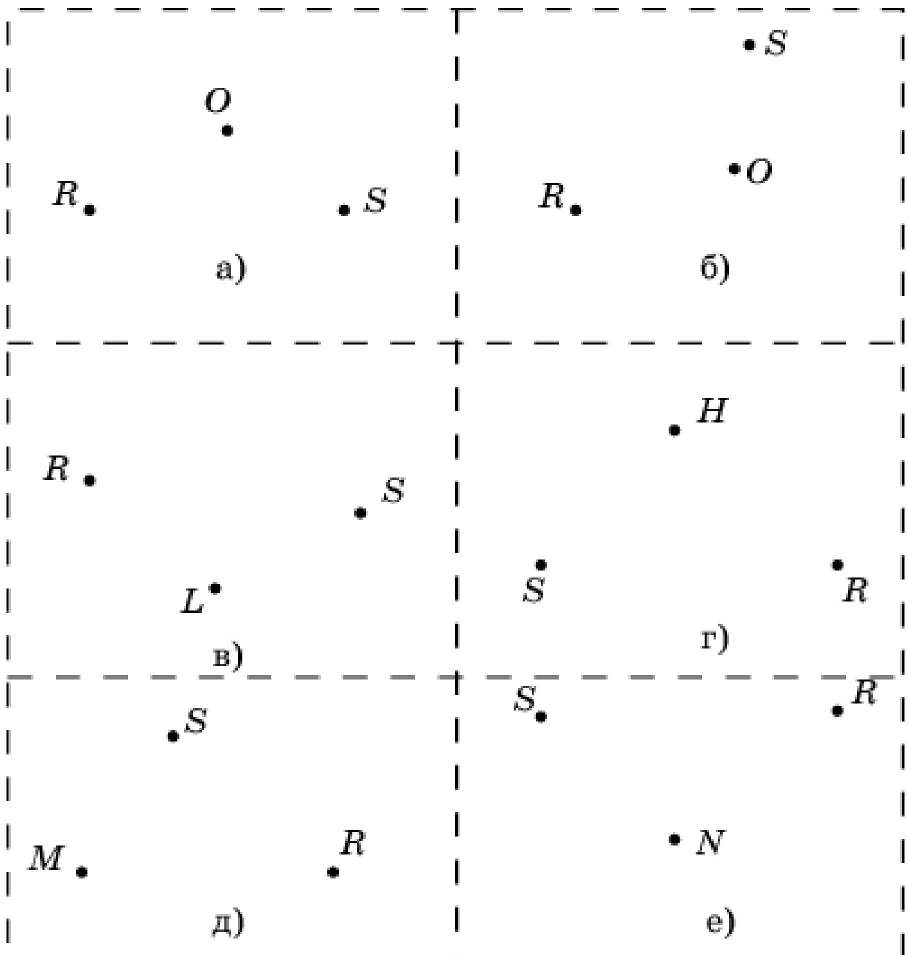


Рис. 141

Построение. ____

____

____

____

38.12. Восстановите равнобедренный треугольник ABC по вершине A и точке M, принадлежащей его основанию BC.

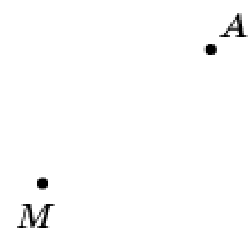


Рис. 142

Построение. ____

____

____

____.

38.13. Опишите построение треугольника ABC, если заданы его сторона $BC=a$ и две медианы $BB_1=m$ и $CC_1=n$.

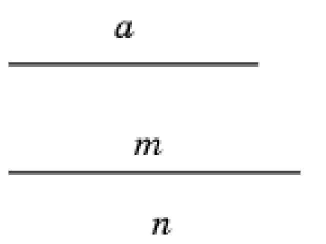


Рис. 143

Построение. Сначала построим ΔBCM по трём сторонам, а именно, $BC=a$, $BM=\frac{2}{3}m$ и $CM=\frac{2}{3}n$. Затем ______________________

____

____.

38.14. На рисунке 144 не уместилась вершина C треугольника ABC. Проведите прямые, на которых лежат медианы данного треугольника.

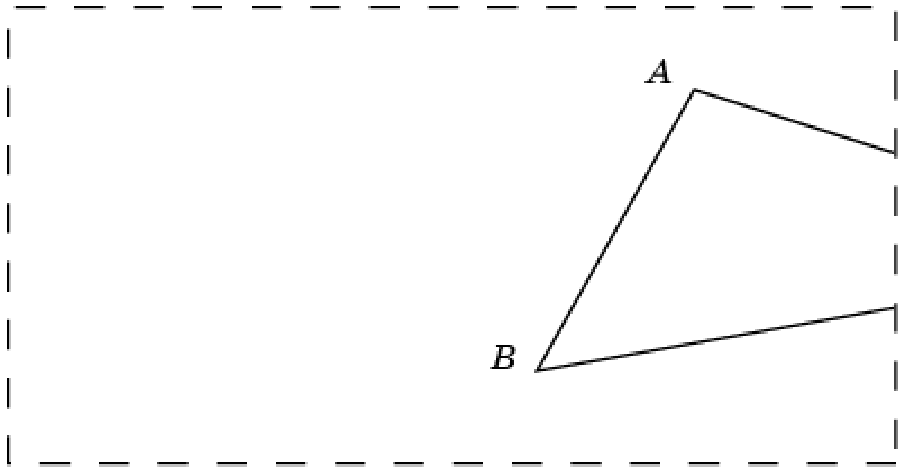


Рис. 144

Построение. Через вершины A и B проведём прямые, параллельные соответственно прямым BC и ____, точку их пересечения назовём D. Тогда четырёхугольник $DACB$ является ______________________, так как _______________________________ ______________________. Отрезки AB и DC – его ________________. Назовём точку их пересечения O – это середина отрезка _______. ΔABD=_____, так как ____. Найдём точку M_1 - центроид ΔABD. Теперь найдём точку M – центроид ΔABC. Для этого на продолжении DO от точки O отложим OM=______. AM, ______ и ______ - искомые прямые.

38.15. Докажите, что биссектрисы двух внешних углов треугольника и одного внутреннего угла, несмежного с ними, пересекаются в одной точке.

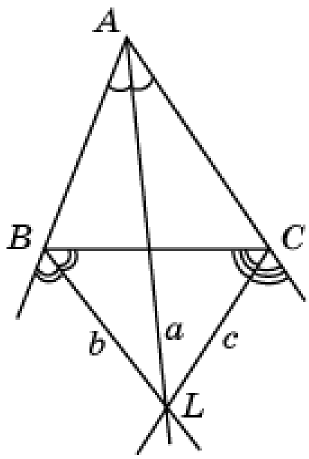


Рис. 145

Дано: ΔABC; ______________________________

____.

Доказать: __________________________________

____.

Решение. __________________________________

____

____

____

38.16. Постройте окружность, которая касается стороны BC ΔABC (рис. 146) и продолжения двух других его сторон.

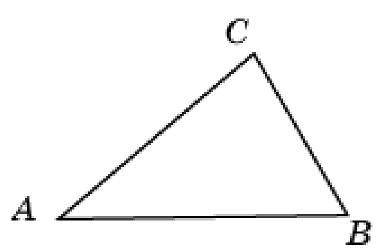


Рис. 146

Построение. ____

____

____.

38.17. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Дано: ΔABC; AL – его биссектриса.

Доказать: $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.

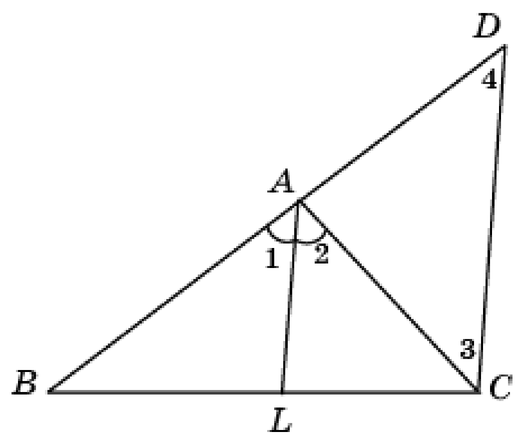


Рис. 147

Решение. Проведём через вершину C прямую, параллельную ________, точку её пересечения с ______ назовём D. Тогда $\frac{BL}{CL}$=_____ по теореме о ______________________________________. Рассмотрим ΔACD, он является _____________________, так как $\angle 3$=_______, $\angle 4$=_______, но $\angle 1$=$\angle 2$ по ___________________, значит, $\angle 3$ и $\angle 4$ _______________________, откуда следует, что ΔACD __________________________________. Значит, AD=_______, получим $\frac{BL}{CL}$=__________________.

38.18. На рисунке 148 изображён ромб *ADEF*, вписанный в треугольник *ABC*. Найдите отрезки *BE* и *CE*, если $\frac{AC}{AB}=\frac{7}{5}$ и BC=140.

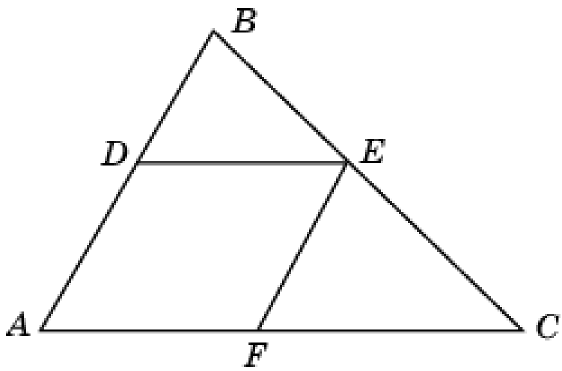


Рис. 148

Дано: ______________________________

___________________________________.

Найти: ____________________________.

Решение. ___________________________

____

____

____

38.19. Постройте окружность, касающуюся трёх данных прямых, которые попарно пересекаются и не проходят через одну точку (рис. 149). Сколько таких окружностей?

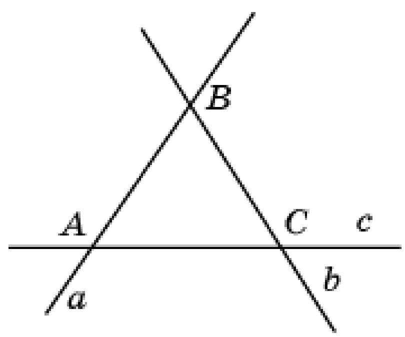


Рис. 149

Построение. ____

____

____

____

С О Д Е Р Ж А Н И Е

С.
Ввведение ………………………………………………………….. 3

27. Параллельные прямые……………………………………… 5

28.Сумма углов многоугольника……………………………….. 14

29. Параллелограмм…………………………………………… 23

30. Признаки параллелограмма…………………………………. 31

31. Прямоугольник, ромб, квадрат…………………………… 42

32. Средняя линия треугольника………………………………… 54

33. Трапеция……………………………………………………. 62

34. Теорема Фалеса……………………………………………...72

35. Углы, связанные с окружностью……………………………...83

36. Многоугольники, вписанные в окружность…………………96

37. Многоугольники, описанные около окружности……………111

38. Замечательные точки в треугольнике……………………..124