И.М. СМИРНОВА, В.А. СМИРНОВ

Г Е О М Е Т Р И Я

8 КЛАСС

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

Часть 2

Учебное пособие

для общеобразовательных учреждений

МНЕМОЗИНА

Москва 2009

Настоящая тетрадь по геометрии предназначена для работы в 8 классе по учебнику: И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия: Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2008.

Она соответствует программе по математике для общеобразовательных учреждений и будет полезна для более эффективной организации учебного процесса: при изучении теоретического материала, решении задач, выполнении классных и домашних работ, а также при проведении различного рода самостоятельных и индивидуальных заданий для учащихся.

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие ребята! Вы изучаете один из самых увлекательных и важных разделов математики - геометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она знакомит с разнообразием форм, формирует необходимые пространственные представления, что позволяет правильно ориентироваться в окружающем нас мире.

Во-вторых, геометрия даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А.Д.Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в которой они взаимно организуют и направляют друг друга ("...лед и пламень не столь различны меж собой").

Кроме этого, изучение геометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в измерении геометрических величин (длин, углов, площадей).

Наконец, геометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых ученых: Пифагора, Евклида, Архимеда, И.Кеплера, Р.Декарта, Л.Эйлера, Н.И.Лобачевского и многих других.

Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: "Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса - немой трактат по геометрии, а греческая архитектура - внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора". Вот какой замечательной наукой вы занимаетесь.

Данное пособие начинается с пункта 39. Предыдущие пункты были рассмотрены в Рабочих тетрадях для 7 класса (пункты 1 – 26) и для 8 класса (часть 1, пункты 27 – 38). Весь собранный в данном пособии материал разбит на отдельные параграфы. В каждом из них даны задания, которые могут быть использованы как для классной, так и для домашней работ, а также для самостоятельных и индивидуальных работ. Задания подобраны и представлены таким образом, чтобы освободить вас от вспомогательной и непроизводительной работы, например, копирования условий задачи или чертежа, от выполнения несущественных дополнительных построений и т.п. Упражнения весьма разнообразны. В ряде из них вам нужно будет выбрать верные (или неверные) утверждения из предложенных. В других нужно будет заполнить пропуски в формулировках определений, доказательствах теорем или в решениях задач. Много, так называемых, задач по готовому чертежу. В них нужно ответить на предложенный вопрос, или выполнить дополнительные построения, или самим сформулировать и решить задачу. Решение предложенных задач поможет вам в изучении курса геометрии.

Желаем успехов в изучении геометрии!

39. ЦЕНТР СИММЕТРИИ

39.1. Закончите предложения.

1) Точки A и A' называются симметричными относительно точки O, если ____

____.

2) Центром симметрии называется ______________________________

____.

3) Центр симметрии симметричен ______________________________

____.

4) Центральной симметрией называется преобразование плоскости, при котором ____

____.

5) Две фигуры F и F' называются центрально-симметричными относительно центра O, если ________________________________

____

____.

6) Фигура F называется центрально-симметричной относительно центра O, если ____

____

____

____.

39.2. Постройте фигуру, центрально-симметричную ΔABC (рис. 1) относительно центра O.

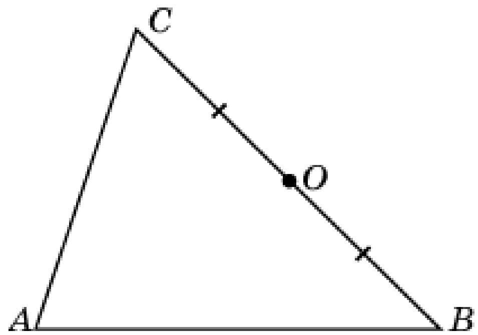


Рис. 1

39.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первое свойство центральной симметрии.

Формулировка. ____

____.

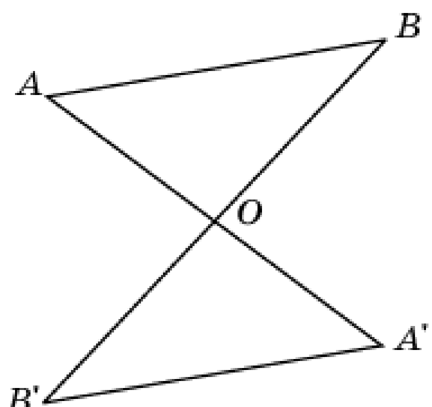


Рис. 2

Дано: Центральная симметрия с центром O; $A \to A'$; $B \to B'$.

Доказать: ____________________.

Доказательство. ______________________

____

____

____

____

39.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, второе свойство центральной симметрии.

Формулировка. ____

____.

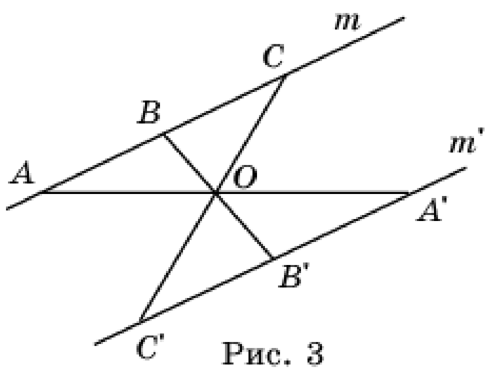


Рис. 3

Дано: Центральная симметрия

с центром O; $A \in m$; $B \in m$; $C \in m$

$A \to A'$; $B \to B'$; $C \to C'$.

Доказать: ____________________.

Доказательство. ____

____

____

39.5. Проведите прямую, которая при центральной симметрии (на рисунке 4 точка O – центр симметрии) переходит в себя. Сделайте вывод. Сколько таких прямых можно провести?

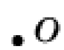


Рис. 4

Ответ. ____

____

____.

39.6. Проведите две центрально-симметричные прямые (на рисунке 5 точка O – центр симметрии). Как они расположены относительно друг друга? Сделайте вывод.

Рис. 5

Ответ. ____

____

____.

39.7. Найдите центр симметрии (рис. 6), если: а) $M \to M'$; б) $N \to N'$; в) $O \to O'$.

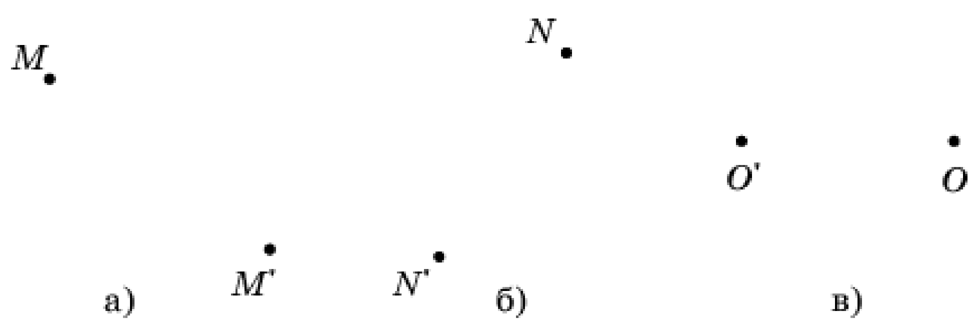


Рис. 6

Построение. а) ____;

б) ____;

в) ____.

39.8. Постройте фигуры, центрально-симметричные фигурам, изображённым на рисунке 7, относительно центра O.

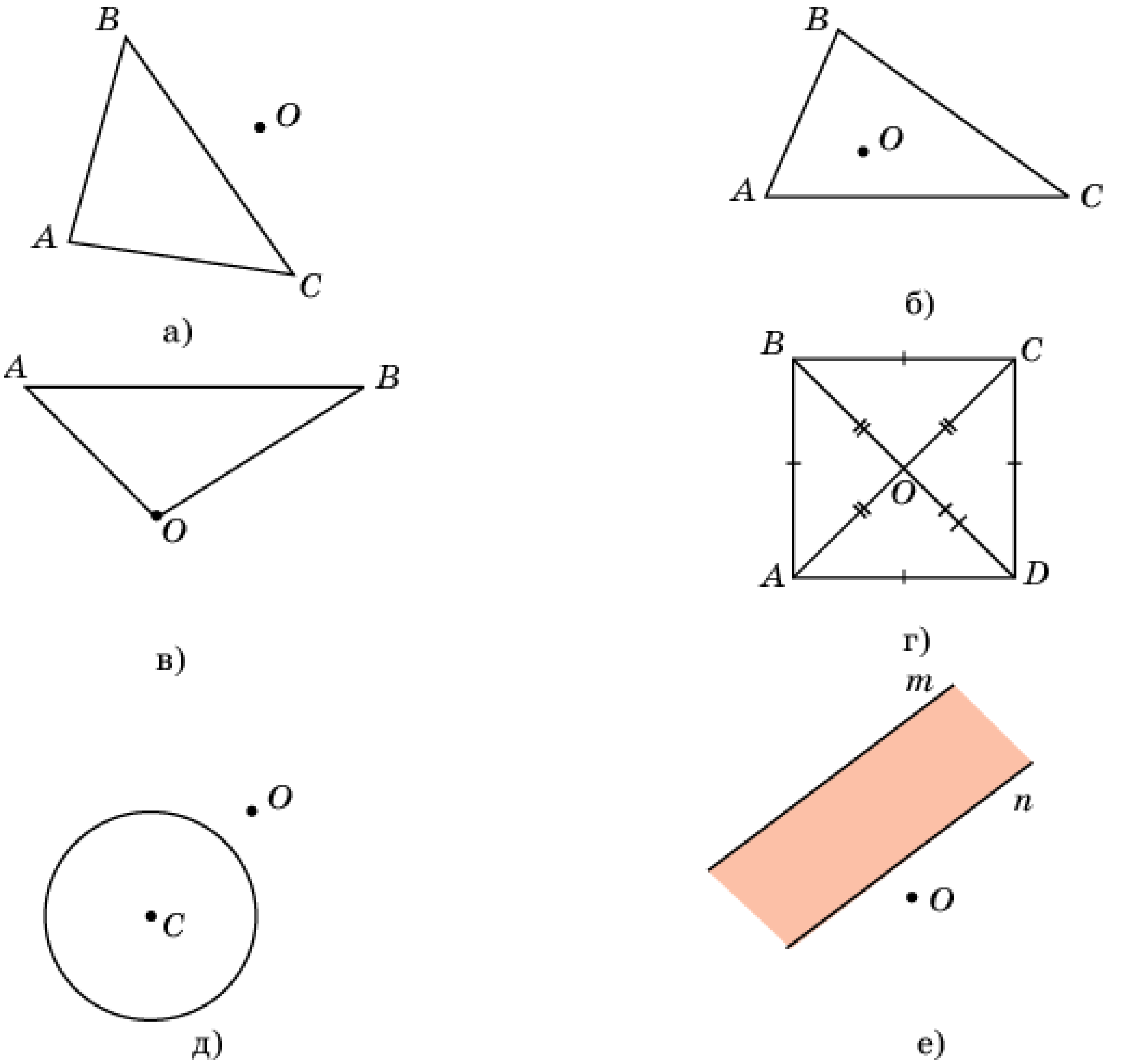


Рис. 7

Построение. ____

____

____

____

39.9. Найдите центр симметрии фигуры *Φ* (рис. 8), если *Φ*: а) отрезок; б) два параллельных и равных отрезка; в) квадрат; г) прямоугольник; д) ромб; е) параллелограмм.

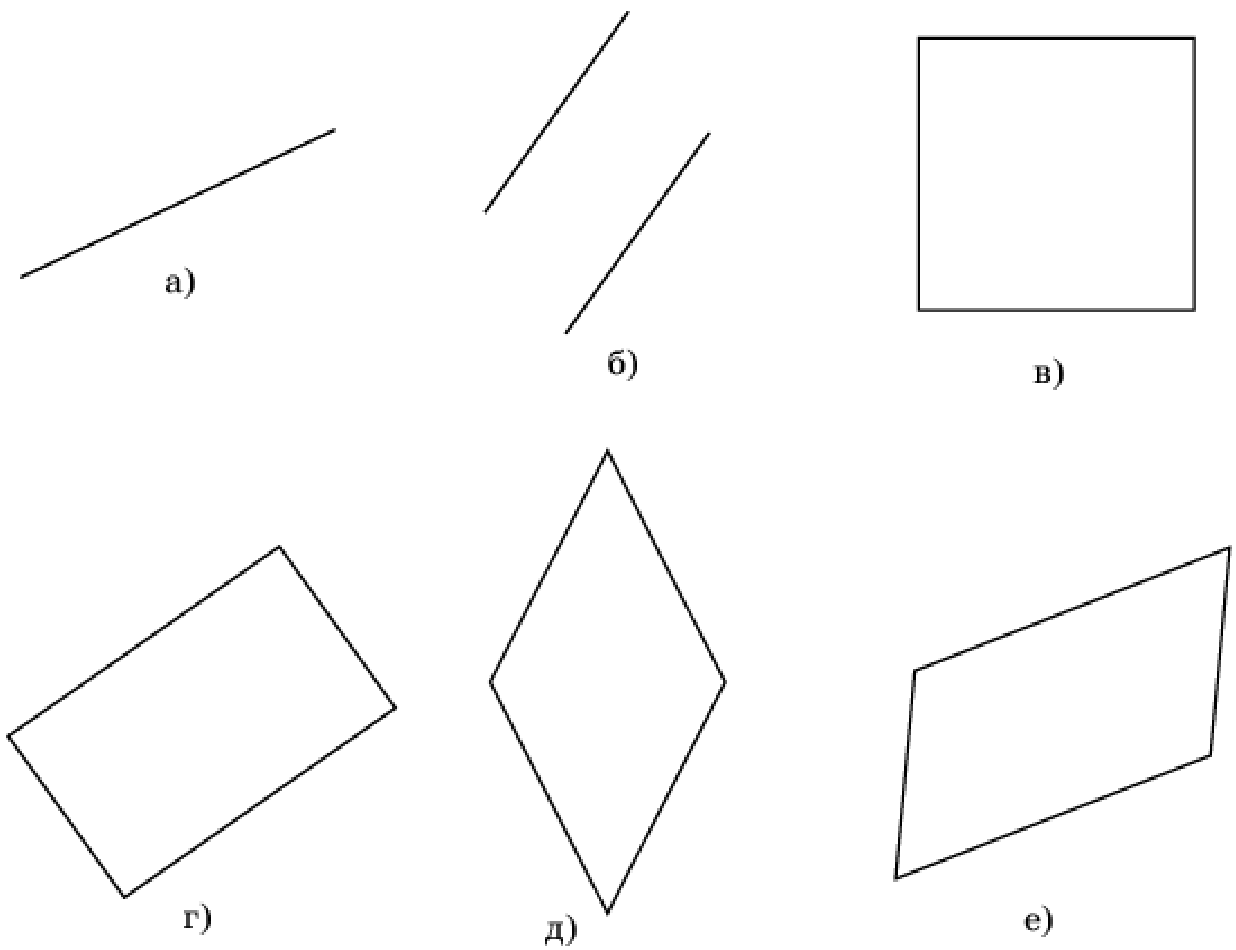


Рис. 8

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____;

д) ____;

е) ____.

39.10. Приведите примеры центрально-симметричной фигур, которые имеют бесконечно много центров симметрии.

Ответ. ____

____.

39.11. Приведите примеры центрально-симметричных фигур, которым не принадлежит их центр симметрии.

Ответ. ____

____.

39.12. На рисунке 9 укажите центрально-симметричные фигуры и их центры.

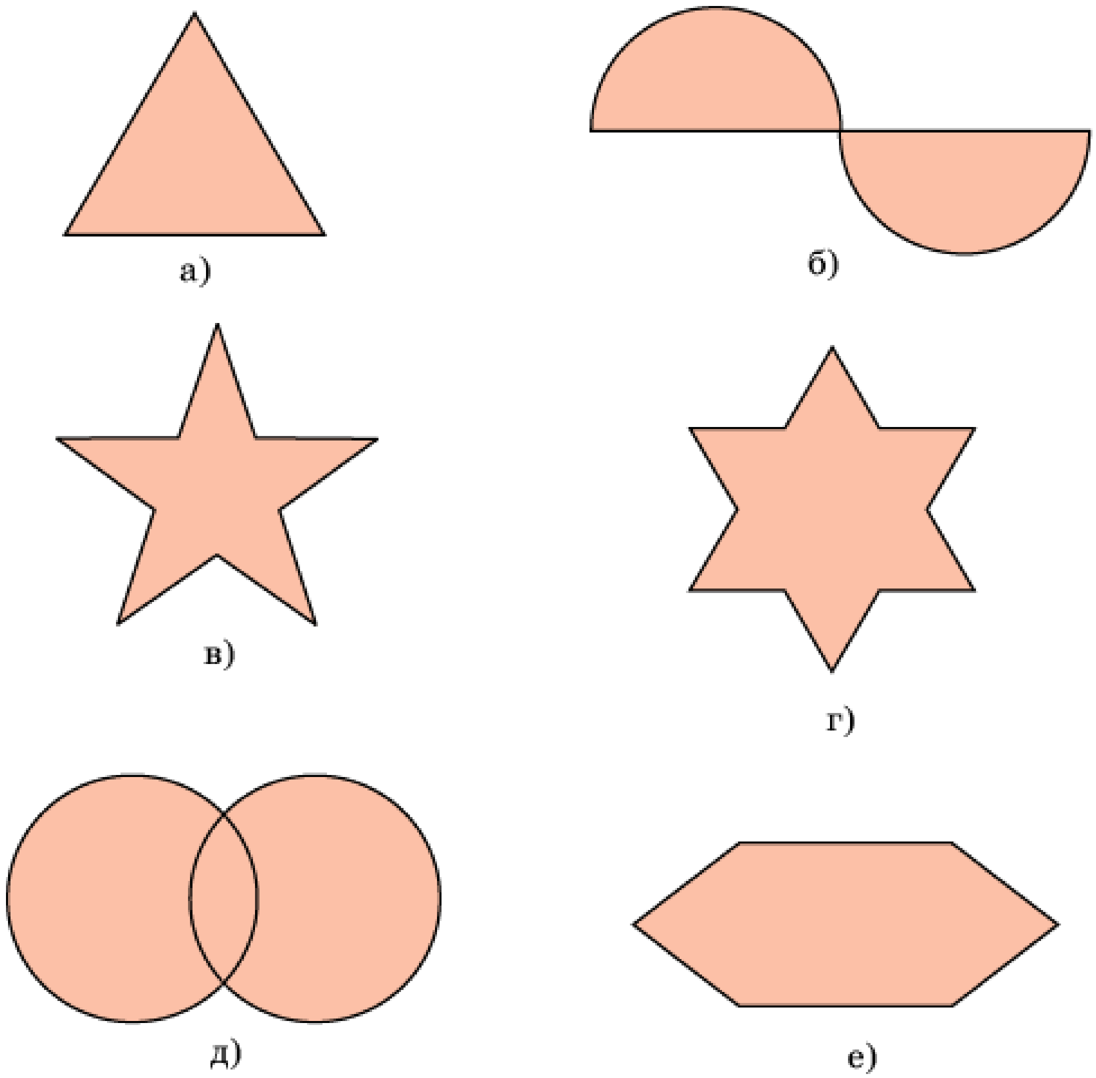


Рис. 9

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____;

д) ____;

е) ____.

39.13. Изобразите центрально-симметричную фигуру, состоящую из трёх прямых, расположенных таким образом, что она имеет бесконечно много центров симметрии.

Ответ. ____

____.

39.14. Изобразите несколько не центрально-симметричных фигур.

39.15. На рисунке 10 изображены ромбы. Укажите: а) точки, симметричные точкам B_3, C_4, A_3, B_2 и E_2 относительно центра C_3; б) фигуры, в которые переходят отрезки D_2D_3, и E_1E_3 при центральной симметрии относительно центра C_2.

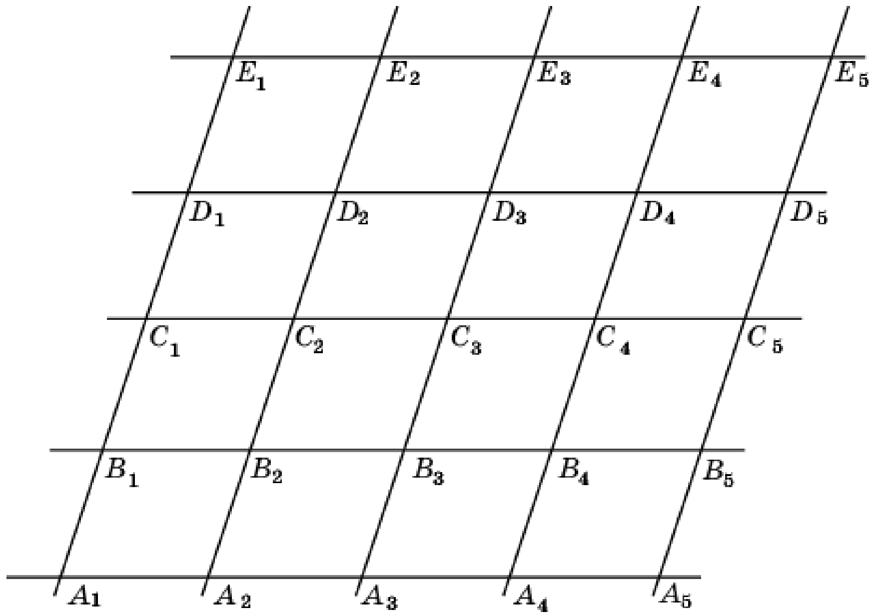


Рис. 10

Ответ. а) ____;
б) ____.

39.16. Изобразите центрально-симметричные лучи. Какому условию они должны удовлетворять?

Ответ. ____
____.

39.17. На рисунке 11 изображены центрально-симметричные треугольники ABC и $A'B'C'$. Постройте с помощью одной линейки точку H', в которую переходит ортоцентр H треугольника ABC.

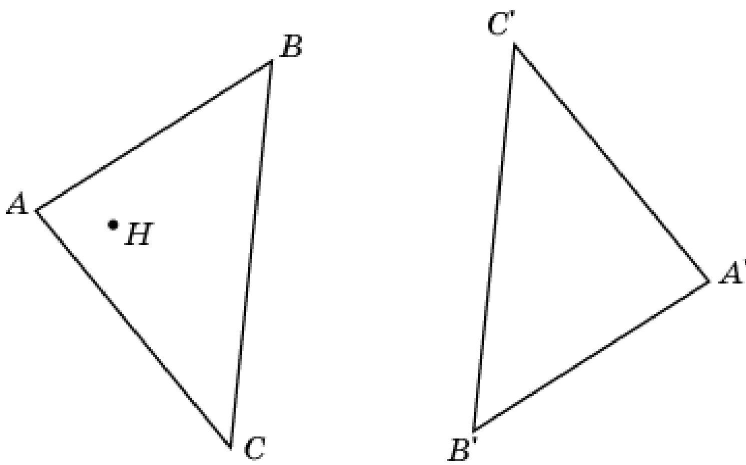


Рис. 11

Построение. Сначала найдём точку O – центр симметрии. Для этого ____________________
____
____
____
____
____
____

39.18. Изобразите неправильный центрально-симметричный шестиугольник. Укажите центр симметрии. Что можно сказать относительно его сторон?

Ответ. ____________________
____________________.

40. ПОВОРОТ. СИММЕТРИЯ *n*-го ПОРЯДКА

40.1. Закончите предложения.

1) Точка A' получается из точки A поворотом вокруг точки O на угол φ, если ____

____

____.

2) Поворотом вокруг точки O на угол φ называется преобразование плоскости, при котором ____

____

____

____.

Точка O называется ____.

3) Фигура F' получается поворотом фигуры F вокруг точки O на угол φ, если ____

____

____.

4) Точка O называется центром симметрии n-го порядка фигуры F, если ____

____

____.

5) Центр симметрии 2-го порядка является ____________________

____.

40.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первое свойство поворота.

Формулировка. ____

____.

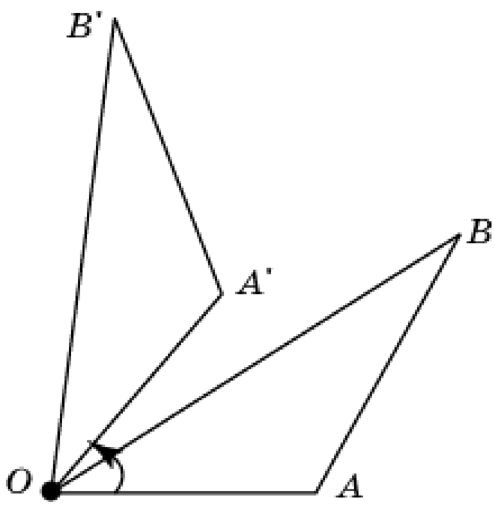


Рис. 12

Дано: Поворот вокруг точки O

на угол φ; $A \to A'$; $B \to B'$.

Доказать: ___________________.

Доказательство. _______________________

____

____

____

____

____.

40.3. Закончите предложения.

1) Поворот на угол φ, где $0° < \varphi < 360°$, означает ___________________

____

____.

2) Поворот на угол $-\varphi$, где $0° < \varphi < 360°$, означает _____________

____

____.

40.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, второе свойство поворота.

Формулировка. ____

____.

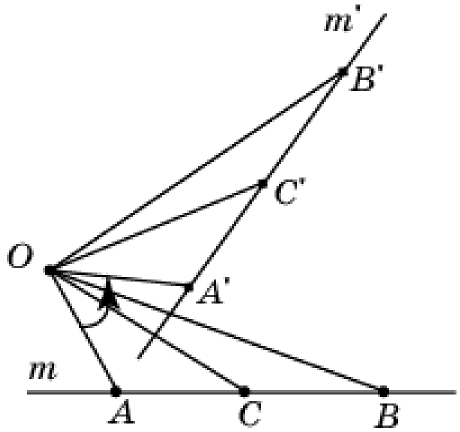


Рис. 13

Дано: Поворот вокруг точки O на угол φ; $A \to A'$; $B \to B'$; $C \to C'$.

$A \in m$; $B \in m$; $C \in m$.

Доказать: ______________________________

______________________________.

Доказательство. Пусть точка C лежит между точками A и B, тогда $AC+CB=$________________. Для точек, в которые перейдут точки A, B и C при повороте вокруг точки O на угол φ будут выполняться равенства: $A'C'=$_________, $C'B'=$_________ и $A'B'=$_________, так как

____

____.

Значит, $A'C'+C'B'=$__________________, т.е. точка C' лежит

____.

Следовательно, ____.

Аналогично, можно показать, что ______________________________

____

____

____.

40.5. Укажите углы, при повороте на которые фигура остаётся на месте.

Ответ. ____

____.

40.6. Постройте фигуру, в которую перейдёт прямая l при повороте вокруг точки O на угол φ, если: а) $O \notin l$ и $\varphi = -45°$; б) $O \in l$ и $\varphi = 135°$.

Построение. а) ____

____

____;

б) ____

____

____.

40.7. Постройте фигуру $Ф'$, в которую перейдёт при повороте фигура $Ф$ (рис. 14), если $Ф$: а) точка A, O – центр поворота, $\varphi = -30°$; б) отрезок AB, O середина отрезка – центр поворота, и $\varphi = -45°$; в) отрезок CD, C – центр поворота, и $\varphi = 120°$; г) отрезок EF, O – центр поворота, внутренняя точка отрезка, и $\varphi = -135°$.

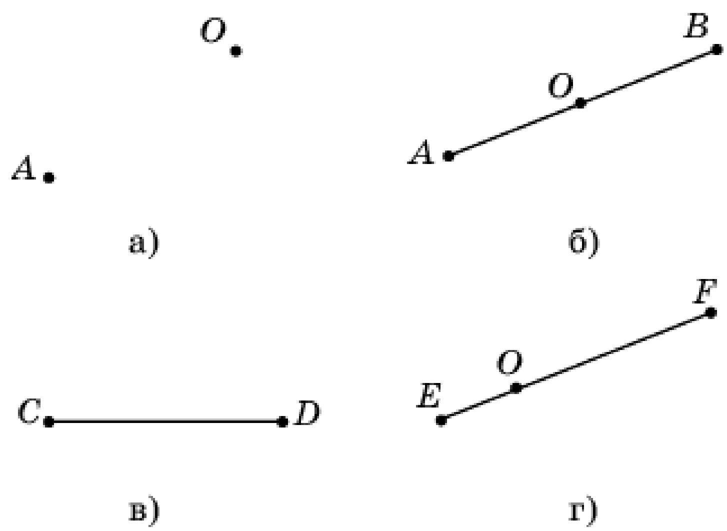


Рис. 14

Построение: а) ____

____

б) ____

____

в) ____

____

г) ____

____

40.8. Постройте фигуру, в которую перейдёт квадрат $ABCD$ (рис. 15) при повороте вокруг: а) вершины A на 90°; б) вершины B на -90°; в) O – точки пересечения его диагоналей на 90°; г) O – точки пересечения его диагоналей на -45°. Какой фигурой является пересечение данного квадрата и полученной фигуры?

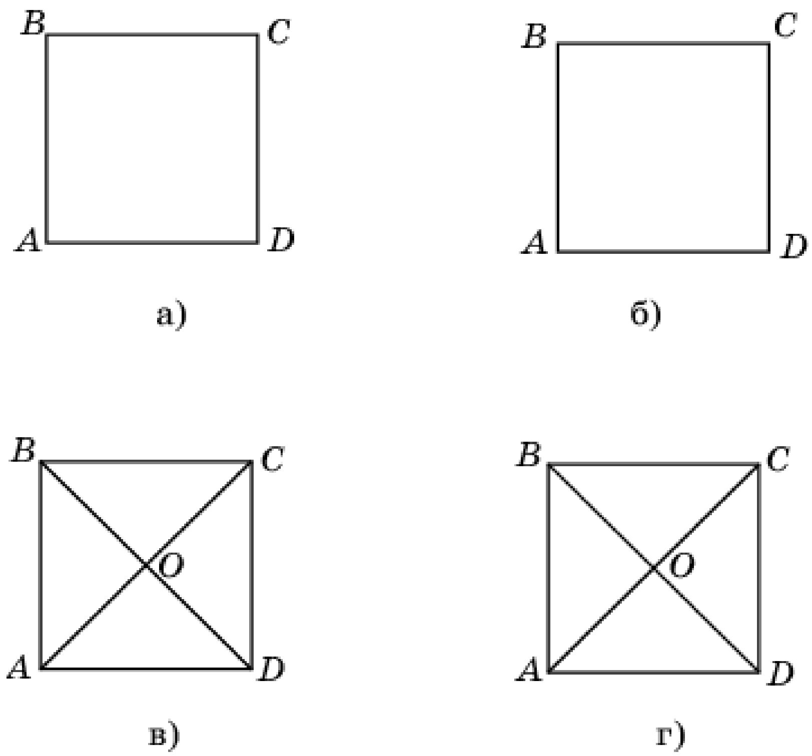


Рис. 15

Построение: а) ____

б) ____

в)____

г) ____

40.9. Постройте фигуру, в которую перейдёт правильный треугольник ABC (рис. 16) при повороте вокруг: а) вершины C на $60°$; б) вершины B на -$60°$; в) точки M – центроида, на $60°$; г) точки H – ортоцентра, на -$120°$. Какой фигурой является объединение данного треугольника и полученной фигуры?

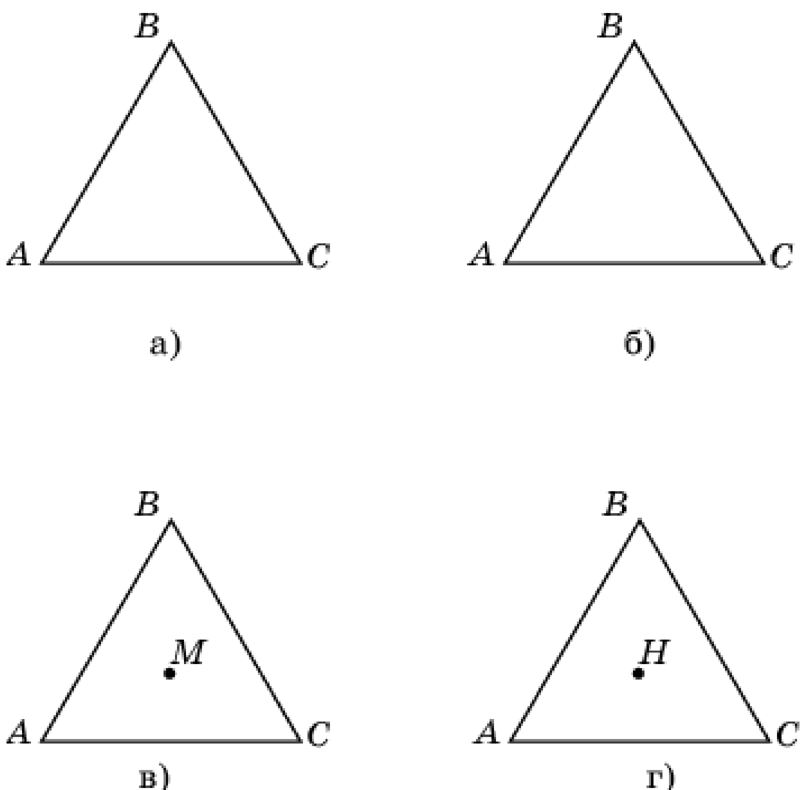


Рис. 16

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

40.10. Изобразите несколько фигур, имеющих центр симметрии 2-го порядка. Где он находится?

Ответ. ____

____.

40.11. Изобразите фигуры, имеющие центр симметрии: а) 3-го; б) 4-го; в) 5-го; г) 6-го порядка. Где он находится?

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

40.12. Изобразите фигуру, образованную тремя равными окружностями, каждая из которых касается двух других. Центром симметрии какого порядка она обладает? Почему? Где он находится?

Ответ. ____

____.

40.13. Правильный восьмиугольник $A_1 \ldots A_8$ (рис. 17) при поворотах вокруг центра O на $x°$, $2x°$, …, $8x°$ переходит в себя. Найдите x. Назовите фигуру, в которую переходит: а) сторона A_1A_2 при повороте на $2x°$; б) сторона A_2A_3 при повороте на $3x°$; в) диагональ A_4A_8 при повороте на $4x°$; г) диагональ A_5A_7 при повороте на $5x°$.

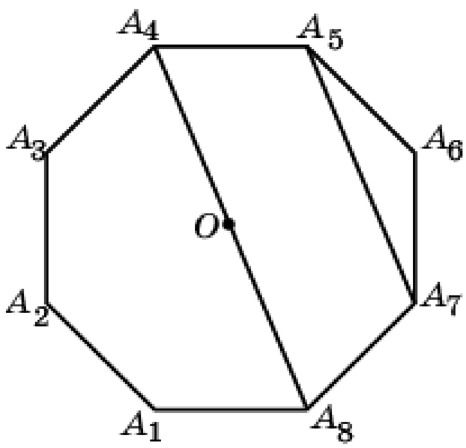


Рис. 17

Ответ: а) ______________________;

б) ______________________;

в) ______________________;

г) ______________________.

40.14. На рисунке 18 найдите центр и угол поворота, если фигура Φ переходит в фигуру Φ'.

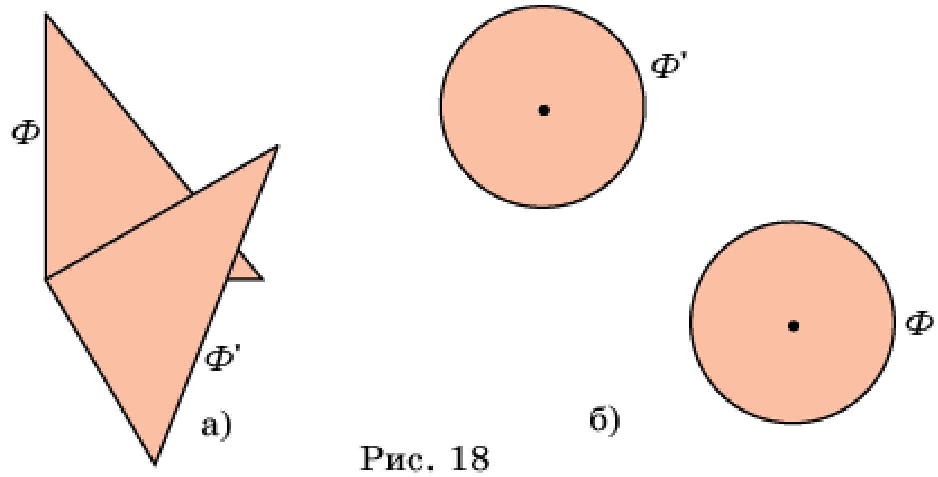


Рис. 18

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

40.15. Изобразите несколько пар лучей, которые можно перевести один в другой поворотом.

40.16. На рисунке 19 изображены квадраты. В какую фигуру перейдёт: а) точка B_3 при повороте вокруг точки C_4 на угол $90°$; б) точка D_5 при повороте вокруг точки F_3 на угол $-90°$; в) отрезок D_3D_4 при повороте вокруг точки C_3 на угол $-90°$; г) отрезок E_2E_4 при повороте вокруг точки E_6 на угол $90°$; д) четырёхугольник $B_2D_2D_4B_4$ при повороте вокруг точки C_3 на угол $90°$; е) четырёхугольник $A_3A_6D_6D_3$ при повороте вокруг точки D_3 на угол $-90°$?

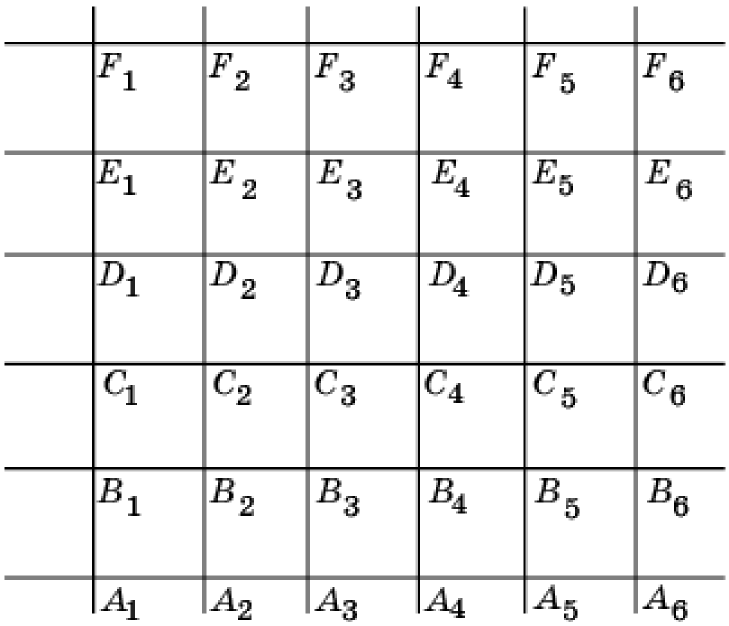


Рис. 19

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____;

д) ____;

е) ____.

40.17. На рисунке 20 отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$. Найдите точку O – центр поворота и определите φ - угол поворота.

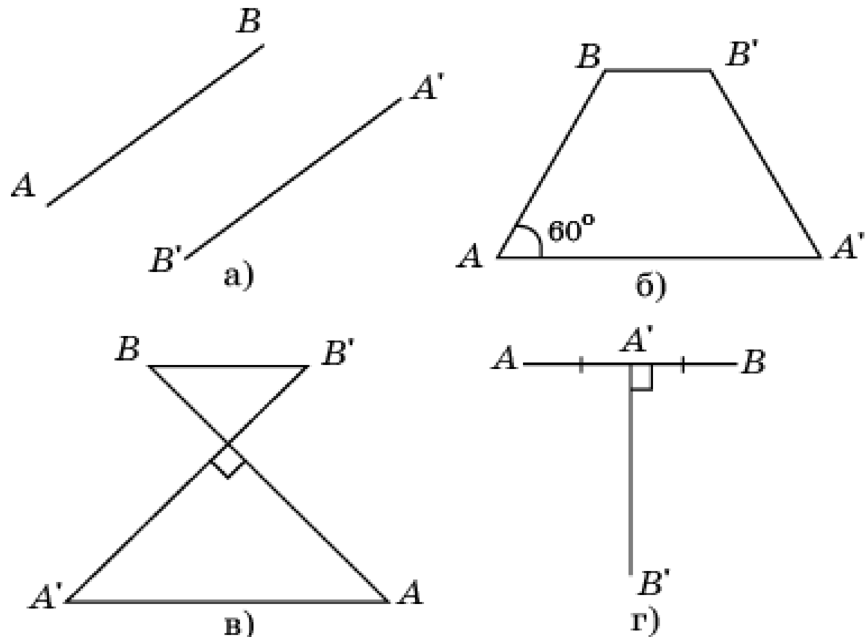


Рис. 20

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____;

в) ____

____;

г) ____

____.

40.18. При некотором повороте отрезок KL переходит в отрезок $K'L'$ (рис. 21). Постройте одним циркулем точки M' и N', в которые переходят при этом повороте точки M и N.

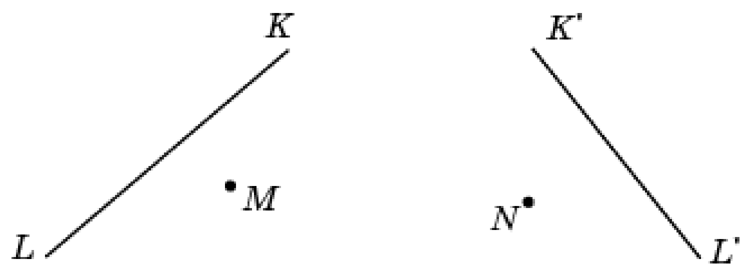


Рис. 21

Построение. ____

____

____

____

____

____

____

____

____.

41. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

41.1. Закончите предложения.

1) Две точки A и A' называются симметричными относительно прямой c, если ____

____.

Каждая точка прямой c считается ____________________________

____.

2) Осевой симметрией относительно прямой c называется преобразование плоскости, при котором ________________________

____

____

____.

Прямая c называется ____.

3) Две фигуры F и F' называются симметричными относительно оси c, если ____

____

____,

4) Фигура F называется симметричной относительно оси c, если

____

____

____.

41.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первое свойство осевой симметрии.

Формулировка. ____

____.

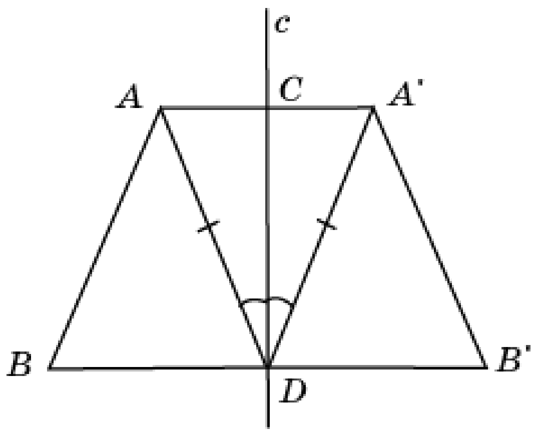


Рис. 22

Дано: Осевая симметрия относительно оси c;

$A \to A'$; $B \to B'$.

Доказать: _____________.

Доказательство. а) Пусть точки точки A и B лежат по одну сторону от оси c ____

____

____

____

____;

б) пусть точки точки A и B лежат по разные стороны от оси c ______

____

____

____.

41.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, второе свойство осевой симметрии.

Формулировка. ____

____.

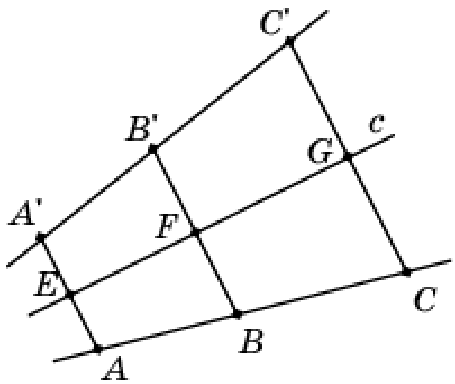


Рис. 23

Дано: Осевая симметрия относительно оси c;

$A \to A'$; $B \to B'$; $C \to C'$;

$A \in m$; $B \in m$; $C \in$ ____

Доказать: ____________________

______________________________.

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____.

41.4. Закончите предложения.

1) При осевой симметрии в себя переходят точки ____________
____.

2) При осевой симметрии в себя переходят прямые __________
____.

3) Если точка M при осевой симметрии переходит в точку M', то осью симметрии является ____________________________________.

41.5. Постройте фигуру Φ', в которую перейдёт фигура Φ при осевой симметрии относительно оси c, если Φ: а) точка $M \notin c$; б) точка $N \in c$; в) треугольник ABC, c – прямая AB; г) квадрат $ABCD$, c – прямая BD.

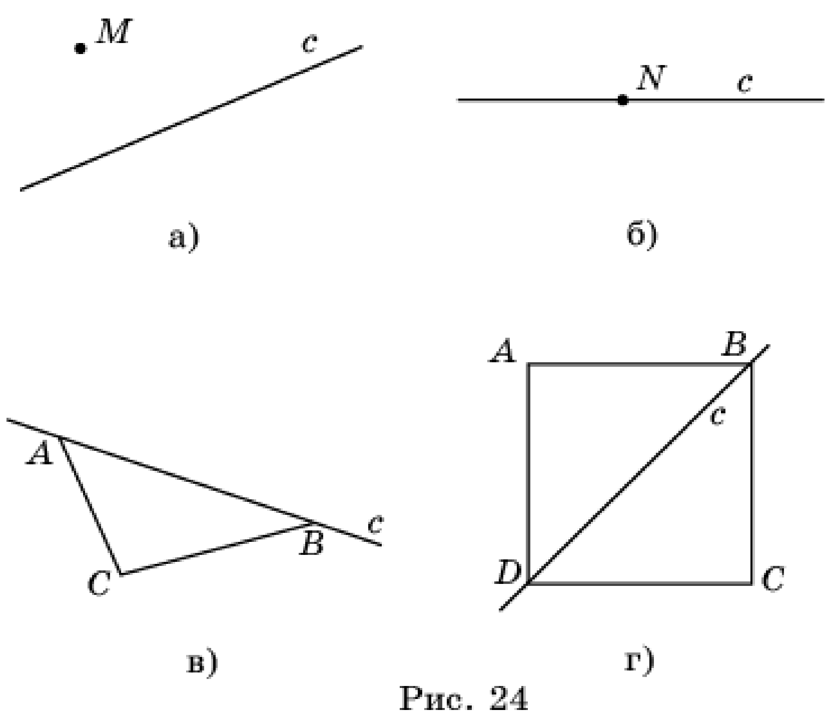


Рис. 24

41.6. Изобразите несколько фигур, имеющих ось (оси) симметрии.

41.7. Изобразите несколько фигур, не имеющих осей симметрии.

41.8. Изобразите несколько букв русского алфавита, имеющих: а) 1 ось симметрии; б) 2 оси симметрии; в) центр симметрии; г) оси симметрии, но не центрально-симметричных.

41.9. Найдите ось симметрии, при которой точка H переходит в точку H'.

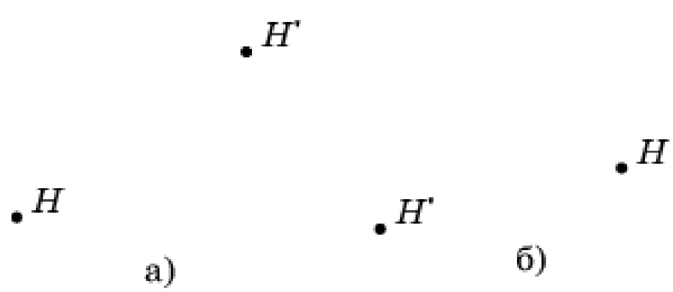


Рис. 25

41.10. Постройте оси симметрии фигур, представленных на рисунке 26. Сколько осей в каждом случае?

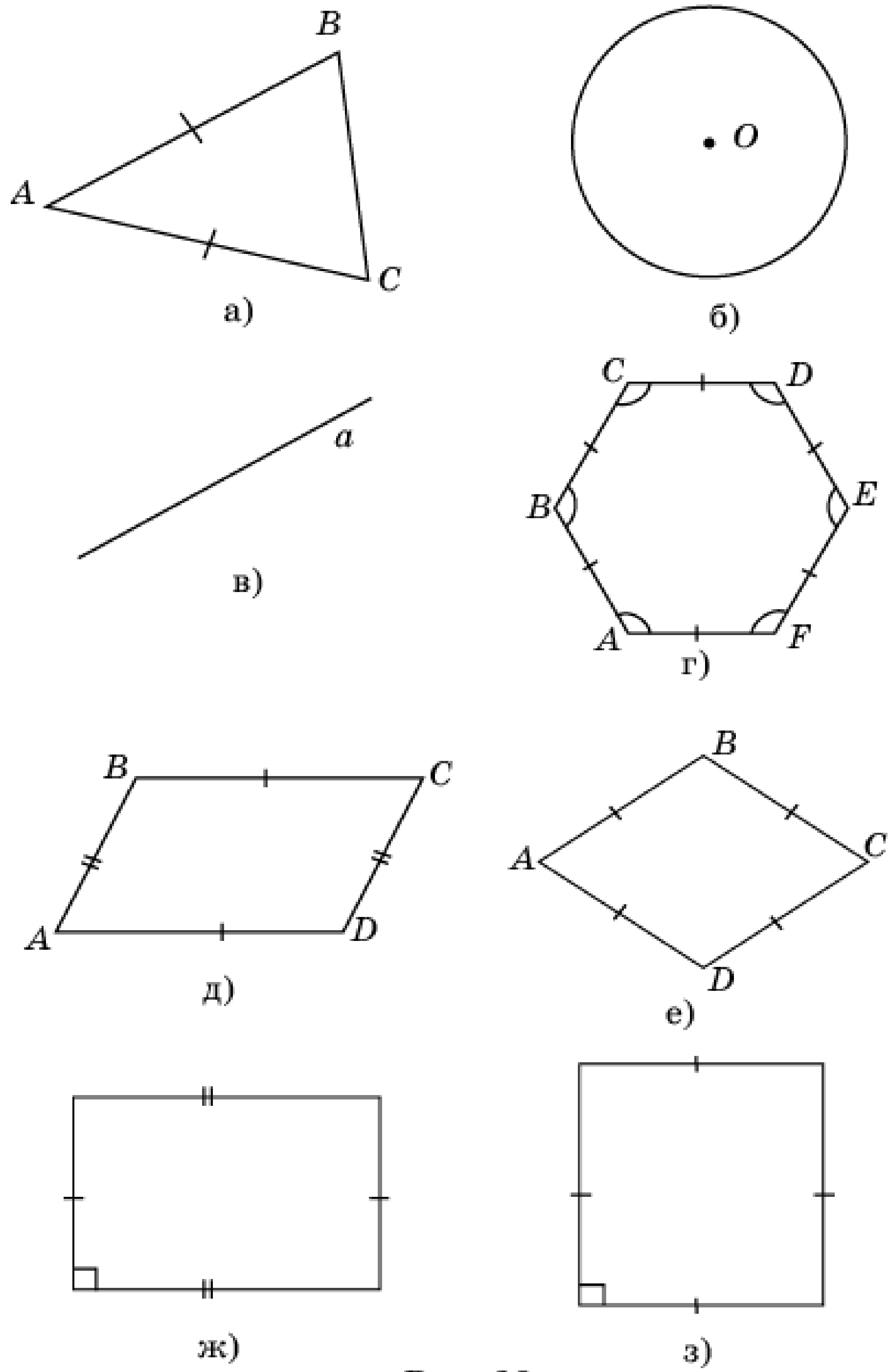


Рис. 26

Ответ. а) ________; б) _______; в) _______; г) ________; д) ________; е) _________; ж) _______; з) _________.

41.11. Изобразите трапецию, имеющую ось симметрии. Сделайте вывод.

Ответ. ____

____.

41.12. Изобразите несколько пар лучей, которые переходят друг в друга при осевой симметрии, и соответствующую ось симметрии.

41.13. Изобразите фигуру, образованную тремя прямыми таким образом, чтобы она имела бесконечно много осей симметрии.

41.14. На рисунке 27 изображены фигуры Φ и Φ', симметричные относительно оси k. Постройте с помощью угольника и циркуля точки, симметричные точкам U и V.

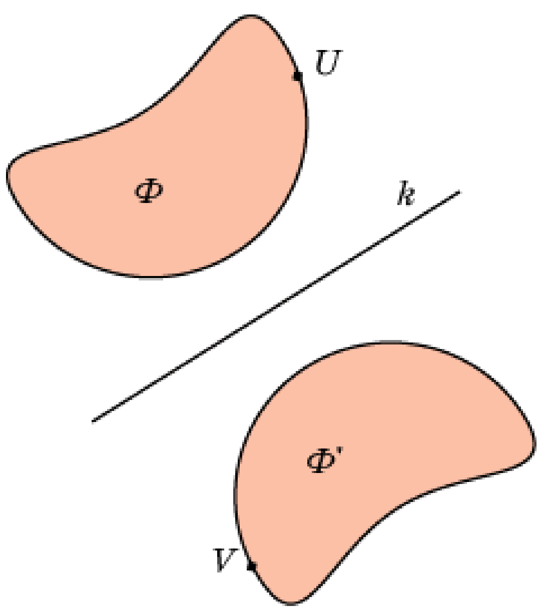


Рис. 27

Построение. ______________________

____

____

____

____

____

____

____

____

_______________________________________.

41.15. Дан треугольник *CDE* (рис. 28). С помощью осевой симметрии постройте разность его сторон *CD* и *CE*.

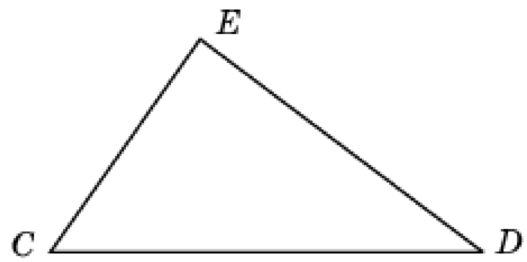


Рис. 28

Построение. Проведём биссектрису *CL* и рассмотрим осевую симметрии относительно оси ______, тогда ______________________

____.

41.16. Дан треугольник *EFG* (рис. 29). С помощью осевой симметрии постройте разность его углов *F* и *G*.

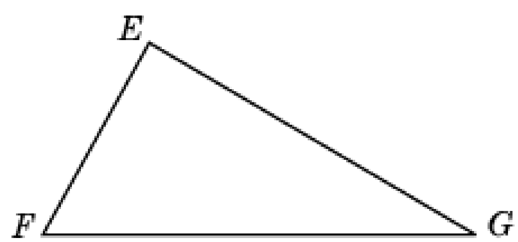


Рис. 29

Построение. Проведём серединный перпендикуляр *h* к стороне *FG* и рассмотрим осевую симметрию относительно оси _______, тогда

____

____.

41.17. При осевой симметрии отрезок KL переходит в отрезок $K'L'$ (рис. 30). Постройте с помощью одного циркуля точки M' и N', в которые переходят отмеченные на рисунке точки соответственно M и N.

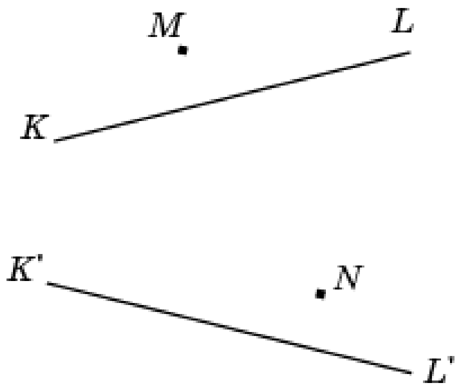


Рис. 30

Построение. Построим сначала ось симметрии. Для этого ______________

____

____

____

____

____

____

____

____.

41.18. Изобразите невыпуклый шестиугольник, который имеет две оси симметрии.

42. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

42.1. Закончите предложения.

1) Параллельный перенос характеризуется ____________________
____.

2) Векторными называются величины, которые, ________________
____
____.

3) Вектором называется ______________________________________
____.

4) Вектор с началом в точке M и концом в точке N обозначается ___________________. Вектор также изображается _________________________
____

42.2. Заполните пропуски.

1) Два вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$, лежащие на одной прямой, называются одинаково направленными, если ______________________________________
____
____.

2) Два вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$, не лежащие на одной прямой, называются одинаково направленными, если ______________________
____
____.

3) Два вектора $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{E'F'}$, лежащие на одной прямой, называются противоположно направленными, если ______________________________

____

____.

4) Два вектора $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{E'F'}$, не лежащие на одной прямой, называются противоположно направленными, если ______________

____

____.

5) Длиной, или __________________, вектора называется ________

____.

6) Длина вектора $\vec{a}$ обозначается ________________________________.

7) Два вектора называются равными, если ____________________

____

____.

8) Нулевым вектором называется ___________________________

____.

9) Точка A' получается из точки A параллельным переносом на вектор $\vec{a}$, если ____

____.

10) Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется преобразование плоскости, при котором __________________________

____

____.

42.3. В каком случае говорят, что фигура F' получается из фигуры F параллельным переносом на вектор $\vec{a}$?

Ответ. ____

____

____.

42.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первое свойство параллельного переноса.

Формулировка. ____

____.

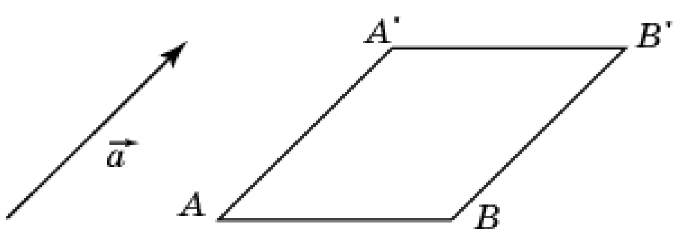


Рис. 31

Дано: Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$;

$A \to A'$; $B \to B'$.

Доказать: ____________.

Доказательство.____

____

____

____

____.

42.5. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, второе свойство параллельного переноса.

Формулировка. ____

____.

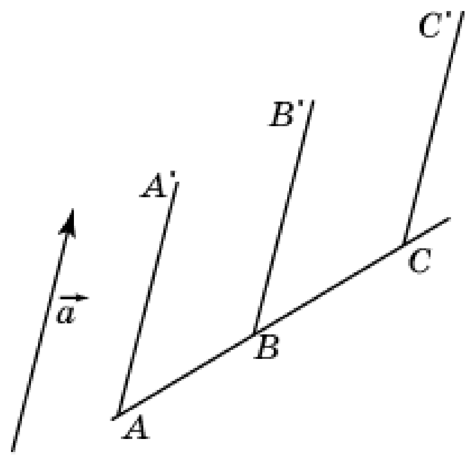


Рис. 32

Дано: Параллельный перенос

на вектор $\vec{a}$;

$A \to A'$; $B \to B'$; $C \to C'$;

$A \in m$; $B \in m$; $C \in$ ____

Доказать: ____________________________

____________________________________.

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____

____

____.

42.6. Укажите верные утверждения.

1) Параллельный перенос задаётся указанием его направления.

2) Параллельный перенос задаётся некоторым вектором.

3) Противоположно направленными называются векторы, лежащие на одной прямой и не имеющие общих точек.

4) Вектор $\overrightarrow{AA}$ является нулевым вектором.

5) Векторы $\overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{B'B}$ равны.

6) Отрезок MN определяет вектор $\overrightarrow{MN}$.

Ответ. ____

____.

42.7. Изобразите два отрезка, которые переводятся один в другой параллельным переносом. Сделайте вывод.

Ответ. ____

____

____

____.

42.8. На рисунке 33 укажите векторы: а) равные; б) одинаково направленные; в) противоположно направленные.

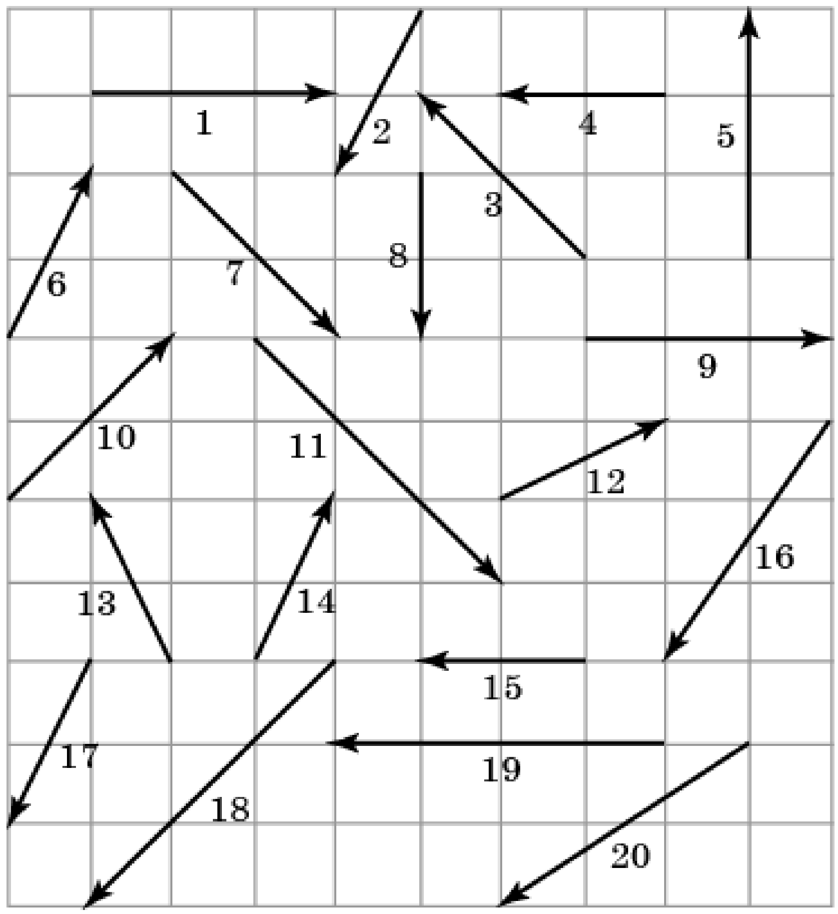


Рис. 33

Ответ. а) ____________________________________;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

42.9. Изобразите несколько фигур, которые можно перевести на себя с помощью параллельного переноса.

42.10. Постройте фигуру, в которую перейдёт прямоугольник $ABCD$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{DC}$ (рис. 34).

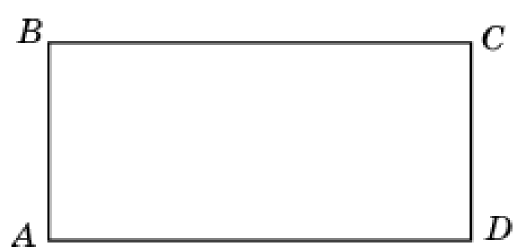


Рис. 34

Построение. ____

____

____

____

____.

42.11. Постройте фигуру Φ', в которую перейдёт фигура Φ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 35), если Φ: а) окружность с центром в точке O и радиусом R; б) прямая k; в) луч OA; г) треугольник ABC.

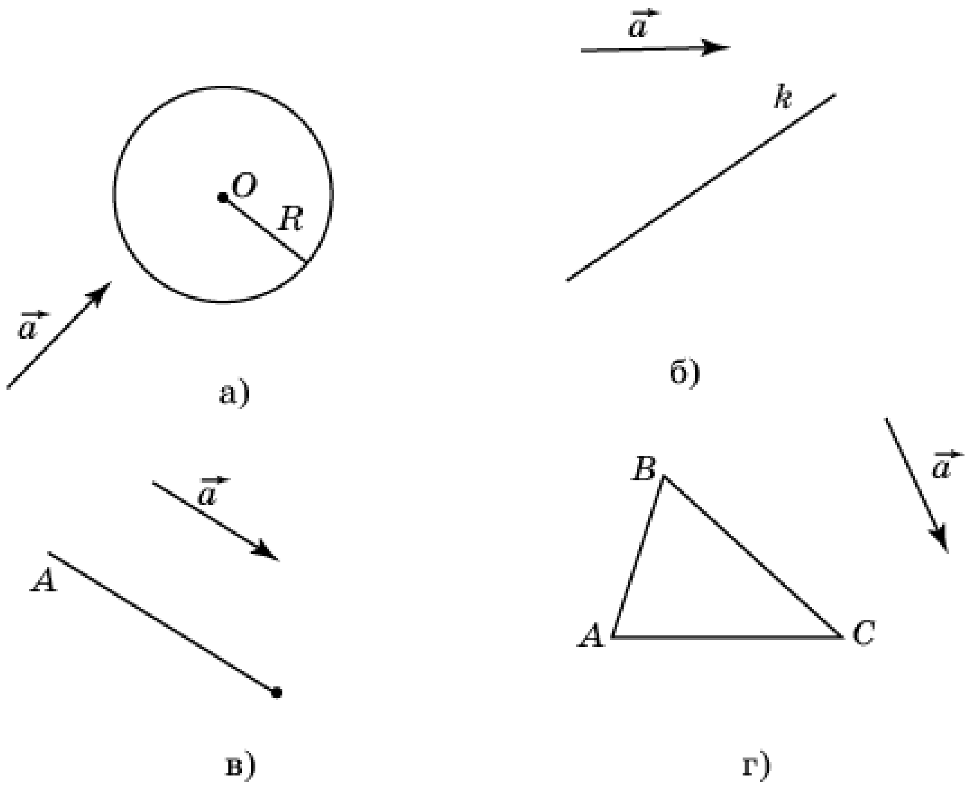


Рис. 35

Построение. ____

____

____

____

____

____

____.

42.12. Задайте параллельный перенос парой точек M и N и постройте фигуру, в которую при этом перейдёт угол AOB (рис. 36).

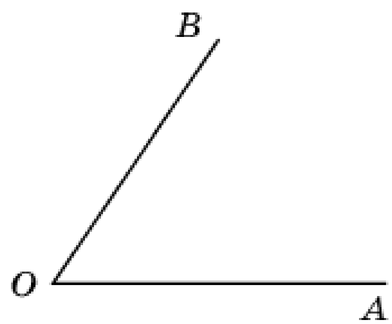


Рис. 36

Построение. ____

____

____

____

____.

42.13. Сколько различных векторов задают: а) 3 точки, не принадлежащие одной прямой; б) вершины параллелограмма (рис. 37)?

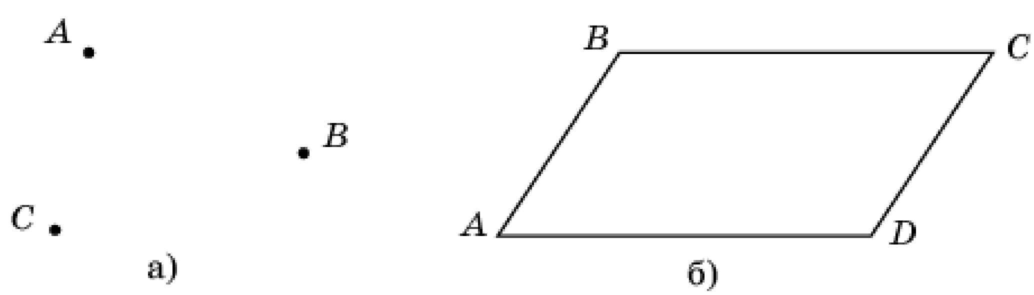


Рис. 37

Ответ. а) ____;

б) ____.

42.14. Постройте фигуру, в которую перейдёт треугольник CDE при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CM}$, где M – середина стороны DE. Какой фигурой является: а) объединение; б) пересечение полученной фигуры и данного треугольника?

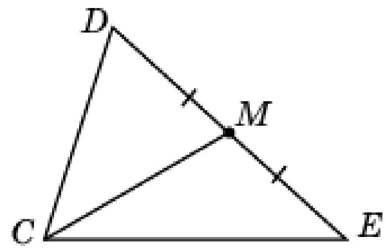


Рис. 38

Ответ. а) ____;
б) ____.

42.15. Изобразите две окружности, которые можно перевести одна в другую параллельным переносом. Сделайте вывод.

Ответ. ____
____.

42.16. Докажите, что если при параллельном переносе точка A переходит в точку A' и точка B переходит в точку B', то точка M', в которую переходит точка M, принадлежащая прямой AB, будет принадлежать прямой $A'B'$.

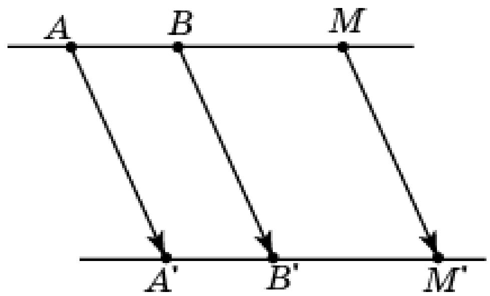


Рис. 39

Решение. При данном параллельном переносе прямая AB перейдёт в ________________________________, значит, ________________________
____
____.

42.17. Изобразите две прямые, которые можно перевести одна в другую параллельным переносом. Сделайте вывод.

Ответ. ____
____.

42.18. Используя параллельный перенос, опишите построение трапеции по её осенованиям, равным a, b ($a<b$), и углам α, β при большем из них.

Построение. Пусть нужно построить трапецию $ABCD$, у которой $BC=a$, $AD=b$, $\angle A=\alpha$ и $\angle D=\beta$. Строим треугольник CDE по стороне $ED=b-a$ и двум прилежащим к ней углам $\angle CED=\alpha$ и $\angle CDE=\beta$. Затем

43. ДВИЖЕНИЕ. РАВЕНСТВО ФИГУР

43.1. Закончите предложения.

1) Центральная симметрия, поворот, осевая симметрия, параллельный перенос обладают одним общим свойством – они ____
____.

2) Движением называется преобразование плоскости, при котором ____
____
____
____.

3) Примерами движения являются ______________________________
____
____.

4) Композицией движений называется ___________________________
____
____.

5) Две фигуры называются равными, если ______________________
____
____.

6) Если фигура *Φ* равна фигуре *Φ*. то это записывается следующим образом ____.

43.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первое свойство движения.

Формулировка. ____

____.

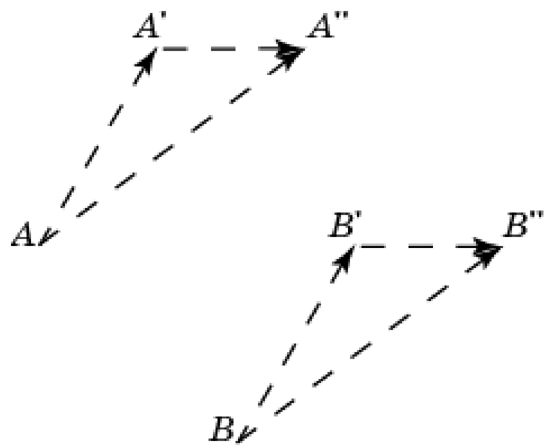


Рис. 40

Дано: Движение 1, при котором

$A \to A'$, $B \to B'$;

движение 2, при котором

$A' \to A''$; $B' \to B''$.

Доказать: ____________________

____________________________.

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____

____.

43.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, второе свойство движения.

Формулировка. ____
____.

Дано: ______________________
____
____
______________________________.

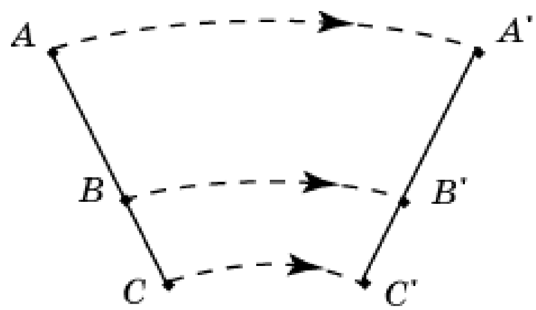


Рис. 41

Доказать: ___________________
____
______________________________.

Доказательство. ____
____
____
____
____
____
____
____.

43.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, третье свойство движения.

Формулировка. ____

____.

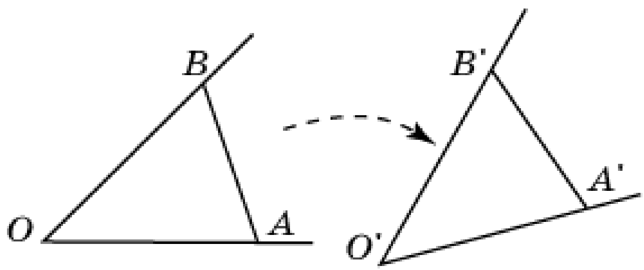


Рис. 42

Дано: ____________________

____

____

____

Доказать: ____

____

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____

____.

43.5. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему, которая устанавливает связь между понятием равенства фигур и введённым ранее понятием равенства треугольников.

Формулировка. ____

____.

I.

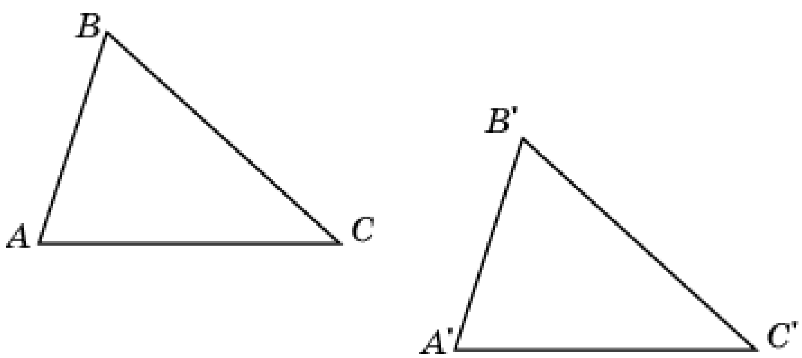


Рис. 43

Дано: Движение, при котором

$\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$.

Доказать: _____________

____

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____

____.

II.

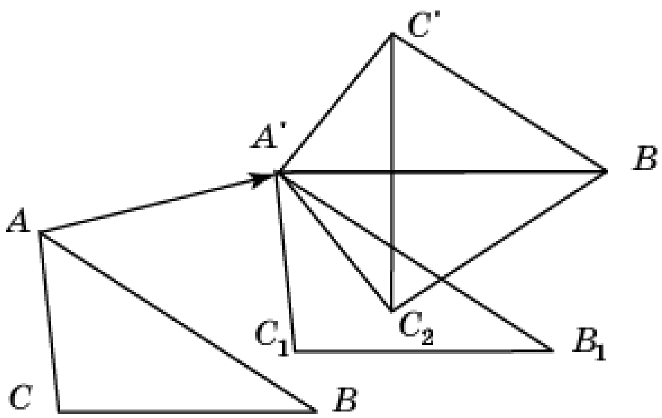


Рис. 44

Дано: ΔABC; $\Delta A'B'C'$;

$AB=A'B'$; $BC=B'C'$;

$AC=A'C'$;

$\angle A=\angle A'$; $\angle B=\angle B'$;

$\angle C=\angle C'$.

Доказать: ______________________________

____

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____

____

43.6. Могут ли при движении разные: а) точки переходить в одну точку; б) прямые переходить в одну прямую?

Ответ. а) ____;

б) ____.

43.7. Постройте фигуры, в которые перейдут точки A, B, C (рис. 45) при композизии движений: центральной симметрии относительно центра O и поворота вокруг O на $-90°$.

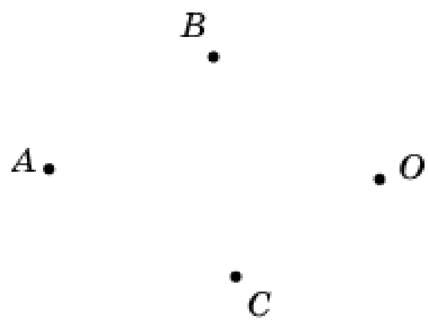


Рис. 45

Построение. ____

____

____

____

____

____

____

____

____.

43.8. При движении точки C, D, E перешли в точки соответственно C', D', E' (рис. 46). Постройте фигуры, в которые при этом движении перешли точки M и N.

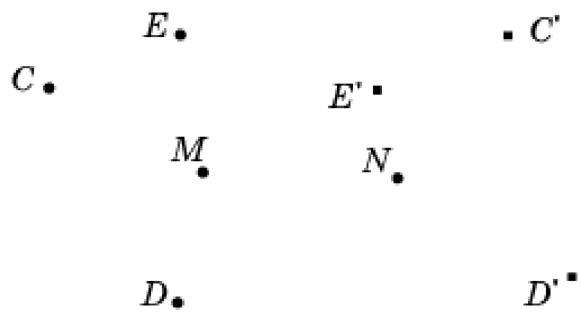


Рис. 46

Построение. ____

____

____

____.

43.9. При движении точка A перешла в точку A, точка B – в точку B (рис. 47). Постройте фигуры, в которые перешли точки C и D, принадлежащие прямой AB. Сделайте вывод.

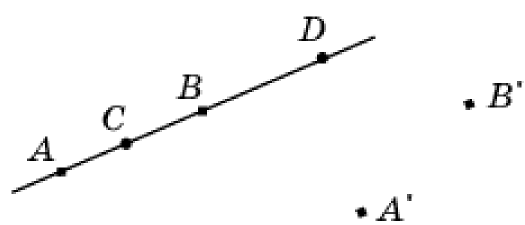


Рис. 47

Построение. ____

____

____

____.

43.10. Заполните таблицу.

Замечание. Неподвижная фигура – фигура, которая при движении переходит в себя.

Движение	Число неподвижных точек	Число неподвижных прямых
Центральная симметрия		
Поворот		
Симметрия *n*-го порядка		
Осевая симметрия		
Параллельный перенос		

43.11. Укажите неверные утверждения.

1) Параллелограмм имеет две оси симметрии.

2) Квадрат имеет 4 оси симметрии.

3) Если движение оставляет на месте две точки, то оно является осевой симметрией.

4) Если отрезки AB и AC равны, то точки B и C симметричны относительно прямых, проходящих через точку A.

5) Параллельный перенос можно задать расстоянием между двумя точками.

6) Если $a||b$, а $b||c$, то всегда существует параллельный перенос переводящий a на b и b на c.

7) Если движение переводит прямую на параллельную ей прямую, то оно является параллельным переносом.

Ответ. ____.

43.12. Назовите движения, которые могут перевести прямую a на параллельную ей прямую b (рис. 48).

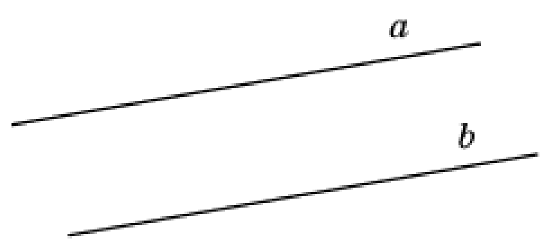


Рис. 48

Ответ. ____

____.

43.13. Назовите движения, которые могут перевести луч AB на луч $A'B'$, если они одинаково направлены (рис. 49).

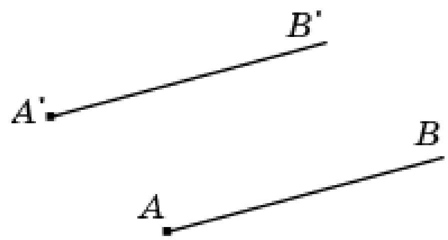


Рис. 49

Ответ. ____

____

____.

43.14. Назовите движения, которые могут перевести луч AB на луч $A'B'$, если они противоположно направлены (рис. 50).

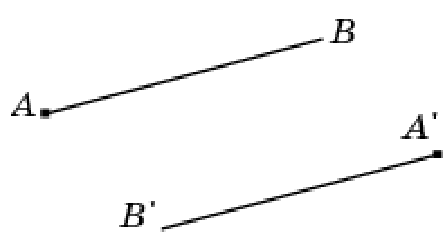


Рис. 50

Ответ. ____

____

____.

43.15. На рисунке 51 представлен треугольник KLM. Выполните для него композицию двух осевых симметрий, сначала относительно оси a, а затем относительно параллельной ей оси b. Каким одним движением можно заменить эту композицию?

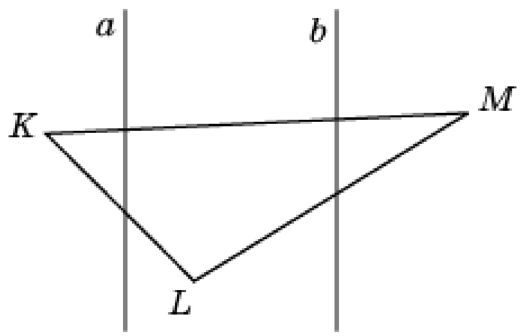


Рис. 51

Ответ. ____

____

____.

43.16. Изобразите несколько фигур, имеющих оси симметрии, но не имеющих центра симметрии.

43.17. Изобразите несколько фигур, у которых две перпендикулярные оси симметрии. Будут ли они иметь центр симметрии? Почему?

Ответ. ____

____

____

____.

43.18. Имеются два равных угла. Укажите движения, которые могут один из них перевести в другой.

Ответ. ____

____

____

____.

44*. ПАРКЕТЫ

44.1. Закончите предложения.

1) Паркетом называется такое заполнение плоскости __________
____
____
____.

2) Паркет называется правильным, если ______________________
____
____.

3) Правильных паркетов всего _________________________________.

4) Из одноимённых правильных многоугольников можно построить всего ____.

44.2. Заполните пропуски.

Внутренний угол правильного: а) треугольника равен _____________;

б) четырёхугольника равен ______; в) пятиугольника равен __________; г) шестиугольника равен _____________________________;

д) восьмиугольника равен ____;

е) десятиугольника равен ____;

ж) двенадцатиугольника равен ____________________________________;

з) пятнадцатиугольника равен ____________________________________.

44.3. Постройте паркет из правильных: а) треугольников; б) четырёхугольников; в) шестиугольников.

а)

б)

в)

44.4. Сделайте правильную раскраску (соседние многоугольники, т.е. имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета) приведённых на рисунке 52 паркетов. Какое наименьшее число цветов нужно взять для этого?

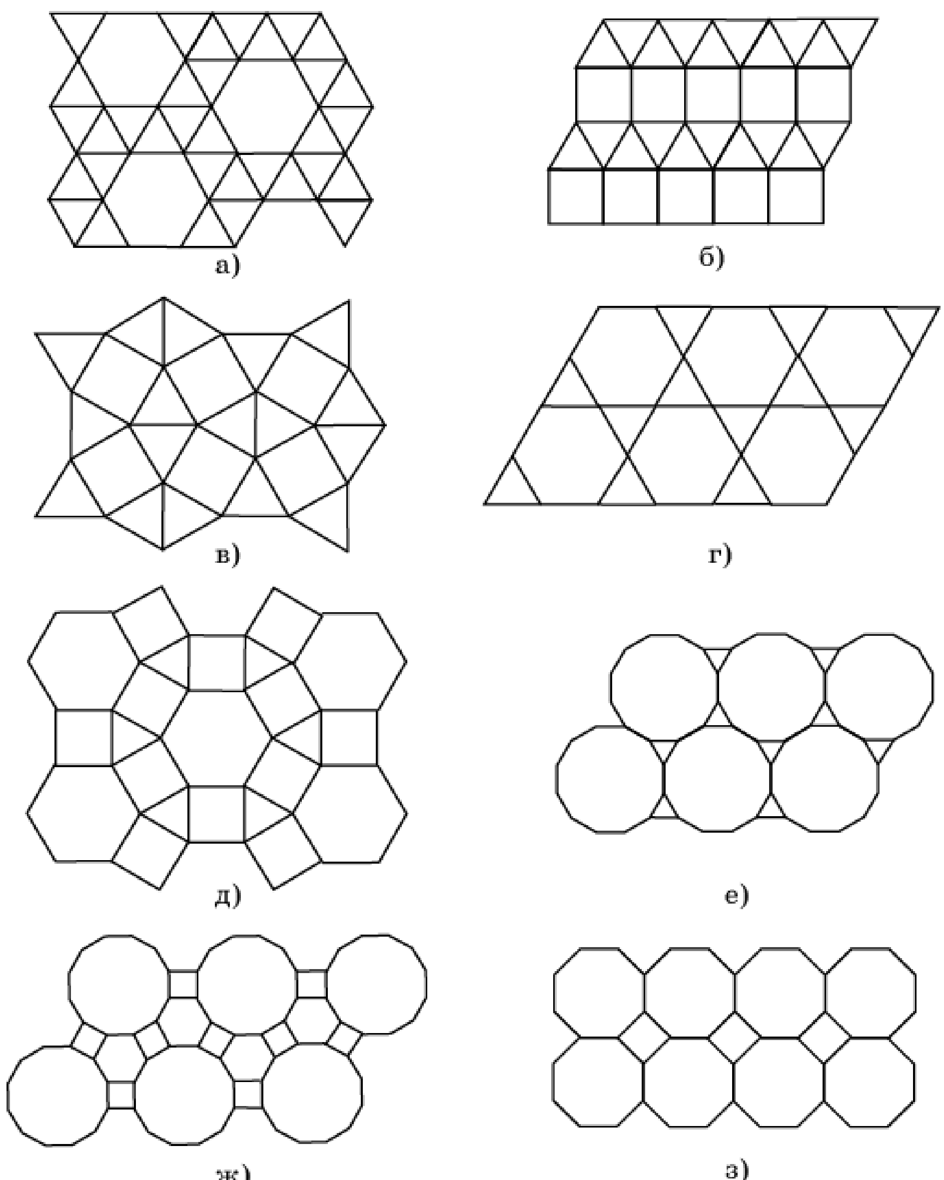


Рис. 52

Ответ. а) _______; б) _______; в) _______; г) _______; д)_______; е) _______; ж) _______; з) _______.

44.5. Постройте паркет из: а) прямоугольного; б) тупоугольного треугольника. Почему плоскость можно заполнить любым треугольником?

Ответ. ____

____

____.

44.6. Постройте паркет из параллелограмма. Сделайте его правильную раскраску. Сколько цветов потребовалось?

Ответ. ____.

44.7. Постройте паркет из равнобедренной трапеции. Сделайте его правильную раскраску. Сколько цветов потребовалось?

Ответ. ____.

44.8. Постройте паркет из невыпуклого четырёхугольника. Сделайте его правильную раскраску. Сколько цветов потребовалось?

Ответ. ____.

44.9. Постройте паркет из греческого креста. Сделайте его правильную раскраску. Сколько цветов потребовалось?

Ответ. ____.

44.8. Придумайте и постройте паркет из неправильного шестиугольника.

45. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

45.1. Закончите предложения.

1) Два треугольника называются подобными, если ____________
____
____.

2) Коэффициентом пропорциональности называется __________
____
____.

3) Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны, это обозначается следующим образом ____.

45.2. Приведите примеры фигур, имеющих одинаковую форму.

Ответ. ____
____
____.

45.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первый признак подобия треугольников.

Формулировка. ____
____.

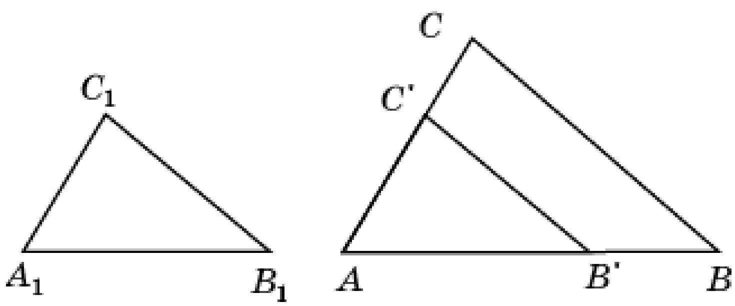


Рис. 53

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$

$\angle A$=_____; $\angle B$=_____.

Доказать: ___________ .

Доказательство. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A$ =____ и $\angle B$=_____., то $\angle C$=_____. Докажем, что $\frac{AB}{A_1B_1}$=______. Отложим на AB отрезок AB', равный ______, и проведем прямую $B'C'$, параллельную ______. Треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ ___________ (по ____). По теореме о пропорциональных отрезках имеет место равенство $\frac{AB}{AB'}$=_________ и, следовательно, имеем равенство $\frac{AB}{A_1B_1}$=________. Аналогичным образом доказывается, что имеет место равенство $\frac{AC}{A_1C_1}$=_________. Следовательно, треугольники ____________________________________.

45.4. Треугольники ABC (рис. 54) и $A_1B_1C_1$ подобны. Найдите неизвестные стороны треугольника $A_1B_1C_1$, если коэффициент подобия равен: а) 4; б) $\frac{1}{2}$.

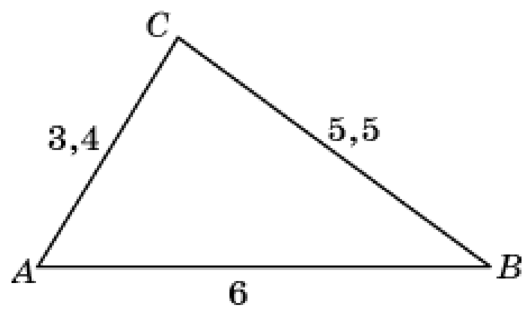


Рис. 54

Решение. а) ____

____;

б) ____

____.

45.5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (рис. 55). Найдите их неизвестные стороны.

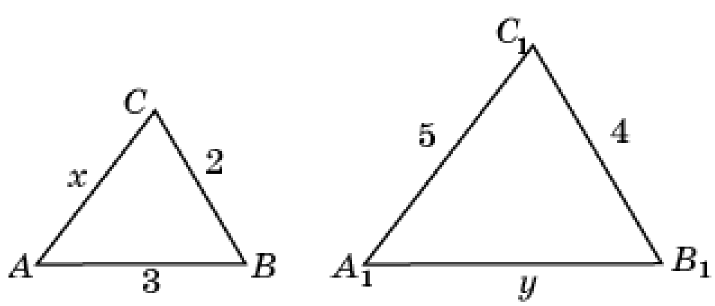


Рис. 55

Решение. ____

____

____

____.

45.6. Периметры двух подобных треугольников относятся как 5:7. Найдите стороны второго треугольника, если стороны первого треугольника равны 14 см, 21 см и 30 см.

Решение. ____

____

____.

45.7. Укажите верные утверждения.

Стороны двух подобных треугольников могут иметь следующие длины стороны:

1) 4 см, 5 см, 2 см и 3 см, 4 см, 1 см;

2) 1,2 м, 1,6 м, 2,4 м и 3 см, 4 см, 6 см;

3) 4 м, 40 м, 40 м и 4 см, 40 см, 40 см;

4) $\frac{1}{2}$ м, $\frac{2}{5}$ м, $\frac{3}{10}$ м и 3 см, 4 см, 5 см.

Ответ. ____.

45.8. Треугольник имеет углы $80°$ и $30°$. Найдите: а) наибольший; б) наименьший угол подобного ему треугольника.

Ответ. ____

____.

45.9. На рисунке 56 укажите подобные треугольники, где A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC .

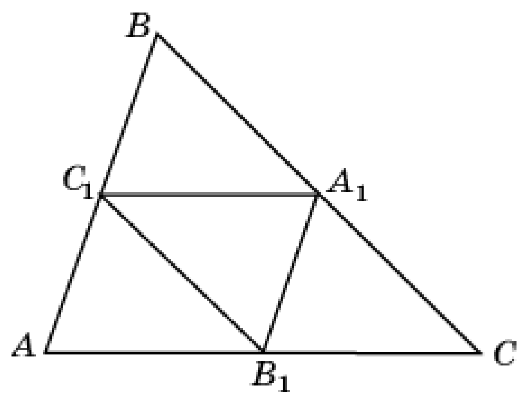


Рис. 56

Ответ. ____

____

____.

45.10. На рисунке 57 укажите подобные треугольники, где $BC||AD$.

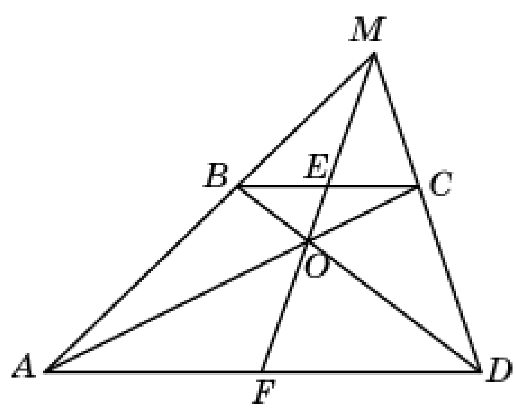


Рис. 57

Ответ. ____

____

____.

45.11. Сформулируйте первый признак подобия треугольников для некоторых их частных видов, заполнив пропуски.

1) Два прямоугольных треугольника подобны, если ____________
____.

2_1) Два равнобедренных треугольника подобны, если __________
____.

2_2) Два равнобедренных треугольника подобны, если __________
____.

3) Два равносторонних треугольника подобны _____________________
____.

45.12. На рисунке 58 найдите подобные треугольники.

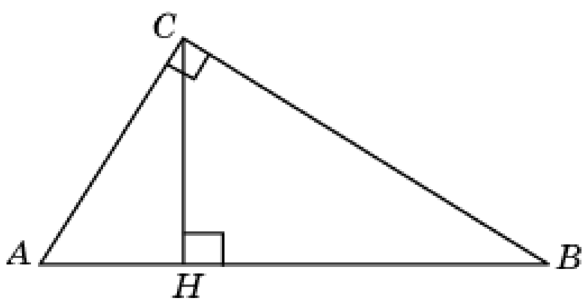


Рис. 58

Ответ. ____
____
____.

45.13. Укажите: а) верные; б) неверные утверждения.

1) Два равнобедренных треугольника подобны, если равны их углы при вершинах, противолежащих основаниям.

2) Два равнобедренных треугольника подобны, если они имеют по одному равному углу.

3) Все равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.

4) Два равнобедренных тупоугольных треугольника подобны.

5) Два равнобедренных треугольника подобны, если они имеют по равному углу при основаниях.

6) Все равносторонние треугольники подобны.

7) Два равнобедренных тупоугольных треугольника подобны, если они имеют по равному острому углу.

8) Два треугольника, стороны которых соответственно параллельны, подобны.

Ответ. а) ____;
б) ____.

45.14. Можно ли считать: а) равные треугольники подобными; б) подобные треугольники равными?

Ответ. а) ____;
б) ____.

45.15. На рисунке 59 найдите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

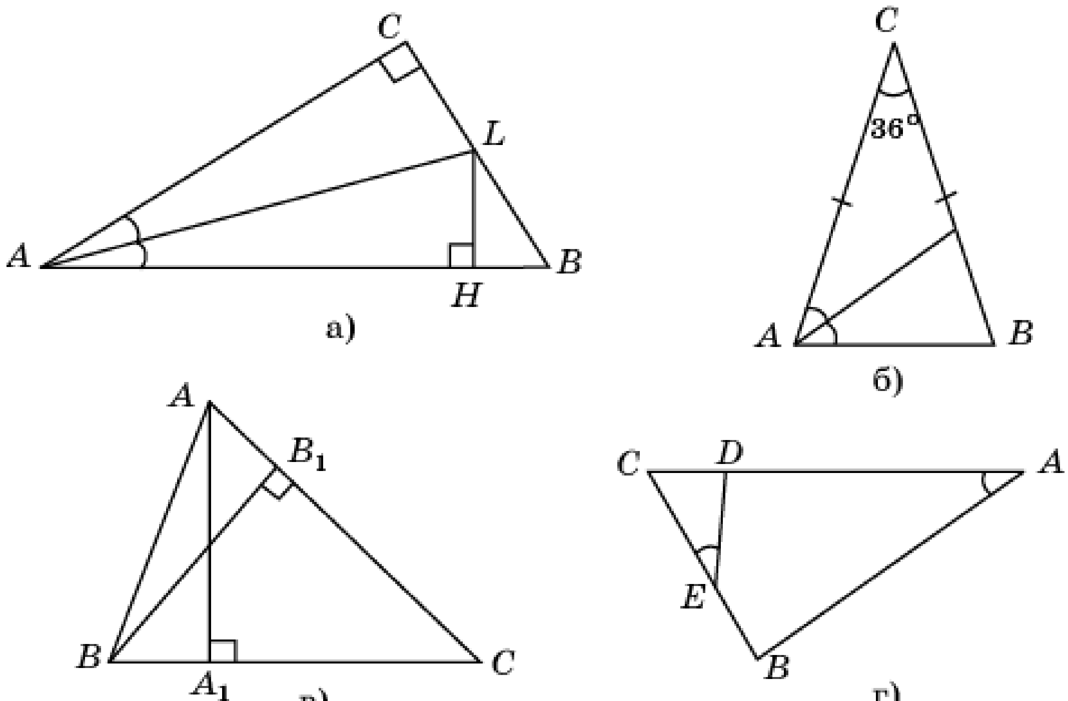


Рис. 59

Решение.

45.16. Постройте два подобных треугольника и укажите их коэффициент подобия.

Ответ. ______________________________________.

45.17. На рисунке 60 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

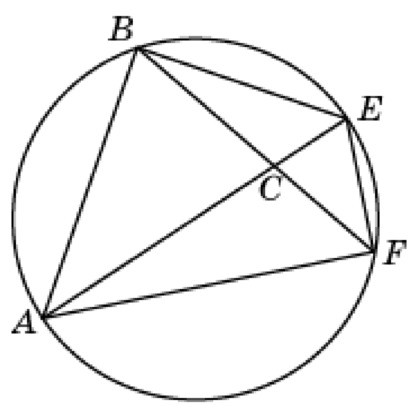


Рис. 60

Решение. ______________________________________

____

____

____

____

______________________________________.

45.18. Составьте и решите задачу по рисунку 61.

Задача. ____

____

____.

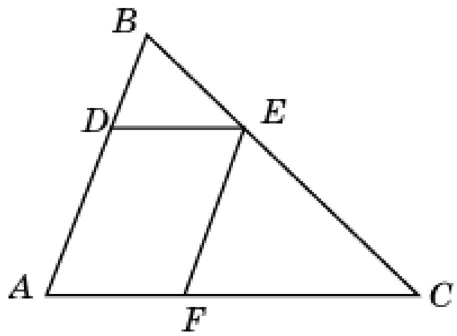


Рис. 61

Решение. ____

____

____.

45.19. Составьте и решите задачу по рисунку 62.

Задача. ____

____

____.

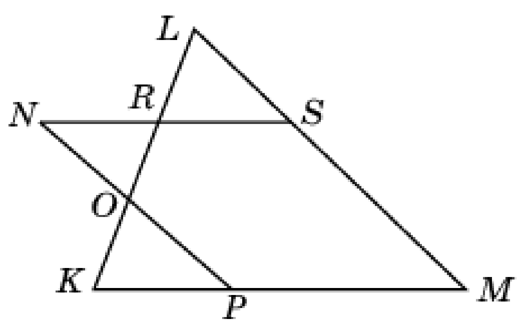


Рис. 62

Решение. ____

____

____.

45.20. На рисунке 63 изображены две касающиеся внешним образом окружности. Через точку касания M проведена секущая AB. Найдите радиусы окружностей, если AM=9, BM=6, а расстояние между центрами окружностей равно 8.

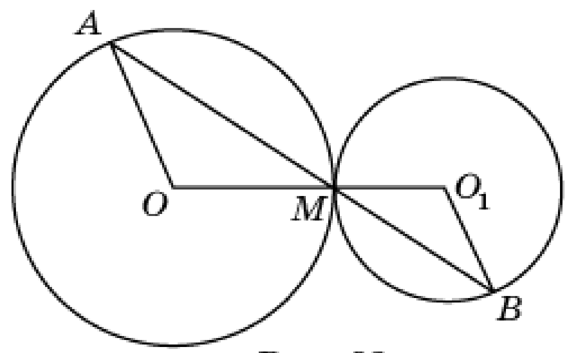


Рис. 63

Дано: ____

____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____

____

____

____

____

____

____.

46. ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

46.1. Сформулируqте и докажите, заполняя пропуски, второй признак подобия треугольников.

Формулировка. ____

____.

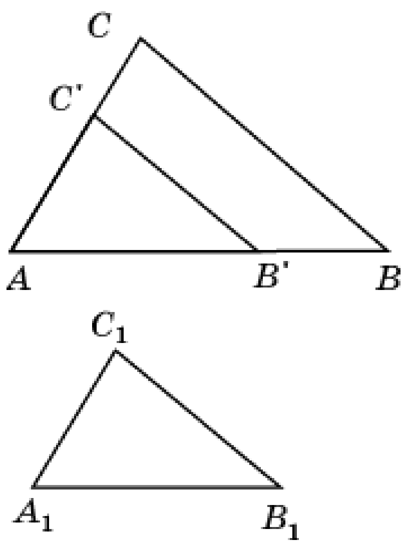


Рис. 64

Дано: ΔABC , $\Delta A_1B_1C_1$;

$\angle A$=________; ________.

Доказать: __________________________ .

Доказательство. Отложим на AB отрезок AB', равный A_1B_1, и проведем прямую $B'C'$, параллельную BC. Треугольники ABC и $AB'C'$ подобны (по ____), откуда имеет место равенство $\frac{AB}{AB'}$=_____. Из этого равенства и равенства $AB'=A_1B_1$ следует равенство AC'=______. Следовательно, треугольники $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ равны (по ___________________________________). Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ____.

46.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, третий признак подобия треугольников.

Формулировка. ____

____.

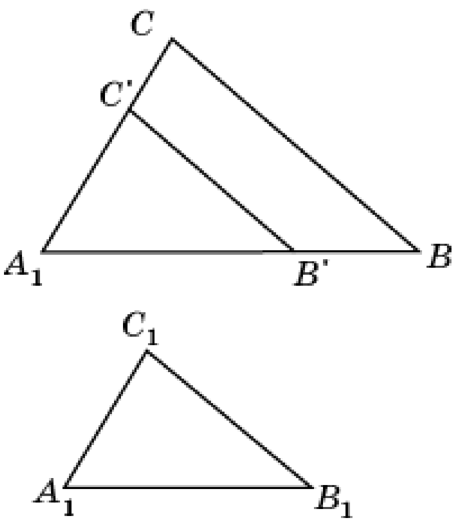


Рис. 65

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$;

____________; _________________;

_______________________________.

Доказать: _____________________ .

Доказательство. На стороне AB отложим отрезок AB', равный _______, и проведем прямую $B'C'$, параллельную BC. Из подобия треугольников ABC и _____________ следуют равенства

____.

Из равенства $A_1B_1=AB'$ следуют равенства

____.

Значит, имеем равенства $A_1C_1=$_____, $B_1C_1=$_____. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $AB'C'$ равны (по____) и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ________________________.

46.3. Сформулируйте второй признак подобия треугольников для некоторых их частных видов, заполнив пропуски.

1) Два прямоугольных треугольника подобны, если ____________
____.

2) Два равнобедренных треугольника подобны, если __________
____.

46.4. Сформулируйте третий признак подобия треугольников для некоторых их частных видов, заполнив пропуски.

1) Два равнобедренных треугольника подобны, если __________
____.

2) Два равнобедренных прямоугольных треугольника подобны _____

____.

46.5. Стороны треугольника равны 6, 10 и 15. Найдите стороны подобного ему треугольника, если его: а) наименьшая; б) наибольшая сторона равна 30.

Ответ. а) ____
____
____
____;
б) ____
____
____
____.

46.6. На отрезке AB (рис. 66) постройте подобные, но неравные треугольники.

Рис. 66

Решение. ____

____

____

____.

46.7. Даны два подобных треугольника, у которых сторона одного и высота, опущенная на неё, в 2 раза меньше соответственно стороны и опущенной на неё высоты другого треугольника. Подобны ли данные треугольники? Сделайте поясняющий рисунок.

Ответ. ____

____.

46.8. Через вершину *A* треугольника *ABC* (рис. 67) проведите прямую таким образом, чтобы она отсекала треугольник, подобный данному.

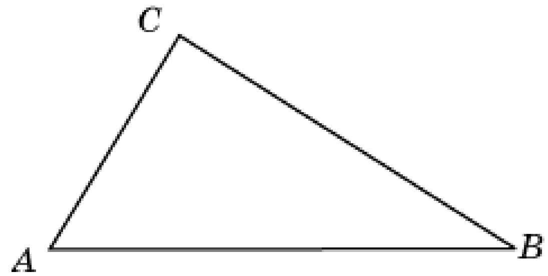


Рис. 67

Решение. ____

____

____

____.

46.9. На стороне разностороннего треугольника взята точка (рис. 68). Сколько прямых можно провести через неё, чтобы соответствующий отсечённый треугольник был подобен данному треугольнику?

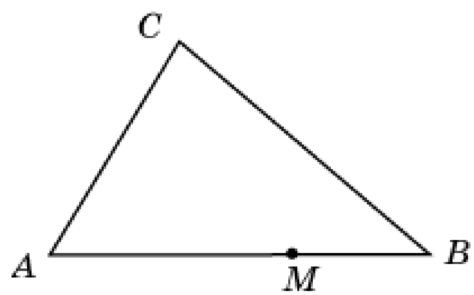


Рис. 68

Ответ. ____

____.

46.10. Могут ли быть подобными неравные прямоугольные треугольники, у которых равны гипотенузы?

Ответ. ____

____.

46.11. Можно ли равные фигуры считать подобными?

Ответ. ____

____.

46.12. Через вершины треугольника (рис. 69) проведите вне его прямые, перпендикулярные последовательно к каждой его стороне. При пересечении этих прямых получится треугольник. Будет ли он подобен данному треугольнику?

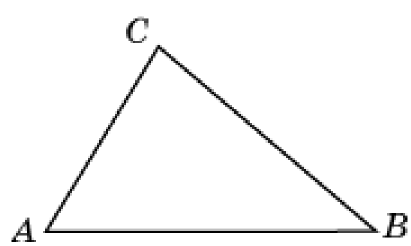


Рис. 69

Ответ. ____

____.

46.13. Дан равнобедренный треугольник (рис. 70). Проведите биссектрисы его внешних углов. При пересечении этих прямых получится треугольник. Будет ли он подобен данному треугольнику?

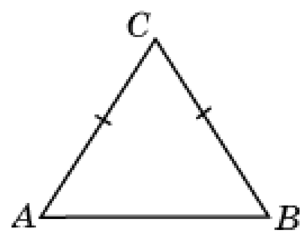


Рис. 70

Ответ. ____

____.

46.14. Достройте данный треугольник *ABC* (рис. 71) до треугольника, подобного ему, не проводя прямых, параллельных его сторонам.

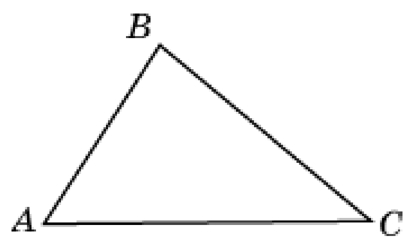


Рис. 71

Построение. На продолжениях сторон *AB* и *AC* возьмём точки соответственно *K* и *L* таким образом, чтобы $\angle AKL$=______. _______

____

____

____.

46.15. На рисунке 72 найдите x, если $MN||EF$.

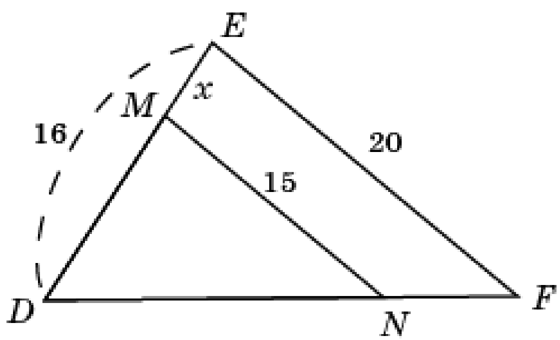


Рис. 72

Дано: ______________

____

____________________.

Найти:______________.

Решение. ____

____

____

____

____.

46.16. Стороны одного подобного треугольника равны 8, 16 и 20, периметр второго треугольника равен 132. Найдите стороны второго треугольника.

Ответ. ____

____

____

____

____.

46.17. Найдите на рисунке 73 пары подобных треугольников.

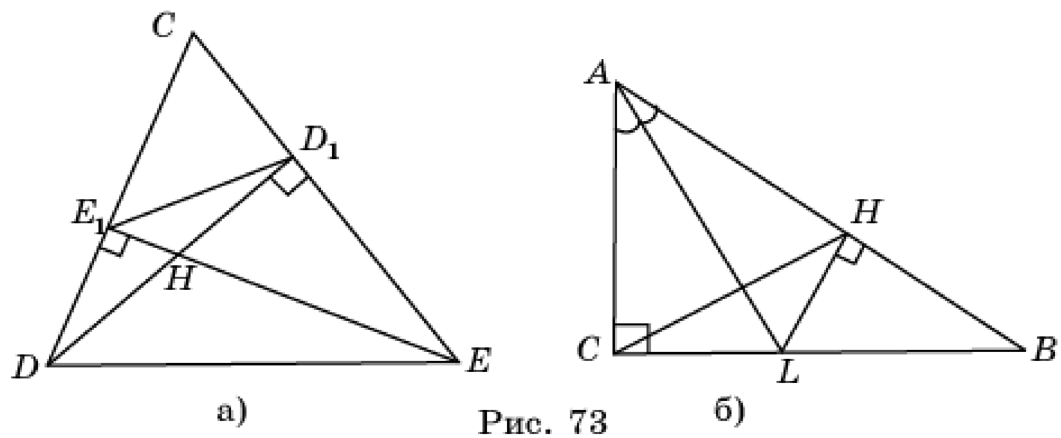


Рис. 73

Ответ. а) ____;

б) ____

____

46.18. Периметр одного подобного треугольника составляет $\frac{5}{7}$ периметра другого: а) разность; б) сумма двух соответствующих их сторон равна 84 см. Найдите эти стороны.

Ответ. а)____

____

____;

б)____

____

____.

47. ПОДОБИЕ ФИГУР. ГОМОТЕТИЯ

47.1. Закончите предложения.

1) Подобием называется преобразование плоскости, при котором

____

_ ____.

2) Коэффициентом подобия называется ______________________

____.

3) Подобие является движением, если ______________________

____.

4) Две фигуры называются подобными, если _________________

____.

47.2. Изобразите несколько пар подобных фигур.

47.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первое свойство подобия.

Формулировка. ____
____.

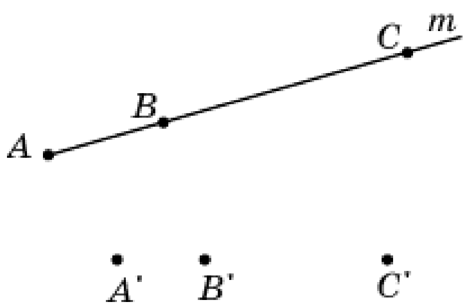


Рис. 74

Дано: Подобие с коэффициентом k;

$A \to A'$; $B \to B'$; $C \to C'$;

$A \in m$; $B \in m$; $C \in$____

Доказать: ____________________ .

Доказательство. Поскольку точка B принадлежит отрезку ________, то $AB+BC=$_________. Подобие переводит эти точки соответственно в точки A', ______, _______. Так как при подобии расстояния между точками ____________________________________
____, то для точек A', B', C' будет иметь место равенство $A'B'+$__________$=$___________. Следовательно, точка B' будет принадлежать отрезку ____________. Из этого следует, что подобие переводит отрезки в _____________, лучи в ____________ и прямые в
____.

47.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, второе свойство подобия.

Формулировка. ____

____.

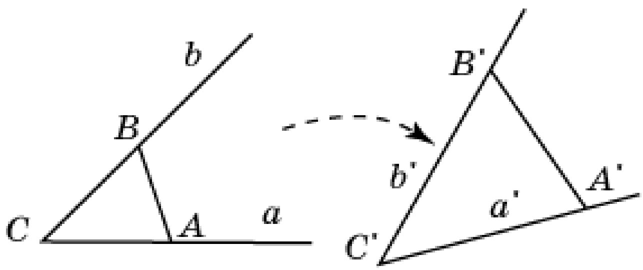


Рис. 75

Дано: Подобие с коэффициентом k; $C \to C'$; $a \to a'$; $b \to b'$.

Доказать: ______________________ .

Доказательство. Возьмём на сторонах a, b точки A, B, и пусть A', B' – ____на сторонах соответственно a', ________. Треугольники ABC и ____________ подобны (по ____) и, следовательно, имеют соответственно равные _________________. В частности,____.

47.5. Какое преобразование плоскости называется гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k?

Ответ. ____

____

____

____.

47.6. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о гомотетии.

Формулировка. ____

____.

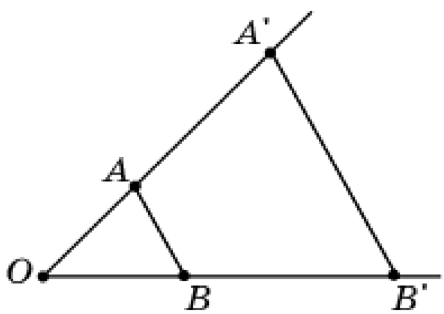


Рис. 76

Дано: Гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k;

$A \to A'$; $B \to B'$.

Доказать: __________________

____________________________.

Доказательство. Рассмотрим треугольники AOB и ____________, они_______________________________(по ___________________________ ____), _____ следовательно, $A'B'$=____________________, т.е. гомотетия является ____

____.

47.7. Можно ли при помощи преобразования подобия перевести угол 90° в угол 180°?

Ответ. ____

____.

47.8. Постройте фигуру, в которую перейдёт данная окружность с центром в точке O (рис. 77) при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом, равным: а) 2; б) $\frac{1}{2}$.

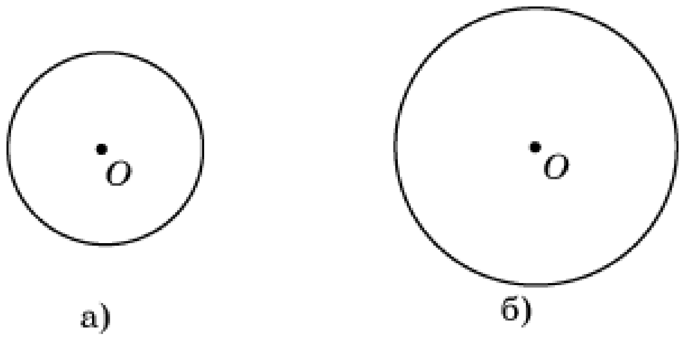


Рис. 77

47.9. Постройте фигуру, в которую перейдёт данный треугольник ABC (рис. 78) при гомотетии с центром в вершине A и коэффициентом, равным: а) $\frac{1}{3}$; б) 3.

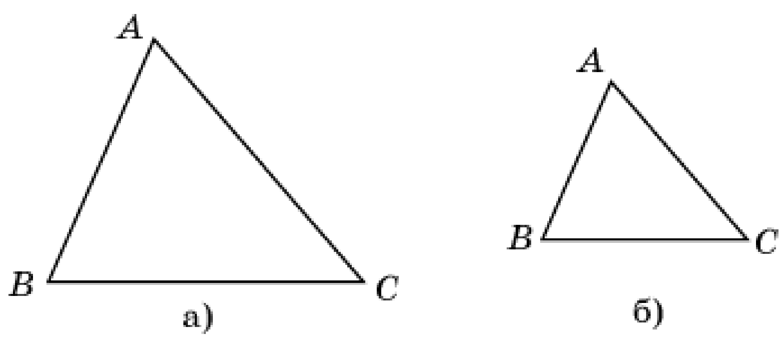


Рис. 78

47.10. Изобразите два подобных: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба. Сделайте вывод.

Ответ. ____

____

____

____.

47.11. Подобны ли два неравных квадрата? Сделайте вывод.

Ответ. ____

____.

47.12. Постройте два квадрата, коэффициент подобия которых равен: а) $\frac{1}{4}$; б) 2.

47.13. Постройте два ромба, коэффициент подобия которых равен 1,5.

47.14. Изобразите две подобные фигуры, состоящия каждая из окружности и хорды. Сделайте вывод.

Ответ. ____

____.

47.15. Отметьте две точки A и B. Укажите такую точку O, чтобы гомотетия с центром в этой точке переводила точку A на точку B, если: а) k=4; б) $k=\frac{1}{5}$.

47.16. На координатном луче с вершиной в точке O (рис. 79) отмечено несколько точек. Найдите коэффициент гомотетии с центром в точке O, если известно, что точка: а) A переходит в точку C; б) D переходит в точку H; в) G переходит в точку B; г) K переходит в точку E; д) F переходит в точку M; е) I переходит в точку N; ж) J переходит в точку L; з) H переходит в точку B.

Рис. 79

Ответ. а) _______; б) _______; в) _______; г) _______; д) _______; е) _______; ж) _______; з) _______.

47.17. Изобразите правильный шестиугольник и постройте фигуру, в которую он перейдёт при гомотетии с центром в центре шестиугольника и коэффициентом, равным 0,5.

47.18. На рисунке 80 изображены фигура *Ф* и гомотетичная ей фигура $Ф_1$. Изобразите центр гомотетии и найдите её коэффициент, если *Ф*: а) две точки *A* и *B*; б) квадрат *ABCD*; в) прямоугольник *ABCD*; г) окружность с центром в точке *O* и радиусом, равным *R*.

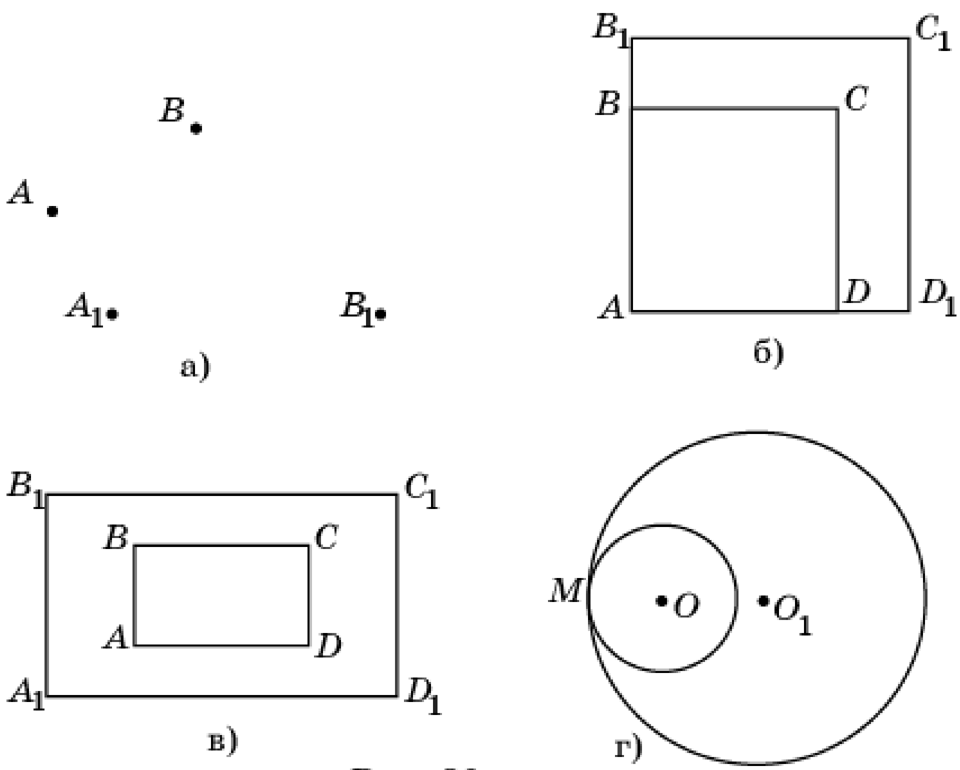


Рис. 80

Ответ. а) ________________________; б) ___________________________;
в) ____________________________________; г) ____________________________.

47.19. Укажите способы задания гомотетии. Проиллюстрируйте их.

Ответ. ____

____

____

____

____

____

____.

48*. ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

48.1. Закончите предложения.

1) Золотым сечением отрезка называется такое его деление, при котором ____

____

____.

2) Золотое сечение отрезка длиной *a* выражается следующим числом ____.

3) Если длина отрезка равна 1, то его большая часть при золотом делении равна приблизительно ______________________________.

4) Золотое сечение обозначается буквой ____________________.

5) В Древней Греции золотое сечение отрезка называлось _____ ____.

6) Термин «золотое сечение» появился в ____________________.

48.2. Разделите данный отрезок (рис. 81) в золотом отношении.

Рис. 81

Построение. ____

____

____

48.3. Для данного отрезка CD постройте отрезок, равный: а) $\frac{1}{2}CD$; б) $\sqrt{5}\,CD$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2}CD$; г) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}CD$.

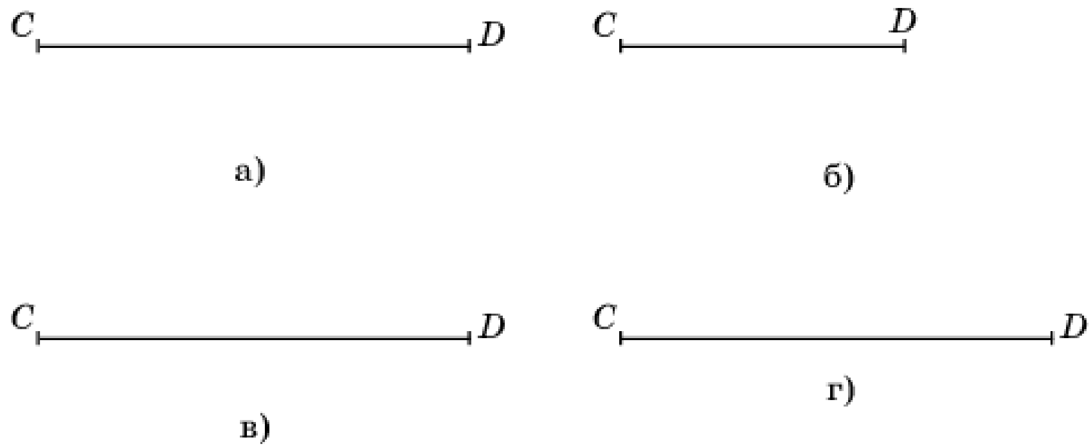


Рис. 82

Построение. а) ____

____;

б) ____

____

____;

в) ____

____

____;

г) ____

____

____.

48.4. Заполните пропуски.

1) Золотым прямоугольником называется ____________________
____
____.

2) Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной ______________, то снова получится ____________
____.

3) Золотым треугольником называется _______________________
____
____.

4) Существует ________ типа золотых треугольников.

48.5. Изобразите два неравных золотых прямоугольника. Будут ли они подобны? Почему?

Ответ. ____
____.

48.6. Изобразите вращающиеся квадраты и соответствующую золотую спираль. Опишите этот процесс.

Решение. ____

____

____

____

____.

48.7. Изобразите: а) остроугольный; б) тупоугольный золотой треугольник. Найдите его углы.

Ответ. а) ____;

б) ____.

48.8. Постройте последовательность вращающихся золотых треугольников и соответствующую золотую спираль. Опишите этот процесс.

Решение. ____
____
____
____

48.9. Сколько треугольников изображено на рисунке 83?

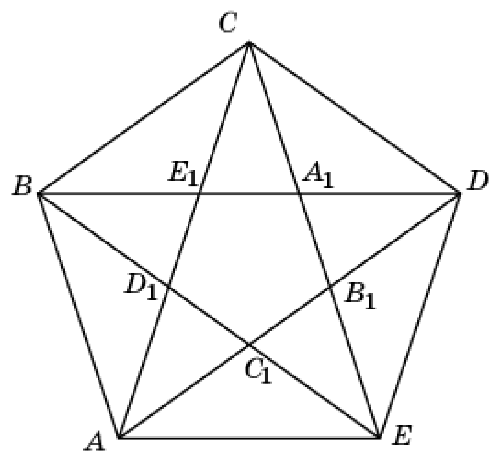


Рис. 83

Ответ. ____.

48.10. Сколько различных типов треугольников изображено на рисунке 83?

Ответ. ____.

48.11. Как называется многоугольник, образованный диагоналями правильного пятиугольника *ABCDE* на рисунке 83?

Ответ. ____.

48.12. Докажите, что на рисунке 83, где *ABCDE* – правильный пятиугольник, все треугольники - золотые.

Дано: *ABCDE* – правильный пятиугольник.

Доказать: а) ΔBE_1C – золотой; б) Δ _________ - золотой;

____

____.

Решение. а) Рассмотрим треугольники типа треугольника BE_1C , его углы равны ____________________________________, значит он является ____;

б) ____

____

____

____

____

____

____

____.

48.13. Докажите, что на рисунке 83, где $ABCDE$ – правильный пятиугольник, точка E_1 делит отрезок; а) BD; б) BA_1 в золотом отношении

Дано: $ABCDE$ – правильный пятиугольник.

Доказать: а)____;

б)____.

Решение. а) Рассмотрим отношение $\frac{BE_1}{E_1D}$, из золотого треугольника CDE_1 следует, что $\frac{E_1C}{E_1D} = \varphi$, значит, $\frac{BE_1}{E_1D} =$__________, так как

____

____;

б) рассмотрим ____

____

____

____.

48.14. Определите вид многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ на рисунке 83, где $ABCDE$ – правильный пятиугольник.

Ответ. ____

____

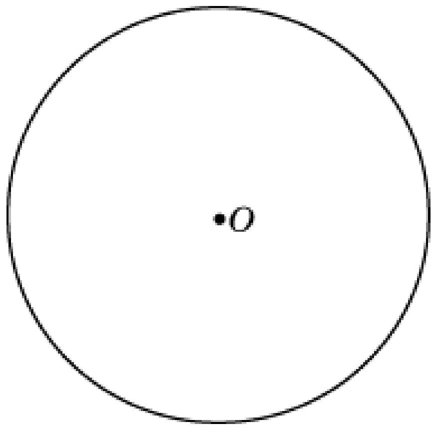
____

____

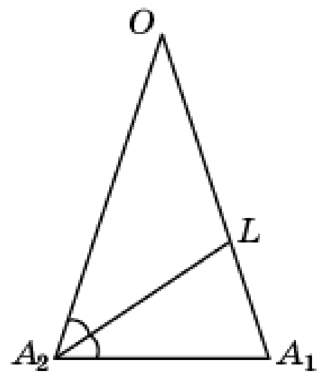
____

____.

48.15. В данную окружность с центром в точке O (рис. 84, а) впишите правильный десятиугольник.



а)



б)

Рис. 84

Построение. Назовём искомый десятиугольник $A_1 \dots A_{10}$, тогда треугольник A_1OA_2 – золотой, так как он равнобедренный (OA_1=____) и $\angle A_1OA_2$= _________ (рис. 84, б). Проведём биссектрису A_2L (рис. 84, б), тогда треугольники A_2LO и A_1LA_2 - золотые, так как их углы равны соответственно____

____

____.

Значит, $\frac{A_2L}{OA_2} = \varphi$ и $\frac{A_1L}{A_2L} = \varphi$, иначе $\frac{OL}{OA_1} = \frac{A_1L}{OL}$, т.е. точка L делит отрезок OA_1 в ____. Таким образом, зная R - радиус данной окружности, можно найти сторону правильного десятиугольника, вписанного в неё, которая будет равна $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Теперь проводим радиус OA_1 (рис. 84, а) и находим точку L, OL – сторона ____.

49. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

49.1. Закончите предложения.

1) Два отрезка называются соизмеримыми, если ______________

____

____.

2) Два отрезка называются несоизмеримыми, если ____________

____

____

____.

49.2. Приведите несколько примеров: а) соизмеримых; б) несоизмеримых отрезков.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

49.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему Пифагора.

Формулировка. ____

____.

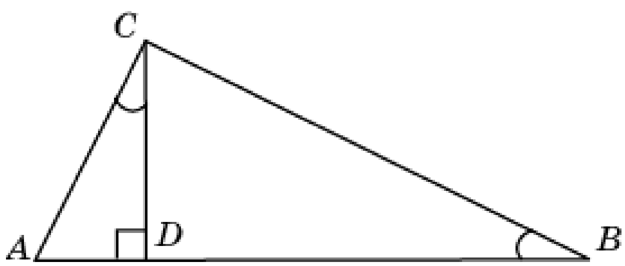


Рис. 85

Дано: ΔABC; $\angle C$=90°.

Доказать: ____________

_____________________.

Доказательство. Проведём в данном треугольнике *ABC* высоту *CD*. Тогда треугольники *ABC* и *ACD* _________________________ (по____).

Следовательно, $\frac{AD}{AC}$=_________. Отсюда $AB \cdot AD$=_______. Аналогично треугольники *ABC* и ____ (по ____).

Следовательно, $\frac{BD}{BC}$=_________. Отсюда $AB{\cdot}BD$=_______. Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD+DB$=_________________, получим _____________________________

____.

49.4.

Дано: ΔABC; $\angle C=90°$; $BC=a$; $AC=b$; $AB=c$.

Запишите: формулу Пифагора.

Ответ. ____.

49.5. Назовите: а) даты жизни Пифагора; б) страну, в которой жил Пифагор.

Ответ. а) ____;
б) ____.

49.6. Постройте квадрат со стороной: а) 1; б) 2. Найдите его диагональ.

Ответ. а) ____;
б) ____.

49.7. Приведите несколько примеров пифагорейских чисел.

Ответ. ____

____.

49.8. Определите сторону четырёхугольника *CDEF* на рисунке 86, если *CE*=6 и *DF*=8.

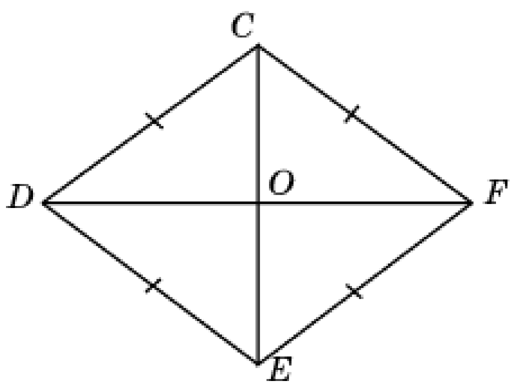


Рис. 86

Дано: ________________

______________________.

Найти: _______________.

Решение. Четырёхугольник *CDEF* является __________________, так как ____, значит, ____

____.

49.9. Найдите гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника, если его катет равен: а) 1; б) 3; в) 10; г) *b*.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

49.10.

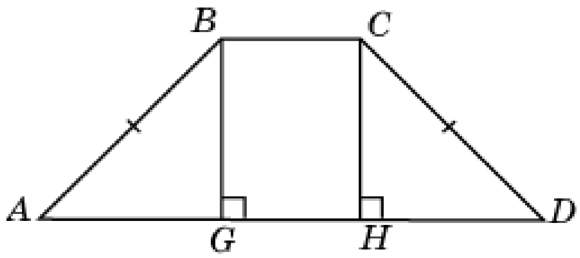


Рис. 87

Дано: $BC \| AD$ (рис. 87);

$AB=CD$; $\angle A=\angle D=45°$;

$BC=a$; $AD=b$.

Найти: AB и CD.

Решение. Четырёхугольник $ABCD$ является __________________, так как ______________________________. Проведём $BG \perp AD$ и $CH \perp AD$. Поскольку $\angle A=\angle D=45°$, то $BG=$ ________ и $CH=$_________, следовательно, $AG=$________=________, отсюда ____.

49.11. По рисунку 88 найдите неизвестные отрезки x и y.

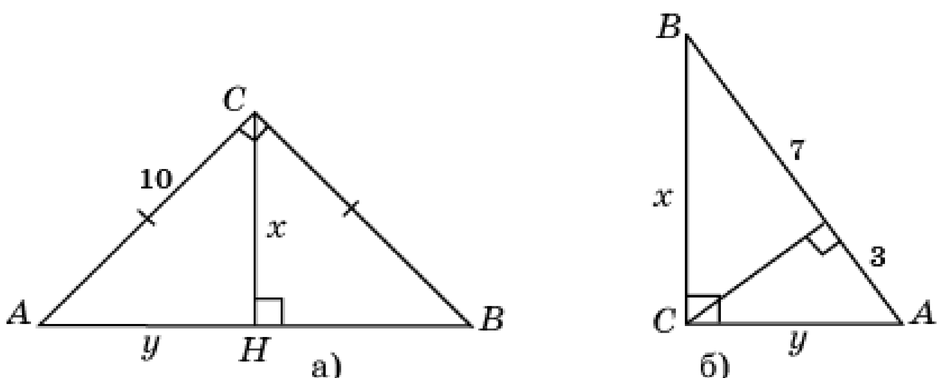


Рис. 88

Ответ. а) ____;

б) ____.

49.12. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$=90°) проведена медиана AM. Найдите гипотенузу данного треугольника, если AM=4 и BM=2.

Дано: ________________

______________________.

Найти: _______________.

Решение. ____

____

____

____.

49.13. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной, равной: а) 1; б) 2; в) 6; г) a.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

49.14. Найдите сторону равностороннего треугольника, если его высота равна: а) 1; б) 6; в) 12; г) h.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

49.15. Если отрезки a, b и c связана соотношением $a^2=bc$, или $a=\sqrt{bc}$, то отрезок a называется средним геометрическим отрезков b и c.

Постройте отрезок a, который является средним геометрическим двух данных отрезков отрезков b и c (рис. 89).

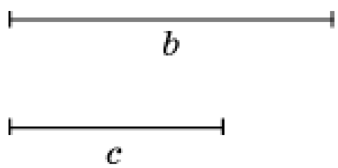


Рис. 89

Построение. Проведём произвольную прямую m и на ней отложим отрезки $AB=b$ и $BC=c$, на отрезке AC, как на диаметре, опишем полуокружность, из точки B восстановим к проведённой прямой перпендикуляр BD, где точка D принадлежит полуокружности; отрезок BD – искомый, так как рассматривая прямоугольный треугольник ADC ($\angle ADC=90°$, потому что ____), получим, что его высота, опущенная из вершины _______________
____
____
____.

49.16. На рисунке 90 представлен второй способ (первый - в предыдущей задаче 49.15) построения отрезка a, который является средним геометрическим двух данных отрезков b и c. Опишите это построение.

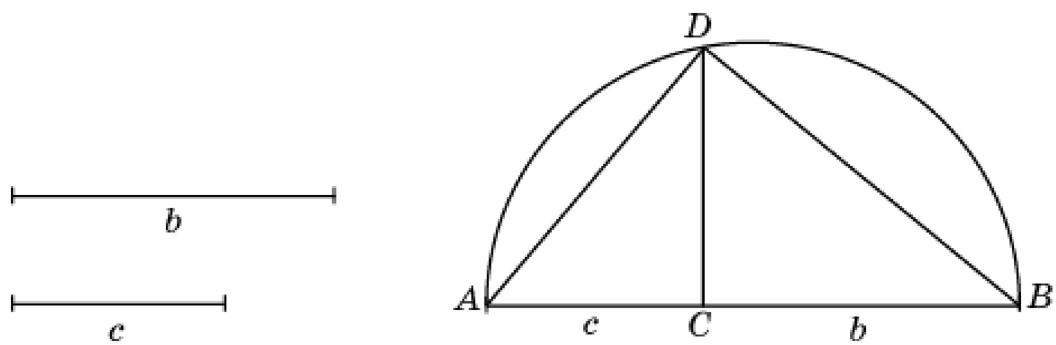


Рис. 90

Построение. ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____.

49.17. Постройте среднее геометрическое двух отрезков, равных 1 и 3. Предложите два способа построения.

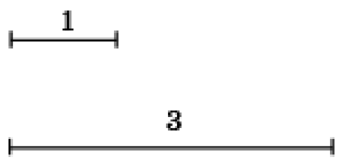


Рис. 91

Способ 1. ____

____

____

____

____.

Способ 2. ____

____

____

____

____.

49.18. Постройте отрезок, равный среднему арифметическому двух данных отрезков a и b, где $a \neq b$ (рис. 92).

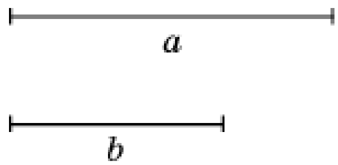


Рис. 92

Построение. ____

____.

49.19. Докажите геометрически, что среднее арифметическое двух данных отрезков a и b, где $a \neq b$ (рис. 92), меньше их среднего геометрического, т.е. $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ $(a \neq b)$.

Решение. ____

____

____

____

____

____.

49.20. В каком случае среднее арифметическое двух данных отрезков a и b будет равно их среднему геометрическому?

Ответ. ____.

49.21. Объедините результаты двух предыдущих задач (49.19 и 49.20) и сформулируйте вывод для двух данных отрезков a и b.

Ответ. ____.

49.22. Постройте отрезок x, если: а) $x=\sqrt{a^2+b^2}$; б) $x=\sqrt{a^2-b^2}$; в) $x=\sqrt{2ab}$, если a и b – данные отрезки (рис. 93).

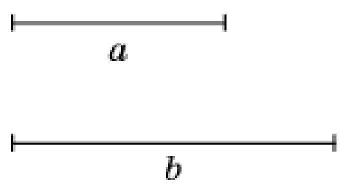


Рис. 93

Построение. ____

____

____

____

____.

50. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

50.1. Закончите предложения.

1) Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется ____

_ ____.

2) Коинусом острого угла прямоугольного треугольника называется ____

____.

3) Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется ____

____.

4) Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется ____

____.

5) Синус, косинус, тангенс и котангенс называются __________ ____.

6) Синус угла α обозначается ________________________________.

7) Косинус угла α обозначается ______________________________.

8) Тангенс угла α обозначается ______________________________.

9) Котангенс угла α обозначается ____________________________.

50.2. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $\angle C=90^\circ$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ (рис. 94). Запишите тригонометрические функции острого угла: а) A; б) B?

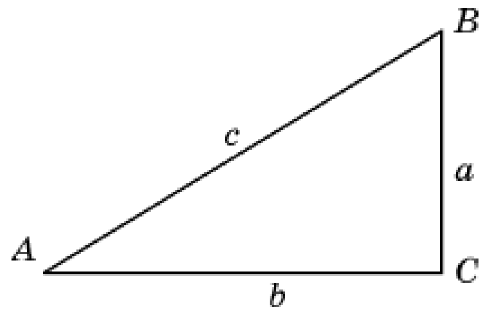


Рис. 94

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

50.3. Заполните пропуски.

Из определения тригонометрических функций следует, что:

1) катет прямоугольного треугольника равен произведению ____;

2) катет прямоугольного треугольника равен произведению ____;

3) катет прямоугольного треугольника равен произведению ____;

4) катет прямоугольного треугольника равен произведению ____.

50.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о тригонометрических функциях острого угла прямоугольного треугольника.

Формулировка. ____
____
____
____
____.

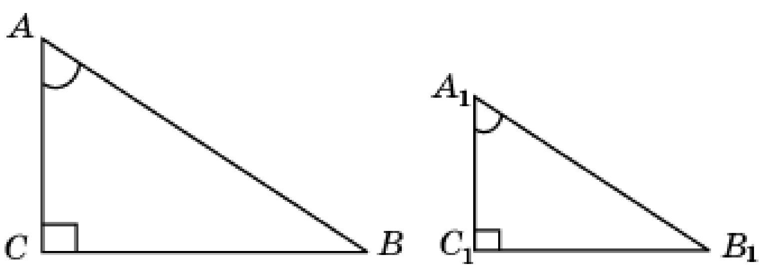


Рис. 95

Дано: ΔABC; $\angle C=90°$; $\Delta A_1B_1C_1$; $\angle C_1=90°$; $\angle A=$_____.

Доказать: ________________________

________________________.

Доказательство. Данные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ __________________ (по____). Поэтому $A_1B_1=$___________, $A_1C_1=$___________, $B_1C_1=$______________. Следовательно, sin $A=$______________=_______________ = sin____________, cos $A=$______________=_________________ = cos ______________________, tg A = _______________=__________________=tg______________________, ctg A =______________=____________ =ctg____________. Таким образом, ____

50.5. Используя рисунок 96, где ABC – равносторонний треугольник со стороной a, найдите значения тригонометрических функций угла в $30°$.

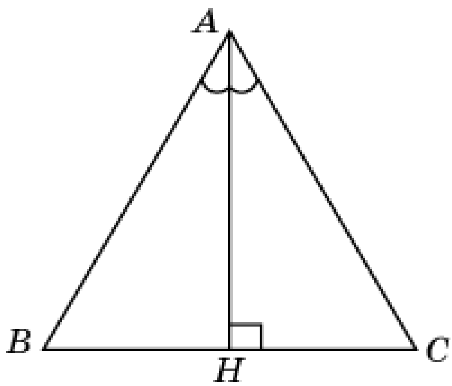


Рис. 96

Решение. ______________________________

____

____

____

____

____.

50.6. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о катете прямоугольного треугольника, лежащего против угла в $30°$.

Формулировка. ____

____.

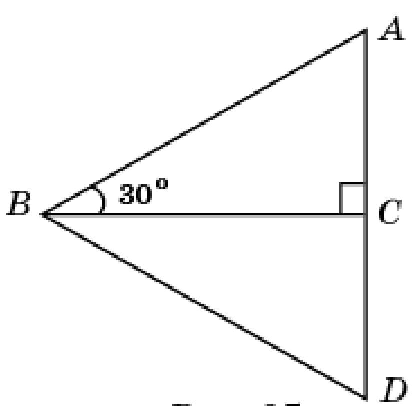


Рис. 97

Дано: ΔABC; $\angle C=90°$; $\angle B=30°$.

Доказать: ______________________________.

Доказательство. ________________________

____

____

____

____

____

50.7. Найдите значения тригонометрических функций угла в $60°$.

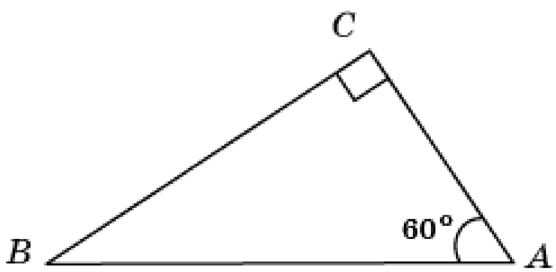


Рис. 98

Дано: ΔABC; $\angle C=90°$;

$\angle A=60°$.

Найти: ______________________________

______________________________.

Решение. Поскольку $\angle A=60°$, $\angle B=$________, так как __________ ________________________. Значит, ____________________________________ ____ ____.

50.8. Найдите значения тригонометрических функций угла в $45°$.

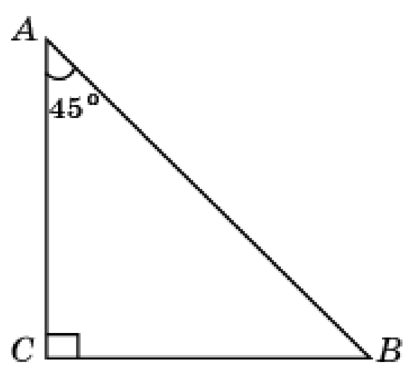


Рис. 99

Дано: ΔABC; $\angle C=90°$;

___________________________________.

Найти: ____________________________

___________________________________.

Решение. ____ ____ ____ ____.

50.9. Заполните следующую таблицу.

Тригонометричекая функция$\rightarrow$ Угол$\downarrow$	Синус	Косинус	Тангенс	Котангенс
30°				
45°				
60°				

50.10. Постройте проямоугольный треугольник *ABC* таким образом, чтобы $\sin A = \frac{1}{3}$.

Построение. ____

____

____

____.

50.11. Постройте проямоугольный треугольник *CDE* таким образом, чтобы $\cos D = \frac{2}{5}$.

Построение. ____

____

____

____.

50.12. Постройте проямоугольный треугольник *EFG* таким образом, чтобы $\operatorname{tg} G = \frac{7}{8}$.

Построение. ____

____

____

____.

50.13. Постройте проямоугольный треугольник *KLM* таким образом, чтобы ctg L=10.

Построение. ____

____

____

____.

50.14. Постройте угол O, синус которого равнялся бы $\frac{3}{5}$.

Построение. ____

____

____

____.

50.15. Постройте угол Q, косинус которого равнялся бы $\frac{4}{5}$.

Построение. ____

____

____

____.

50.16. Расположите в порядке убывания $\sin 30°$, $\sin 60°$, $\sin 45°$.

Ответ. ____

____

____.

50.17. Расположите в порядке убывания $\cos 30°$, $\cos 60°$, $\cos 45°$.

Ответ. ____

____

____.

50.18. Диагонали ромба равны $12\sqrt{3}$ и 12. Найдите его углы.

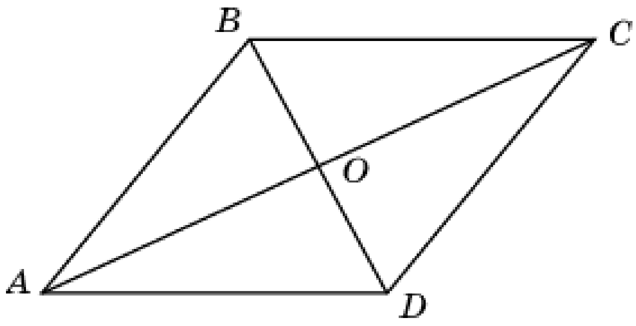


Рис. 100

Дано: ____________________

____

__________________________.

Найти: ___________________.

Решение. ____

____

____

____

____.

50.19. Поставьте пропущенный знак «меньше» или «больше», где φ - острый угол.

а) $\sin\varphi$ _______ $\operatorname{tg}\varphi$;

а) $\sin\varphi$ _______ $\operatorname{ctg}\varphi$;

а) $\cos\varphi$ _______ $\operatorname{tg}\varphi$;

а) $\cos\varphi$ _______ $\operatorname{ctg}\varphi$.

50.20. Почему: а) синус; б) косинус острого угла меньше 1?

Ответ. ____

____

____.

51. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

51.1. Заполните пропуски, где α - острый угол.

1) $\sin(90°-\alpha)=$______________________________;

2) $\cos(90°-\alpha)=$______________________________;

3) $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=$______________________________;

4) $\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=$______________________________.

51.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, основное тригонометрическое тождество.

Формулировка. ______________________________
____
______________________________.

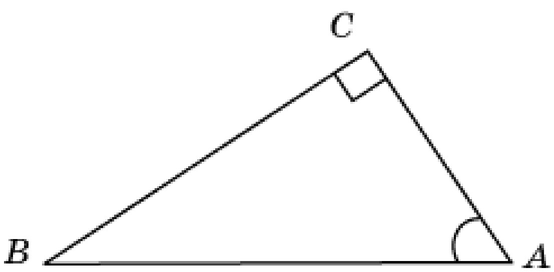


Рис. 101

Дано: ΔABC; $\angle C=90°$.

Доказать: ____________________
____________________.

Доказательство. По определению синуса и косинуса в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) имеем ______________
$\sin^2 A + \cos^2 A =$______________=______________.

По теореме Пифагора BC^2+______________=______________,
следовательно, ______________________________
______________________________.

51.3. Продолжите запись, где β - острый угол:

$\sin\beta = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$; $\cos\beta = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$.

51.4. Заполните пропуски:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, тогда $\cos\alpha =$ ____;

2) $\cos\beta = \frac{2}{7}$, тогда $\sin\beta =$ ____;

3) $\sin\gamma = \frac{2}{3}$, тогда $\mathrm{tg}\,\gamma =$ ____;

4) $\cos\delta = \frac{4}{9}$, тогда $\mathrm{tg}\,\delta =$ ____;

5) $\sin\lambda = \frac{1}{4}$, тогда $\mathrm{ctg}\,\lambda =$ ____;

6) $\cos\mu = \frac{1}{10}$, тогда $\mathrm{ctg}\,\mu =$ ____.

51.5. Выберите верные утверждения.

1) $\cos 30° = \frac{1}{2}$. 2) $\sin 60° = \frac{1}{2}$.

3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$. 4) $\frac{1}{\sin^2\beta} = 1 + \mathrm{ctg}^2\beta$.

5) $\mathrm{tg}^2\,\gamma = \frac{1}{\sin^2\gamma} - 1$. 6) $\sin\delta + \cos\delta = 1$.

7) $\sin\lambda = \frac{1}{4}$ и $\cos\lambda = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 8) $\mathrm{tg}\,\mu = 0{,}01$ и $\mathrm{ctg}\,\mu = 100$.

Ответ. ____.

51.6. Поставьте пропущенный знак сравнения:

а) α ________ β, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin\beta = \frac{1}{3}$;

б) α ________ β, если $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ и $\cos\beta = \frac{3}{7}$;

в) α ________ β, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ и $\mathrm{tg}\,\beta = 1$;

г) α ________ β, если если $\mathrm{ctg}\,\alpha = 5$ и $\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{1}{5}$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г)____.

51.7. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{1 - \sin^2\alpha} =$ ____

____;

б) $\dfrac{tg^2\beta}{1 + tg^2\beta} =$ ____

____;

в) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{1 - \sin^2\alpha} =$ ____

____;

г) $\dfrac{1 + ctg^2\lambda}{ctg^2\lambda} =$ ____

____.

51.8. На рисунке 102 найдите равные углы и докажите их равенство.

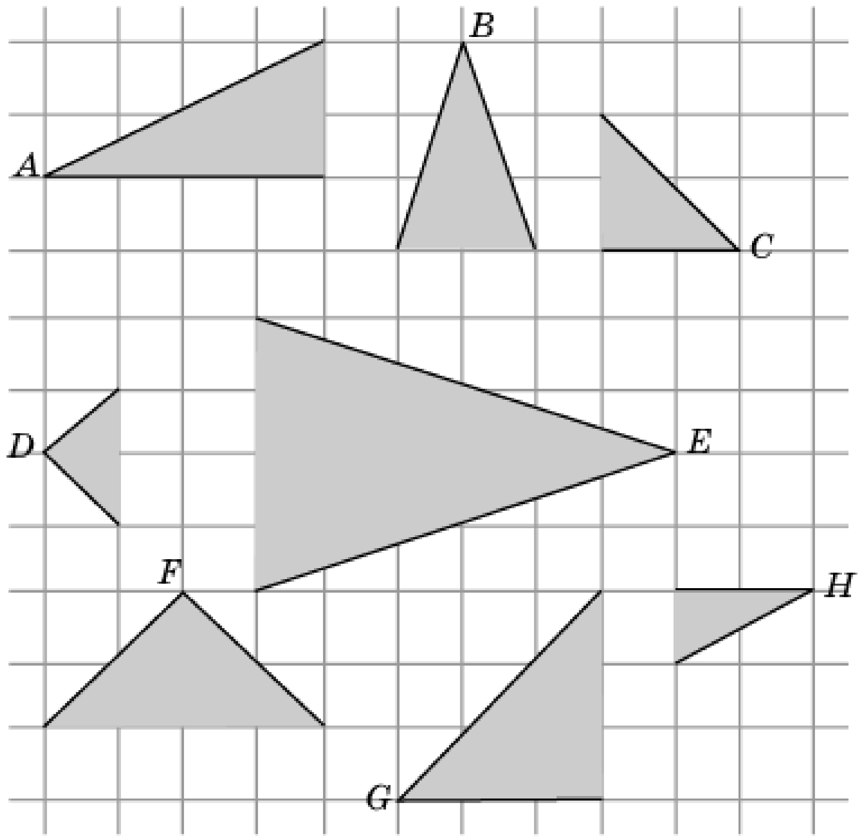


Рис. 102

Решение. ____

____

____

____

____

____.

52. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТУПОГО УГЛА

52.1. Закончите предложения.

1) Угол называется острым, если ______________________________

____.

2) Угол называется прямым, если ______________________________

____.

3) угол называется тупым, если ______________________________

____.

52.2. Заполните пропуски:

а) $\sin 90° =$____;

б) $\sin \alpha = \sin (180° - \alpha)$, если ______________________________

____;

а) $\cos 90° =$____;

б) $\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$, если ______________________________

____.

52..3. Заполните таблицу.

$\alpha \rightarrow$ Тригонометрическая функция $\downarrow$	$0°$	$180°$
$\sin \alpha$		
$\cos \alpha$		
$\operatorname{tg} \alpha$		
$\operatorname{ctg} \alpha$		

52.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, основное тригонометрическое тождество для тупого угла.

Формулировка. ____
____
____.

Дано: ______$<\angle A<$______.

Доказать: __________________________________.

Доказательство. Если $\angle A<90°$, то _________________________.

Если $\angle A = 90°$, то $\sin A=$____ и $\cos A=$______. Следовательно, требуемое тождество ____.

Если ________$<\angle A<$________, то для $\angle B=180°-\angle A$ будут выполняться неравенство _____________$<\angle B<$___________ и равенства $\sin A=$___________________, $\cos A=$_________________. Следовательно, $\sin^2 A+\cos^2 A=$_____________=_____.

52.5. Заполните таблицу.

$\alpha \rightarrow$ Тригонометрическая функция$\downarrow$	$120°$	$135°$	$150°$
$\sin\ \alpha$			
$\cos\ \alpha$			
$\mathrm{tg}\ \alpha$			
$\mathrm{ctg}\ \alpha$			

52.6. Выберите неверные утверждения.

1) $\sin 0° = 0$.

2) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=\sin^2\alpha$.

3) $\cos 70° < \cos 160°$.

4) $\sin 100° > \sin 90°$.

5) $\sin(90°+\beta)=\sin\beta$.

6) $\cos(90°+\beta)=-\sin\beta$.

7) $\mathrm{tg}(90°+\gamma)=\mathrm{tg}\,\gamma$.

8) $\mathrm{ctg}(90°+\gamma)=-\mathrm{ctg}\,\gamma$.

Ответ. ____.

52.7. Поставьте пропущенный знак сравнения:

а) $\sin 30°$ _______ $\cos 60°$;

б) $\cos 60°$ _______ $\sin 120°$;

в) $\mathrm{tg}\,150°$ _______ $\mathrm{tg}\,110°$;

г) $\mathrm{ctg}\,100°$ ________ $\mathrm{ctg}\,50°$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

52.8. Расположите в порядке убывания тангенсы углов:

$$40°,\ 100°,\ 150°.$$

Ответ. ____

____.

52.9. Расположите в порядке убывания котангенсы углов:

$$35°, 80°, 140°.$$

Ответ. ____

____.

52.10. По рисунку 103 найдите: а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$; б) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$, где угол AOB – развёрнутый.

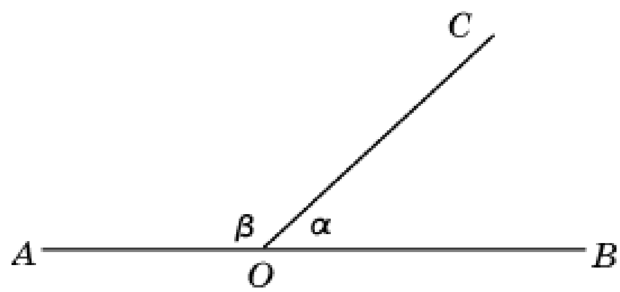


Рис. 103

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

53. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

53.1. Поставьте пропущенный знак сравнения:

а) $\cos\alpha$ ________0, если α - острый угол;

б) $\cos\alpha$ ________0, если α - прямой угол;

в) $\cos\alpha$ ________0, если α - тупой угол.

53.2. Сформулируqте и докажите, заполняя пропуски, теорему косинусов.

Формулировка. ____

____

____.

Дано: ΔABC: а) $\angle C$ – острый; б) $\angle C$ – прямой; в) $\angle C$ – тупой.

Доказать: а) ______________________; б) ______________________; в) ______________________.

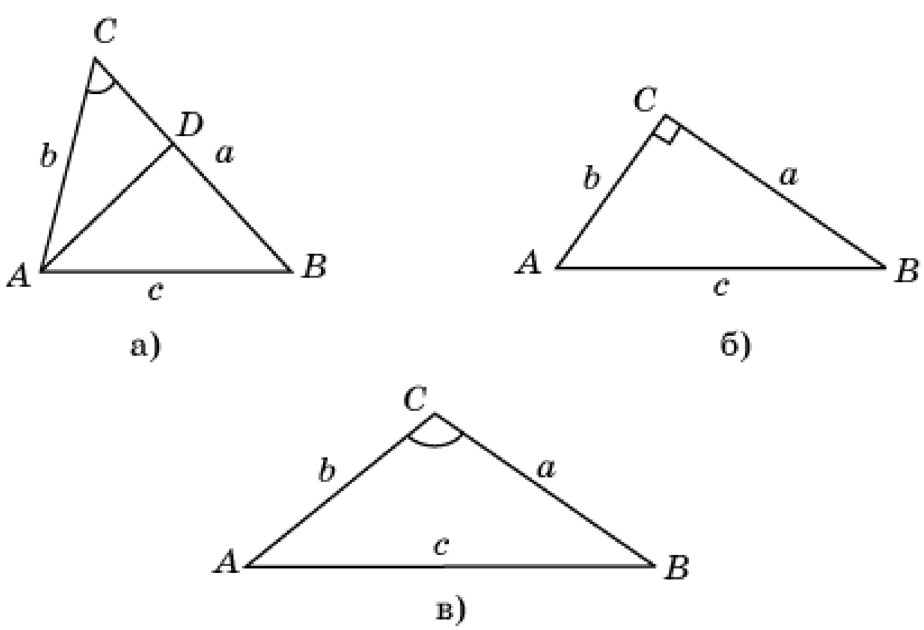


Рис. 104

Доказательство. Обозначим стороны треугольника ABC таким образом: $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.

а) $\angle C$ – острый (рис 104, а). Из вершины A опустим перпендикуляр AD. Тогда $AD=b\sin C$, $CD=$____, $BD=$_________________________________. По теореме Пифагора имеем $c^2=$____ =

= ____=

= _____________________________. Итак, $c^2=$_____________________.

б) $\angle C$ – прямой ((рис 104, б). _____________________________

____

____

____

____

____

____.

в) $\angle C$ – тупой (рис. 104, в). _______________________________

____

____

____

____

____

____

____

____.

53.3. Закончите предложение.

Теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора, так как

____

____

____.

53.4. Используя рисунок 105, заполните пропуски.

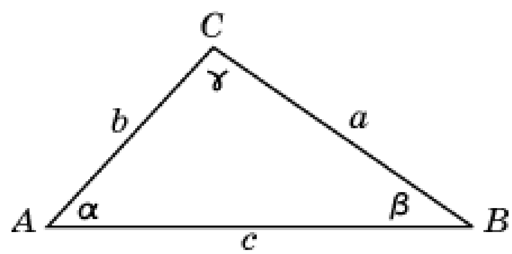


Рис. 105

а) $a^2=$____;

б) $b^2=$____;

в) $c^2=$____.

53.5. Найдите косинусы углов *A*, *B*, *C* треугольника *ABC*, если $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$.

Ответ. ____

____

____

____

____

____

____.

53.6. Не вычисляя углов треугольника, укажите его вид (по углам), если его стороны равны: а) a=4, b=5, c=6; б) a=6, b=6, c=10.

Ответ. а) ____

____

____;

б) ____

____

____.

53.7. Даны стороны параллелограмма m, n и один из его углов α (рис. 106). Найдите диагонали параллелограмма.

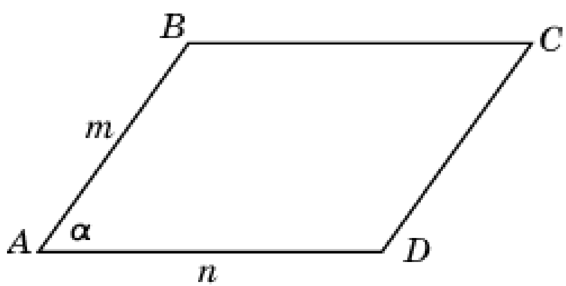


Рис. 106

Дано: $ABCD$ - параллелограмм;

____

Найти:__________________.

Решение. Проведём диагонали __________, __________ и рассмотрим треугольники ___________________________

____

____

____

____

____

____.

53.8.

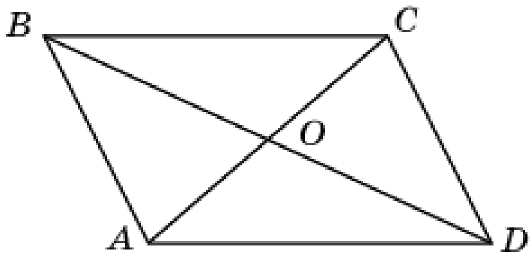


Рис. 107

Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказать:

$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

Решение. Рассмотрим треугольники ABD и ABC, из которых по теореме косинусов найдём

____

____

____

____

53.9.

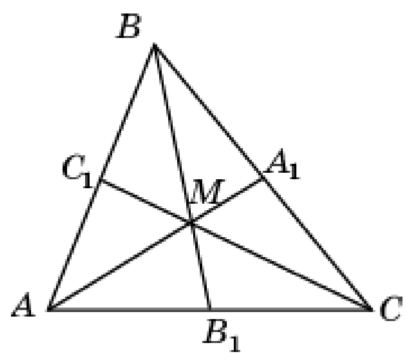


Рис. 108

Дано: ΔABC: $BC=a$; $AC=b$; $AB=c$;

M – центроид треугольника.

Найти: AA_1, BB_1, CC_1.

Решение. M – точка пересечения ____________ ΔABC. ____________________

____

____

____

____

____

____

____.

53.10. Поезд идет со скоростью 12 м/с, и пассажиру из вагона кажется, что капли дождя падают под углом 30^0 к отвесному направлению (рис. 109). Найдите скорость падения капель.

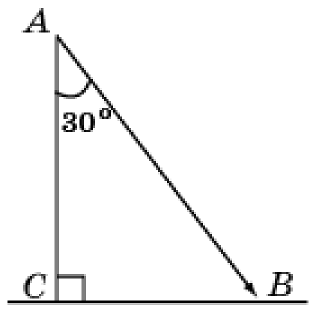


Рис. 109

Решение. ____

____

____

____

____

____

____

54. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

54.1. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему синусов.

Формулировка. ____

____

____.

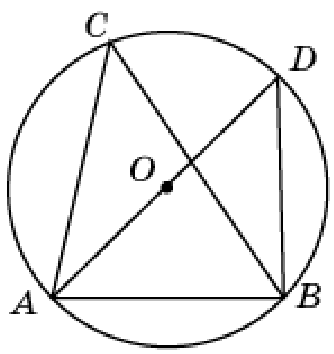


Рис. 110

Дано: ΔABC.

Доказать:______________________________

______________________________.

Доказательство. Опишем около данного треугольника ABC окружность с центром O и радиусом R и рассмотрим треугольник ABD, сторона AD которого проходит __________. Тогда углы C и D опираются на ____, следовательно, они __________. Угол ABD опирается на половину ______________________, значит, равен __________. Таким образом, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} =$______=_________. Аналогично имеют место равенства $\frac{BC}{\sin A} =$_________=______________. Итак, имеем равенства ____, означающие, что стороны треугольника пропорциональны синусам _______________ ____.

54.2.

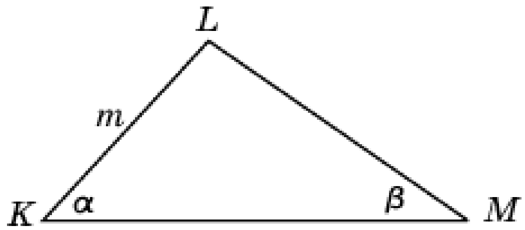


Рис. 111

Дано: ΔKLM; $\angle K = \alpha$;

$\angle M = \beta$; $KL = m$.

Найти: а) KM; б) LM.

Решение. ______________________________

____

____.

54.3. Предложите с помощью теоремы синусов и прибора для измерения углов способ определения расстояния между двумя пунктами (на рисунке 112 они обозначены буквами M и N), которые находятся на разных берегах реки.

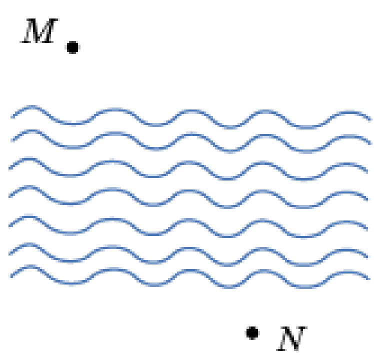


Рис. 112

Решение. ____

____

____

____

____

____.

54.4. В треугольнике ABC (рис. 113) известны радиус R описанной около него окружности и углы $\angle B=\beta$ и $\angle C=\gamma$. Найдите стороны треугольника.

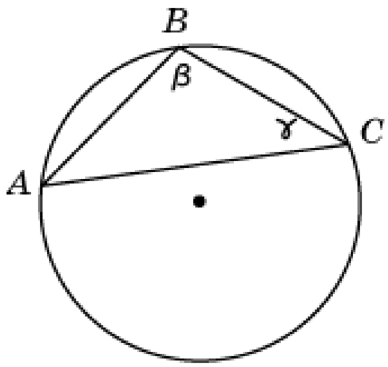


Рис. 113

Дано: ________________________________

Найти: ______________________________.

Решение. Поскольку центр описанной окружности находится вне треугольника, он является __________________________, на рисунке 113 угол B - ___________.

____

____

____.

54.5. В треугольнике ABC (рис. 114) известны радиус r вписанной в него окружности и углы $\angle B=\beta$ и $\angle C=\gamma$. Найдите стороны треугольника.

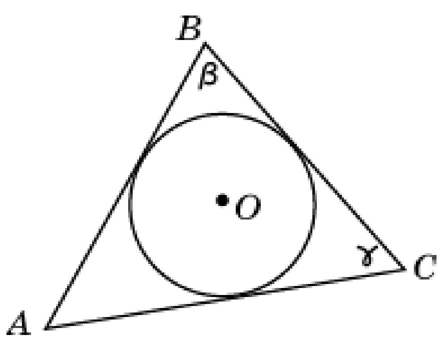


Рис. 114

Дано: __________________________

Найти: _________________________.

Решение. ______________________

____

____

____

____

____

____.

54.6. Сформулируйте и решите задачу по рисунку 115.

Формулировка. ____

____

____.

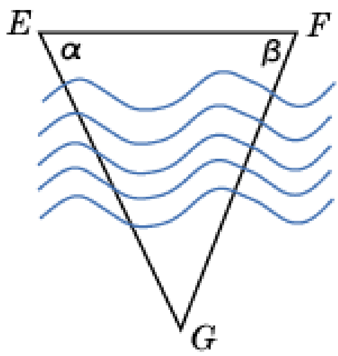


Рис. 115

Дано: ______________________________

Найти: ______________________________.

Решение. ____________________________

____

____

____

____.

54.7. Сформулируйте и решите задачу по рисунку 116.

Формулировка. ____

____

____.

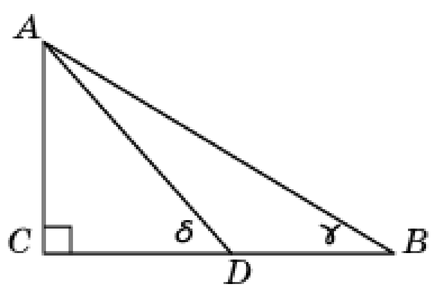


Рис. 116

Дано: ________________

______________________.

Найти: ________________.

Решение. ____

____

____

____

____

____

____.

54.8. Сформулируйте и решите задачу по рисунку 117.

Формулировка. ____

____

____.

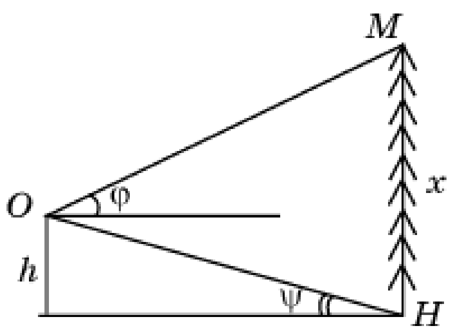


Рис. 117

Дано: ______________________________

______________________________.

Найти: ______________________________.

Решение. ______________________________

____

____

____

____

____

____

____.

54.9. Сформулируйте и решите задачу по рисунку 118.

Формулировка. ____

____

____.

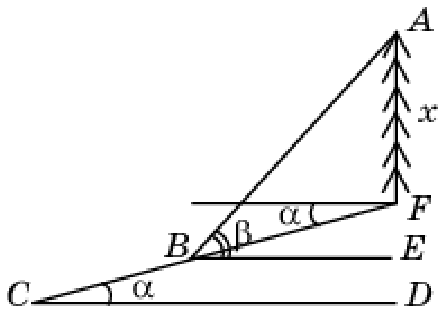


Рис. 118

Дано: ______________________________

______________________________________.

Найти:_________________________________.

Решение. ______________________________

____

____

____

____

54.10. Решите задачу, используя теорему синусов.

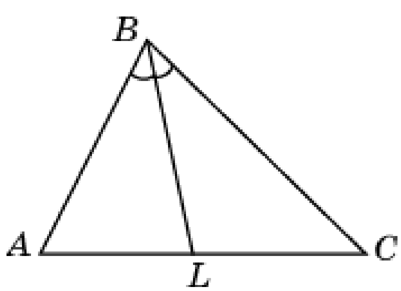


Рис. 119

Дано: ΔABC; $\angle ABL = \angle CBL$.

Доказать: $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AL}{CL}$.

Решение. ______________________________

____

____

____

55. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

55.1. Закончите предложения.

1) Правильным называется многоугольник, у которого ________

____.

2) При увеличении числа сторон в правильном многоугольнике его периметр приближается к ______________________________

____.

3) Длиной окружности считают _______________________

____

____.

55.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о периметре правильного n-угольника, вписанного в окружность.

Формулировка. ____________________________________

____

____.

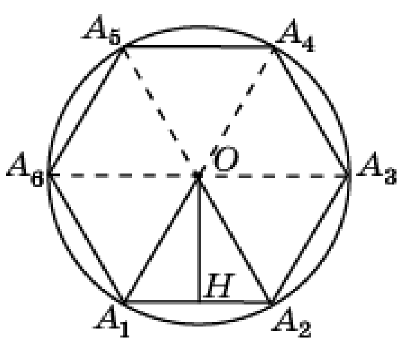


Рис. 120

Дано: $A_1...A_n$ - _________________

____

Доказать:_________________________

______________________________.

Доказательство. Рассмотрим треугольник A_1OA_2. Он является ____________________________ треугольником, OA_1=________=_____. Проведем в нём высоту OH, которая одновременно будет ______________ и ________________. Угол A_1OH равен половине угла __________, равного ___________. Следовательно, A_1H=________ и, значит, A_1A_2=_________________________. Умножая это значение на n, получаем периметр правильного n-угольника P_n =_________________.

55.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, следствие из теоремы о периметре правильного n-угольника, вписанного в окружность.

Формулировка. ____
____
____.

Дано: ____.

Доказать:____.

Доказательство. Пусть P'_n, P''_n – ________________________________
____, вписанных в окружности радиусов __________ и ___________ соответственно. Тогда P'_n=___________________________, P''_n =_______________________________.

Следовательно, $\dfrac{P_n'}{P_n''} = \dfrac{R'}{R''}$.

55.4. Сформулируйте теорему об отношении длин двух окружностей.

Формулировка. ____
____
____.

55.5. Запишите и поясните формулу нахождения длины окружности.

Ответ. ____
____
____.

55.6. Закончите предложения.

1) Равенство $l=\frac{\pi\varphi}{180}$, выражающее длину дуги единичной окружности, устанавливает соответствие между ____________________
____.

2) Величина длины дуги называется ____________________________
____.

3) Единицей радианной меры углов является __________________
____.

4) Угол в один радиан – это угол _____________________________
____.

5) Градусная мера угла в один радиан равна _______________________.

55.7. Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна: а) 2π; б) $\dfrac{\pi}{2}$; в) $\dfrac{\pi}{6}$; г) $\dfrac{3\pi}{5}$; д) $\dfrac{4\pi}{3}$; е) $\dfrac{7\pi}{12}$.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________;

д) ______________________________;

е) ______________________________.

55.8. Найдите радианную меру угла, если его градусная мера равна: а) $90°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $150°$; д) $24°$; е) $270°$.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________;

д) ______________________________;

е) ______________________________.

55.9. Найдите длину окружности, если её диаметр равен D. Запишите соответствующую формулу.

Ответ. ______________________________

______________________________.

55.10. Даны две окружности, радиусы которых равны 1 и 2 (рис. 121). Постройте окружность, длина которой равна: а) сумме; б) разности длин данных окружностей.

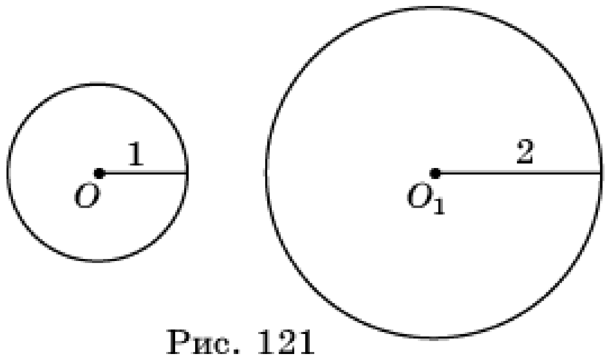


Рис. 121

Построение. а) ____
____
____
____;

б) ____
____
____
____.

55.11. Даны две концентрические окружности с радиусами 8 и 4 (рис. 122). Постройте концентрическую им окружность, длина которой равнялась бы среднему арифметическому длин данных окружностей.

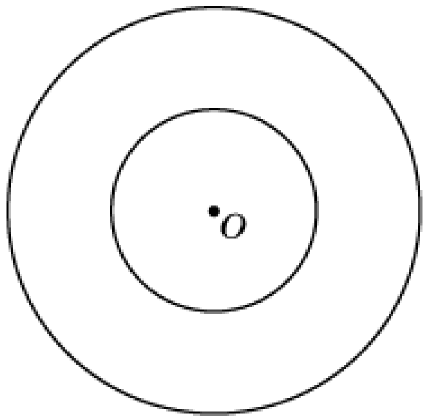


Рис. 122

Построение. Средним арифметическим двух чисел, например, a и b, называется ____.

____

____

____.

55.12. Найдите длину дуги единичной окружности, соответствующую центральному углу в: а) $30°$; б) $100°$; в) $120°$; г) $180°$; д) $252°$; е) $340°$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____;

д) ____;

е) ____.

55.13. Сравните периметры фигур, изображённых на рисунке 123.

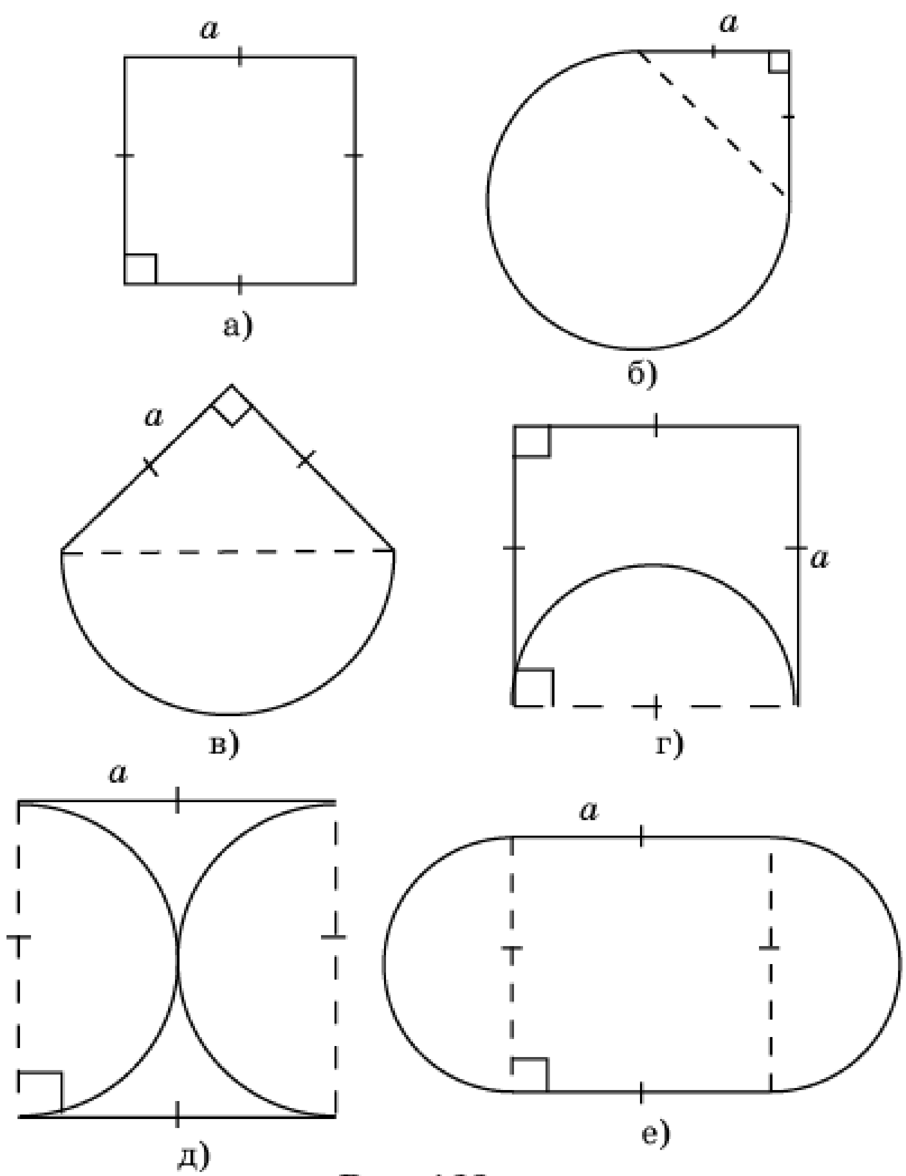


Рис. 123

Ответ. 1) ______________________________;

2) ______________________________;

3) ______________________________;

4) ______________________________;

5) ______________________________;

6) ______________________________.

55.14. Постройте дугу, длина которой равна π ед.

Построение. ____

____

____.

55.15. Изобразите три равные окружности радиуса R таким образом, чтобы их центры принадлежали одной прямой и каждая окружность проходила бы через центр соседней. Обведите границу получившейся фигуры и найдите её длину.

Решение. ____

____

____

____.

55.16. По рисунку 124 составьте и решите задачу.

Формулировка. ____

____

____.

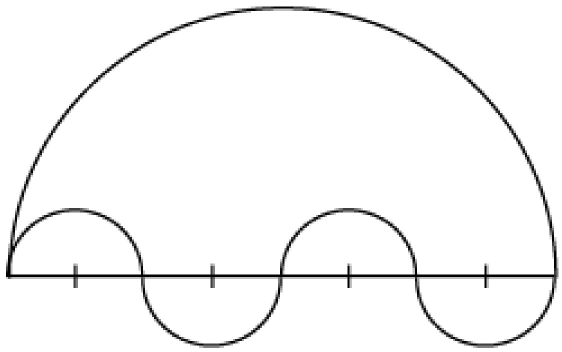


Рис. 124

Решение. ________________________

____

____

____

____

____

_______________________________.

55.17. По рисунку 125 составьте и решите задачу.

Формулировка. ____

____

____

_____________________________.

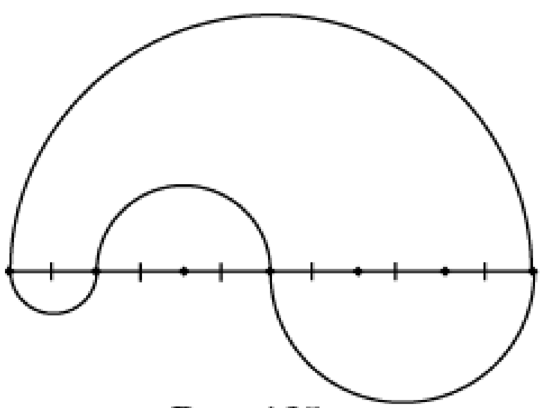


Рис. 125

Решение. ______________________

____

____

____

____

____

____

____.

56*. ЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

56.1. Закончите предложения.

1) При кинематическом способе кривая задаётся как __________

____

2) Циклоидальной называется кривая, которая получается как

____

____.

3) Циклоидой называется кривая, которая получается __________

____

____.

4) Кардиоидой называется кривая, которая получается __________

____

____.

5) Астроидой называется кривая, которая получается __________

____

____.

56.2 Нарисуйте циклоиду.

56.3. Нарисуйте кардиоиду.

56.4. Нарисуйте астроиду.

56.5. Сформулируйте и объясните, в чём заключается первое свойство (Ледяная гора) циклоиды.

Формулировка. ____

____.

Объяснекние. ____

____.

56.6. Сформулируйте и объясните, в чём заключается второе свойство (Часы с маятником) циклоиды.

Формулировка. ____

____.

Объяснение. ____

____.

56.7. Нарисуйте кривую (укороченную циклоиду), которую будет описывать точка K, закреплённая внутри круга (рис. 126).

Рис. 126

56.8. Нарисуйте кривую (удлинённую циклоиду), которую будет описывать точка M, закреплённая вне круга (рис. 127).

Рис. 127

56.9. Обведите кривую, которая изображена на рисунке 128. Она называется гипоциклоида. Отношение радиусов неподвижной и катящейся внутренней окружностей равно $m=\frac{2}{5}$.

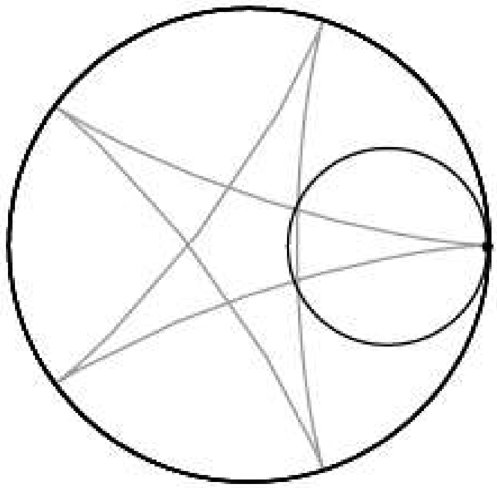


Рис. 128

56.10. Обведите кривую, которая изображена на рисунке 129. Она называется эпициклоида. Отношение радиусов неподвижной и катящейся внешней окружностей равно $m=\frac{3}{5}$.

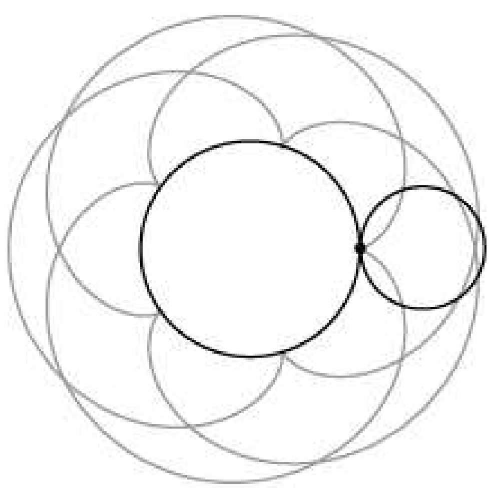


Рис. 129

С О Д Е Р Ж А Н И Е