

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
2024



УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

Смирнова И. М.

С50 Геометрия. 9 класс : учебное пособие для общеобразовательных организаций / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Мнемозина, 2024. — 175 с. : ил.

ISBN 978-5-346-05198-5

Учебное пособие написано в соответствии с требованиями ФГОС 2021 г., Федеральной рабочей программы ООО и Примерной рабочей программы ООО по математике. Оно может быть использовано для изучения геометрии как на базовом, так и на углублённом уровне. Данное пособие является переработанным вариантом учебника «Геометрия. 7—9 классы» и содержит главы этого учебника, относящиеся к курсу 9 класса. Помимо основного материала, в него включены вопросы истории геометрии, научно-популярный материал, задачи с практическим содержанием и др.

**УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721**

ISBN 978-5-346-05198-5

© «Мнемозина», 2024
© Оформление. «Мнемозина», 2024
Все права защищены

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для изучения геометрии в 9-м классе. Весь материал разбит на главы и параграфы, которые содержат как основной, так и дополнительный теоретический материал, исторические сведения, научно-популярный материал, задачи с практическим содержанием и повышенного уровня трудности.

Устные задачи выделены цветом (■). Они могут быть использованы для работы как в классе, так и дома.

Параграфы, теоремы и задачи, помеченные звёздочкой (*), относятся к дополнительному материалу, имеют исследовательский характер и могут быть использованы при проведении курсов по выбору и организации проектной и исследовательской деятельности.

Для дополнительных занятий и подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ), помимо данного учебного пособия, рекомендуем использовать материалы авторского сайта www.vasmirnov.ru

Желаем успехов в изучении геометрии!

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§1 Центральная симметрия

Точки A и A' называются *симметричными* относительно точки O , если O является серединой отрезка AA' . Точка O считается симметричной сама себе (рис. 1.1).

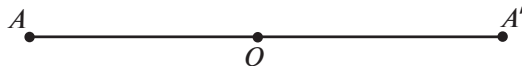


Рис. 1.1

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно точки O точка A' , называется *центральной симметрией*. Точка O при этом называется *центром симметрии*.

Две фигуры F и F' называются *центрально-симметричными* относительно центра O , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 1.2). Фигура F называется *центрально-симметричной* относительно центра O , если она симметрична сама себе (рис. 1.3).

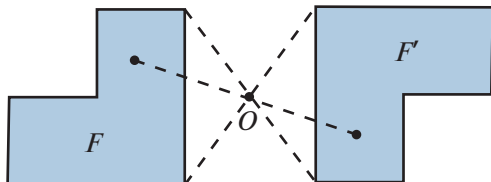


Рис. 1.2

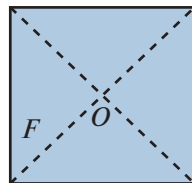


Рис. 1.3

Рассмотрим некоторые свойства центральной симметрии.

Свойство 1. Центральная симметрия сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A' , B' получены центральной симметрией относительно точки O точек A , B соответственно (рис. 1.4). Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны (по первому признаку равенства треугольников) и, следовательно, $AB = A'B'$.

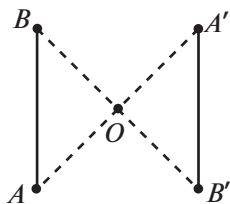


Рис. 1.4

Свойство 2. Центральная симметрия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точки A , B и C принадлежат одной прямой, причём точка C лежит между точками A и B . Тогда $AC + CB = AB$. Для центрально-симметричных точек A' , B' , C' будет выполняться равенство $A'C' + C'B' = A'B'$. Следовательно, точка C' лежит на прямой $A'B'$ между точками A' и B' . Значит, отрезок AB переводится в отрезок $A'B'$.

Аналогичным образом доказывается, что луч AB переводится в луч $A'B'$ и вся прямая AB переходит в прямую $A'B'$.

ПРИМЕР 1. Всякий ли правильный многоугольник имеет центр симметрии?

Решение. Правильный многоугольник с нечётным числом сторон не имеет центра симметрии. Правильный многоугольник с чётным числом сторон имеет центр симметрии, совпадающий с центром описанной окружности.

ПРИМЕР 2. Докажите, что центральная симметрия переводит прямую в параллельную ей прямую или в неё саму.

Решение. Ясно, что если центр симметрии принадлежит данной прямой, то эта прямая при центральной симметрии переходит сама в себя. Пусть центр симметрии O не принадлежит прямой a (рис. 1.5). Докажем, что прямая a' , симметричная a , будет параллельна прямой a . Рассмотрим какие-нибудь точки A и B на прямой a . Они переходят в точки A' и B' на прямой a' . При этом треугольники OAB и $OA'B'$ равны (по первому признаку равенства треугольников, так

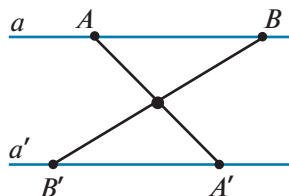


Рис. 1.5

как $OA = OA'$, $OB = OB'$, $\angle AOB = \angle A'OB'$). Следовательно, $\angle OAB = \angle OA'B'$. Но эти углы являются внутренними накрест лежащими. Значит, прямые a и a' параллельны (по признаку параллельности двух прямых).

Вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно точки?
2. Что называется центральной симметрией?
3. Какие фигуры называются центрально-симметричными?
4. Какая фигура называется центрально-симметричной?
5. Сформулируйте свойства центральной симметрии.

Задачи

1. Какая точка при центральной симметрии переходит в себя?
2. Какие прямые при центральной симметрии переходят в себя?
3. Что является центром симметрии отрезка?
4. Центральная симметрия переводит точку A в точку A' . Где находится центр симметрии?
5. Имеет ли луч центр симметрии?
6. Имеет ли центр симметрии пара пересекающихся прямых?
7. Имеет ли равносторонний треугольник центр симметрии?
8. Может ли фигура иметь несколько центров симметрии?
9. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?
10. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно центра O , если: а) O принадлежит прямой AB ; б) O не принадлежит прямой AB .
11. Докажите, что центральная симметрия переводит окружность в окружность.
12. Докажите, что центральная симметрия сохраняет величины углов.
13. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.
14. Докажите, что если четырёхугольник имеет центр симметрии, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
15. Какие из фигур, изображённых на рисунке 1.6 (см. с. 7), имеют центр симметрии?

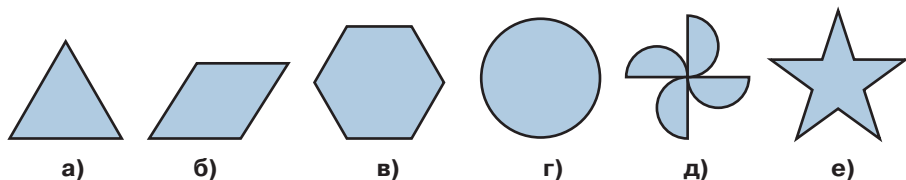


Рис. 1.6

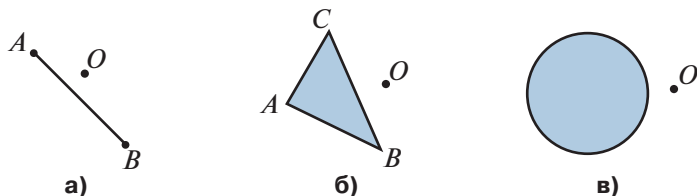


Рис. 1.7

16. Постройте фигуры, центрально-симметричные фигурам, изображённым на рисунке 1.7, относительно центра O .
17. На рисунке 1.8 укажите буквы латинского алфавита, имеющие центр симметрии.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Рис. 1.8

18. Постройте прямую, симметричную данной прямой относительно точки, не принадлежащей этой прямой.
19. При каком расположении трёх различных прямых образованная ими фигура имеет бесконечно много центров симметрии?
- *20. Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно два центра симметрии.
- *21. Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разбить на многоугольники, имеющие центры симметрии, то и исходный многоугольник имеет центр симметрии.
- *22. Правильный треугольник площадью 1 симметрично отразили относительно центра описанной окружности. Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) исходного треугольника и симметричного.

§2 Поворот. Симметрия n -го порядка

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A **поворотом** вокруг точки O на угол φ , если $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \varphi$ (рис. 2.1).

Преобразование плоскости, при котором данная точка O остаётся на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол φ , называется **поворотом** вокруг точки O . Точка O называется центром поворота.

Говорят, что фигура F' получается **поворотом** фигуры F вокруг точки O , если все точки фигуры F' получаются поворотом всевозможных точек фигуры F вокруг точки O на угол φ (рис. 2.2).

Точка O называется **центром симметрии n -го порядка** фигуры F , если при повороте фигуры F вокруг точки O на угол $\frac{360^\circ}{n}$ фигура F совмещается сама с собой (рис. 2.3).

Ясно, что центр симметрии второго порядка является просто центром симметрии.

Рассмотрим некоторые свойства поворота.

Свойство 1. Поворот сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A' , B' получены поворотом вокруг точки O точек A , B соответственно (рис. 2.4). Тогда $OA' = OA$, $OB' = OB$; $\angle AOA' = \varphi = \angle BOB'$, $\angle A'OB' = \angle AOB' - \angle AOA' = \angle AOB' - \angle BOB' = \angle AOB$. Треугольники AOB и $A'OB'$ равны (по первому признаку равенства треугольников), и, следовательно, $AB = A'B'$.

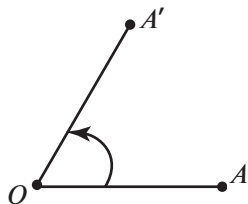


Рис. 2.1

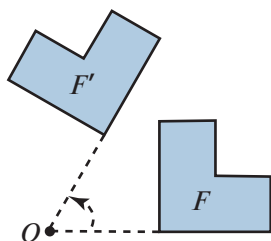


Рис. 2.2

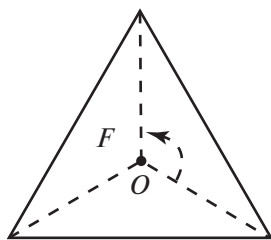


Рис. 2.3

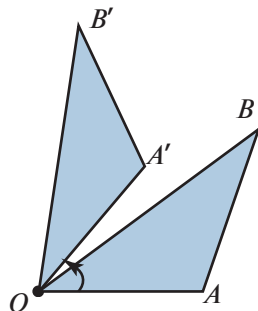


Рис. 2.4

Свойство 2. Поворот переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для центральной симметрии.

Хотя изначально поворот был определён для величин углов, не превосходящих 360° , тем не менее его можно определить и для произвольных градусных величин.

Считают, что поворот на 0° оставляет все точки на месте. Определим поворот для произвольных положительных градусных величин. Обычно направление поворота в этом случае выбирается против часовой стрелки. Воспользуемся тем, что, делая поворот вокруг точки O на угол φ_1 , а затем вокруг той же точки на угол φ_2 , мы получаем поворот вокруг точки O на угол $\varphi_1 + \varphi_2$. Поэтому если градусная величина φ больше 360° , то мы представляем её в виде суммы градусных величин $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, меньших 360° , и последовательно делаем повороты вокруг точки O на углы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. В результате получим искомый поворот на угол φ .

Заметим, что поворот на 360° переводит точки в те же самые точки, т. е. оставляет их на месте. Поэтому для поворота на градусную величину φ , большую 360° , можно поступить иначе. Сначала представить φ в виде $\varphi = 360^\circ n + \varphi_0$, где n — некоторое натуральное число, $\varphi_0 < 360^\circ$. Затем сделать поворот на угол φ_0 . Он и будет искомым поворотом.

Для отрицательных градусных величин поворот определяется так же, как и для положительных, только в направлении по часовой стрелке. А именно, поворот на угол $-\varphi$ для $0 < \varphi < 360^\circ$ означает поворот на угол φ по часовой стрелке. Поворот на произвольную градусную величину $-\varphi$, где $\varphi > 0$, означает поворот на градусную величину φ в направлении по часовой стрелке.

ПРИМЕР 1. Квадрат повернули вокруг точки пересечения диагоналей на угол 45° . Какая фигура является общей частью полученного и исходного квадратов?

Ответ. Правильный восьмиугольник (рис. 2.5).

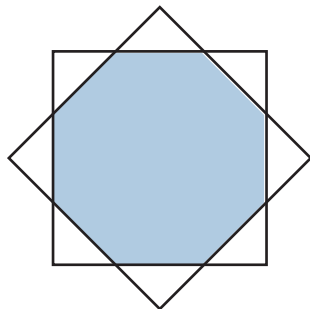


Рис. 2.5

ПРИМЕР 2. Докажите, что центр окружности, описанной около правильного n -угольника, является центром симметрии n -го порядка.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности около правильного n -угольника. Тогда при повороте вокруг O на угол $\frac{360^\circ}{n}$ многоугольник перейдёт сам в себя, т. е. O является центром симметрии n -го порядка.

Вопросы

1. Что называется поворотом вокруг точки?
2. Какая точка называется центром симметрии n -го порядка фигуры?
3. Сформулируйте свойства поворота.

Задачи

1. Постройте точки, в которые переходит заданная точка A при повороте вокруг заданной точки O на углы 30° , 60° , 120° , 180° , 270° , 405° , -30° , -120° .
2. На какой угол нужно повернуть прямую, чтобы полученная прямая была: а) перпендикулярна исходной; б) параллельна исходной?
3. Постройте отрезок, в который переходит данный отрезок AB при повороте вокруг точки O на угол 30° .
4. Постройте треугольник, в который переходит данный треугольник ABC при повороте вокруг точки O на угол -45° .
5. Заданы точка A и точка A' , полученная из A поворотом. Можно ли по этим данным однозначно определить угол поворота?
6. Заданы точка A и точка A' , полученная из A поворотом на угол 60° . Можно ли по этим данным однозначно определить точку O , вокруг которой произведён поворот?
7. Заданы точки A , B и точки A' , B' , полученные соответственно из A , B поворотом. Можно ли по этим данным однозначно определить точку O , вокруг которой произведён поворот, и угол поворота?
8. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.
9. Докажите, что поворот на угол $-\varphi$ для $0 < \varphi < 360^\circ$ равносильен повороту на угол $360^\circ - \varphi$.

10. Правильный треугольник повернули на 60° вокруг центра описанной окружности. Какая фигура является общей частью полученного и исходного треугольников?
11. Какие фигуры, изображённые на рисунке 2.6, при повороте переходят сами в себя? Укажите центры и углы поворота.

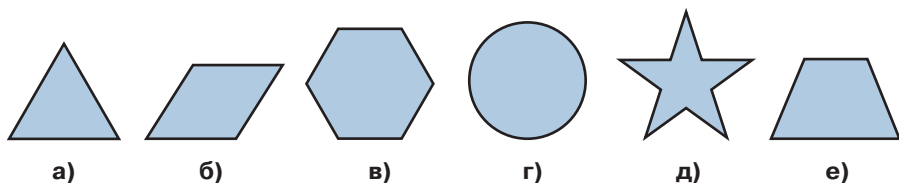


Рис. 2.6

12. Центром симметрии какого порядка является точка пересечения диагоналей: а) параллелограмма; б) ромба; в) прямоугольника; г) квадрата?
13. Докажите, что фигура, образованная тремя равными окружностями, каждая из которых касается двух других, обладает центром симметрии 3-го порядка. Нарисуйте эту фигуру.
14. Симметрией какого порядка обладают снежинки (рис. 2.7)?

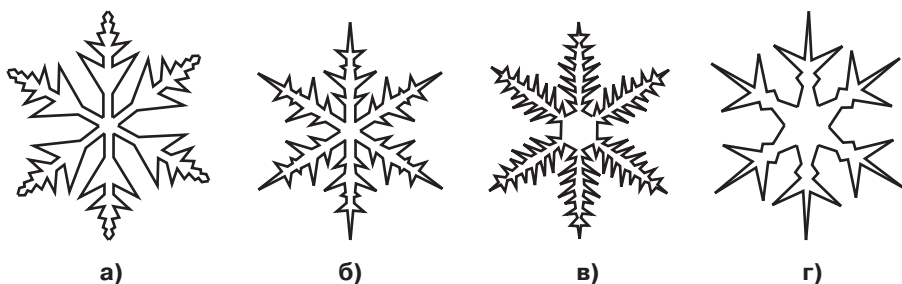


Рис. 2.7

- *15. Докажите, что при повороте сохраняются углы.
- *16. Правильный треугольник площадью 1 повернут вокруг центра описанной окружности на угол 60° . Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) исходного треугольника и повернутого.

- *17. Прямоугольник, стороны которого равны 3 и 4, повернут вокруг точки пересечения диагоналей на угол 90° . Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) исходного прямоугольника и повернутого.
- *18. Квадрат со стороной 1 повернут вокруг центра симметрии на угол 45° . Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) исходного квадрата и повернутого.

§3 Осевая симметрия

Две точки A и A' называются **симметричными** относительно прямой c , если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему (рис. 3.1). Каждая точка прямой c считается симметричной самой себе.

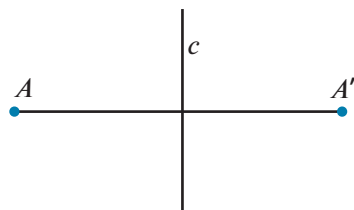


Рис. 3.1

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно прямой c точка A' , называется **осевой симметрией**. Прямая c называется **осью симметрии**.

Две фигуры F и F' называются **симметричными** относительно оси c , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 3.2). Фигура F называется **симметричной** относительно оси c , если она симметрична самой себе.

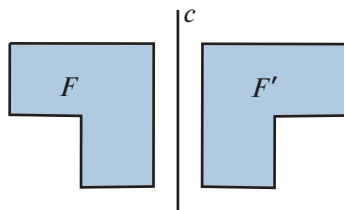


Рис. 3.2

Рассмотрим некоторые свойства осевой симметрии.

Свойство 1. Осевая симметрия сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A' , B' получены симметрией относительно оси c из точек A , B соответственно. Предположим, что точки A , B лежат по одну сторону от c (рис. 3.3). Обозначим через C , D точки пересечения прямых AA' , BB' с прямой c . Прямоугольные треугольники ACD и $A'CD$ равны (по двум катетам). Следовательно, $\angle ADC = \angle A'DC$ и $AD = A'D$. Кроме того, $\angle ADB = \angle CDB - \angle ADC =$

$= \angle CDB' - \angle A'DC = \angle A'DB'$,
 $BD = B'D$. Треугольники ADB и $A'DB'$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $AB = A'B'$.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда точки A, B лежат по разные стороны от c .

Свойство 2. Осевая симметрия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для центральной симметрии.

ПРИМЕР 1. Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник?

Решение. Шесть осей симметрии. Из них три оси, проходящие через противоположные вершины, и три оси, проходящие через середины противоположных сторон (рис. 3.4).

ПРИМЕР 2. Даны две пересекающиеся прямые a' и a'' . Точке A сопоставляется точка A' , симметричная A относительно прямой a' . Точке A' сопоставляется точка A'' , симметричная точке A' относительно прямой a'' . Докажите, что соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'' , является поворотом. Найдите угол поворота.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых a' и a'' (рис. 3.5). Тогда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2\varphi$, где φ — угол между прямыми a' и a'' . Таким образом, соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'' , является поворотом вокруг точки O на угол 2φ .

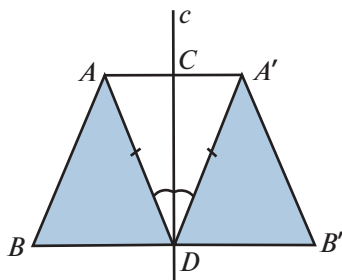


Рис. 3.3

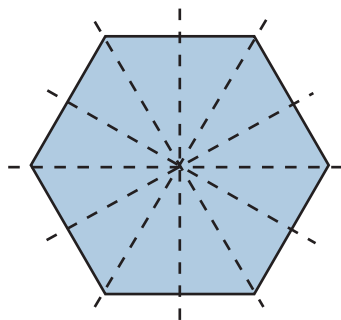


Рис. 3.4

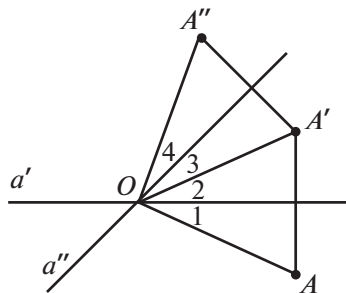


Рис. 3.5

Вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно прямой?
2. Что называется осевой симметрией, осью симметрии?
3. Какие две фигуры называются симметричными относительно оси?
4. Какая фигура называется симметричной относительно оси?
5. Сформулируйте свойства осевой симметрии.

Задачи

1. Какие точки при осевой симметрии переходят в себя?
2. Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя?
3. Осевая симметрия переводит точку A в точку A' . Где находится ось симметрии?
4. Точка A' симметрична точке A относительно оси s . Верно ли, что точка A симметрична точке A' относительно этой оси?
5. Постройте при помощи циркуля и линейки точку, симметричную данной точке относительно данной оси.
6. Приведите примеры фигур, имеющих осевую симметрию.
7. Приведите примеры фигур, не имеющих осевой симметрии.
8. На рисунке 1.8 (см. с. 7) укажите буквы латинского алфавита: а) имеющие одну ось симметрии; б) имеющие две оси симметрии.
9. Докажите, что равнобедренный треугольник симметричен относительно биссектрисы, проведённой через вершину, противолежащую основанию этого треугольника.
10. Докажите, что окружность при осевой симметрии переходит в окружность.
11. В каком случае прямая при осевой симметрии переходит в параллельную ей прямую?
12. Имеет ли параллелограмм оси симметрии?
13. Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.
14. Укажите оси симметрии: а) прямоугольника; б) квадрата.
15. Докажите, что перпендикуляр, проведённый к основанию равнобедренной трапеции через его середину, является осью симметрии трапеции.

16. Сколько осей симметрии имеет правильный n -угольник?
17. Приведите пример фигуры: а) имеющей ось симметрии и не имеющей центра симметрии; б) имеющей центр симметрии и не имеющей оси симметрии.
- *18. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.
- *19. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, принадлежат описанной около этого треугольника окружности.
- *20. Как центральную симметрию можно получить с помощью двух осевых симметрий?
- *21. Треугольник площадью 1 симметрично отражён относительно прямой, содержащей его среднюю линию. Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) исходного треугольника и симметричного.
- *22. Трапеция, основания которой равны 6, 4, а высота равна 2, симметрично отражена относительно прямой, содержащей её среднюю линию. Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) исходной трапеции и симметричной

§4 Параллельный перенос

С понятием параллельности тесно связано преобразование плоскости, называемое **параллельным переносом** и характеризующееся величиной и направлением. Нестрого говоря, параллельный перенос перемещает точки плоскости в одном и том же направлении на одну и ту же величину.

Многие физические величины, например скорость, сила и т. д., также характеризуются не только своим значением, но и направлением. Такие величины называют векторными.

Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B . Векторы обозначаются также и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. д. (рис. 4.1).

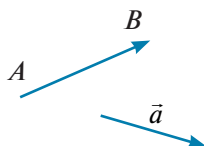


Рис. 4.1

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, лежащие на одной прямой, называются **одинаково направленными**, если один из лучей AB или $A'B'$ содержится в другом (рис. 4.2). В противном случае они называются **противоположно направленными**. Два вектора, не лежащие на одной прямой, называются **одинаково (противоположно) направленными**, если они лежат на параллельных прямых по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала (рис. 4.3).

Длиной или **модулем** вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Рассматривают также нулевые векторы, у которых начало совпадает с концом. Все нулевые векторы считаются равными между собой. Они обозначаются $\vec{0}$, и их длина считается равной нулю.

В дальнейшем мы рассмотрим понятие вектора более подробно. Сейчас же используем это понятие для определения параллельного переноса.

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A параллельным переносом на вектор $\vec{a}$, если $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ (рис. 4.4).

Преобразование плоскости, при котором точкам A сопоставляются точки A' так, что вектор $\overrightarrow{AA'}$ равен заданному вектору $\vec{a}$, называется **параллельным переносом** на вектор $\vec{a}$.

Говорят, что фигура F' получается **параллельным переносом** фигуры F на вектор $\vec{a}$, если все точки фигуры F' получаются параллельным переносом всевозможных точек фигуры F на вектор $\vec{a}$ (рис. 4.5).

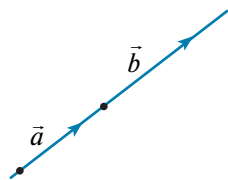


Рис. 4.2

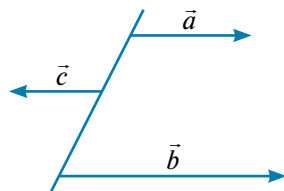


Рис. 4.3

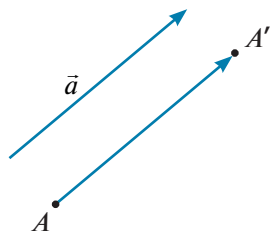


Рис. 4.4

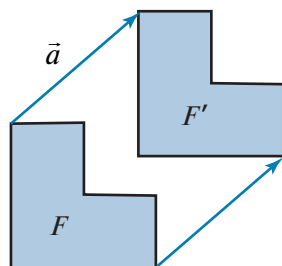


Рис. 4.5

Рассмотрим некоторые свойства параллельного переноса.

Свойство 1. Параллельный перенос сохраняет расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки A' , B' получены параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ точек A и B соответственно (рис. 4.6). Тогда $AA'B'B$ — параллелограмм и $AB = A'B'$.

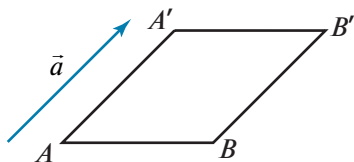


Рис. 4.6

Свойство 2. Параллельный перенос переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для центральной симметрии.

ПРИМЕР 1. Сколько различных векторов задают направленные стороны параллелограмма $ABCD$?

Ответ. 4 вектора: $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{AD}$, $\vec{DA}$.

ПРИМЕР 2. Даны две параллельные прямые a' и a'' . Точке A сопоставляется точка A' , симметричная A относительно прямой a' . Точке A' сопоставляется точка A'' , симметричная точке A' относительно прямой a'' . Докажите, что соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'' , является параллельным переносом.

Решение. Пусть O' , O'' — точки пересечения отрезков AA' , $A'A''$ с прямыми a' , a'' соответственно (рис. 4.7). Тогда $AO' = O'A'$ и $A'O'' = O''A''$. Значит, $AA'' = 2d$, где d — расстояние между параллельными прямыми a' и a'' . Таким образом, соответствие, при котором точке A сопоставляется точка A'' , является параллельным переносом на вектор длины $2d$, перпендикулярный данным прямым.

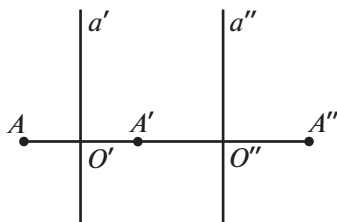


Рис. 4.7

Вопросы

1. Что называется вектором?
2. Какие два вектора называются: а) одинаково направленными; б) противоположно направленными?
3. Что называется длиной (модулем) вектора?
4. Какие два вектора называются равными?
5. Что называется параллельным переносом?
6. Какая фигура называется фигурой, полученной из данной параллельным переносом?
7. Сформулируйте свойства параллельного переноса.

Задачи

1. Какие из векторов, изображённых на рисунке 4.8: а) равны; б) противоположно направлены?

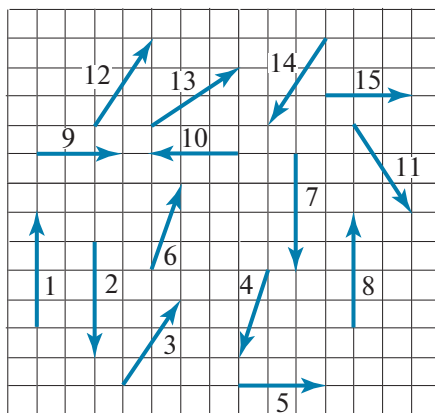


Рис. 4.8

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Какие векторы с началом и концом в точках A, B, C, D, O задают один и тот же вектор? Сколько имеется различных векторов?
3. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
4. Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.
5. Даны точки A, B, C . Постройте точку C' , получающуюся из точки C параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$.
6. Докажите, что прямая при параллельном переносе переходит или сама в себя, или в прямую, параллельную исходной.

7. Докажите, что точки A и B можно перевести параллельным переносом в точки C и D , если $\overline{AB} = \overline{CD}$.
8. При каком условии существует параллельный перенос, отображающий один отрезок на другой?
9. Даны две параллельные прямые. Сколько существует параллельных переносов, переводящих одну из них в другую?
10. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона треугольника переходит в другую его сторону?
11. Для заданного параллельного переноса постройте фигуры, в которые переходят заданные: отрезок, луч, прямая, окружность, угол, треугольник.
12. Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC параллельным переносом. Докажите, что соответствующие медианы этих треугольников лежат или на одной прямой, или на параллельных прямых.
- *13. Докажите, что если фигура имеет две параллельные оси симметрии, то она переводится сама в себя некоторым параллельным переносом.
- *14. Населённые пункты A и B расположены на противоположных берегах реки (рис. 4.9). В каком месте реки следует построить мост CD , чтобы длина пути $ACDB$ была наименьшей? (Берега реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам.)

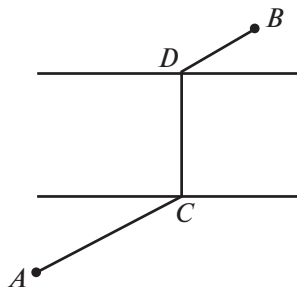


Рис. 4.9

§5 Движение. Равенство фигур

Рассмотренные выше преобразования плоскости (центральная симметрия, поворот, осевая симметрия, параллельный перенос) обладают одним общим свойством — они сохраняют расстояния между точками. Такие преобразования называются движениями.

Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, т. е. если точки A, B переводятся в точки A', B' соответственно, то $A'B' = AB$.

Примерами движений являются: центральная симметрия, поворот, осевая симметрия и параллельный перенос.

Пусть одно движение переводит точку A в точку A' , а другое движение переводит точку A' в точку A'' . Тогда преобразование плоскости, при котором точке A сопоставляется точка A'' , называется *композицией* движений. Оно получается последовательным выполнением двух данных движений.

Рассмотрим свойства движения.

Свойство 1. Композиция движений является движением.

Доказательство. Пусть одно движение переводит точки A, B в точки A', B' соответственно, а другое движение переводит точки A', B' в точки A'', B'' соответственно. Тогда $AB = A'B' = A''B''$. Таким образом, композиция движений сохраняет расстояние между точками и, следовательно, сама является движением.

Свойство 2. Движение переводит прямые в прямые, лучи в лучи и отрезки в отрезки.

Доказательство. Пусть точка B принадлежит отрезку AC и движение переводит эти точки в точки A', B', C' соответственно (рис. 5.1). Тогда $AB + BC = AC$. Поскольку при движении расстояния между точками не изменяются, то для точек A', B', C' будет иметь место равенство $A'B' + B'C' = A'C'$. Следовательно, точка B' лежит на прямой $A'B'$ между точками A' и C' . Значит, отрезок AB переводится в отрезок $A'B'$.

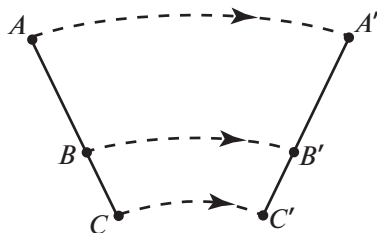


Рис. 5.1

Аналогичным образом доказывается, что луч AB переводится в луч $A'B'$ и вся прямая AB переходит в прямую $A'B'$.

Свойство 3. При движении сохраняются углы.

Доказательство. Пусть дан угол с вершиной в точке O и точками A, B на его сторонах. Предположим, что движением эти точки переводятся в точки O', A', B' соответ-

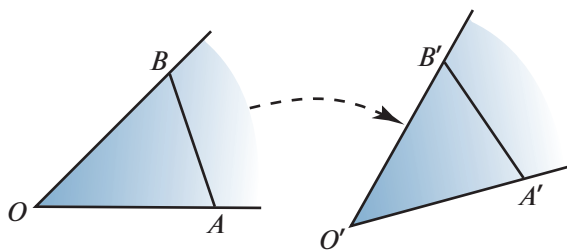


Рис. 5.2

ственно (рис. 5.2). Поскольку при движении расстояния между точками не изменяются, то треугольник AOB будет равен треугольнику $A'O'B'$ (по третьему признаку равенства треугольников) и, следовательно, $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

Две фигуры называются **равными**, если они движением переводятся одна в другую.

Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F = F'$ означает, что фигура F равна фигуре F' .

Следующая теорема устанавливает связь между понятием равенства фигур и введённым ранее понятием равенства треугольников.

ТЕОРЕМА

Два треугольника равны в том и только том случае, когда один из них переводится движением в другой.

Доказательство. Пусть треугольник ABC переводится движением в треугольник $A'B'C'$. Тогда, так как при движении сохраняются расстояния и углы, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Значит, треугольники ABC и $A'B'C'$ равны.

Обратно, пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ равны соответствующие стороны и углы. Докажем, что треугольник ABC движением переводится в треугольник $A'B'C'$ (рис. 5.3). Действительно, если A и A' не совпадают, применим к треугольнику ABC параллель-

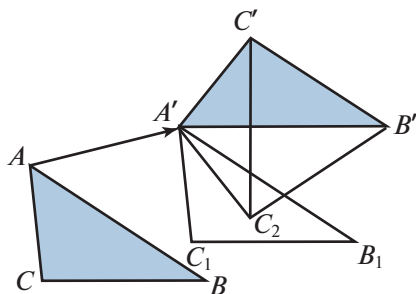


Рис. 5.3

ный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$. Получим треугольник $A'B_1C_1$. Если B_1 и B' не совпадают, применим к треугольнику $A'B_1C_1$ поворот на угол $B_1A'B'$. При этом из равенства сторон $A'B_1$ и $A'B'$ следует, что вершина B_1 совместится с вершиной B' . Получим треугольник $A'B'C_2$. Если C_2 и C' лежат по одну сторону от прямой $A'B'$, то из равенства соответствующих отрезков и углов следует, что они должны совпадать. Если же они лежат по разные стороны от прямой $A'B'$, применим к треугольнику $A'B'C_2$ симметрию относительно прямой $A'B'$. Тогда треугольник $A'B'C_2$ перейдёт в треугольник $A'B'C'$. Таким образом, треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC в результате движения.

ПРИМЕР 1. Могут ли при движении разные прямые переходить в одну?

Решение. Нет. Предположим противное. Пусть прямые a и b переводятся в прямую c' . Возьмём точку A на прямой a , не принадлежащую прямой b . Она переводится в некоторую точку A' на прямой c' . Так как прямая b переводится движением в прямую c' , то на ней найдётся точка B , которая также переводится в точку A' . Таким образом, две точки A и B переводятся движением в одну точку A' . Это противоречит тому, что движение сохраняет расстояние между точками.

ПРИМЕР 2. Докажите, что два параллелограмма $ABCD$ и $A'B'C'D'$, у которых $AB = A'B'$, $AD = A'D'$ и $\angle A = \angle A'$, равны.

Решение. Заметим, что у параллелограммов $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны все соответствующие элементы (стороны, диагонали, углы). Так как треугольники ABD и $A'B'D'$ равны, то существует движение, переводящее треугольник ABD в треугольник $A'B'D'$. Покажем, что это движение переводит точку C в точку C' . Действительно, движение сохраняет углы и расстояния. Поэтому из равенства углов BAC и $B'A'C'$ следует, что это движение переводит луч AC в луч $A'C'$ и точку C в точку C' . Таким образом, вершины параллелограмма $ABCD$ движением переводятся в соответствующие вершины параллелограмма $A'B'C'D'$ и, значит, первый параллелограмм переводится этим движением во второй. Следовательно, они равны.

Вопросы

1. Какое преобразование плоскости называется движением?
2. Приведите примеры движений.
3. Что называется композицией движений?
4. Какие фигуры называются равными?
5. Сформулируйте свойства движения.

Задачи

1. Могут ли при движении разные точки переходить в одну точку?
2. Докажите, что движение переводит окружность в окружность того же радиуса.
3. Докажите, что движение переводит полуплоскость в полуплоскость.
4. Пусть движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$. Докажите, что середина C отрезка AB перейдёт в середину C' отрезка $A'B'$.
5. Пусть движение переводит угол AOB в угол $A'O'B'$. Докажите, что биссектриса OC угла AOB перейдёт в биссектрису $O'C'$ угла $A'O'B'$.
6. Пусть движение переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Докажите, что при этом высоты, медианы и биссектрисы треугольника ABC перейдут в высоты, медианы и биссектрисы треугольника $A'B'C'$ соответственно.
7. Пусть движение переводит точки A , B и C соответственно в точки A' , B' и C' (рис. 5.4). Постройте точки, в которые переходят точки D и E .
8. Представьте поворот как композицию осевых симметрий.

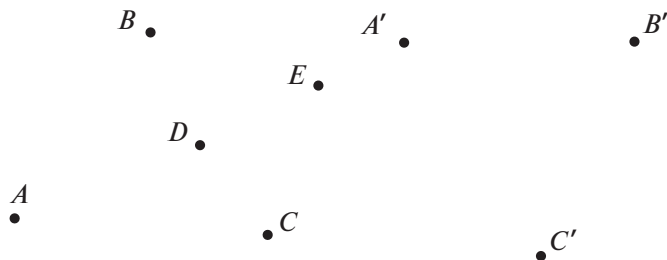


Рис. 5.4

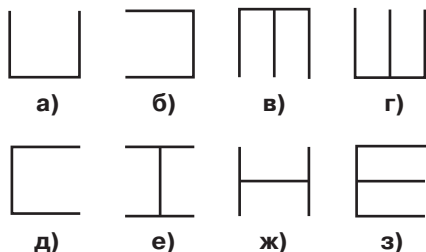


Рис. 5.5

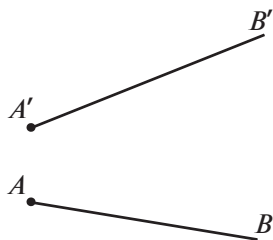


Рис. 5.6

9. Представьте параллельный перенос как композицию осевых симметрий.
10. Какие из фигур, изображённых на рисунке 5.5, равны?
11. Докажите, что две окружности равны, если равны их радиусы.
12. Для лучей, изображённых на рисунке 5.6, укажите движение, переводящее один луч в другой.
13. Для двух данных равных отрезков (рис. 5.7) укажите движения, переводящие один в другой.
14. Для двух данных равных углов (рис. 5.8) укажите движения, переводящие один в другой.

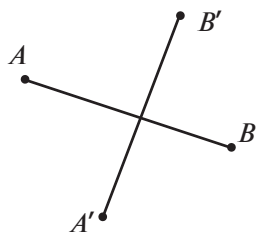


Рис. 5.7

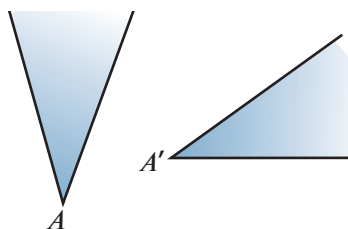


Рис. 5.8

15. Будут ли равны два четырёхугольника, если у них все стороны соответственно равны?
- *16. Докажите, что если у двух выпуклых четырёхугольников соответственно равны все стороны и по одному углу, то такие четырёхугольники равны.
- *17. Придумайте другие признаки равенства четырёхугольников.
- *18. Докажите, что два правильных n -угольника равны тогда и только тогда, когда равны их стороны.
- *19. Докажите, что два равных треугольника можно перевести один в другой с помощью не более трёх осевых симметрий.

§ 6* Паркеты

Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

Паркет называется **правильным**, если он состоит из правильных многоугольников и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

Примеры правильных паркетов дают заполнения плоскости:

- а) правильными треугольниками (рис. 6.1);
- б) квадратами (рис. 6.2);
- в) правильными шестиугольниками (рис. 6.3).

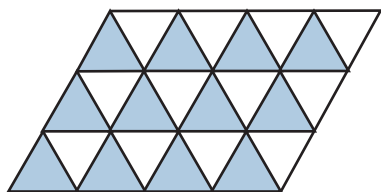


Рис. 6.1

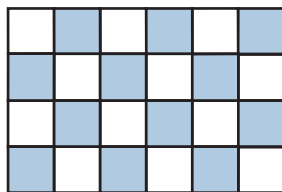


Рис. 6.2

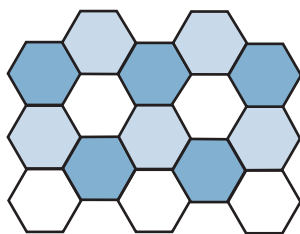


Рис. 6.3

Докажем, что другими равными правильными многоугольниками заполнить плоскость нельзя. Воспользуемся тем, что сумма углов многоугольников, сходящихся в одной вершине паркета, должна быть равна 360° .

Рассмотрим правильные пятиугольники. Углы правильного пятиугольника равны 108° . В одной вершине паркета не могут сходиться три правильных пятиугольника, так как сумма углов в этом случае будет $324^\circ < 360^\circ$. Если же число правильных пятиугольников больше или равно 4, то сумма углов будет больше

или равна $432^\circ > 360^\circ$. Поэтому не существует правильного паркета из пятиугольников.

Аналогично в одной вершине паркета не могут сходиться три или более правильных семиугольников, восьмиугольников и т. д., так как их углы больше 120° и в сумме они будут составлять величину, большую 360° . Поэтому не существует правильных паркетов из семиугольников, восьмиугольников и т. д.

Расширим способы составления паркетов из правильных многоугольников, разрешив использовать в них правильные многоугольники с различным числом сторон.

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ углы правильных многоугольников, имеющих общую вершину. Расположим их в порядке возрастания $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$. Учитывая, что сумма всех таких углов должна быть равна 360° , составим таблицу, содержащую возможные наборы таких углов, и укажем соответствующие паркеты.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = 360^\circ$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Паркет из треугольников (рис. 6.1, см. с. 25)
60°	60°	60°	60°	120°		Паркет из треугольников и шестиугольников (рис. 6.4)
60°	60°	60°	90°	90°		Два паркета из треугольников и четырёхугольников (рис. 6.5, 6.6)
60°	60°	90°	150°			Нет паркета
60°	60°	120°	120°			Паркет из треугольников и шестиугольников (рис. 6.7)
60°	90°	90°	120°			Паркет из треугольников, четырёхугольников и шестиугольников (рис. 6.8)
60°	150°	150°				Паркет из треугольников и двенадцатиугольников (рис. 6.9)
90°	90°	90°	90°			Паркет из квадратов (рис. 6.2, см. с. 25)

Окончание таблицы

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = 360^\circ$
90°	120°	150°				Паркет из четырёхугольников, шестиугольников и двенадцатиугольников (рис. 6.10, см. с. 28)
90°	135°	135°				Паркет из четырёхугольников и восьмиугольников (рис. 6.11)
120°	120°	120°				Паркет из шестиугольников (рис. 6.3, см. с. 25)

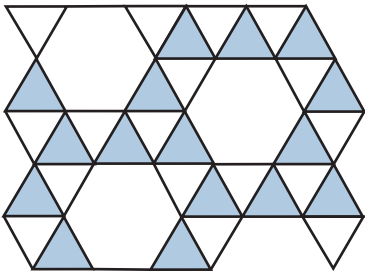


Рис. 6.4

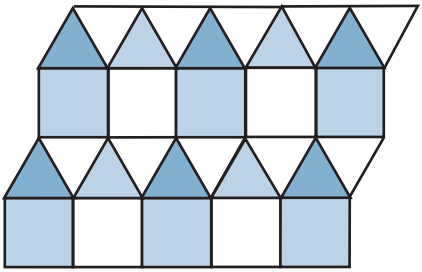


Рис. 6.5

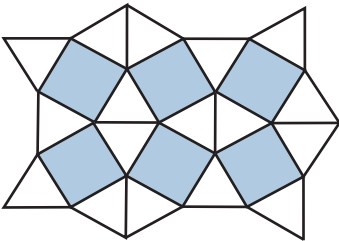


Рис. 6.6

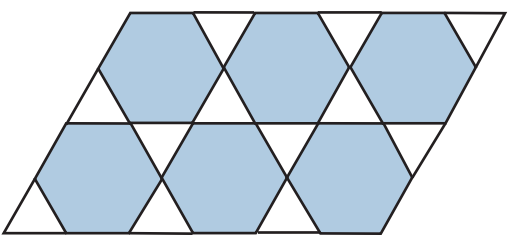


Рис. 6.7

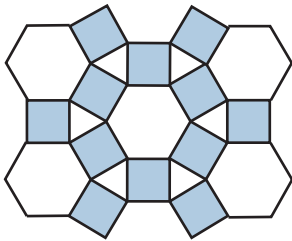


Рис. 6.8

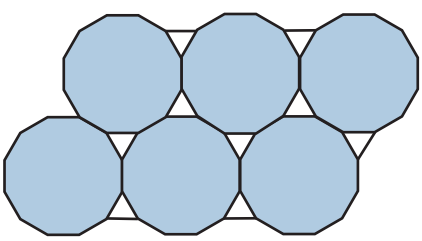


Рис. 6.9

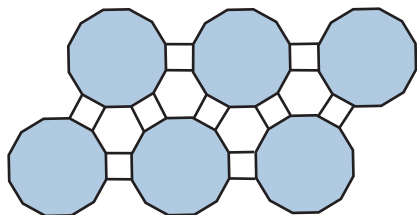


Рис. 6.10

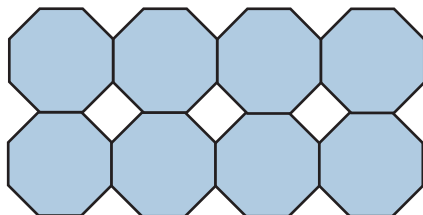


Рис. 6.11

Таким образом, мы получили 11 правильных паркетов. Можно доказать, что других правильных паркетов не существует.

Рассмотрим теперь вопрос о заполнении плоскости неправильными равными многоугольниками.

ТЕОРЕМА

Для любого четырехугольника существует паркет, состоящий из четырехугольников, равных исходному. Иначе говоря, четырехугольником произвольной формы можно заполнить всю плоскость.

Доказательство. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 6.12). Рассмотрим центрально-симметричный ему четырехугольник относительно середины стороны AB . Исходный четырехугольник $ABCD$ обозначим цифрой 1, а симметричный — цифрой 2. Теперь четырехугольник 2 отразим симметрично относительно середины его стороны BC . Полученный четырехугольник обозначим цифрой 3 и отразим его симметрично относительно середины его стороны CD . Полученный четырехугольник обозначим цифрой 4. Четырехугольники 1, 2, 3 и 4 примыкают к общей вершине углами A , B , C и D . Поскольку сумма углов четырехугольника равна 360° , то эти четырехугольники заполняют часть плоскости вокруг общей вершины. Такое же построение можно провести вокруг каждой новой вершины, что и даст искомое заполнение плоскости.

Заметим, что четырехугольники, закрашенные одним цветом (рис. 6.12), получаются друг из друга параллельным переносом.

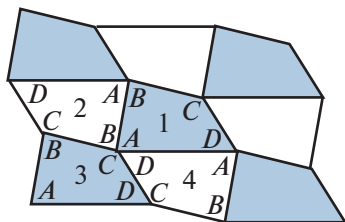


Рис. 6.12

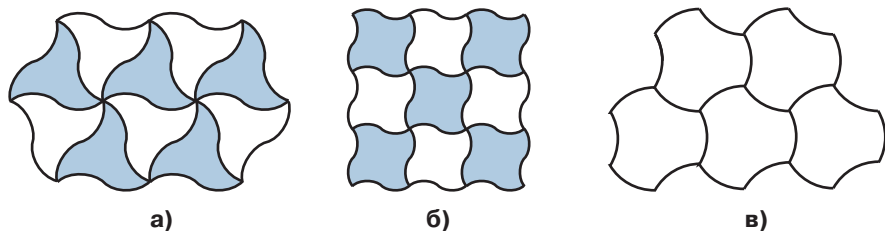


Рис. 6.13

Заполнение плоскости может быть произведено не только многоугольниками, но и фигурами более сложного вида. На рисунке 6.13 приведены примеры паркетов, состоящих из равных фигур, ограниченных кривыми линиями. Знаменитый голландский художник Мариус Эшер (1898—1972) посвятил паркетам несколько своих картин. Среди них: «Всадники» (рис. 6.14); «Ящерицы» (рис. 6.15); «Птицы» (рис. 6.16); «Предел круга III» (рис. 6.17).

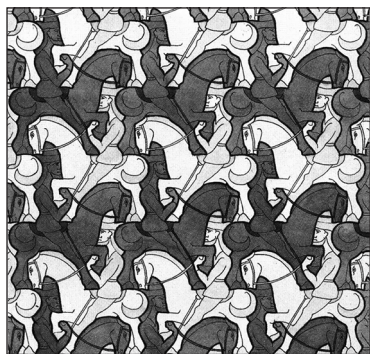


Рис. 6.14

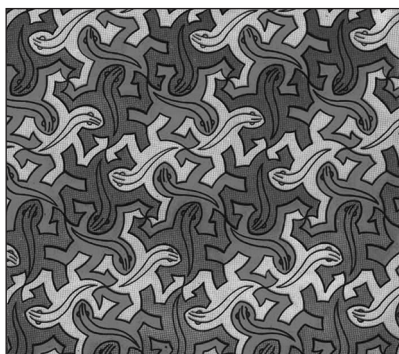


Рис. 6.15



Рис. 6.16

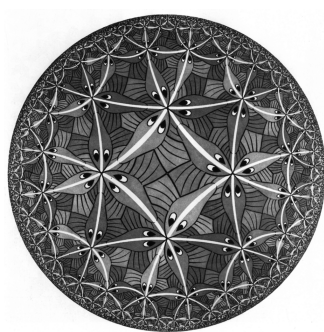


Рис. 6.17

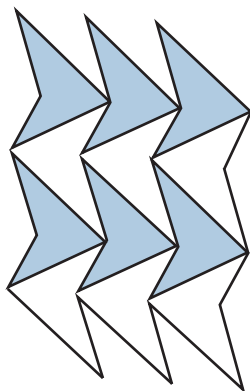


Рис. 6.18

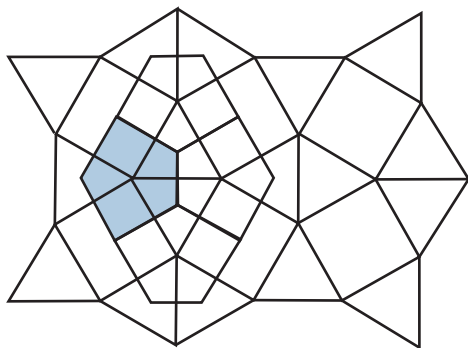


Рис. 6.19

ПРИМЕР 1. Можно ли составить паркет из равных невыпуклых четырёхугольников?

Решение. Да, соответствующий паркет приведён на рисунке 6.18.

ПРИМЕР 2. Можно ли составить паркет из равных пятиугольников?

Решение. Да. Рассмотрим, например, паркет на рисунке 6.6 (с. 27). Центры его многоугольников с общей вершиной образуют пятиугольник, закрашенный на рисунке 6.19. Ясно, что эти пятиугольники и дают искомый паркет. Этот паркет называется *двойственным* к паркету 6.6.

Вопросы

1. Что называется паркетом?
2. Какой паркет называется правильным?
3. Можно ли составить паркет из равных четырёхугольников?

Задачи

1. Можно ли составить паркет из правильных: а) пятиугольников; б) шестиугольников; в) семиугольников?
2. Можно ли составить паркет из: а) правильных восьмиугольников и квадратов; б) правильных двенадцатиугольников и треугольников; в) правильных десятиугольников и пятиугольников?
3. Можно ли заполнить плоскость треугольником произвольной формы?

4. Нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных четырёхугольнику, изображённому на рисунке 6.20.

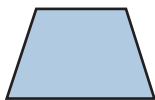


Рис. 6.20

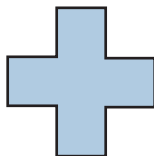


Рис. 6.21

5. Докажите, что с помощью центрально-симметричных шестиугольников произвольной формы (даже невыпуклых) можно заполнить плоскость. Приведите пример соответствующего паркета.
6. Составьте паркет из греческих крестов (рис. 6.21).
7. Нарисуйте паркеты, двойственные к паркетам, изображённым на рисунках 6.1—6.11.
8. Приведите пример невыпуклого семиугольника, которым можно заполнить плоскость.
9. Приведите пример невыпуклого восьмиугольника, которым можно заполнить плоскость.
10. Два равных выпуклых четырёхугольника разрежали: первый — по одной диагонали, а второй — по другой диагонали. Докажите, что из полученных четырёхугольников можно сложить параллелограмм.
11. Выпуклый четырёхугольник разрежали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины его противоположных сторон. Докажите, что из этих частей можно сложить параллелограмм.
12. Сколько красок потребуется для раскраски правильных паркетов так, чтобы соседние многоугольники были раскрашены в разные цвета?
13. Сложите из спичек правильные паркеты, изображённые на рисунках 6.1—6.11.
14. Придумайте паркеты, составленные из равных фигур, ограниченных кривыми линиями.

§7 Подобие фигур. Гомотетия

Преобразование плоскости, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, называется *подобием*. Само это число называется *коэффициентом подобия*.

Таким образом, если точки A , B при подобии переходят соответственно в точки A' , B' , то $A'B' = k \cdot AB$, или, что то же самое, $A'B' : AB = k$, причём k — одно и то же число для всех точек A , B .

Заметим, что при $k = 1$ подобие является движением.

Две фигуры F и F' называются **подобными**, если одна из них переводится в другую подобием (рис. 7.1).

Рассмотрим некоторые свойства подобия.

Свойство 1. Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Доказательство. Пусть точка B принадлежит отрезку AC . Тогда $AB + BC = AC$. Подобие переводит эти точки соответственно в точки A' , B' , C' . Поскольку при подобии расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, то для точек A' , B' , C' будет иметь место равенство $A'B' + B'C' = A'C'$. Следовательно, точка B' будет принадлежать отрезку $A'C'$. Из этого следует, что подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Свойство 2. Подобие сохраняет величины углов.

Доказательство. Пусть угол с вершиной C и сторонами a , b переводится подобием в угол с вершиной C' и сторонами a' , b' (рис. 7.2). Возьмём на сторонах a , b точки A , B , и пусть A' , B' — соответствующие им точки на сторонах a' , b' . Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны (по третьему признаку подобия треугольников) и, следовательно, имеют соответственно равные углы. В частности, $\angle C = \angle C'$.

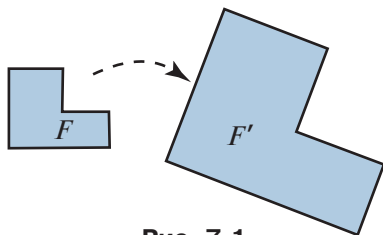


Рис. 7.1

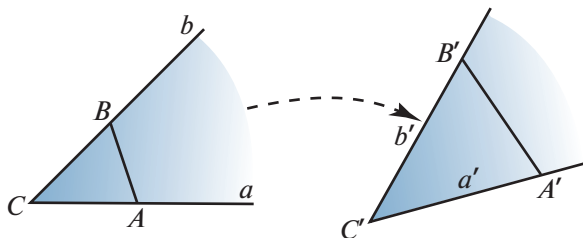


Рис. 7.2

Приведём пример преобразования подобия. Зафиксируем точку O и положительное число k . Каждой точке A плоскости, отличной от O , сопоставим точку A' на луче OA так, что $OA' = k \cdot OA$ (рис. 7.3). Точке O сопоставим её саму. Полученное преобразование плоскости называется *гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом k .

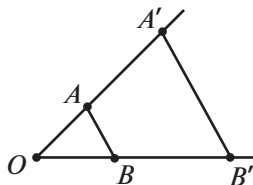


Рис. 7.3

ТЕОРЕМА

Гомотетия является подобием с тем же коэффициентом.

Доказательство. Пусть при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k точки A, B переходят соответственно в точки A', B' (см. рис. 7.3). Тогда треугольники AOB и $A'O'B'$ подобны (по второму признаку подобия треугольников) и, следовательно, $A'B' = k \cdot AB$, т. е. гомотетия является подобием с коэффициентом k .

ПРИМЕР 1. Докажите, что композиция двух преобразований подобия является подобием.

Решение. Пусть даны два преобразования подобия с коэффициентами k_1 и k_2 . При первом преобразовании расстояния между точками умножаются на k_1 , а при втором — на k_2 . Тогда при композиции этих преобразований расстояния между точками будут умножаться на $k_1 \cdot k_2$, т. е. оно будет преобразованием подобия с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$.

ПРИМЕР 2. Докажите, что произведение отрезков любой хорды, проведённой через внутреннюю точку круга, постоянно и равно произведению отрезков диаметра, проведённого через ту же точку.

Решение. Пусть дан круг с центром в точке O , хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке E (рис. 7.4). Докажем, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Треугольники ACE и DBE подобны ($\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle B$). Следовательно, $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$, и, значит, $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

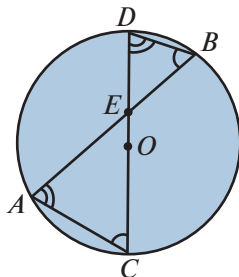


Рис. 7.4

Вопросы

1. Какое преобразование плоскости называется подобием?
2. Что называется коэффициентом подобия?
3. Подобны ли равные фигуры?
4. Сформулируйте свойства подобия.
5. Какое преобразование плоскости называется гомотетией?
6. Что называется центром и коэффициентом гомотетии?

Задачи

1. Фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом k . С каким коэффициентом фигура F подобна фигуре F' ?
2. Приведите примеры фигур, которые подобны самим себе при любом коэффициенте подобия.
3. Верно ли, что если два угла подобны, то они равны?
4. Как расположены точки A и A' относительно центра гомотетии O , если: а) $0 < k < 1$; б) $k > 1$?
5. Существуют ли прямые, которые переводятся гомотетией сами в себя?
6. Даны точки A , B и гомотетичные им точки A' , B' соответственно. Можно ли найти центр данной гомотетии?
7. Как расположены две окружности друг относительно друга, если их центром гомотетии является: а) центр одной из окружностей; б) точка, принадлежащая одной из данных окружностей?
8. Докажите, что любые два квадрата подобны.
9. Докажите, что любые две окружности подобны и коэффициент подобия равен отношению их радиусов.
10. Постройте треугольник, гомотетичный данному, приняв за центр одну из вершин данного треугольника, с коэффициентом гомотетии, равным: а) 3; б) $\frac{1}{3}$.
11. Стороны четырёхугольника равны 14 см, 21 см, 10 см и 42 см. Найдите стороны подобного ему четырёхугольника, если известно, что его меньшая сторона равна 2 см.
12. Подобны ли прямоугольники, образующие рамку картины (рис. 7.5)?
13. Трапеция разделена средней линией на две трапеции. Будут ли они подобны?



Рис. 7.5

14. Какие условия должны выполняться, чтобы были подобны: а) два ромба; б) два параллелограмма; в) две равнобедренные трапеции?
- *15. Докажите, что любые два правильных многоугольника с одним и тем же числом сторон подобны.

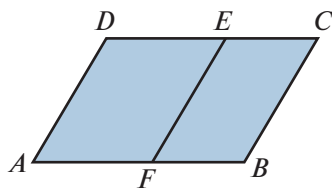


Рис. 7.6

- *16. Докажите, что периметры правильных многоугольников с одним и тем же числом сторон относятся как радиусы описанных окружностей.
- *17. На рисунке 7.6 изображён параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $BC = b$, от которого отсечён другой параллелограмм $FBCE$, подобный данному. Каким должен быть отрезок BF ?

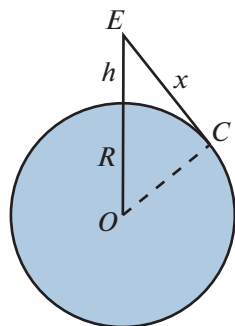


Рис. 7.7

- *18. Две хорды окружности пересекаются. Одна из них точкой пересечения делится на отрезки 2 см и 8 см, а другая пополам. Найдите вторую хорду.
- *19. Как далеко видна поверхность Земли с самолёта (рис. 7.7), летящего на высоте $h = 10$ км над Землёй (радиус Земли $R \approx 6370$ км)?
- *20. Докажите, что два треугольника подобны тогда и только тогда, когда существует преобразование подобия, переводящее один из них в другой.
- *21. Докажите, что любые две параболы подобны.
- *22. Подобны ли: а) любые два эллипса; б) любые две гиперболы?

§ 8* Золотое сечение

С давних времён люди занимались поисками гармонии и совершенства. Древние греки считали, что мир устроен по законам гармонии и задачей познания мира, таким образом, является поиск гармонии.

Одним из вопросов, волновавших древних учёных, был вопрос о нахождении наилучшего соотношения неравных частей, составляющих вместе единое целое. Его решение связывают с именем Пифагора, который установил, что наиболее совершенным делением целого на две неравные части является такое, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому. В Древней Греции такое деление называлось *гармоническим отношением*. Интерес к нему необычайно возрос в эпоху Возрождения (XV—XVII вв.). В 1509 году итальянский математик, монах Лука Пачоли (1445 — ок. 1514), друг Леонардо да Винчи (1452—1519), написал целую книгу «О божественной пропорции». Леонардо выполнил иллюстрации к этой книге. В ней воздействие божественной пропорции на человека называлось «существенным, невыразимым, чудесным, неизъяснимым, неугасимым, возвышенным, превосходнейшим, непостижимым». Пачоли назвал гармоническое отношение божественной пропорцией (*Sectio Divina*). Термин *золотое сечение* (*Sectio aurea*) появился в Германии в первой половине XIX века.

Выясним, каким числом выражается золотое сечение. Для этого выберем произвольный отрезок и примем его длину за единицу. Разобьём этот отрезок на две неравные части и большую из них обозначим через x . Тогда меньшая часть равна $1 - x$ (рис. 8.1). По определению золотого сечения должно выполняться равенство $(1 - x) : x = x : 1$. Мы получили уравнение относительно x , которое легко свести к квадратному $x^2 + x - 1 = 0$.



Рис. 8.1

Положительный корень этого уравнения равен $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,6$.

Итак, если длина исходного отрезка равна 1, то его большая часть при золотом сечении равна примерно 0,6.

Полученное число обозначается буквой ϕ . Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия, который часто использовал золотое сечение в своих произведениях. Самыми знаменитыми из них были статуи Зевса Олимпийского (которая считалась одним из семи чудес света) и Афины Парфенос.

Ещё раз подчеркнём, что пропорции золотого сечения создают впечатление гармонии, красоты. Поэтому скульпторы, архитекторы, художники использовали и используют золотое

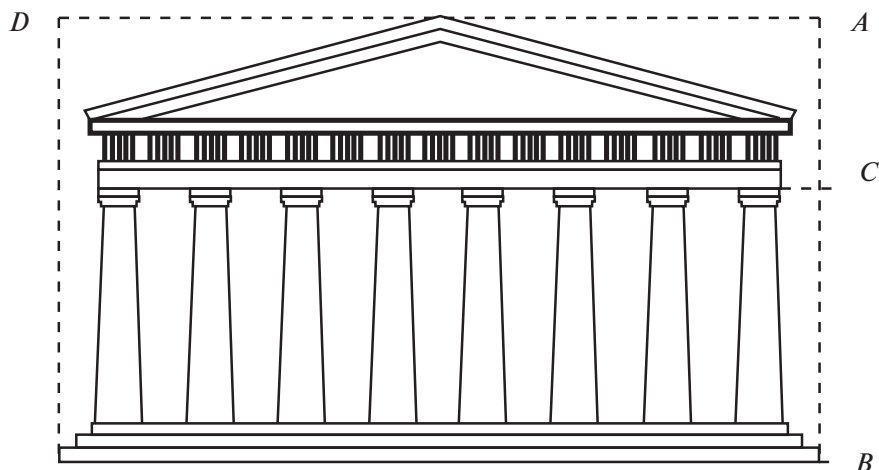


Рис. 8.2

сечение в своих произведениях. Например, знаменитая статуя Аполлона Бельведерского состоит из частей, делящихся в золотом отношении. Причём не только вся статуя, но и отдельные её части делятся в золотом отношении.

Одно из красивейших произведений древнегреческой архитектуры — Парфенон в Афинах (V в. до н. э.) — содержит в себе золотые пропорции (рис. 8.2). Так, отношение высоты AB здания к его длине AD равно ϕ . Кроме того, отношение AC к BC также равно ϕ .

Известный русский архитектор М. Ф. Казаков тоже широко использовал в своём творчестве золотое сечение, которое можно обнаружить, например, в архитектуре здания бывшего Сената в Кремле. По проекту М. Ф. Казакова в Москве была построена Голицынская больница, которая в настоящее время называется Первой клинической больницей им. Н. И. Пирогова.

Пропорции храма Василия Блаженного в Москве (рис. 8.3 на с. 38) определяются восемью членами ряда золотого сечения: $1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6, \phi^7$.

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, называется **золотым прямоугольником** (рис. 8.4 на с. 38). Золотые прямоугольники обладают многими интересными свойствами.

Так, из определения золотых прямоугольников непосредственно следует, что все они подобны.

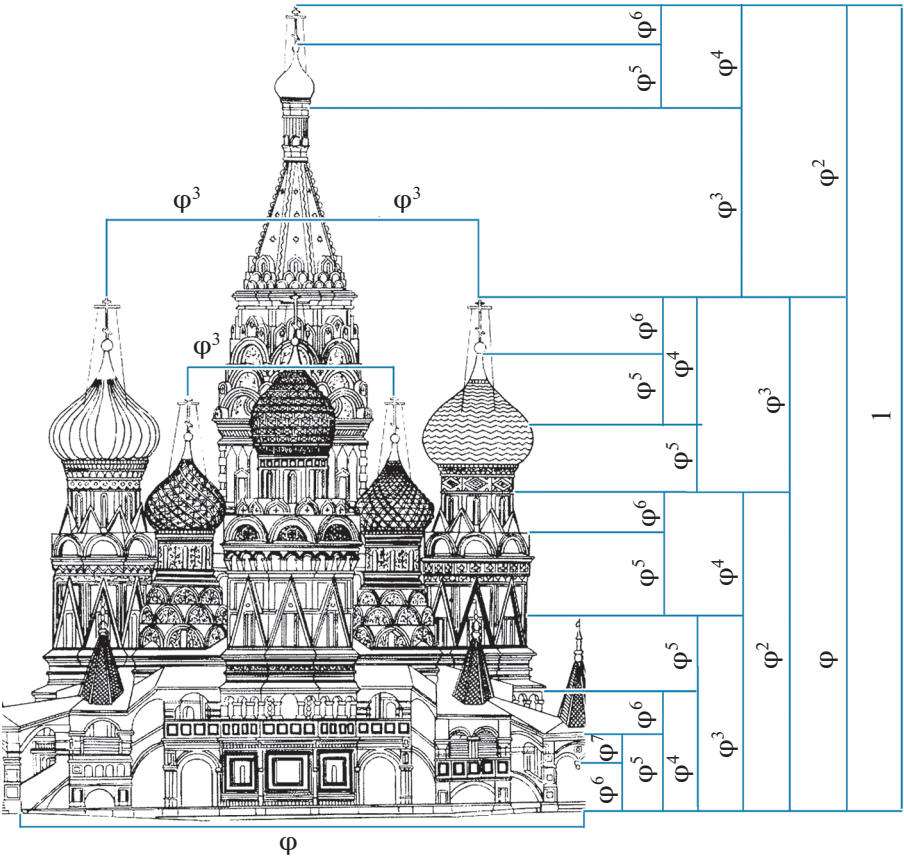


Рис. 8.3

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник меньших размеров, подобный исходному (рис. 8.5).

Если этот процесс продолжить, то мы получим так называемые *вращающиеся квадраты* и весь прямоугольник окажется составленным из этих квадратов (рис. 8.6, а). Если вершины квадратов соединить плавной кривой, то получим кривую, называемую *золотой спиралью* (рис. 8.6, б), форму которой имеют как раковины морских моллюсков, так и галактики во Вселенной.



Рис. 8.4

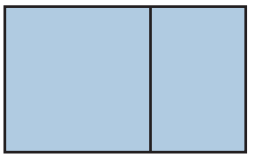


Рис. 8.5

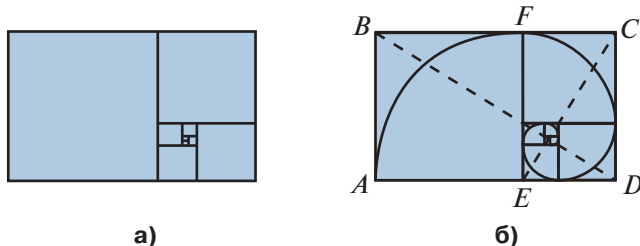


Рис. 8.6

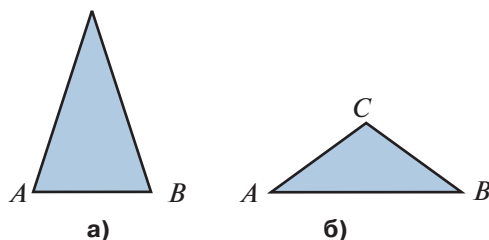


Рис. 8.7

Помимо золотых прямоугольников имеются и **золотые треугольники**. Равнобедренный треугольник называется золотым, если его боковая сторона и основание находятся в золотом отношении.

Возможны два типа золотых треугольников (рис. 8.7, а, б). В первом случае $\frac{AB}{AC} = \varphi$. Во втором случае $\frac{AC}{AB} = \varphi$.

Докажем, что золотыми треугольниками являются равнобедренные треугольники с углами 36° и 108° при вершинах, противолежащих основаниям. Для этого в равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине C , равным 36° , проведём биссектрису AD (рис. 8.8). Треугольники ACD и ABD равнобедренные, и треугольник BDA подобен треугольнику ABC . Примем боковую сторону треугольника ABC за единицу, а его основание за x . Тогда $AD = CD = x$, $BD = 1 - x$. Из подобия треугольников получаем равенство

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1},$$

из которого следует, что $x = \varphi$, т. е. треугольник ABC — золотой. Кроме того, треугольник ACD с углом при вершине D , равным 108° , также золотой.

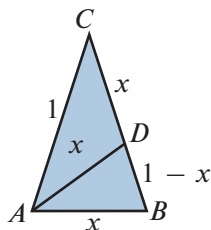


Рис. 8.8

На рисунке 8.9 изображён правильный пятиугольник с проведёнными в нём диагоналями, образующими звёздчатый правильный пятиугольник — **пентаграмму**. Легко видеть, что все треугольники, на которые при этом разбивается пятиугольник, являются золотыми.

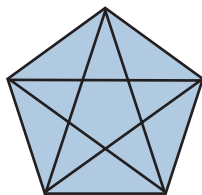


Рис. 8.9

Дополнительная литература

Васютинский Н. Золотая пропорция. — М.: Молодая гвардия, 1990.

Вопросы

1. Что называется гармоническим отношением?
2. Где и когда появился термин «золотое сечение»?
3. Каким числом выражается золотое сечение?
4. Какой прямоугольник называется золотым?
5. Какие треугольники называются золотыми?
6. Что такое пентаграмма?

Задачи

1. Найдите радиус окружности, описанной около правильного десятиугольника со стороной 1.
2. В треугольнике ABC биссектриса BL равна отрезку LC и стороне AB . Найдите периметр данного треугольника, если $AC = b$.
3. На рисунке 8.10 окружность с центром в точке O касается прямой AB в точке B , $2OB = AB$, $AE = AC$. Докажите, что треугольники ABC и ADB подобны. Выведите из этого, что точка E делит отрезок AB в золотом отношении. Укажите способ деления данного отрезка в золотом отношении с помощью циркуля и линейки.

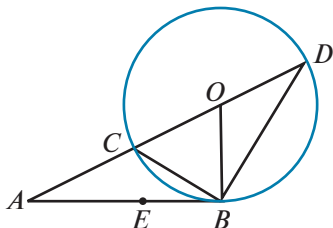


Рис. 8.10

4. Докажите, что каждый следующий виток золотой спирали подобен предыдущему. Найдите коэффициент подобия.
5. Докажите, что общей точкой вращающихся золотых прямоугольников (см. рис. 8.6, б на с. 39) является точка пересечения диагоналей BD и EC .
6. Отсекая золотые треугольники аналогично тому, как это было сделано для золотого прямоугольника, постройте последовательность вращающихся золотых треугольников.
7. Соединяя вершины треугольников плавной кривой, нарисуйте золотую спираль.
8. Докажите, что в пентаграмме все треугольники золотые.
9. Сторона правильного пятиугольника равна 1. Найдите его диагональ.
10. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника образуют правильный пятиугольник. Найдите сторону этого пятиугольника, если сторона исходного пятиугольника равна 1.
11. С помощью циркуля и линейки постройте правильный пятиугольник с данной стороной.
12. Катет прямоугольного треугольника равен 1. Найдите его гипотенузу, если угол, противолежащий данному катету, равен: а) 18° ; б) 54° .
13. В полукруг с диаметром AB вписан квадрат $CDEF$ (рис. 8.11). Докажите, что отрезок AE и сторона квадрата ED находятся в золотом отношении.
14. Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем расправлена так, чтобы узел стал плоским (рис. 8.12). Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

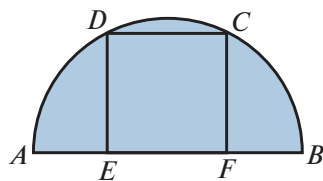


Рис. 8.11

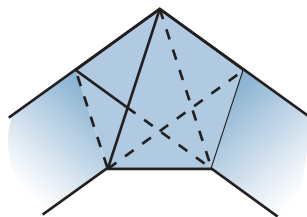


Рис. 8.12

§9 Площади подобных фигур

ТЕОРЕМА

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство. Пусть площадь фигуры Φ равна S и подобие с коэффициентом k переводит фигуру Φ в фигуру Φ_1 (рис. 9.1). Тогда единичный квадрат в фигуре Φ укладывается S раз. Подобие переводит единичный квадрат в квадрат со стороной k . Следовательно, квадрат со стороной k в фигуре Φ_1 укладывается S раз. Поскольку площадь квадрата со стороной k равна k^2 , то площадь S_1 фигуры Φ_1 будет равна $k^2 S$.

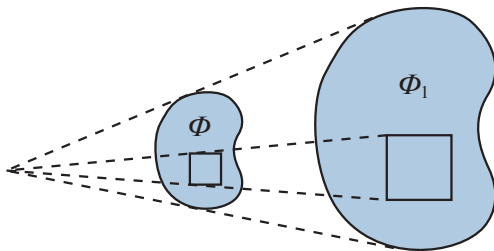


Рис. 9.1

Следствие. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты их сходственных сторон.

ПРИМЕР 1. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 1 : 2. Как относятся их площади?

Решение. В этом случае соответствующие стороны подобных многоугольников также относятся как 1 : 2, и, следовательно, площади этих многоугольников относятся как 1 : 4.

ПРИМЕР 2. В круге с центром O проведена хорда AB . На радиусе OA как на диаметре построена окружность. Докажите, что площади двух сегментов, отсекаемых хордой AB от обоих кругов, относятся как 4 : 1.

Решение. Заметим, что большая окружность получается из малой гомотетией с центром в точке A и коэффициентом 2. При этой гомотетии сегмент малой окружности переходит в сегмент большой окружности. Следовательно, отношение их площадей равно 4 : 1.

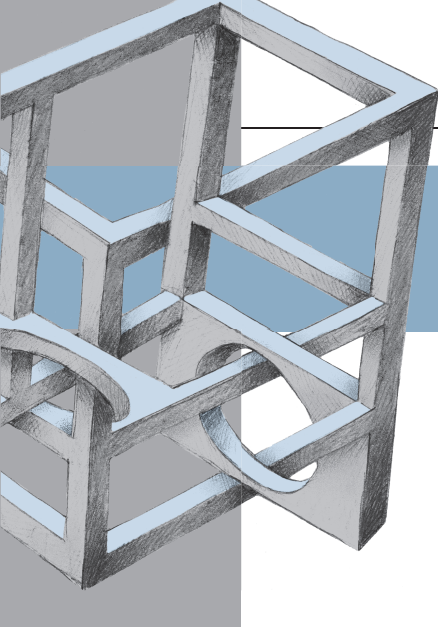
Вопросы

1. Чему равно отношение площадей подобных фигур?
2. Чему равно отношение площадей подобных многоугольников?

Задачи

1. Найдите отношение площадей двух квадратов, если отношение сторон этих квадратов равно: а) $2 : 3$; б) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; в) $1 : 1,5$.
2. Как относятся стороны двух квадратов, если отношение площадей этих квадратов равно: а) $4 : 9$; б) $3 : 4$; в) $0,5 : 2$?
3. Стороны равносторонних треугольников равны 6 см и 7 см. Чему равно отношение их площадей?
4. Как изменится площадь правильного шестиугольника, если его стороны: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз?
5. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, отсечённого от него средней линией?
6. В треугольнике проведены все средние линии. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, образованного средними линиями?
7. Одна из сторон треугольника разделена на три равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные другой стороне. Найдите отношения площади данного треугольника к площадям треугольников, отсечённых построенными прямыми.
8. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит его на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит другие стороны треугольника?
9. Площадь данного многоугольника равна 45 см^2 . Чему равна площадь многоугольника, ему подобного, если сходственные стороны многоугольников равны 15 см и 10 см?
10. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $3 : 5$. Площадь большего многоугольника равна 40 м^2 . Найдите площадь второго многоугольника.
11. Как изменится площадь многоугольника, если каждая из его сторон: а) увеличится в n раз; б) уменьшится в m раз (а величины углов не изменятся)?

12. Периметры двух правильных n -угольников относятся как $a : b$. Как относятся их площади?
13. Докажите, что отношение площадей правильных шестиугольников, вписанного и описанного около данной окружности, равно $3 : 4$.
- *14. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , делит площадь этого треугольника пополам. Найдите отношение, в котором эта прямая делит высоту треугольника, проведённую из вершины C .
- *15. Стороны прямоугольника равны a и b ($a > b$). Найдите площадь прямоугольника, подобного данному, у которого большая сторона равна b .
- *16. Площадь квадрата равна S . На сколько нужно увеличить стороны этого квадрата, чтобы его площадь увеличилась на T ?
- *17. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и её основаниями, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.



РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 10 Теорема косинусов

Следующая теорема является обобщением теоремы Пифагора.

ТЕОРЕМА

(Теорема косинусов.) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC с острым углом C (рис. 10.1). Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Из вершины A опустим перпендикуляр AD . Тогда

$$AD = b \sin C, \quad CD = b \cos C, \quad BD = a - b \cos C.$$

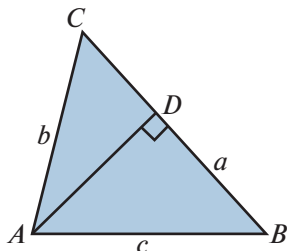


Рис. 10.1

По теореме Пифагора имеем

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b \cos C)^2 + (b \sin C)^2 = \\ &= a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C + b^2 \sin^2 C = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

Итак, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

Самостоятельно рассмотрите случаи прямого и тупого угла C .

Используя теорему косинусов, выведем формулу, выражающую площадь треугольника через его стороны. Она была впервые найдена древнегреческим математиком Героном Александрийским (приблизительно I век) и носит название *формула Герона*:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — его полупериметр.

Для доказательства этой формулы воспользуемся формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin C$. Выразим $\sin C$ через стороны треугольника по теореме косинусов, тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Отсюда $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Значит,

$$\begin{aligned} \sin^2 C &= 1 - \cos^2 C = (1 + \cos C)(1 - \cos C) = \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} = \\ &= \frac{(a + b - c)(a + b + c)(c - a + b)(c + a - b)}{4a^2b^2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $c + a - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, получаем

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставляя это выражение в формулу площади треугольника, окончательно получаем

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ПРИМЕР 1. Даны три стороны треугольника $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Найдите косинусы его углов A , B , C .

Решение. По теореме косинусов имеем

$$2^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos A,$$

$$\text{откуда } \cos A = \frac{7}{8}.$$

Аналогичным образом

$$3^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos B,$$

$$\text{откуда } \cos B = \frac{11}{16};$$

$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos C,$$

$$\text{откуда } \cos C = -\frac{1}{4}.$$

ПРИМЕР 2. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 5, 6, 7.

Решение. По формуле Герона находим

$$S = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}.$$

Вопросы

1. Сформулируйте теорему косинусов.
2. Почему теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора?
3. Когда косинус угла отрицателен?
4. Может ли быть отрицательным: а) синус; б) тангенс; в) котангенс?

Задачи

1. В треугольнике ABC $AB = 12$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 60^\circ$. Найдите третью сторону.
2. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 120° , если прилежащие к нему стороны равны: а) 6 см и 10 см; б) 14 мм и 16 мм.
3. При каких значениях угла A квадрат стороны треугольника, лежащей против этого угла: а) меньше суммы квадратов двух других сторон; б) равен сумме квадратов двух других сторон; в) больше суммы квадратов двух других сторон?
4. Не вычисляя углов треугольника, укажите его вид (относительно углов), если стороны треугольника равны: а) 7, 8, 12; б) 0,3, 0,4, 0,5; в) 13, 14, 15.

5. Как расположен центр описанной окружности относительно треугольника, стороны которого равны:
а) 6, 8, 10; б) 4, 5, 6; в) 3, 4, 6?
6. Стороны треугольника 5 м, 6 м и 7 м. Найдите косинусы его углов.
7. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними φ . Найдите стороны параллелограмма.
8. Даны стороны параллелограмма a и b и один из его углов ψ . Найдите диагонали параллелограмма.
9. Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 м и 5 м на третью сторону.
- *10. Стороны треугольника равны a , b и c . Угол C , противолежащий стороне c , равен 120° . Докажите, что выполняется равенство $c^2 = a^2 + ab + b^2$.
- *11. Докажите, что если для сторон треугольника выполняется равенство $(b + c + a)(b + c - a) = 3bc$, то угол A , лежащий против стороны a , равен 60° .
12. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 7, 8, 9.
- *13. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
- *14. Стороны параллелограмма равны 6 и 7, одна диагональ 11. Найдите другую диагональ.
- *15. Стороны треугольника равны a , b , c . Докажите, что для медианы m_c , проведённой к стороне c , имеет место формула

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

16. Стороны треугольника равны 5, 6, 7. Найдите медиану, проведённую к стороне, равной 6.
- *17. В треугольнике ABC $AC = 10$, $BC = 24$, медиана CM равна 13. Найдите сторону AB .
- *18. Стороны треугольника равны a , b , c . Докажите, что для биссектрисы l_c , проведённой к стороне c , имеет место формула

$$l_c = \sqrt{ab - c'c''},$$

где c' , c'' — отрезки, на которые биссектриса делит сторону c .

- *19. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 6. Найдите биссектрису, проведённую к большему катету.

- *20. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите биссектрису, проведённую из вершины прямого угла.
- *21. В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 7$, $AC = 8$. Найдите биссектрису AA_1 .
- *22. Найдите геометрическое место точек C , сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B постоянна и равна c^2 , т. е. $AC^2 + BC^2 = c^2$.

§11 Теорема синусов

ТЕОРЕМА

(Теорема синусов.) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Причём отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около треугольника окружности.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 11.1). Опишем около него окружность с центром O и радиусом R . Рассмотрим треугольник ABD , сторона AD которого проходит через O . Тогда углы C и D опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны. Угол ABD опирается на половину окружности и, следовательно, равен 90° . Таким образом,

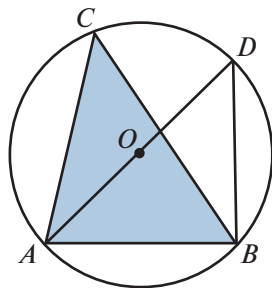


Рис. 11.1

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = AD = 2R.$$

Аналогично имеют место равенства

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R = \frac{AC}{\sin B}.$$

Итак, имеем равенства

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R,$$

означающие, что стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов и их отношения равны диаметру описанной окружности.

Теорема синусов позволяет по известным углам и одной стороне треугольника найти две другие его стороны.

Действительно, пусть в треугольнике ABC известна сторона AB и углы A , B и C . Тогда стороны AC и BC выражаются формулами:

$$AC = AB \cdot \frac{\sin B}{\sin C}, \quad BC = AB \cdot \frac{\sin A}{\sin C}.$$

С помощью теоремы синусов решаются практические задачи нахождения расстояний до недоступных предметов. Пусть требуется определить расстояние от данного пункта A до недоступного пункта C , т. е. такого, для которого нельзя произвести непосредственное измерение расстояния AC . В этом случае берут ещё один пункт B и измеряют расстояния AB и углы A и B в треугольнике ABC (рис. 11.2). Затем, используя приведённые выше формулы, находят расстояние AC .

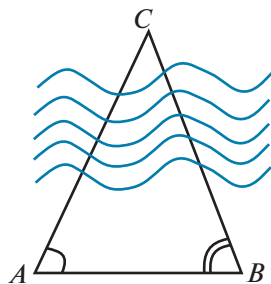


Рис. 11.2

ТЕОРЕМА

Радиус R окружности, описанной около треугольника ABC , для которого $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ и площадь равна S , выражается формулой

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой синусов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Выразим $\sin C$. Получим

$$\sin C = \frac{c}{2R}.$$

Подставляя это выражение синуса в формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$, получим

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

Откуда

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}.$$

ПРИМЕР 1. В треугольнике ABC сторона AB равна 4 см, угол C равен 150° . Найдите радиус описанной окружности.
Решение. По теореме синусов радиус R описанной окружности равен половине отношения стороны треугольника к синусу противолежащего угла. Поэтому

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sin 150^\circ} = 4 \text{ (см)}.$$

ПРИМЕР 2. В треугольнике даны две стороны $a = 3$, $b = 3\sqrt{2}$ и противолежащий стороне a угол A , равный 30° . Найдите угол B , лежащий против стороны b .

Решение. По теореме синусов $3\sqrt{2} : \sin B = 3 : \sin A$. Откуда находим $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и, следовательно, угол B равен 45° или 135° .

Вопросы

1. Сформулируйте теорему синусов.
2. Как выражаются стороны треугольника через известную сторону и его углы?
3. Какую практическую задачу позволяет решить теорема синусов?

Задачи

1. Стороны треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите отношения синусов углов этого треугольника.
2. Синусы углов треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Как относятся его стороны? Какой это треугольник?
3. Найдите отношения сторон $AC : BC$ и $AB : BC$ в треугольнике ABC , в котором: а) $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 30^\circ$; б) $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$.
4. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 120^\circ$. Найдите сторону BC .
5. Сторона AB треугольника ABC равна 10 см. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если противолежащий этой стороне угол C равен: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° ; д) 150° .

6. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 3 см. Найдите сторону AB этого треугольника, если противолежащий ей угол C равен: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° ; д) 150° .
7. Диагональ параллелограмма равна c и образует со сторонами этого параллелограмма углы φ и ψ . Выразите стороны параллелограмма через c , φ и ψ .
8. Углы треугольника относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите отношение сторон.
9. Спортивный самолёт летит по замкнутому треугольному маршруту с постоянной скоростью. Два угла этого треугольника равны по 30° . Большую сторону он пролетел за 1 ч. За сколько времени он пролетит весь маршрут?
10. Используя рисунок 11.3, укажите способ нахождения высоты недоступного предмета.

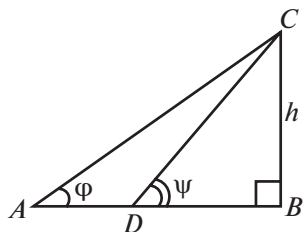


Рис. 11.3

- *11. Докажите, используя теорему синусов, что биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.
- *12. В треугольнике ABC проведена медиана CD . Докажите, что

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \angle DCB}{\sin \angle DCA}.$$

- *13. Докажите, что для произвольного треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ имеет место формула:

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A.$$

- *14. Докажите, что для произвольного треугольника ABC имеет место формула:

$$\sin C = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B.$$

15. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника, стороны которого равны 1.
16. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противоположный ей угол C равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
17. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противоположный ей угол C равен 150° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
18. Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противоположный этой стороне.
19. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, стороны которого равны 5, 5, 6.
20. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 4, 5, 6.
- *21. Используя рисунок 11.4, укажите способ нахождения глубины h оврага.
- *22. Используя рисунок 11.5, укажите способ нахождения расстояния d между двумя недоступными объектами C и D .

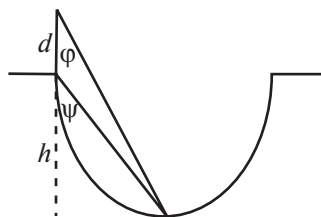


Рис. 11.4

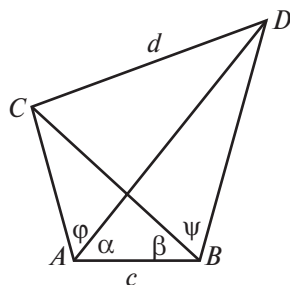


Рис. 11.5

§12* Теоремы Менелая и Чебы

Здесь мы рассмотрим общие теоремы, позволяющие устанавливать, в каком случае три точки, лежащие на сторонах треугольника или их продолжениях, принадлежат одной прямой (теорема Менелая), а также в каком случае три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке (теорема Чебы).

Начнём с теоремы Менелая, доказанной древнегреческим математиком и астрономом Менелаем Александрийским, жившим в I веке до н. э.

ТЕОРЕМА

(Теорема Менелая.) Пусть на сторонах AB , BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (*)$$

Доказательство. Пусть точки A_1 , B_1 , C_1 принадлежат одной прямой (рис. 12.1).

Опустим из вершин треугольника ABC перпендикуляры AA' , BB' , CC' на эту прямую.

Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны, и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB'}{CC'} \quad \text{и} \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CC'}{AA'}.$$

Перемножая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} = 1.$$

Докажем обратное. Пусть на сторонах AB , BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 , для которых выполняется равенство (*). Предположим, что прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C' . По доказанному выполняется равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Учитывая равенство (*), получаем равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$,

из которого следует совпадение точек C' и C_1 , и, значит, точки A_1 , B_1 , C_1 принадлежат одной прямой.

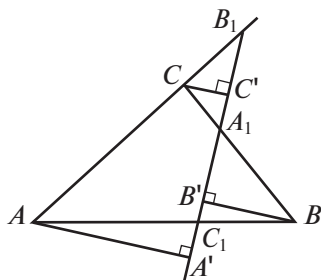


Рис. 12.1

Рассмотрим пример решения задачи с использованием теоремы Менелая.

ПРИМЕР 1. Точка C_1 делит сторону AB треугольника ABC в отношении $2 : 1$, точка B_1 лежит на продолжении стороны AC , и $AC = CB_1$. В каком отношении прямая B_1C_1 делит сторону BC ?

Решение. Пусть A_1 — точка пересечения B_1C_1 и BC . По условию $\frac{AC_1}{C_1B} = 2$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2}$. Используя теорему Менелая, находим $\frac{BA_1}{A_1C} = 1$.

Рассмотрим теперь теорему, опубликованную в 1678 году итальянским математиком и инженером Джованни Чевой.

ТЕОРЕМА

(Теорема Чевы.) Пусть на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (**)$$

Доказательство. Предположим, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O (рис. 12.2).

Опустим из вершин A и B треугольника ABC перпендикуляры AA' , BB' на прямую CC_1 . Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны, и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}.$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BOA}}{S_{COA}} \quad \text{и} \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{COB}}{S_{AOB}}.$$

Перемножая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

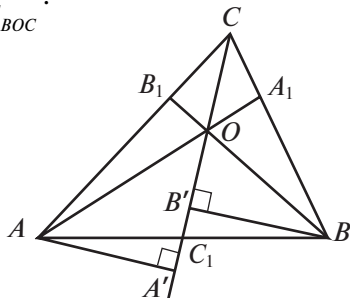


Рис. 12.2

Докажем обратное. Пусть для точек A_1 , B_1 , C_1 , взятых соответственно на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC , выполняется равенство (**). Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 через O и точку пересечения прямых CO и AB через C' . Тогда, на основании доказанного, имеет место равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Учитывая равенство (**), получим равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует совпадение точек C' и C_1 , и, значит, прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

Заметим, что из теоремы Чевы непосредственно следует, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

ПРИМЕР 2. Точки C_1 и A_1 делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении $1 : 2$. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке O . Найдите отношение, в котором прямая BO делит сторону AC .

Решение. По условию $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2}$. Используя теорему

Чевы, имеем $\frac{CB_1}{B_1A} = 4$.

Воспользуемся теоремой Чевы для установления ещё одной замечательной точки треугольника.

Точка Жергонна. Прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергонна.

Действительно, пусть окружность касается сторон BC , AC и AB треугольника ABC соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 (рис. 12.3).

Тогда

$$AB_1 = AC_1, BC_1 = BA_1, CA_1 = CB_1.$$

Следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ и,

значит, прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

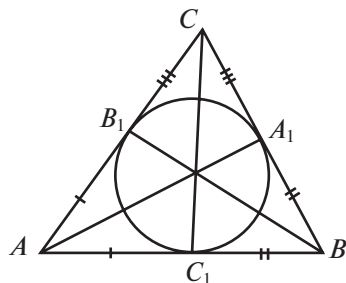


Рис. 12.3

ТЕОРЕМА

(Теорема Ван Обеля.) Пусть на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Если прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O , то имеет место равенство

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Доказательство. Через вершину C треугольника ABC проведём прямую, параллельную стороне AB (рис. 12.4).

Продолжим AA_1 и BB_1 до пересечения с этой прямой в точках A' и B' соответственно. Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{CO}{OC_1} &= \frac{A'B'}{AB} \\ &= \frac{A'C + CB'}{AB} = \frac{A'C}{AB} + \frac{CB'}{AB}. \end{aligned}$$

Из подобия треугольников $A'SA_1$ и ABA_1 , $CB'B_1$ и ABB_1 имеем

$$\frac{A'C}{AB} = \frac{CA_1}{A_1B}, \quad \frac{CB'}{AB} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Следовательно, $\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$.

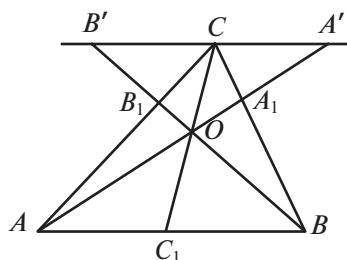


Рис. 12.4

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

ПРИМЕР 3. В каком отношении делятся биссектрисы треугольника точкой их пересечения?

Решение. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — биссектрисы треугольника ABC , O — точка их пересечения, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}.$$

Поэтому $\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$. Аналогично $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$ и $\frac{BO}{OB_1} = \frac{a+c}{b}$.

Вопросы

1. Сформулируйте теорему Менелая.
2. Когда жил Менелай?
3. Сформулируйте теорему Чева.
4. Когда жил Джованни Чева?
5. Какая точка называется точкой Жергонна?
6. Сформулируйте теорему Ван Обеля.

Задачи

1. Точка C_1 — середина стороны AB треугольника ABC . Точка O — середина отрезка CC_1 . В каком отношении прямая AO делит сторону BC ?
2. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении $1:2$. Точка B_1 делит сторону AC в отношении $2:1$. Прямая A_1B_1 пересекает продолжение стороны AB в точке C_1 . Найдите отношение $AB:BC_1$.
3. Точки C_1, B_1, A_1 делят стороны AB, AC, BC соответственно в отношениях $4:1, 2:1, 1:2$. Выясните, пересекаются ли прямые AA_1, BB_1, CC_1 в одной точке.
4. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении $1:3$. В каком отношении точка B_1 должна делить сторону AC , чтобы точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 принадлежала медиане CC_1 треугольника ABC ?
5. Используя теорему Ван Обеля, докажите, что медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношениях $2:1$, считая от вершины.
6. На продолжениях сторон AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AB = BC_1, BC = CA_1, CA = AB_1$. Найдите отношение, в котором прямая AB_1 делит сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.
7. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $2:1$ и $1:2$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь треугольника AOB .
8. На медиане CC_1 треугольника ABC взята точка M . Прямые AM и BM пересекают стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AB и A_1B_1 параллельны.
9. Отрезок MN , соединяющий середины сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$, делится диагоналями на три равные части. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, одно из оснований AB или CD которой вдвое больше другого.

10. Пусть на продолжении сторон AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

11. Пусть на стороне AB и продолжении сторон BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

12. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (**точке Нагеля**). (Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон.)

13. Пусть на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что выполняется равенство

$$\frac{OA_1}{A_1A} + \frac{OB_1}{B_1B} + \frac{OC_1}{C_1C} = 1.$$

14. Пусть на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что выполняется равенство

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2.$$

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

§ 13 Длина окружности

Для нахождения длины окружности рассмотрим правильные многоугольники, вписанные в эту окружность. При увеличении числа сторон многоугольники приближаются к окружности. Поэтому длиной окружности считают число, к которому стремятся периметры правильных вписанных в эту окружность многоугольников при увеличении числа их сторон.

ТЕОРЕМА

Периметр P_n правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , выражается формулой

$$P_n = n \cdot 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Доказательство. Пусть $A_1 \dots A_n$ — правильный n -угольник, вписанный в окружность с центром в точке O и радиуса R (на рисунке 13.1 $n = 6$). Треугольник A_1OA_2 — равнобедренный, $OA_1 = OA_2 = R$. Проведём в нём высоту OH , которая одновременно будет биссектрисой и медианой. Угол A_1OH равен половине угла A_1OA_2 , равного $\frac{360^\circ}{n}$. Следовательно, $A_1H = R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ и, значит, $A_1A_2 = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$. Умножая

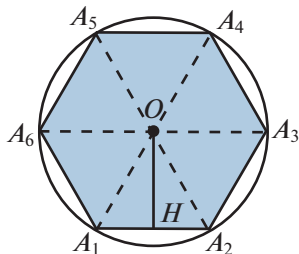


Рис. 13.1

это значение на n , получаем периметр правильного n -угольника $P_n = n \cdot 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Следствие. Периметры правильных n -угольников относятся как радиусы описанных около них окружностей.

Доказательство. Пусть P'_n, P''_n — периметры правильных n -угольников, вписанных в окружности радиусов R' и R'' соответственно. Тогда

$$P'_n = n \cdot 2R' \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P''_n = n \cdot 2R'' \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно, $\frac{P'_n}{P''_n} = \frac{R'}{R''}$.

ТЕОРЕМА

Отношение длин двух окружностей равно отношению их радиусов.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы дадим только набросок доказательства. Рассмотрим окружности радиусов R', R'' и вписанные в них правильные n -угольники. При увеличении числа сторон периметры правильных многоугольников приближаются к длинам соответствующих окружностей. Поскольку отношение этих периметров постоянно и равно $\frac{R'}{R''}$, то и отношение чисел, к которым стремятся эти периметры, т. е. отношение длин окружностей, также будет равно $\frac{R'}{R''}$.

Половина длины окружности единичного радиуса обозначается греческой буквой π . Таким образом, длина окружности единичного радиуса равна 2π . Из рассмотренной выше теоремы следует, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Таким образом, для длины C окружности радиуса R можем записать следующую формулу:

$$C = 2\pi R.$$

Для приближённого вычисления числа π в единичную окружность вписывают правильный многоугольник и находят его полупериметр. Чем больше число сторон вписанного многоугольника, тем более точное значение получается для числа π .

Вопрос о вычислении длины окружности и числа π занимал умы учёных на протяжении тысячелетий. Первое вычисление числа π , использующее строгие рассуждения, было сделано величайшим математиком древности Архимедом (287—212 гг. до н. э.). В своей работе «Об измерении круга» он доказал, что для числа π выполняются неравенства

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

На практике приближённое значение числа π берётся равным 3,14. Центральные углы в 1° разбивают всю окружность на 360 равных секторов. Поэтому длина дуги окружности в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть длины всей окружности, т. е. равна

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

Длина l дуги окружности в φ градусов, т. е. ограни-

чивающая центральный угол в φ градусов, равна $\frac{\pi R \varphi}{180}$.

Равенство $l = \frac{\pi \varphi}{180}$, выражающее длину дуги единичной окружности, устанавливает соответствие между длиной дуги и её градусной мерой. Это позволяет измерять углы не только с помощью градусов, но и с помощью длины дуги соответствующей окружности единичного радиуса. Величина длины дуги называется **радианной мерой угла**. Единицей радианной меры углов является **радиан**. Угол в один радиан — это угол, длина соответствующей дуги единичной окружности которого равна единице.

Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

ПРИМЕР. Чему равна длина окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1?

Решение. Радиус описанной окружности равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$, значит,

$$\text{длина окружности равна } 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Вопросы

1. Что считается длиной окружности?
2. Как выражается периметр правильного n -угольника через радиус описанной окружности?

3. Как относятся периметры двух правильных n -угольников?
4. Как относятся длины двух окружностей?
5. Что обозначает греческая буква π ?
6. Чему равна длина окружности радиуса R ?
7. Какие неравенства выполняются для числа π ?
8. Каково приближённое значение числа π ?
9. Чему равна длина дуги в 1° окружности радиуса R ?
10. Чему равна длина дуги в φ градусов окружности радиуса R ?
11. Чему равна градусная мера угла в один радиан?

Задачи

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его углы равны: а) 90° ; б) 135° ; в) 150° ?
2. Найдите периметры правильных: а) треугольника; б) четырёхугольника; в) шестиугольника, вписанных в единичную окружность.
3. Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в три раза; б) уменьшить в два раза?
4. Найдите длину окружности, описанной около квадрата со стороной a .
5. Найдите длину дуги окружности радиуса 1, соответствующей центральному углу в: а) 30° ; б) 135° ; в) 240° ; г) 315° .
6. Каким должен быть радиус окружности, в которой дуга в 1° имеет длину 1 м?
7. Какой длины должна быть хорда в окружности радиуса R , чтобы длины дуг, на которые она разбивает окружность, относились как $2 : 1$?
8. Найдите периметр правильного n -угольника, описанного около окружности радиуса R .
9. Докажите, что периметры правильных n -угольников относятся как радиусы вписанных в них окружностей.
10. Рассмотрев правильные шестиугольники, вписанный и описанный около окружности единичного радиуса, найдите нижнюю и верхнюю оценки для числа π .
11. Внутри окружности радиуса R расположены три равные окружности, которые касаются друг друга и данной окружности. Найдите их радиус.
12. Найдите радианную меру углов в: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .
13. Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{8}$; г) $\frac{5\pi}{6}$; д) $\frac{7\pi}{18}$; е) $\frac{4\pi}{3}$.

- *14. Найдите радиус земного шара, исходя из того, что 1 м составляет одну сорокамиллионную долю длины экватора.
- *15. Вообразите, что земной шар плотно обтянут по экватору верёвкой. На сколько нужно увеличить длину верёвки, чтобы её можно было поднять над поверхностью Земли по всей длине на расстояние 1 м?

§ 14* Циклоидальные кривые

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки. Кривая, которая получается как траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся без скольжения по прямой, по окружности или другой кривой, называется **циклоидальной**, что в переводе с греческого языка означает «кругообразная, напоминающая о круге».

Рассмотрим сначала случай, когда окружность катится по прямой. Кривая, которую описывает точка, закреплённая на окружности, катящейся без скольжения по прямой линии, называется **циклоидой**.

Пусть окружность радиуса R катится по прямой a . C — точка, закреплённая на окружности, в начальный момент времени находящаяся в положении A (рис. 14.1 на с. 65). Отложим на прямой a отрезок AB , равный длине окружности, т. е. $AB = 2\pi R$. Разделим этот отрезок на 8 равных частей точками $A_1, A_2, \dots, A_8 \equiv B$.

Ясно, что когда окружность, катясь по прямой a , сделает один оборот, т. е. повернётся на 360° , то она займёт положение (8), а точка C переместится из положения A в положение B .

Если окружность сделает половину полного оборота, т. е. повернётся на 180° , то она займёт положение (4), а точка C переместится в самое верхнее положение C_4 .

Если окружность повернётся на угол 45° , то окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1 .

На рисунке 14.1 (см. с. 65) показаны также другие точки циклоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45° .

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим участок циклоиды, соответствующий одному полному обороту окружности. При следующих оборотах будут получаться такие

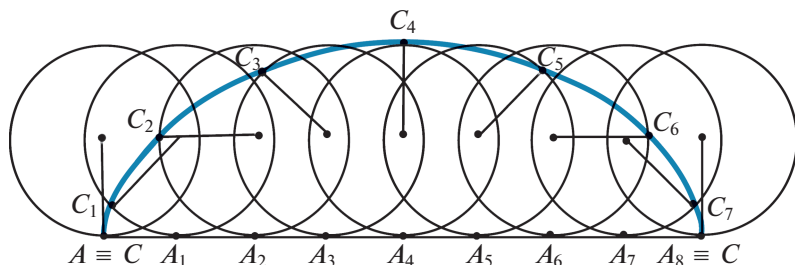


Рис. 14.1

же участки, т. е. циклоида будет состоять из периодически повторяющегося участка, называемого аркой циклоиды.

Обратим внимание на положение касательной к циклоиде (рис. 14.2). Если велосипедист едет по мокрой дороге, то оторвавшиеся от колеса капли будут лететь по касательной к циклоиде и при отсутствии щитков могут забрызгать спину велосипедиста.

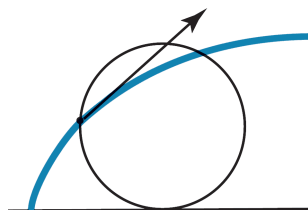


Рис. 14.2

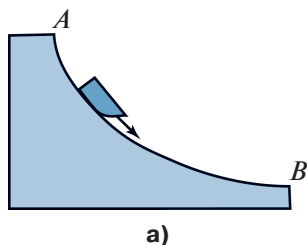
Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564—1642). Он же придумал и её название.

Циклоида обладает целым рядом замечательных свойств. Упомянем о некоторых из них.

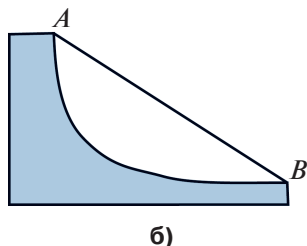
Свойство 1. (Ледяная гора.)

В 1696 году И. Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или, иначе говоря, задачу о том, какова должна быть форма ледяной горки, чтобы, скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время (рис. 14.3, а). Искомую кривую называли «брахистохроной», т. е. кривой кратчайшего времени.

Ясно, что кратчайшим путём из точки A в точку B является отрезок AB . Однако при таком прямолинейном движении скорость набирается медленно и затраченное на спуск время оказывается большим (рис. 14.3, б).



а)



б)

Рис. 14.3

Скорость набирается тем быстрее, чем круче спуск. Однако при крутом спуске удлиняется путь по кривой и тем самым увеличивается время его прохождения.

Среди математиков, решавших эту задачу, были: Г. Лейбниц, И. Ньютон, Г. Лопиталь и Я. Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является перевёрнутая циклоида (см. рис. 14.3, а на с. 65). Методы, развитые этими учёными при решении задачи о брахистохроне, положили начало новому направлению математики — вариационному исчислению.

Свойство 2. (Часы с маятником.) Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды: чем больше амплитуда, тем больше период. Голландский учёный Христиан Гюйгенс (1629—1695) задался вопросом, по какой кривой должен двигаться шарик на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды. Заметим, что в обычном маятнике кривой, по которой движется шарик, является окружность (рис. 14.4).

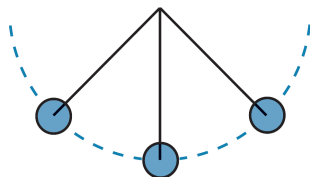


Рис. 14.4

Искомой кривой оказалась перевёрнутая циклоида. Если, например, в форме перевёрнутой циклоиды изготовить жёлоб и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды (рис. 14.5). За это свойство циклоиду называют также «таутохрона» — кривая равных времён.

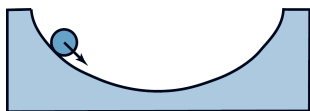


Рис. 14.5

Гюйгенс изготовил две деревянные дощечки с краями в форме циклоиды, ограничивающие движение нити слева и справа (рис. 14.6). При этом сам шарик будет двигаться по перевёрнутой циклоиде и, таким образом, период его колебаний не будет зависеть от амплитуды.

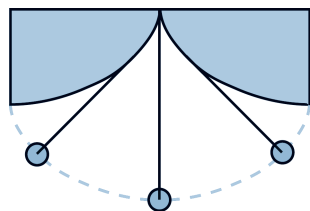


Рис. 14.6

Из этого свойства циклоиды, в частности, следует, что независимо от того, с какого места ледяной горки в форме перевёрнутой циклоиды мы начнём спуск, на весь путь до конечной точки мы затратим одно и то же время.

Пусть теперь окружность катится без скольжения не по прямой, а по окружности с внешней стороны. В зависимости от соотношения между радиусами неподвижной и катящейся окружностей будут получаться различные кривые. Рассмотрим некоторые из них.

Кривая, которая получается как траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности того же радиуса, называется **кардиоидой**.

Построим некоторые точки этой кривой. Пусть C — точка, закреплённая на окружности, — в начальный момент времени находилась в положении A (рис. 14.7). Разделим неподвижную окружность на 8 равных частей точками $A_1, A_2, \dots, A_8 \equiv A$.

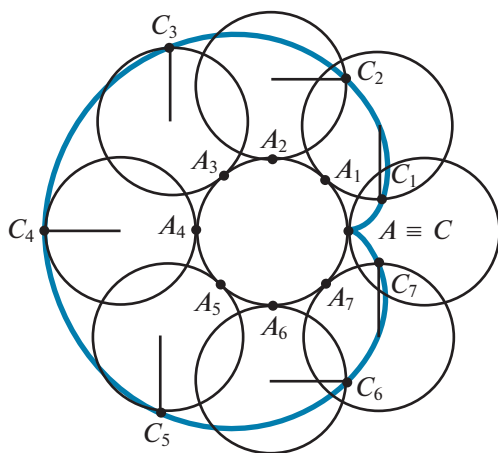


Рис. 14.7

Ясно, что, когда окружность сделает один оборот, т. е. повернётся на 360° , она займёт исходное положение вместе с точкой C .

Если окружность сделает половину полного оборота, т. е. повернётся на 180° , то она займёт положение (4), а точка C переместится в положение C_4 .

Если окружность повернётся на угол 45° , то окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1 .

На рисунке 14.7 показаны также другие точки кардиоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45° .

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим кривую, соответствующую одному полному обороту окружности. При следующих оборотах окружности точка C будет описывать ту же самую кривую.

Рассмотрим теперь случай, когда окружность катится по окружности с внутренней стороны и радиус неподвижной окружности в четыре раза больше радиуса катящейся окружности. Получаемая при этом траектория движения точки, закреплённой на катящейся окружности, называется *астроидой* (рис. 14.8).

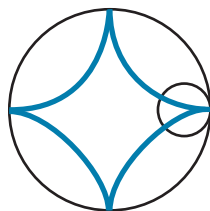


Рис. 14.8

ПРИМЕР. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного треугольника со стороной 1, катящегося по прямой аналогично окружности.

Решение. Пусть правильный треугольник ABC со стороной 1 расположен на прямой, как показано на рисунке 14.9. Выясним, какую траекторию будет описывать вершина A . Сначала вершина A описывает дугу окружности величиной 120° с центром в B и радиусом 1 и занимает самое верхнее положение A' . После этого поворот производится вокруг точки C' и точка A описывает дугу $A'A''$. Далее всё повторяется сначала. Таким образом, искомая траектория будет состоять из дуг единичной окружности величиной 120° .

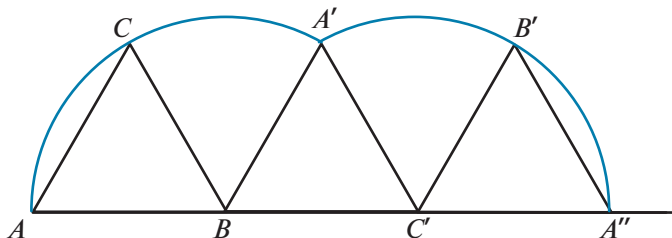


Рис. 14.9

Дополнительная литература

Смирнова И. М., Смирнов В. А. Кривые. — М.: Мнемозина, 2007.

Вопросы

1. В чём состоит кинематический способ получения кривой?
2. Какая кривая называется циклоидой?
3. Кто первым стал изучать циклоиду?

4. Перечислите свойства циклоиды.
5. Какая кривая называется кардиоидой?
6. Какая кривая называется астроидой?

Задачи

1. Окружность радиуса 2 см катится по прямой. Нарисуйте соответствующую циклоиду.
2. Имеет ли циклоида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?
3. Докажите, что касательная к циклоиде перпендикулярна отрезку, соединяющему точку касания и точку соприкосновения окружности с прямой, по которой она катится.
4. Предположим, что круг без скольжения катится по прямой. Как мы знаем, точки на его окружности будут описывать циклоиды. Нарисуйте кривую, которую будет описывать: а) точка A , закреплённая внутри круга; б) точка B , закреплённая вне круга (рис. 14.10).

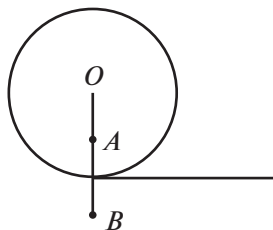


Рис. 14.10

5. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного n -угольника, катящегося по прямой аналогично окружности, при: а) $n = 4$; б) $n = 6$.
6. Окружность радиуса 2 см катится с внешней стороны по другой окружности того же радиуса. Нарисуйте соответствующую кардиоиду.
7. Имеет ли кардиоиды: а) оси симметрии; б) центр симметрии?
8. Докажите, что кардиоиды обладают следующим свойством: если провести произвольную прямую через точку A (рис. 14.11) и от точки B её пересечения с неподвижной окружностью отложить в обе стороны отрезки, равные диаметру окружности, то концы этих отрезков C и D будут принадлежать кардиоиде.
9. Окружность радиуса 1 см катится с внутренней стороны по другой окружности радиуса 4 см. Нарисуйте соответствующую астроиду.

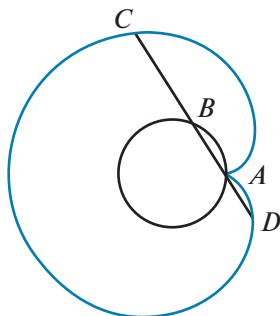


Рис. 14.11

10. Имеет ли астроида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?
11. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закреплённой на окружности радиуса 2 см, катящейся с внешней стороны по окружности радиуса: а) 4 см; б) 5 см; в) 1 см.
12. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закреплённой на окружности радиуса 2 см, катящейся с внутренней стороны по окружности радиуса: а) 6 см; б) 5 см; в) 4 см.

§15 Площадь круга и его частей

Для нахождения площади круга рассмотрим правильные многоугольники, вписанные в соответствующую окружность (рис. 15.1). При увеличении числа сторон многоугольники приближаются к окружности. Поэтому **площадью круга** считают число, к которому приближаются площади вписанных правильных многоугольников при увеличении числа их сторон.

ТЕОРЕМА

Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус.

Как и в случае длины окружности, доказательство данной теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы дадим только набросок доказательства. Рассмотрим правильный многоугольник, вписанный в данную окружность (рис. 15.2). Площадь этого правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус r вписанной в него окружности. При увеличении числа сторон многоугольников их периметры стремятся к длине окружности, а радиусы r вписанных окружностей стремятся к радиусу R исходной окружности. Поэтому площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус круга.

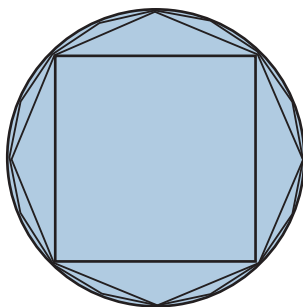


Рис. 15.1

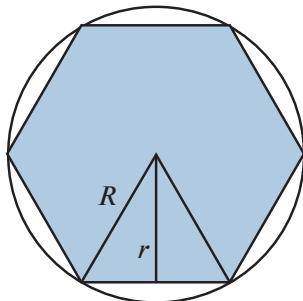


Рис. 15.2

Таким образом, площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$

Круговым сектором или просто **сектором** называется общая часть круга и его центрального угла (рис. 15.3).

Для нахождения формулы площади сектора заметим, что площадь сектора с центральным углом в 1° в 360 раз меньше площади круга и, следовательно,

равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому площадь сектора с центральным углом в φ градусов

будет выражаться формулой

$$S = \frac{\pi R^2 \varphi}{360}.$$

Круговым сегментом или просто **сегментом** называется часть круга, отсекаемая от него какой-нибудь хордой (рис. 15.4).

Площадь сегмента, ограниченного хордой AB , можно найти как разность площади сектора OAB и площади треугольника OAB . Пусть центральный угол равен φ , радиус круга — R .

Тогда площадь сектора равна $\frac{\pi R^2 \varphi}{360}$. Площадь треугольника

равна $\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \varphi$. Поэтому площадь сегмента будет выражаться формулой

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{OAB} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360} - \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \varphi.$$

ПРИМЕР 1. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна 1 м.

Решение. Радиус круга R равен $\frac{1}{2\pi}$ м. Следовательно, пло-

щадь круга равна $\pi \cdot R^2 = \frac{1}{4\pi}$ м².

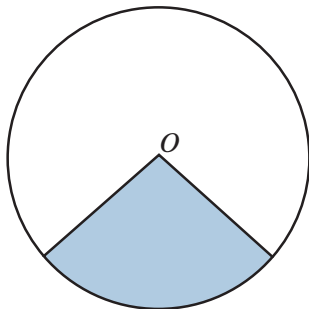


Рис. 15.3

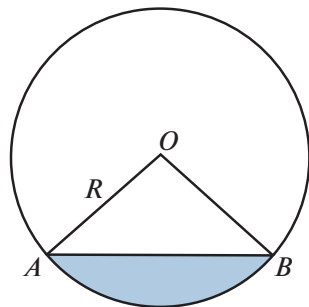


Рис. 15.4

ПРИМЕР 2. Докажите, что площадь сектора равна половине произведения длины ограничивающей его дуги на радиус окружности.

Решение. Длина l дуги окружности радиуса R вычисляется по формуле

$$l = \frac{2\pi R\varphi}{360}.$$

Подставляя это выражение в формулу для площади сектора, получим

$$S_{\text{сектора}} = \frac{1}{2} l \cdot R.$$

Вопросы

1. Что считается площадью круга?
2. Чему равна площадь круга радиуса R ?
3. Какая фигура называется круговым сектором?
4. Чему равна площадь кругового сектора?
5. Какая фигура называется круговым сегментом?
6. Как вычисляется площадь сегмента?

Задачи

1. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен:
а) 4 см; б) 10 м.
2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна:
а) 4 см²; б) 16 м².
3. Найдите площадь кругового кольца (рис. 15.5), заключённого между двумя концентрическими окружностями радиусов a и b , где $a < b$.

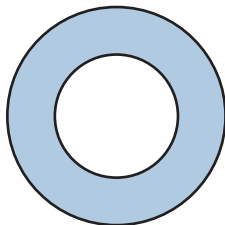


Рис. 15.5

4. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами a и b .
5. Найдите площадь круга, вписанного в равносторонний треугольник со стороной a .
6. Найдите радиус окружности, которая делит круг радиуса R на две равновеликие части — кольцо и круг.

7. Найдите площадь сектора круга радиуса R , если соответствующий этому сектору центральный угол равен: а) 60° ; б) 40° ; в) 150° .
8. Найдите площадь части круга, расположенной вне вписанного в этот круг: а) квадрата; б) правильного треугольника; в) правильного шестиугольника. Радиус круга равен R .
9. Найдите площади закрашенных фигур на рисунке 15.6.

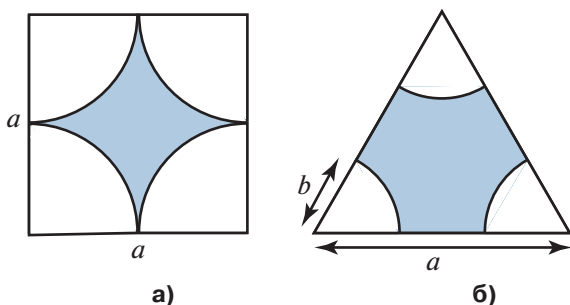


Рис. 15.6

10. Около правильного многоугольника со стороной a описана окружность, в многоугольник вписана другая окружность. Найдите площадь образовавшегося кольца.
11. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 15.7), равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.
12. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 15.8, если $d = 1$ см, $a = 2$ см, $b = 6$ см.

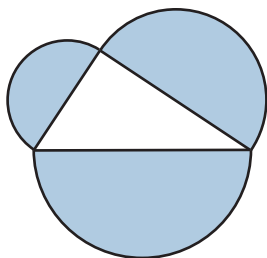


Рис. 15.7

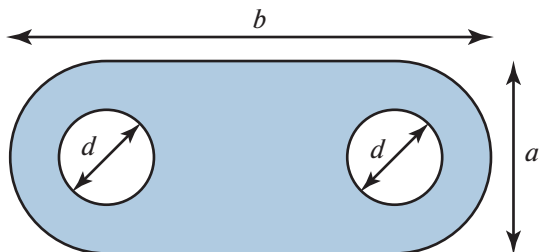


Рис. 15.8

- *13. У ломаной $ABCDE$ все вершины принадлежат окружности (рис. 15.9). Углы в вершинах B , C и D равны 45° . Докажите, что площадь закрашенной части круга равна половине его площади.
- *14. На рисунке 15.10 закрашенная фигура состоит из четырёх так называемых луночек Гиппократа. Докажите, что её площадь равна площади квадрата $ABCD$.

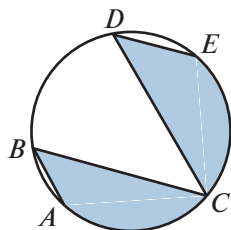


Рис. 15.9

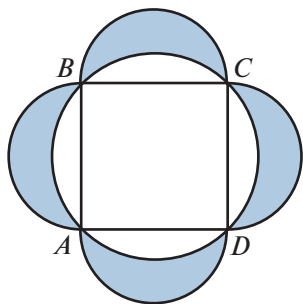
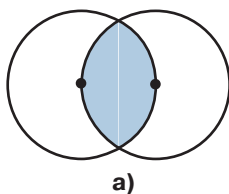
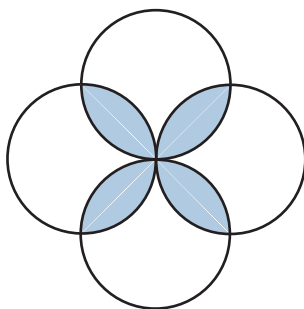


Рис. 15.10



а)



б)

Рис. 15.11

- *15. Найдите площади закрашенных фигур на рис. 15.11. Радиусы окружностей равны 1.

§ 16* Изопериметрическая задача

Одной из древнейших задач, связанных с площадями, является задача Дидоны. Если верить преданию, финикийская царица Дидона в IX веке до н. э., спасаясь от преследователей, заключила с местным предводителем Ярбом договор о покупке земли на побережье нынешнего Тунисского залива Средиземного моря. Она просила совсем немного земли — столько, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Сделка состоялась, и тогда Дидона изрезала шкуру быка на тонкие тесёмки, связала их воедино и окружила большую территорию, на которой основала крепость, а вблизи от неё — город Карфаген.

Так сколько же земли можно окружить бычьей шкурой? Или, переходя на язык математики, какую наибольшую площадь ограничивают кривые заданной длины?

Эту задачу о нахождении фигуры наибольшей площади, ограниченной кривой заданной длины (периметра), и называют *задачей Дидоны* или классической *изопериметрической задачей*. (Изопериметрические фигуры — фигуры, имеющие одинаковый периметр.) Ответ на неё даёт следующая теорема.

ТЕОРЕМА

Среди всех замкнутых кривых данной длины наибольшую площадь охватывает окружность.

Хотя это свойство окружности было известно ещё до нашей эры, строгое его доказательство было дано лишь в конце XIX века. До этого в 30-е годы XIX века Якоб Штейнер дал пять доказательств этого свойства, но в каждом из них подразумевалось существование кривой данной длины, охватывающей наибольшую площадь. Мы рассмотрим первое из доказательств Штейнера.

Доказательство разобьём на несколько утверждений. Для краткости фигуру, ограниченную кривой данной длины, имеющую наибольшую площадь, будем называть *максимальной*.

ТЕОРЕМА 1

Максимальная фигура является выпуклой.

Доказательство. Если фигура не выпукла, то существует хорда AB , концы которой принадлежат кривой, а её внутренние точки находятся вне кривой (рис. 16.1). Заменяем дугу исходной кривой, соединяющую точки A , B , на симметричную ей дугу относительно прямой AB . Соответствующая ей фигура будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура не максимальная.

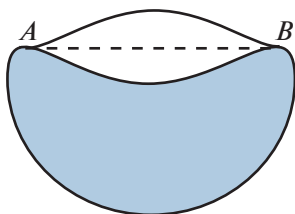


Рис. 16.1

ТЕОРЕМА 2

Если хорда делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру, на две части равной длины, то она и фигуру делит на две равновеликие части.

Доказательство. Пусть хорда AB делит кривую на две части равной длины (рис. 16.2). Предположим, что площади образовавшихся частей Φ' , Φ'' фигуры Φ не равны, например $S(\Phi') < S(\Phi'')$. В фигуре Φ заменим фигуру Φ' на фигуру, симметричную Φ'' относительно прямой AB . Полученная фигура будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура не максимальная.

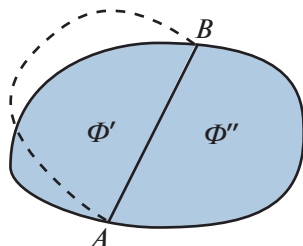


Рис. 16.2

ТЕОРЕМА 3

Максимальная фигура ограничена окружностью.

Доказательство. Пусть хорда AB делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру Φ , на две части равной длины (рис. 16.3). Тогда она делит фигуру Φ на две части Φ' и Φ'' равной площади. Если кривая не является окружностью, то на ней найдётся точка C , для которой $\angle ACB \neq 90^\circ$. Пусть, например, C принадлежит Φ' . Построим новую фигуру. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 , у которого

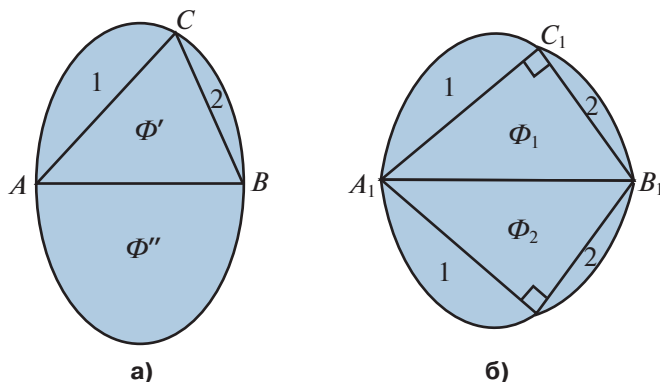


Рис. 16.3

$A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, и присоединим к его катетам соответствующие части 1 и 2 исходной фигуры. Полученную фигуру Φ_1 отразим симметрично относительно A_1B_1 и соответствующую фигуру обозначим Φ_2 . Фигура, состоящая из обеих частей Φ_1 и Φ_2 , будет искомой. Ясно, что она ограничена кривой той же длины. Однако так как площадь треугольника $A_1B_1C_1$ больше площади треугольника ABC , то площадь фигуры Φ_1 будет больше площади фигуры Φ' , а значит, площадь всей новой фигуры будет больше площади исходной фигуры Φ . Следовательно, исходная фигура не максимальная.

Таким образом, кривой данной длины, охватывающей наибольшую площадь, может быть только окружность.

Вопросы

1. Какие фигуры называются изопериметрическими?
2. В чём заключается изопериметрическая задача?
3. Какая кривая заданной длины охватывает наибольшую площадь?
4. Какая фигура называется максимальной?
5. Сформулируйте свойства максимальных фигур.

Задачи

1. Через точку, расположенную внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади.
2. Докажите, что из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник.
3. Докажите, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный треугольник.
4. Все стороны треугольника меньше единицы. Какое число не превосходит его площадь?
5. Изобразите треугольник, у которого все высоты меньше единицы, а площадь больше 10.
6. Докажите, что из всех прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.
7. Периметр прямоугольника равен 4. Какое число не превосходит его площадь?
8. Докажите, что из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

9. Максимальным будем называть n -угольник, имеющий наибольшую площадь из всех n -угольников заданного периметра. Докажите, что максимальный n -угольник является выпуклым.
10. Докажите, что максимальный n -угольник должен иметь равные стороны.
11. Докажите, что максимальный n -угольник должен иметь равные углы.
12. Нарисуйте фигуры, имеющие периметр такой же, как и фигуры на рисунке 16.4, но бóльшую площадь.

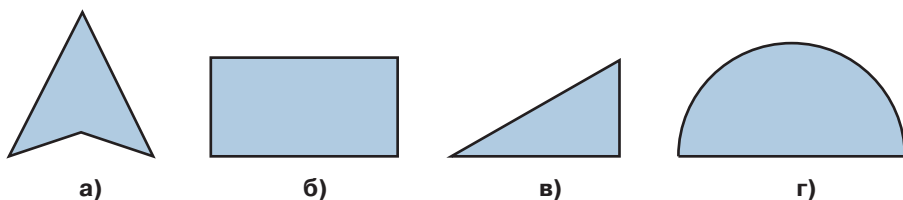


Рис. 16.4

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

§ 17 Прямоугольная система координат

Координатной прямой или **координатной осью** называется прямая, на которой выбраны точка O , называемая **началом координат**, и единичный отрезок OE , указывающий положительное направление координатной прямой (рис. 17.1).

Координатой точки A на координатной прямой называется расстояние x от точки A до начала координат O , взятое со знаком «+», если A принадлежит положительной полуоси, и со знаком «−», если A принадлежит отрицательной полуоси.



Рис. 17.1

ТЕОРЕМА

Расстояние между точками A_1, A_2 на координатной прямой с координатами x_1, x_2 соответственно выражается формулой

$$A_1A_2 = |x_1 - x_2|.$$

Доказательство проводится разбором различных случаев взаимного расположения точек на координатной прямой. Например, если точки A_1, A_2 расположены на положительной полуоси и A_2 лежит между O и A_1 , $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2$, то в этом случае $x_2 < x_1$ и

$$A_1A_2 = OA_1 - OA_2 = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|.$$

Другие случаи рассмотрите самостоятельно.

Перейдём теперь от прямой к плоскости.

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Начало координат обозначается буквой O , а координатные прямые обозначаются Ox , Oy и называются соответственно **осью абсцисс** и **осью ординат** (рис. 17.2). Плоскость с заданной прямоугольной системой координат называется **координатной плоскостью**.

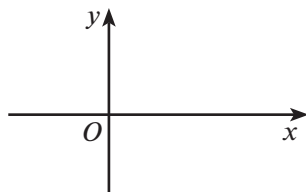


Рис. 17.2

Пусть A — точка на координатной плоскости. Через точку A проведём прямую, перпендикулярную оси Ox , и точку её пересечения с осью Ox обозначим A_x . Координата этой точки на оси Ox называется **абсциссой** точки A и обозначается x . Аналогично через точку A проведём прямую, перпендикулярную оси Oy , и точку её пересечения с осью Oy обозначим A_y . Координата этой точки на оси Oy называется **ординатой** точки A и обозначается y (рис. 17.3).

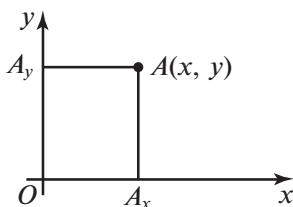


Рис. 17.3

Таким образом, точке A на координатной плоскости соответствует пара (x, y) , называемая **координатами точки** на плоскости относительно данной системы координат. Точка A с координатами (x, y) обозначается $A(x, y)$.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596—1650), поэтому прямоугольную систему координат называют также **декартовой системой координат**, а сами координаты — **декартовыми координатами**. Введение прямоугольных координат на плоскости позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи — к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется **методом координат**.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рене Декарт — один из выдающихся учёных XVII века. Поражает широта его интересов. Учёным получены глубокие результаты в философии, математике, физике, биологии, медицине и других областях. Философию Декарт рассматривал как универ-

сальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, раскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения — картезианства (Картезий — латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определённым естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 году (когда Декарту был уже 41 год). По обычаю того времени, она имела довольно длинное название: «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». В этом сочинении Декарт сформулировал следующие «главные правила метода».

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчётливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И *последнее:* делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчёркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчёты.

«Геометрия» Декарта, являющаяся приложением к «Рассуждению о методе...», произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII века. В XVIII—XIX веках на основе метода координат Декарта возникла многомерная, а затем и бесконечномерная геометрия. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

ПРИМЕР 1. На координатной прямой точки A_1 , A_2 имеют координаты x_1 и x_2 соответственно. Найдите координату середины A отрезка A_1A_2 .

Решение. Рассмотрим случай, когда точки A_1 и A_2 лежат справа от начала координат O и точка A_1 лежит между O и A_2 (рис. 17.4). По условию расстояния от точек A_1 и A_2 до начала координат равны соответственно x_1 и x_2 . Длина отрезка A_1A_2 равна $x_2 - x_1$. Так как A — середина A_1A_2 , то длина отрезка A_1A равна $\frac{x_2 - x_1}{2}$. Длина отрезка OA равна сумме длин отрезков OA_1 и A_1A и, значит, равна $x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Следовательно, координата точки A равна $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи взаимного расположения точек A_1 и A_2 .

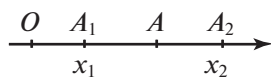


Рис. 17.4

ПРИМЕР 2. Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) $x \geq 0$; б) $y < 0$; в) $x \leq 0$, $y \geq 0$; г) $xy > 0$.

Решение. На рис. 17.5: а) — полуплоскость, расположенная справа от оси ординат; б) — полуплоскость, расположенная ниже оси абсцисс, без самой оси абсцисс; в) — левый верхний квадрант координатной плоскости; г) — правый

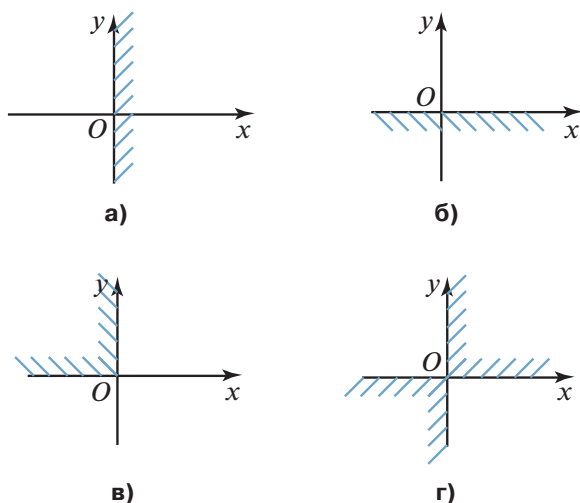


Рис. 17.5

верхний и левый нижний квадранты координатной плоскости без осей координат.

Вопросы

1. Какая прямая называется координатной?
2. Что называется координатой точки на координатной прямой?
3. Как выражается расстояние между двумя точками на координатной прямой?
4. Что называется прямоугольной системой координат?
5. Какая плоскость называется координатной плоскостью?
6. Как называются координатные прямые на координатной плоскости?
7. Что называется абсциссой и ординатой точки на координатной плоскости?
8. Что такое координаты точки на координатной плоскости?
9. Кто впервые ввёл координаты на плоскости?
10. Что позволяют сделать прямоугольные координаты на плоскости?
11. Какой метод называется методом координат?

Задачи

1. Найдите координату середины отрезка на координатной прямой, если его концы имеют координаты: а) 1, 3; б) $-2, 4$; в) $-3, -5$.

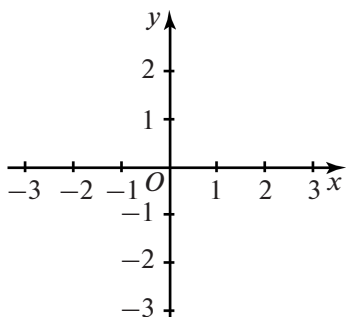


Рис. 17.6

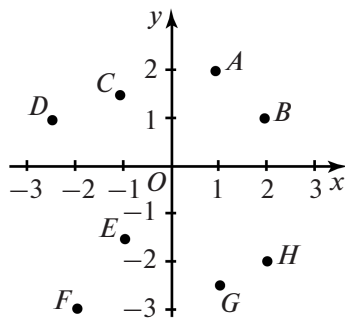


Рис. 17.7

2. Для данной системы координат на плоскости (рис. 17.6) нарисуйте точки с координатами $(1, 2)$, $(2, -1)$, $(-1, -3)$.
3. Для заданных точек на координатной плоскости (рис. 17.7) найдите их координаты.
4. На прямой, параллельной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них ордината равна 2. Чему равна ордината другой точки?
5. На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них абсцисса равна 3. Чему равна абсцисса другой точки?
6. Из точки $A(2, 3)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты основания перпендикуляра.
7. Через точку $A(2, 3)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты её точки пересечения с осью ординат.
8. Для данной системы координат на плоскости нарисуйте точки $A(1, 1)$ и $B(1, -1)$. Нарисуйте отрезок AB . Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть). Проходит ли он через начало координат?
9. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(x, y)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.
10. Точки $N(..., 6)$ и $N_1(2, ...)$ симметричны относительно оси ординат. Назовите пропущенные координаты этих точек.

11. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки A вокруг начала координат на угол 90° против часовой стрелки, если точка A имеет координаты: а) $(2, 1)$; б) $(-1, 3)$; в) $(-2, -3)$; г) $(1, -3)$.
12. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $A(1, 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .
- *13. Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) $x = 2$; б) $y = -1$; в) $|x| = 3$; г) $|y| \geq 1$; д) $x = y$; е) $x = -y$.
- *14. Докажите, что расстояние OA от точки $A(x, y)$ до начала координат выражается формулой $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$.
15. Найдите расстояние от начала координат до точки с координатами: а) $(1, 1)$; б) $(-3, 4)$; в) $(-1, -2)$.
16. Докажите, что середина A отрезка, соединяющего точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости имеет координаты

$$A\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$
17. Найдите координаты середины отрезка AB , если: а) $A(1, -2)$, $B(5, 6)$; б) $A(-3, 4)$, $B(1, 2)$; в) $A(5, 7)$, $B(-3, -5)$.

§ 18 Расстояние между точками. Уравнение окружности

В данном параграфе мы выведем формулу расстояния между точками на координатной плоскости.

Пусть $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ — точки на плоскости с заданными координатами. Выразим расстояние между ними через их координаты. Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. В прямоугольном треугольнике AA_1A_2 имеем $AA_1 = |x_1 - x_2|$, $AA_2 = |y_1 - y_2|$ (рис. 18.1). По теореме Пифагора получаем следующую формулу расстояния между точками:

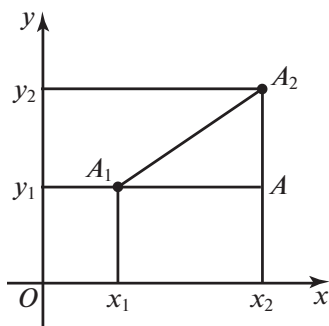


Рис. 18.1

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Легко видеть, что если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, то формула расстояния между точками на плоскости остаётся верной.

Непосредственно из определения окружности и круга следует, что координаты точек окружности с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиуса R удовлетворяют равенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

а координаты точек соответствующего круга — неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2.$$

ПРИМЕР 1. Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$, если она имеет координаты: а) $(2, 3)$; б) $(4, 2)$; в) $(3, 4)$; г) $(1, -1)$.

Решение. Центром данной окружности является точка $O(2, 1)$, квадрат её радиуса равен 5. Квадрат расстояния от данной точки до центра окружности равен: а) $(2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 = 4 < 5$; б) $(4 - 2)^2 + (2 - 1)^2 = 5$; в) $(3 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = 10 > 5$; г) $(1 - 2)^2 + (-1 - 1)^2 = 5$. Таким образом, в случае а) точка расположена внутри окружности; в случаях б) и г) точка принадлежит окружности; в случае в) точка расположена вне окружности.

ПРИМЕР 2. Докажите, что уравнение $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ задаёт окружность. Найдите координаты центра и радиус окружности.

Решение. Заметим, что $x^2 + 2x$ можно записать в виде $(x + 1)^2 - 1$, а $y^2 - 4y$ в виде $(y - 2)^2 - 4$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим: $(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 4 = 0$, или $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Это уравнение задаёт окружность с центром в точке с координатами $(-1, 2)$ и радиуса 3.

Вопросы

1. Как выражается расстояние между точками через их координаты?
2. Каким уравнением задаётся окружность на координатной плоскости?
3. Каким неравенством задаётся круг на координатной плоскости?

Задачи

1. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(1, 2)$ и $A_2(-1, 1)$; б) $B_1(3, 4)$ и $B_2(3, -1)$.

2. Какая из точек — $A(2, 1)$ или $B(-2, 1)$ — лежит ближе к началу координат?
3. Даны точки $M(1, -2)$, $N(-2, 3)$ и $K(3, 1)$. Найдите периметр треугольника MNK .
4. Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: $A(0, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$.
5. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(4, 1)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 0)$, $D(1, -3)$ является квадратом.
6. Найдите уравнение окружности: а) с центром в точке $O(0, 0)$ и радиуса 1; б) с центром в точке $C(1, -2)$ и радиуса 4.
7. Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, если она имеет координаты: а) $(1, 2)$; б) $(3, 4)$; в) $(-4, 3)$; г) $(0, 5)$; д) $(5, -1)$.
8. Найдите координаты центра C и радиус R окружности, заданной уравнением: а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 6)^2 = 11$.
9. Докажите, что уравнение $x^2 - 4x + y^2 = 0$ задаёт окружность. Найдите её радиус и координаты центра.
10. Точка $A(0, \sqrt{2})$ принадлежит окружности с центром $C(3, 0)$. Напишите уравнение этой окружности.
11. Даны точки $A(2, 0)$, $B(-2, 6)$. Найдите уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB .
12. Найдите уравнение окружности с центром в точке $C(1, 2)$, касающейся оси абсцисс.
13. Составьте уравнение окружности с центром в точке $C(-3, 4)$, проходящей через начало координат.
14. Каким неравенством задаётся геометрическое место точек, не принадлежащих кругу с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиуса R ?
15. На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек $A(1, 2)$, $B(2, 3)$.
16. Найдите точку, равноудалённую от осей координат и от точки с координатами $(3, 6)$.
- *17. Используя уравнение окружности, докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разности, то эти окружности пересекаются. Найдите координаты точек пересечения.

§19 Векторы. Сложение векторов

Напомним, что **вектором** называется направленный отрезок, т. е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B .

Длиной или **модулем** вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина векторов $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и направление.

Рассматривают также нулевые векторы, у которых начало совпадает с концом. Все нулевые векторы считаются равными между собой. Они обозначаются $\vec{0}$, и их длина считается равной нулю.

Два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, лежащих на одной прямой, называются **одинаково направленными**, если один из лучей AB или $A'B'$ содержится в другом. В противном случае они называются **противоположно направленными**.

Два ненулевых вектора, не лежащих на одной прямой, называются **одинаково (противоположно) направленными**, если они лежат на параллельных прямых по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через их начала.

Ясно, что два ненулевых вектора являются коллинеарными, если они одинаково направлены или противоположно направлены.

Нулевой вектор считается одинаково направленным с любым вектором.

Для векторов определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 19.1). Вектор, у которого нача-

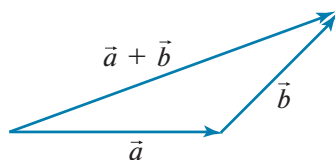


Рис. 19.1

ло совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется **суммой** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Для операции сложения векторов справедливы следующие свойства, аналогичные свойствам сложения чисел.

Свойство 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон).

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки O . Предположим, что получившиеся векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ не лежат на одной прямой. Рассмотрим параллелограмм $OACB$ (рис. 19.2).

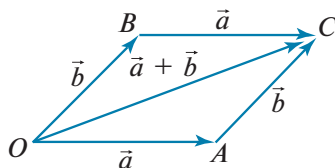


Рис. 19.2

В нём $\vec{OA} = \vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{AC} = \vec{b}$. Тогда по определению сложения векторов будем иметь:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Свойство 2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от некоторой точки A : $\vec{a} = \vec{AB}$. Вектор $\vec{b}$ отложим от точки B : $\vec{b} = \vec{BC}$, а вектор $\vec{c}$ — от точки C : $\vec{c} = \vec{CD}$ (рис. 19.3). Тогда по определению сложения векторов будем иметь: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

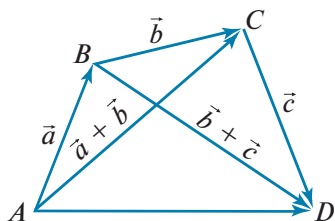


Рис. 19.3

С другой стороны,

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{BD}, \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}.$$

Следовательно, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

ПРИМЕР 1. Сколько различных векторов задают пары вершин параллелограмма $ABCD$?

Ответ. Восемь векторов: $\vec{AB}, \vec{BA}, \vec{AD}, \vec{DA}, \vec{AC}, \vec{CA}, \vec{BD}, \vec{DB}$.

ПРИМЕР 2. Для данных векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ нарисуйте вектор $\vec{x}$, для которого $\vec{AB} + \vec{x} = \vec{BC}$.

Решение. От точки B отложим вектор $\overrightarrow{BD}$, равный $\overrightarrow{AB}$ (рис. 19.4). Тогда вектор $\overrightarrow{DC}$ будет удовлетворять равенству $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$, т. е. вектор $\overrightarrow{DC}$ будет искомым вектором $\vec{x}$.

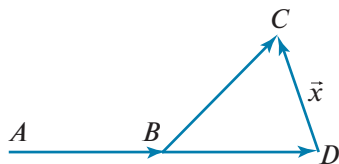


Рис. 19.4

Вопросы

1. Что называется вектором? Как обозначается вектор с началом в точке A и концом в точке B ?
2. Что называется длиной, или модулем, вектора? Как обозначается длина вектора?
3. Какие векторы называются равными?
4. Какой вектор называется нулевым? Как обозначается нулевой вектор?
5. Как определяется операция сложения векторов?
6. Сформулируйте переместительный закон сложения векторов.
7. Сформулируйте сочетательный закон сложения векторов.

Задачи

1. Сколько различных векторов задают стороны трапеции $ABCD$?
2. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{DB}$.
3. Основание AD трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB = 5$ см, $\angle D = 45^\circ$. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AC}$.
4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$?
5. Точки S и T являются серединами боковых сторон соответственно MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; б) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; в) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{LM}$; г) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?
6. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Верно ли обратное?
7. В треугольнике ABC укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

8. На рисунке 19.5 укажите векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} + \vec{c}$.
9. Радиусы OA , OB и OC окружности образуют углы в 120° . От точки O отложите векторы: а) $\vec{AO} + \vec{OB}$; б) $\vec{OB} + \vec{OC}$; в) $\vec{OC} + \vec{OA}$; г) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.
10. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Верны ли равенства:

- а) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$; г) $\vec{AC} + \vec{BA} = \vec{CB}$;
 б) $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{BC}$; д) $\vec{OD} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC}$;
 в) $\vec{OC} + \vec{OD} = \vec{AO} + \vec{BO}$; е) $\vec{BD} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{BC}$?

11. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки X выполняется равенство $\vec{XA} + \vec{XC} = \vec{XB} + \vec{XD}$.

12. A, B, C, D — произвольные точки плоскости. Выразите через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{CD}$ векторы:

- а) $\vec{AD}$; б) $\vec{BD}$; в) $\vec{AC}$.

13. На рисунке 19.6 изображён параллелограмм $ABCD$, $CE \parallel BD$. Докажите:

- а) $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{BC}$;
 б) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CE}$;
 в) $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CB} = \vec{DB} + \vec{EC} + \vec{BC}$.

14. Докажите, что $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

15. Для данных векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ нарисуйте вектор $\vec{x}$, для которого $\vec{x} + \vec{BC} = \vec{AB}$.

16. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a . Найдите: а) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$; б) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$; в) $|\vec{AB} + \vec{CB}|$.

17. В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^\circ$. Найдите: а) $|\vec{AB}| + |\vec{BC}|$; б) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$; в) $|\vec{BA}| + |\vec{BC}|$; г) $|\vec{BA} + \vec{BC}|$.

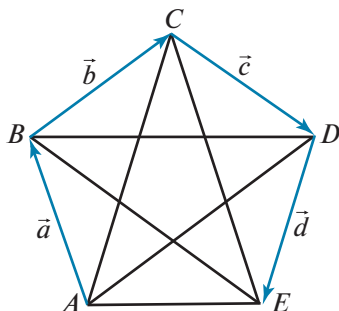


Рис. 19.5

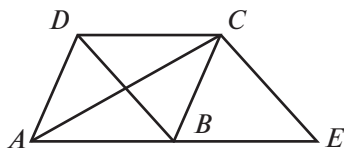


Рис. 19.6

- *18. Дан правильный пятиугольник. Докажите, что сумма пяти векторов с началом в центре этого многоугольника и концами в его вершинах равна нулю.

§20 Умножение вектора на число

Помимо операции сложения для векторов определена операция произведения вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, длина которого равна $|t| \cdot |\vec{a}|$, а направление остаётся прежним, если $t > 0$, и меняется на противоположное, если $t < 0$ (рис. 20.1). Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число -1 называется вектором, **противоположным** $\vec{a}$, и обозначается $-\vec{a}$.

По определению вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{a}$, и $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

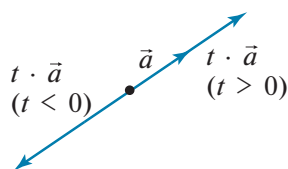


Рис. 20.1

ТЕОРЕМА

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два коллинеарных вектора и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует единственное число t , для которого выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

одинаково направлены, положим $t = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Тогда векторы $\vec{b}$

и $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ одинаково направлены и имеют равные длины.

Значит, они равны, т. е. $\vec{b} = t\vec{a}$.

Докажем, что такое число t единственно. Действительно, если выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$, то выполняются ра-

венства $|\vec{b}| = |t \cdot \vec{a}| = t|\vec{a}|$. Следовательно, $t = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

В случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, положим $t = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Тогда векторы $\vec{b}$ и $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ одинаково направлены и имеют равные длины. Значит, они равны, т. е. $\vec{b} = t\vec{a}$. Единственность числа t доказывается аналогично.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам умножения чисел, а именно:

Свойство 1. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$ (сочетательный закон).

Свойство 2. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (первый распределительный закон).

Свойство 3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (второй распределительный закон).

Первое и второе свойства следуют непосредственно из определения. Докажем третье свойство. Отложим вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. В треугольнике OAB (рис. 20.2, а) $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}$. Рассмотрим треугольник $O_1A_1B_1$, стороны которого образуют векторы $t\vec{a}$, $t\vec{b}$ и $t(\vec{a} + \vec{b})$ соответственно (рис. 20.2, б). Треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны (по третьему признаку подобия треугольников, так как их соответствующие стороны пропорциональны). С другой стороны, по определению сложения векторов $\overline{O_1B_1} = t\vec{a} + t\vec{b}$, следовательно, $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.

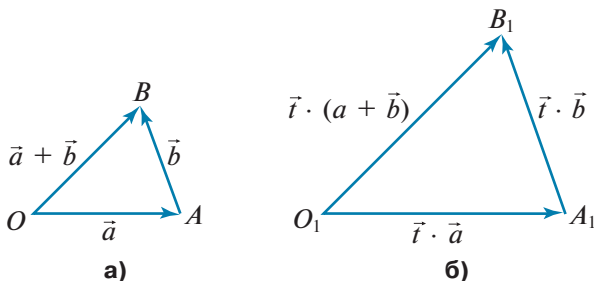


Рис. 20.2

ТЕОРЕМА

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых неколлинеарных вектора, то для любого вектора $\vec{c}$ существуют единственные числа t и s , для которых выполняется равенство $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$.

Доказательство. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то $t = s = 0$. Для ненулевого вектора $\vec{c}$ обозначим O и C его начало и конец. От точки O отложим векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$. Через точку C проведём прямые, параллельные прямым OA и OB . Обозначим их точки пересечения с этими прямыми соответственно A и B (рис. 20.3).

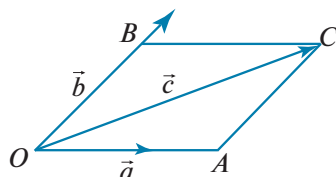


Рис. 20.3

Имеем равенство $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{OA}$ коллинеарны, то существует единственное число t , для которого $\vec{OA} = t \cdot \vec{a}$. Так как векторы $\vec{b}$ и $\vec{OB}$ коллинеарны, то существует единственное число s , для которого $\vec{OB} = s \cdot \vec{b}$. Подставляя эти выражения в равенство $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ получим требуемое равенство $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$.

ПРИМЕР 1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные векторы. По определению $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$. Построим сначала вектор $(-1)\vec{b}$ (рис. 20.4, а), затем отложим векторы так, чтобы начало вектора $-\vec{b}$ совпало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 20.4, б). Тогда вектор $\vec{c}$ и будет искомой разностью $\vec{a} - \vec{b}$.

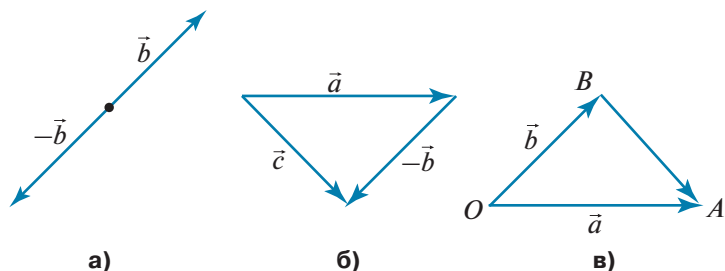


Рис. 20.4

Разность $\vec{a} - \vec{b}$ можно построить и по-другому. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от общего начала O (рис. 20.4, в). Тогда вектор $\vec{BA}$ равен вектору $\vec{a} - \vec{b}$.

ПРИМЕР 2. O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

Решение. Вектор $\vec{OA} + \vec{OB}$ представляет собой диагональ OD параллелограмма $AODB$ (рис. 20.5). Векторы $\vec{OD}$ и $\vec{OC}$ противоположно направлены, и их длины равны двум третям медианы CM . Следовательно, $\vec{OD} + \vec{OC} = \vec{0}$ и, значит, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

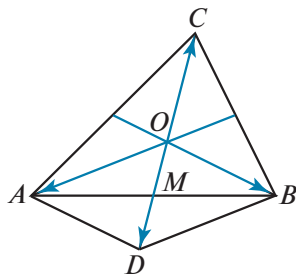


Рис. 20.5

Вопросы

1. Как определяется операция умножения вектора на число?
2. Как обозначается произведение вектора на число?
3. Какой вектор называется противоположным данному вектору? Как он обозначается?
4. Что называется разностью двух векторов? Как она обозначается?
5. Сформулируйте сочетательный закон операции умножения вектора на число.
6. Сформулируйте первый распределительный закон операции умножения вектора на число.
7. Сформулируйте второй распределительный закон операции умножения вектора на число.

Задачи

1. В треугольнике ABC укажите векторы: а) $\vec{AC} - \vec{AB}$; б) $\vec{AB} - \vec{AC}$; в) $\vec{BA} - \vec{BC}$; г) $\vec{BA} - \vec{CA}$; д) $\vec{BA} - \vec{CB}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ укажите векторы: а) $\vec{AB} - \vec{AD}$; б) $\vec{AD} - \vec{AB}$; в) $\vec{CB} - \vec{AB}$; г) $\vec{CB} - \vec{DA}$; д) $\vec{CB} - \vec{AD}$; е) $\vec{DB} - \vec{DA}$.
3. Для данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постройте векторы: а) $\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$; в) $3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; г) $\frac{11}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

4. Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC . Выразите векторы: а) $\overrightarrow{BM}$; б) $\overrightarrow{NC}$; в) $\overrightarrow{MN}$; г) $\overrightarrow{BN}$; д) $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.
5. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 — медианы треугольника ABC . Выразите векторы: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$; в) $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.
6. Точка C — середина отрезка AB , O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
7. Точка C принадлежит отрезку OB и делит его в отношении $2:1$. O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.
8. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ выполняются равенства: $-(-\vec{a}) = \vec{a}$; $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
9. Докажите свойства 1 и 2 умножения вектора на число.
10. В каком случае выполняются равенства:
а) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} - \vec{b}$?
11. Упростите выражение:
а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$;
б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.
12. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a . Найдите: а) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.
13. В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^\circ$. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA}| - |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$.
- *14. Докажите, что $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?
- *15. Докажите, что отрезок AB — геометрическое место точек C плоскости, для которых $\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, где $0 \leq t \leq 1$ (O — произвольная точка плоскости).
- *16. O — точка пересечения медиан треугольника ABC , точка X — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

§21 Координаты вектора

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Определим понятие координат вектора. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются **координатами вектора**.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторы с координатами $(1, 0)$, $(0, 1)$ соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы отложенными от начала координат и называть их **координатными векторами** (рис. 21.1).

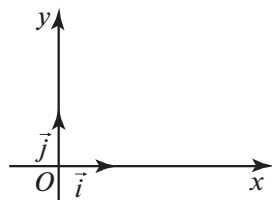


Рис. 21.1

ТЕОРЕМА

Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A . Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y}$ (рис. 21.2). Точка A имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$ и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

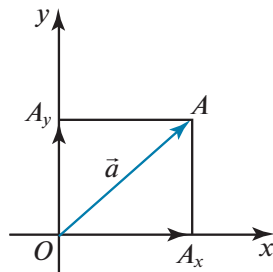


Рис. 21.2

ТЕОРЕМА

При сложении двух векторов их координаты складываются.

Доказательство. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2)$. Докажем, что их сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ будет иметь координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Для этого разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Тогда для суммы имеет место равенство

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$$

и, следовательно, пара чисел $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Аналогично показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Другими словами, вектор $t\vec{a}$ имеет координаты (tx, ty) , где (x, y) — координаты вектора $\vec{a}$.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$ имеет координаты $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1, y_1)$ и концом — точку $A_2(x_2, y_2)$. Тогда вектор $\vec{a}$ можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$, и, следовательно, он имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (рис. 21.3).

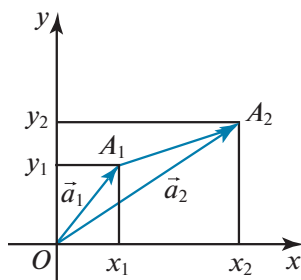


Рис. 21.3

ПРИМЕР 1. Даны три вершины параллелограмма $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(1, 3)$. Найдите координаты четвёртой вершины C , если известно, что они положительны.

Решение. Координаты вершины C равны координатам вектора $\overline{OC}$, который равен сумме векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Эти векторы имеют координаты $(2, 1)$ и $(1, 3)$ соответственно. Следовательно, вектор $\overline{OC}$ имеет координаты $(3, 4)$, а значит, вершина C также имеет координаты $(3, 4)$.

ПРИМЕР 2. Выразите длину вектора $\overline{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (x_1, y_1) , (x_2, y_2) соответственно.

Решение. Длина вектора $\overline{A_1A_2}$ равна длине отрезка A_1A_2 . Используя формулу длины отрезка, получаем

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Вопросы

1. Что называется координатами вектора?
2. Какие векторы называются координатными?
3. Сформулируйте теорему о разложении вектора по координатным векторам.
4. Что происходит с координатами при сложении двух векторов?
5. Что происходит с координатами при умножении вектора на число?
6. Как находятся координаты вектора по известным координатам его начала и конца?

Задачи

1. Назовите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j}$; г) $\vec{d} = -5\vec{i}$.
2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты $(-3, 5), (2, 3)$ соответственно.
3. Выразите длину вектора $\vec{a}$ через его координаты (x, y) .
4. Найдите координаты точки N , если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(4, -3)$ и точка $M(1, -3)$.
5. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2, -6), B(-5, 3)$; б) $A(1, 3), B(6, -5)$; в) $A(-3, 1), B(5, 1)$.
6. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b) . Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.
7. Даны точки $A(0, 1), B(1, 0), C(1, 2), D(2, 1)$. Докажите равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
8. Даны три точки $A(1, 1), B(-1, 0), C(0, 1)$. Найдите такую точку $D(x, y)$, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были равны.
9. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1, 0), \vec{b}(0, 3)$.
10. Даны векторы $\vec{a}(-1, 2)$ и $\vec{b}(2, -4)$. Найдите координаты вектора: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a} + 5\vec{b}$.
11. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-1, -2), B(2, -5), C(1, -2), D(-2, 1)$ является параллелограммом. Найдите точку пересечения его диагоналей.
- *12. Вершины треугольника имеют координаты $(1, 2), (2, 1)$ и $(3, 4)$. Найдите координаты точки пересечения медиан.

§ 22 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi.$$

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90° , поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A , производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ , а именно имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$. Отложим эти векторы от начала координат и их концы обозначим A_1 , A_2 соответственно. В случае, если точки O , A_1 и A_2 не принадлежат одной прямой, рассмотрим треугольник OA_1A_2 . По теореме косинусов имеем равенство

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2 \cdot OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos \varphi.$$

Заметим, что это равенство выполняется и в случае, если точки O , A_1 и A_2 принадлежат одной прямой.

Перепишем это равенство в виде

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - 2 \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2.$$

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами:

$$\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2; \quad \vec{a}_2^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2;$$

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Получим

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2,$$

где $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$.

ПРИМЕР 1. Дан вектор $\vec{m}(a, b)$. Найдите координаты перпендикулярного к нему вектора.

Решение. Для искомого вектора $\vec{n}(x, y)$ должно выполняться равенство $a \cdot x + b \cdot y = 0$. Например, этому равенству удовлетворяют $x = b$, $y = -a$. Следовательно, искомый вектор $\vec{n}$ имеет координаты $(b, -a)$. Заметим, что для любого числа x , отличного от нуля, вектор $\vec{n}$ с координатами $(b \cdot x, -a \cdot x)$ также будет перпендикулярен вектору $\vec{m}$.

ПРИМЕР 2. Найдите угол A треугольника с вершинами

$$A(-1, \sqrt{3}), \quad B(1, -\sqrt{3}), \quad C\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right).$$

Решение. Воспользуемся определением скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Имеем $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A$. Вычислим это скалярное произведение через координаты векторов. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(2, -2\sqrt{3})$, вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет координаты $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Следовательно, скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равно 3. Найдём теперь длины этих векторов: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 12} = 4$, $|\overrightarrow{AC}| = \frac{3}{2}$. Подставляя эти данные в формулу скалярного произведения, получим $3 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos A$. Откуда $\cos A = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\angle A = 60^\circ$.

Вопросы

1. Что называется скалярным произведением двух векторов? Как обозначается скалярное произведение?
2. Что называется скалярным квадратом?
3. В каком случае скалярное произведение двух векторов равно нулю?
4. Каков физический смысл скалярного произведения?
5. Как скалярное произведение векторов выражается через их координаты?

Задачи

1. Вычислите скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними равен: а) 45° ; б) 90° ; в) 135° .
2. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD . Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC}$.
3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1, 2)$ и $\vec{a}_2(2, -1)$.
4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) укажите скалярные произведения, равные нулю: а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; е) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$; ж) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
5. Охарактеризуйте угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
6. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 1. При каком угле между ними скалярное произведение будет: а) наибольшим; б) наименьшим?
7. Используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами: а) $\vec{a}_1(2, 3)$, $\vec{a}_2(1, -2)$; б) $\vec{a}_1(1, 2)$ и $\vec{a}_2(1, 0)$.

8. Используя формулу скалярного произведения, докажите, что для вектора $\vec{a}(x, y)$ имеют место равенства: $x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j}$.
9. Докажите, что, каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, справедливы следующие равенства: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Докажите, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.
11. Какой угол φ образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?
12. При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(4, 3)$?
13. Найдите угол A треугольника с вершинами $A(-1, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{3})$, $C(1, \sqrt{3})$.
14. Для прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ см, $AD = 8$ см найдите скалярное произведение: а) $\overline{BA} \cdot \overline{BE}$; б) $\overline{BE} \cdot \overline{BD}$; в) $\overline{BF} \cdot \overline{BD}$; г) $\overline{BE} \cdot \overline{BF}$, где E и F — середины сторон AD и CD соответственно.
15. Вычислите, какую работу A производит сила $\vec{F}(-3, 4)$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $B(5, -1)$ в положение $C(2, 1)$.

§ 23 Уравнение прямой

Выясним, каким уравнением задаётся прямая на плоскости.

ТЕОРЕМА

Прямая на плоскости задаётся уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

где a , b , c — некоторые числа, причём a , b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой и называемого **вектором нормали**.

Доказательство. Пусть дана прямая. Зафиксируем какую-нибудь точку $A_0(x_0, y_0)$ этой прямой и пусть $\vec{n}(a, b)$ — перпендикулярный этой прямой вектор (рис. 23.1). Тогда произвольная точка $A(x, y)$ будет принадлежать этой прямой в том и только том случае, когда вектор $\overline{A_0A}$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$,

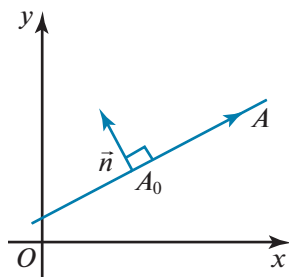


Рис. 23.1

т. е. скалярное произведение $\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{n}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

которое задаёт искомую прямую. Обозначая $-ax_0 - by_0 = c$, получим требуемое уравнение прямой

$$ax + by + c = 0.$$

Если $b \neq 0$, то, разделив на b , это уравнение можно привести к виду $y = kx + l$.

Коэффициент k называется **угловым коэффициентом** этой прямой. Выясним его геометрический смысл. Возьмём на прямой две точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Их координаты удовлетворяют уравнению прямой

$$y_1 = kx_1 + l, \quad y_2 = kx_2 + l.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда выразим k :

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Таким образом, угловой коэффициент k равен тангенсу угла φ , который образует прямая с осью абсцисс (рис. 23.2).

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении прямых на плоскости с точки зрения их уравнений.

Две прямые на плоскости параллельны, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ одинаково или противоположно направлены, т. е. для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2 = t\vec{n}_1$. Для прямых, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad (*)$$

векторы нормалей имеют координаты (a_1, b_1) , (a_2, b_2) . Значит, такие прямые параллельны, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$. При этом если $c_2 = tc_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же прямую. Если же $c_2 \neq tc_1$, то эти уравнения определяют параллельные прямые.

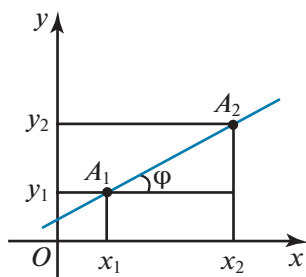


Рис. 23.2

Если две прямые пересекаются, то угол φ между ними равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1(a_1, b_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

В частности, прямые перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняются равенства

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$$

Выведем формулу расстояния от данной точки $A_0(x_0, y_0)$ до данной прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$ (рис. 23.3).

Уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной данной прямой, имеет вид $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0, \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

находим координаты точки A_1 пересечения этой прямой с данной:

$$x_1 = \frac{b^2 x_0 - a b y_0 - a c}{a^2 + b^2}, \quad y_1 = \frac{a^2 y_0 - a b x_0 - b c}{a^2 + b^2}.$$

Искомое расстояние h выражается формулой

$$h = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

ПРИМЕР 1. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$.

Решение. Векторы нормалей к данным прямым имеют координаты $(1, 2)$ и $(2, -1)$ соответственно. Их скалярное произведение равно нулю, и, следовательно, эти векторы перпендикулярны. Значит, угол между данными прямыми равен 90° .

ПРИМЕР 2. Найдите уравнение прямой, проходящей через заданные точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

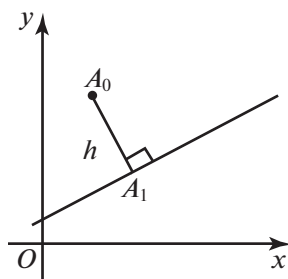


Рис. 23.3

Решение. Найдём вектор нормали $\vec{n}$ к данной прямой. Он перпендикулярен вектору $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Следовательно, в качестве такого вектора можно взять вектор с координатами $(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$. Искомым уравнением прямой будет уравнение

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0,$$

которое можно также переписать в виде

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0.$$

Вопросы

1. Каким уравнением задаётся прямая на плоскости?
2. Что называется угловым коэффициентом прямой? Каков его геометрический смысл?
3. В каком случае два уравнения определяют: а) параллельные прямые; б) одну и ту же прямую; в) пересекающиеся прямые?
4. Как вычисляется угол между пересекающимися прямыми?
5. В каком случае две прямые перпендикулярны?

Задачи

1. Какие уравнения имеют координатные прямые: а) Ox ; б) Oy ?
2. Прямая задана уравнением $x - 2y + 1 = 0$. Чему равны координаты вектора нормали? Нарисуйте эту прямую и вектор нормали.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом:
а) $k = 1$; г) $k = -1$;
б) $k = 2$; д) $k = -2$;
в) $k = \frac{1}{2}$; е) $k = -\frac{1}{2}$.
Нарисуйте эти прямые.
4. Найдите угловой коэффициент прямой: а) $2x - 3y + 4 = 0$; б) $x + 2y - 1 = 0$.
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(1, 2)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1)$.
6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.
7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(3, -1)$, $N(4, 1)$. Найдите координаты вектора нормали этой прямой.

8. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1, -2)$ и параллельна: а) координатной прямой Ox ; б) координатной прямой Oy ; в) прямой $y = x$.
9. Точка $H(-2, 4)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. Напишите уравнение этой прямой.
10. Найдите точки пересечения прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, с осями координат.
11. Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых параллельны между собой:
а) $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$;
б) $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$;
в) $-7x + y = 0$, $7x - y - 5 = 0$;
г) $2x + 4y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.
12. Приведите примеры уравнений перпендикулярных прямых.
13. Найдите угол φ между прямыми, заданными уравнениями $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Нарисуйте эти прямые.
14. Докажите, что прямые, заданные уравнениями
$$y = kx + l_1, \quad y = kx + l_2, \quad l_1 \neq l_2,$$
параллельны.
15. Найдите координаты точки пересечения прямых:
а) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$;
б) $3x - y + 2 = 0$, $5x - 2y + 1 = 0$.
- *16. Докажите, что прямые, заданные уравнениями
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
пересекаются в том и только в том случае, когда $a_1 \cdot b_2 \neq a_2 \cdot b_1$.
- *17. Треугольник задан своими вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$. Найдите уравнения высот этого треугольника и координаты их точки пересечения.
18. Найдите расстояние от точки $O(0, 0)$ до прямой, заданной уравнением $3x + 4y - 12 = 0$.
19. Найдите расстояние от точки $A(1, 2)$ до прямой, заданной уравнением $4x - 3y = 8$.
20. Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми, заданными уравнениями $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$.

§ 24* Аналитическое задание фигур на плоскости

Ранее было показано, что окружность с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Круг, ограниченный этой окружностью, задаётся неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2.$$

Прямая на плоскости задаётся уравнением

$$ax + by + c = 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других фигур и начнём с полуплоскости.

Пусть прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$ и проходит через точку $A_0(x_0, y_0)$. Её вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты (a, b) и определяет полуплоскость (рис. 24.1). Точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости в случае, если угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ не превосходит 90° , т. е. в слу-

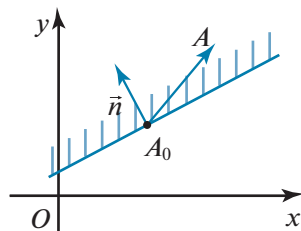


Рис. 24.1

чае, если скалярное произведение этих векторов больше или равно нулю, т. е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0A} = a(x - x_0) + b(y - y_0) \geq 0$. При этом $-ax_0 - by_0 = c$. Следовательно, точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости, если выполняется неравенство $ax + by + c \geq 0$.

Аналогично точка $A(x, y)$ принадлежит другой полуплоскости по отношению к данной прямой, если выполняется неравенство $ax + by + c \leq 0$.

Для того чтобы определить, какой из двух полуплоскостей принадлежит точка $A(x, y)$, достаточно подставить её координаты в левую часть уравнения прямой и найти знак получившегося значения.

Покажем, как с помощью неравенств можно задавать выпуклые многоугольники.

Действительно, пусть стороны выпуклого многоугольника лежат на прямых, задаваемых уравнениями:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_n &= 0. \end{aligned}$$

Тогда сам многоугольник является пересечением соответствующих полуплоскостей и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0, \\ \dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_n \geq 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многоугольник.

Например, неравенства $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 1$, $y \leq 1$, которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

определяют единичный квадрат (рис. 24.2).

Если к этим неравенствам добавить ещё одно неравенство

$$x + y - \frac{1}{2} \geq 0,$$

то соответствующий многоугольник получается из квадрата отсечением треугольника (рис. 24.3).

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие фигуры.

Парабола. Напомним, что параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной прямой d и данной точки F . Прямая d называется директрисой, а точка F — фокусом параболы (рис. 24.4).

Выведем уравнение, задающее параболу на координатной плоскости. Обозначим точку пересечения оси параболы с её директрисой через G . Длину отрезка FG обозначим через $2a$ (см. рис. 24.4). Введём систему координат, считая началом координат O — серединой отрезка FG , осью абсцисс — прямой, параллельную директрисе и проходящую через начало координат, осью ординат — ось параболы. Тогда фокус F будет иметь координаты $(0, a)$.

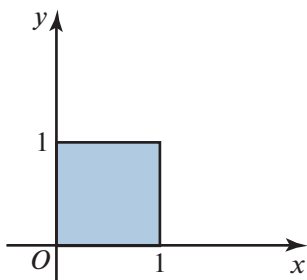


Рис. 24.2

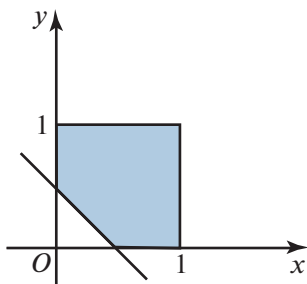


Рис. 24.3

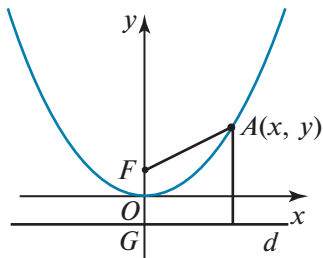


Рис. 24.4

Пусть $A(x, y)$ — точка плоскости. Расстояния от неё до фокуса и директрисы равны соответственно $\sqrt{x^2 + (y - a)^2}$ и $|y + a|$. Точка A принадлежит параболе в том и только в том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = y + a.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные члены, будем иметь равенство

$$4ay = x^2, \quad (1)$$

которое и будет искомым уравнением параболы.

Эллипс. Напомним, что эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса (рис. 24.5).

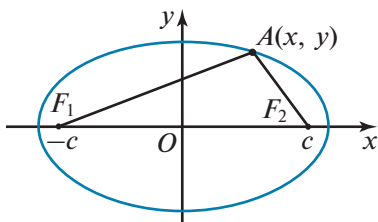


Рис. 24.5

Выведем уравнение эллипса на координатной плоскости.

Пусть F_1, F_2 — фокусы эллипса. Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Введём систему координат, считая началом координат O — середину отрезка F_1F_2 , осью абсцисс — прямую F_1F_2 , осью ординат — прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси абсцисс (см. рис. 24.5). Фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

Пусть $A(x, y)$ — точка плоскости. Расстояния от неё до фокусов равны соответственно $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ и $\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$. Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

где a — некоторое фиксированное число ($a > c$).

Перенесём второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведём обе части полученного равенства в квадрат. Будем иметь

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2.$$

Приведём подобные члены

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc.$$

Ещё раз возведём в квадрат и приведём подобные члены

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2 . Получим равенство

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

которое и будет искомым уравнением эллипса.

Гипербола. Напомним, что гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть фиксированное число, взятое со знаком «+» или «-». Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы (рис. 24.6).

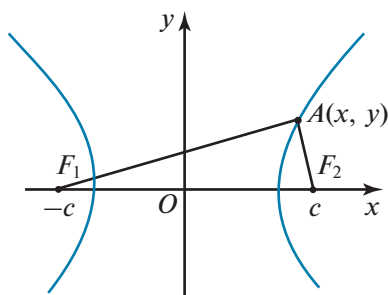


Рис. 24.6

Выведем уравнение гиперболы. Введём систему координат, считая осью Ox прямую, проходящую через фокусы, а осью Oy прямую, перпендикулярную оси Ox и делящую отрезок F_1F_2 пополам. Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. Точка $A(x, y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AF_1 - AF_2 = \pm 2a$, где a — некоторое фиксированное число, $0 < a < c$.

Перепишем это равенство в координатной форме

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Перенесём второй корень в правую часть и возведём обе части равенства в квадрат. Получим

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Ещё раз возводя в квадрат и обозначая $b^2 = c^2 - a^2$, получим

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2 , окончательно получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Прямые, заданные уравнениями $bх + ау = 0$, $bх - ау = 0$, называются **асимптотами** гиперболы.

ПРИМЕР 1. Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$.

Решение. Легко видеть, что уравнения прямых AB , BC и AC имеют вид: $x + y - 1 = 0$, $y - 1 = 0$ и $x - 1 = 0$ соответственно. Подставляя координаты точки C вместо x и y в левую часть первого уравнения, получим $1 > 0$. Следовательно, точка C принадлежит полуплоскости $x + y - 1 \geq 0$. Аналогично точка B принадлежит полуплоскости $x \leq 1$, а точка A — полуплоскости $y \leq 1$. Таким образом, треугольник ABC задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} x + y \geq 1, \\ x \leq 1, \\ y \leq 1. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Для параболы, заданной уравнением $y = x^2$, найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.

Решение. Общее уравнение параболы имеет вид $4ay = x^2$.

При этом фокус имеет координаты $(0, a)$, а директриса задаётся уравнением $y = -a$. В нашем случае $a = \frac{1}{4}$ и, следовательно, фокус данной параболы имеет координаты $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, а её директриса задаётся уравнением $y = -\frac{1}{4}$.

Вопросы

1. Как задаётся полуплоскость?
2. Как задаётся выпуклый многоугольник?
3. Каким уравнением задаётся парабола?
4. Каким уравнением задаётся эллипс?
5. Каким уравнением задаётся гипербола?

Задачи

1. Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 8, \\ 0 \leq y \leq 8, \\ x + y \geq 12. \end{cases}$$

2. Две полуплоскости задаются неравенствами

$$a_1x + b_1y + c_1 \geq 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 \geq 0.$$

Как будет задаваться пересечение этих полуплоскостей?

3. Определите, какой полуплоскости $5x + 3y - 2 \geq 0$ или $5x + 3y - 2 \leq 0$ принадлежат точки: а) $A(1, 0)$; б) $B(0, 1)$; в) $C(0, 0)$.

4. Какую фигуру задаёт следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 5? \end{cases}$$

5. Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 5, \\ x + y - 6 \geq 0. \end{cases}$$

6. Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$.
7. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y^2 = x$, является параболой. Нарисуйте эту кривую. Найдите фокус и директрису этой параболы.
8. Докажите, что ось параболы является её осью симметрии.
9. Докажите, что любая прямая, проходящая через фокус параболы и не совпадающая с её осью, пересекает параболу в двух точках.
10. Докажите, что движение переводит параболы в параболы. Какое движение переводит параболу $y = x^2$ в параболу $y^2 = x$?
11. Докажите, что кривая, заданная уравнением
- $$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$
- является параболой. Найдите её вершину.

12. Нарисуйте геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: а) $y > x^2$; б) $y < x^2$; в) $x > y^2$; г) $x < y^2$.
13. В каком случае уравнение эллипса даёт окружность?
14. Докажите, что эллипс, заданный уравнением (2), симметричен относительно начала координат. Есть ли у него оси симметрии?
15. Для эллипса, заданного уравнением $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, найдите координаты фокусов. Нарисуйте этот эллипс.
16. Докажите, что движения переводят эллипсы в эллипсы. Каким движением эллипс, заданный уравнением $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, переводится в эллипс $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$?
17. Для гиперболы, заданной уравнением $x^2 - y^2 = 1$, найдите координаты фокусов и уравнения асимптот. Нарисуйте эту гиперболу.
18. Докажите, что движения переводят гиперболы в гиперболы. Каким движением гипербола, заданная уравнением $-x^2 + y^2 = 1$, переводится в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$?
19. Докажите, что гипербола, заданная уравнением (3), симметрична относительно начала координат. Есть ли у неё оси симметрии?
20. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y = \frac{1}{x}$, является гиперболой. Найдите фокусы и асимптоты этой гиперболы.
21. Найдите наименьшее значение выражения
$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10}.$$
22. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2 - 20x + 109} + \sqrt{x^2 - 2x + 82} \leq 15.$$
23. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{13}, \\ \sqrt{(x-9)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 3\sqrt{10}. \end{cases}$$
24. Изобразите фигуру, заданную уравнением:
а) $|x| + |y| = 1$;
б) $|x - y| + |x + y| = 2$.

§ 25* Задачи оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые задачи оптимизации.

В их числе:

- транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;
- задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определённым медицинским требованиям;
- задача составления оптимального плана производства;
- задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощённый вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$ требуется завезти сырьё одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность в сырье каждого вида для данных заводов указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья (в т) на складе		Потребность в сырье (в т) на заводе		
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$
20	25	10	15	20

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	5	7	10
$С_2$	3	4	6

Для решения этой задачи в первую очередь проанализируем её условие и переведём его на язык математики, т. е. со-

ставим *математическую модель*. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада C_1 на заводы $З_1$, $З_2$, обозначим через x и y соответственно. Тогда на третий завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y$ тонн сырья, а со второго склада на заводы нужно будет перевезти соответственно $10 - x$, $15 - y$, $x + y$ тонн сырья. Запишем эти данные в виде таблицы 3.

Таблица 3

Склады	Количество сырья (в т), перевезённое на заводы		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
C_1	x	y	$20 - x - y$
C_2	$10 - x$	$15 - y$	$x + y$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 10 - x \geq 0, \\ 15 - y \geq 0, \\ 20 - x - y \geq 0, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство является следствием двух первых, и его можно отбросить. Оставшиеся неравенства определяют многоугольник $OABCD$, изображённый на рисунке 25.1. Назовём его *многоугольником ограничений*.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножаем расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты складываем. Общее число тонно-километров выражается формулой

$$\begin{aligned} 5x + 7y + 10(20 - x - y) + 3(10 - x) + 4(15 - y) + 6(x + y) = \\ = 290 - 2x - y. \end{aligned}$$

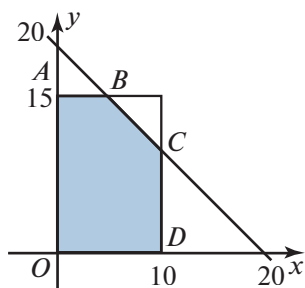


Рис. 25.1

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 290 - 2x - y$ на многоугольнике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = 2x + y$. Тогда $F_{\min} = 290 - f_{\max}$.

Воспользуемся тем, что своих наименьшего и наибольшего значений линейная функция достигает в вершинах многоугольника ограничений. Это свойство является основополагающим в задачах оптимизации.

Используя геометрические соображения, покажем, например, что линейная функция $ax + by$ ($b > 0$) принимает своё наибольшее значение на многоугольнике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение c функции $ax + by$. Тогда уравнение $ax + by = c$ задаёт прямую на плоскости, которая характеризуется тем, что во всех её точках данная линейная функция принимает значение c . В точках, расположенных выше этой прямой, она принимает значения, большие c , а в точках, расположенных ниже этой прямой, — значения, меньшие c . Если число c выбрать достаточно большим, то прямая $ax + by = c$ расположится выше многоугольника. Будем опускать эту прямую, уменьшая значения c , до тех пор, пока она не коснётся многоугольника. Такое касание произойдёт при некотором c_0 в какой-нибудь вершине многоугольника (рис. 25.2) или по какому-нибудь его ребру.

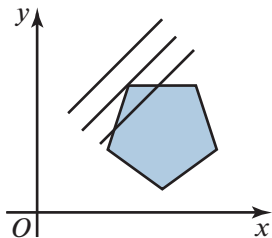


Рис. 25.2

В точках касания линейная функция принимает значение c_0 , и, поскольку все остальные точки многоугольника лежат ниже прямой, значения линейной функции в этих точках меньше c_0 . Таким образом, c_0 — искомое наибольшее значение. Значит, для нахождения наибольшего значения линейной функции на многоугольнике достаточно вычислить значения функции в вершинах многоугольника и выбрать из них наибольшее. Найдём значения функции $f = 2x + y$ в вершинах многоугольника ограничений, учитывая, что вершины имеют координаты $O(0, 0)$, $A(0, 15)$, $B(5, 15)$, $C(10, 10)$, $D(10, 0)$:

$$f(O) = 0, \quad f(A) = 15, \quad f(B) = 25, \quad f(C) = 30, \quad f(D) = 20.$$

Таким образом, максимальное значение функции f достигается в точке $C(10, 10)$ и равно 30. Следовательно, наи-

меньшее значение функции F достигается в точке C и равно $290 - 30 = 260$. В соответствии с этим наиболее выгодный вариант перевозок задаётся таблицей 4.

Таблица 4

Склады	Количество сырья (в т), перевезённое на заводы		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
C_1	10	10	0
C_2	0	5	20

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно двум и поэтому в процессе её решения получился многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше двух и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n -мерного пространства с очень большим n . При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Вопросы

1. Назовите некоторые задачи оптимизации.
2. Кто разработал метод решения задач оптимизации?
3. Сформулируйте условие транспортной задачи.
4. Какой многоугольник называется многоугольником ограничений?
5. В каких точках принимаются наибольшее и наименьшее значения линейной функции на многоугольнике?

Задачи

1. Нарисуйте фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 4y - 48 \leq 0, \\ 3x - 4y \geq 0, \\ x \geq 4, y \geq 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y \geq 0, \\ x - y \geq 1, \\ x \leq 7, y \geq 0. \end{cases}$$

2. Найдите наибольшее значение функции $F = x + y$ при

$$\text{условии } \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 5x + 3y \leq 15, \\ 2x + 6y \leq 12, \\ x \leq 3, y \leq 2. \end{cases}$$

3. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ -2 - 2x - y \leq 0, \\ 2 - x + y \geq 0, \\ 5 - x - y \geq 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

4. Мастерская выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида — 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора первого вида мастерская получает 120 р., а от реализации одного трансформатора второго вида — 100 р. Сколько трансформаторов каждого вида нужно выпустить, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если мастерская располагает 480 кг железа и 300 кг проволоки?

§ 26 Тригонометрические функции произвольного угла

Напомним, что тригонометрические функции $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$ определялись для острого угла φ прямоугольного треугольника ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$).

Нашей задачей является определение тригонометрических функций для произвольных градусных величин φ .

Рассмотрим декартову систему координат и окружность единичного радиуса с центром в начале координат O (рис. 26.1). Такую окружность будем называть *единичной*. Каждому углу φ , $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, соответствует точка A на единичной окружности, полученная поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол φ против часовой стрелки. Поскольку гипотенуза OA прямоугольного треугольника OAB равна единице, то, как легко видеть, синус этого угла будет равен ординате точки A , а косинус — абсциссе точки A .

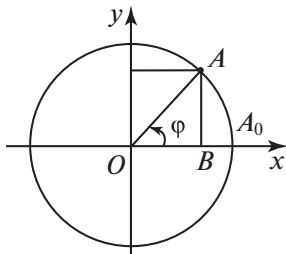


Рис. 26.1

Определим $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в случае $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$. Для этого рассмотрим точку A , получающуюся поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол φ против часовой стрелки (рис. 26.2). Ордината этой точки называется синусом φ и обозначается $\sin \varphi$. Абсцисса этой точки называется косинусом φ и обозначается $\cos \varphi$.

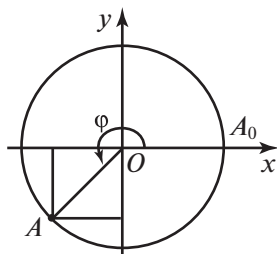


Рис. 26.2

Определим теперь поворот точки $A_0(1, 0)$ на градусную величину $\varphi \geq 360^\circ$. Для этого представим φ в виде суммы $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_n$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ меньше 360° . Результат последовательного выполнения поворотов на углы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ против часовой стрелки и будет искомым поворотом точки A_0 на φ . Ордината и абсцисса полученной в результате полного поворота точки A называется соответственно синусом и косинусом φ и обозначается $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$.

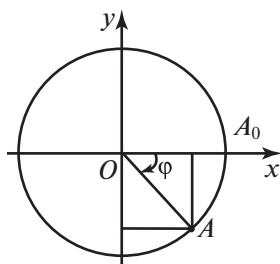


Рис. 26.3

Для градусных величин $\varphi < 0^\circ$ поворот на φ определяется аналогичным образом, но делается в направлении по часовой стрелке. В этом случае $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ также полагаются равными соответственно ординате и абсциссе точки A , полученной в результате поворота точки A_0 (рис. 26.3).

Тригонометрические функции $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$ для произвольных градусных величин φ определяются обычным образом, а именно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Из определения синуса и косинуса непосредственно следует, что выполняются следующие тождества:

$$\sin(\varphi + 360^\circ) = \sin \varphi, \quad \cos(\varphi + 360^\circ) = \cos \varphi; \quad (1)$$

$$\sin(\varphi + 180^\circ) = -\sin \varphi, \quad \cos(\varphi + 180^\circ) = -\cos \varphi; \quad (2)$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi, \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi; \quad (3)$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi, \quad \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА

Для произвольных градусных величин φ имеет место основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

Доказательство. По определению пара $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ представляет собой координаты точки на единичной окружности, а $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$ является квадратом расстояния от этой точки до начала координат. Следовательно,

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

ПРИМЕР 1. На какую градусную величину повернётся минутная стрелка за 2 ч 15 мин?

Решение. За час минутная стрелка поворачивается на 360° . За 2 ч она повернётся на 720° , и за 15 мин — на 90° . Таким образом, поворот составит $720^\circ + 90^\circ = 810^\circ$.

ПРИМЕР 2. Найдите $\sin 390^\circ$ и $\cos(-300^\circ)$.

Решение. $\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

$$\cos(-300^\circ) = \cos(360^\circ - 300^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Вопросы

1. Какая окружность называется единичной?
2. Как определяются $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в случае $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$?
3. Как определяются $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в случае $\varphi \geq 360^\circ$?
4. Как определяются $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в случае отрицательных φ ?
5. Как определяются $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$ в случае произвольных φ ?
6. Какие тождества выполняются для синуса и косинуса в случае произвольных градусных величин?
7. В чём состоит основное тригонометрическое тождество?

Задачи

- 1.** Проверьте, что точки с координатами $A(0, 1)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $E(-1, 0)$ принадлежат единичной окружности.

- 2.** Точка A получена в результате поворота точки $A_0(1, 0)$ на величину φ . Чему равны координаты точки A ?
- 3.** Найдите: а) $\sin 330^\circ$; б) $\sin(-150^\circ)$; в) $\cos 420^\circ$; г) $\cos(-135^\circ)$.
- 4.** Могут ли синус и косинус принимать значения: а) большие 1; б) меньшие -1 ?

5. Укажите, для каких градусных величин синус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.
6. Укажите, для каких градусных величин косинус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.
7. Для каких градусных величин φ не определён: а) $\operatorname{tg} \varphi$; б) $\operatorname{ctg} \varphi$?
8. Могут ли тангенс и котангенс принимать значения: а) большие 1; б) меньшие -1 ?
9. Для каких градусных величин тангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?
10. Для каких градусных величин котангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?
11. Докажите, что имеют место тождества:
$$\operatorname{tg}(\varphi + 180^\circ) = \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{ctg}(\varphi + 180^\circ) = \operatorname{ctg} \varphi,$$
$$\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg} \varphi.$$
12. Найдите угол между лучом OA и осью абсцисс, если точка A имеет координаты: а) $(2, 2)$; б) $(0, 3)$; в) $(-\sqrt{3}, 1)$; г) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.
13. На какую градусную величину повернётся минутная стрелка за: а) 1 ч 45 мин; б) 2 ч 30 мин; в) 3 ч 20 мин?
- *14. Докажите, что преобразование плоскости, при котором точки $A(x, y)$ переходят в точки $A'(x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi)$, где φ — некоторый фиксированный угол, является движением. Определите вид этого движения.

§ 27* Полярные координаты

Наряду с декартовыми координатами на плоскости во многих случаях более удобными оказываются так называемые **полярные координаты**.

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например: «Вы пройдёте по

этой улице около 100 м, свернёте направо, пройдёте ещё 50 м и будете у цели». При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных координат.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE . Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью**. Точка O называется **полюсом** (рис. 27.1).

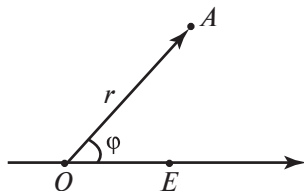


Рис. 27.1

Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ) , где r — расстояние от точки A до точки O , φ — угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если $\varphi > 0$, и по часовой стрелке, если $\varphi < 0$.

При этом первая координата r называется **полярным радиусом**, а вторая φ — **полярным углом**. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат и за полярную ось — ось Ox . В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ) (рис. 27.2). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

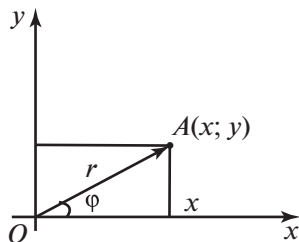


Рис. 27.2

Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости, особенно для задания различных спиралей. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

1. Окружность радиусом R с центром в точке O задаётся уравнением $r = R$ (рис. 27.3).

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удалённых от точки O на расстояние R . Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом если угол увеличивается, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ уменьшается, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

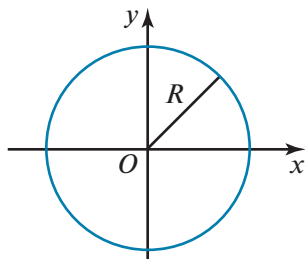


Рис. 27.3

2. Спираль Архимеда — кривая, задаваемая уравнением

$$r = a\varphi,$$

где a — некоторое фиксированное число, угол φ задаётся в радианах.

Предположим, что $a > 0$, и построим график этой кривой. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углом φ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при увеличении угла φ . В этом случае радиус r также будет увеличиваться. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = \frac{a\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т. е. в два

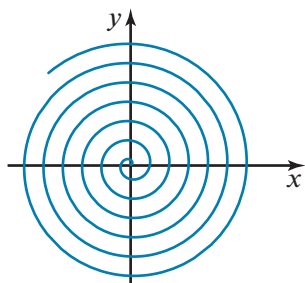


Рис. 27.4

раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса r будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь человека, её открывшего и изучившего её свойства (рис. 27.4).

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками, каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π , т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идёт звуковая дорожка на грампластинке. Туго свёрнутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной ёмкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку — имеет форму спирали Архимеда.

3. Трилистник — кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geq 0$, решая которое находим область допустимых значений углов φ :

$$0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ; \quad 120^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ; \quad 240^\circ \leq \varphi \leq 300^\circ.$$

Итак, пусть $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$. Если угол φ изменяется от нуля до 30° , то $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до единицы и, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от 30° до 60° , то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от 0° до 60° точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется в пределах от 120° до 180° и от 240° до 300° (рис. 27.5).

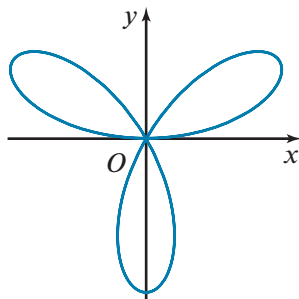


Рис. 27.5

ПРИМЕР 1. Найдите геометрическое место точек на плоскости, для которых: а) полярный радиус r удовлетворяет неравенствам $r_1 \leq r \leq r_2$; б) полярный угол φ удовлетворяет неравенствам $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Решение. В случае а) искомым геометрическим местом точек является кольцо, образованное окружностями с центром в полюсе и радиусами r_1 , r_2 . В случае б) искомым геометрическим местом точек будет угол с вершиной в полюсе, образованный лучами, составляющими с полярной осью углы φ_1 и φ_2 .

ПРИМЕР 2. Человек идёт с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно земли?

Решение. Обозначим скорость человека V и угловую скорость карусели W . Тогда за время t человек удалится от центра карусели на расстояние $V \cdot t$, а карусель повернётся на угол $W \cdot t$.

Переходя к полярным координатам, будем иметь: $r = V \cdot t$, $\varphi = W \cdot t$. Выражая t из второго равенства и подставляя в первое, получим уравнение $r = \frac{V}{W}\varphi$, которое задаёт спираль Архимеда. Таким образом, траекторией движения человека относительно земли будет спираль Архимеда.

Вопросы

1. Что называется полярной осью и полюсом?
2. Какие координаты называются полярными?
3. Что называется полярным радиусом и полярным углом?
4. Как выражаются декартовы координаты через полярные?
5. Как выражаются полярные координаты через декартовы?
6. Каким уравнением в полярных координатах задаётся окружность?
7. Каким уравнением в полярных координатах задаётся спираль Архимеда?
8. Каким уравнением в полярных координатах задаётся трилистник?

Задачи

1. На плоскости с заданной на ней полярной осью изобразите точки с полярными координатами: $(1, 0)$, $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Используя транспортир и линейку, найдите полярные координаты точек, изображённых на рисунке 27.6.

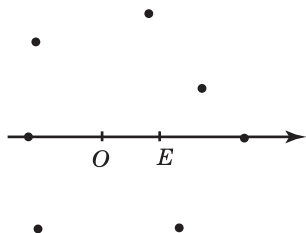


Рис. 27.6

3. Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: а) $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$.
4. Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: а) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; б) $(-10, 0)$; в) $(1, -\sqrt{3})$; г) $(-\sqrt{3}, 1)$.
5. Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?
6. Нарисуйте геометрическое место точек на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) $30^\circ < \varphi < 60^\circ$; б) $1 < r < 2$; в) $30^\circ < \varphi < 60^\circ$, $1 < r < 2$.
7. Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.
8. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \sin 4\varphi$.
9. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \cos \varphi$.
10. Найдите геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$\text{а) } r = \frac{1}{\cos \varphi}; \quad \text{б) } r = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

- *11. Для параболы $x^2 = 4ay$ выберем в качестве полярной оси луч, идущий по оси Oy с началом в фокусе $F(0, a)$ параболы. Переходя от декартовых к полярным координатам, покажите, что парабола с выколотой вершиной задаётся уравнением

$$r = \frac{a}{1 - \cos \varphi}.$$

Почему вершину параболы нужно выкалывать?

- *12. Докажите, что уравнение

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

задаёт эллипс, если $0 < \varepsilon < 1$, и гиперболу, если $\varepsilon > 1$.

§ 28* Кривые, заданные параметрическими уравнениями

Рассмотрим вопрос о том, как траектория движения точки описывается с помощью уравнений. Поскольку положение точки на плоскости однозначно определяется её координатами, то для задания движения точки достаточно задать зависимости её координат x , y от времени t , т. е. задать функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

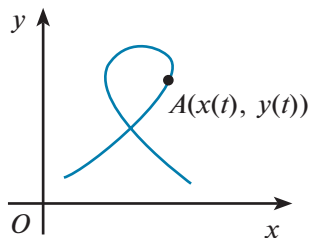


Рис. 28.1

В этом случае для каждого момента времени t мы можем найти положение точки $A(x(t), y(t))$ на плоскости (рис. 28.1).

Кривая на плоскости, описываемая точкой, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям, называется **параметрически заданной кривой** на плоскости. Сами уравнения называются **параметрическими уравнениями**.

Обычно в физических задачах параметр t играет роль времени, а параметрические уравнения кривой рассматриваются как уравнения движения точки. При изменении параметра t точка A с координатами $(x(t), y(t))$ будет перемещаться по кривой.

График функции $y = f(x)$ является частным случаем параметрически заданной кривой на плоскости. Параметрическими уравнениями в этом случае будут уравнения

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, то, переходя к декартовым координатам, её можно задать и параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = r(t)\cos t, \\ y = r(t)\sin t. \end{cases}$$

Окружность. Окружность радиусом R с центром в начале координат задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

При изменении параметра t от нуля до 2π точка на окружности делает один оборот против часовой стрелки, начиная и заканчивая в точке с координатами $(R, 0)$. При дальнейшем увеличении параметра t точка будет многократно проходить по окружности в направлении против часовой стрелки.

Прямая. Найдём параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0)$, параллельной вектору $\vec{m}(a, b)$, который называется **направляющим вектором** этой прямой (рис. 28.2).

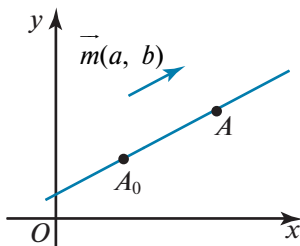


Рис. 28.2

Точка $A(x, y)$ принадлежит данной прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}$ коллинеарен вектору $\vec{m}(a, b)$, т. е. для некоторого числа t выполняются равенства $x - x_0 = at$, $y - y_0 = bt$. Перепишем эти равенства в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$$

Получим искомые параметрические уравнения данной прямой.

Докажем, что данные параметрические уравнения задают равномерное движение точки по прямой, и найдём её скорость.

Рассмотрим промежуток времени от t_1 до t_2 , $T = t_2 - t_1$. Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ точки на прямой за этот промежуток времени будет иметь координаты (aT, bT) . Разделив вектор перемещения на время T , получим, что вектор скорости имеет координаты (a, b) . Он совпадает с направляющим вектором $\vec{m}(a, b)$ и не зависит от выбора промежутка времени. Следовательно, движение точки по прямой является равномерным. Длина вектора скорости

$$|\vec{m}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

представляет собой скорость движения точки по прямой.

Циклоида. Рассмотрим циклоиду — кривую, которая описывается точкой, закреплённой на окружности единичного радиуса, катящейся по оси Ox (рис. 28.3).

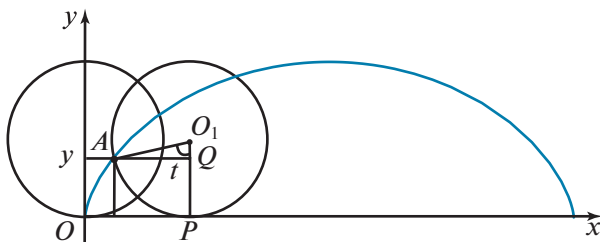


Рис. 28.3

Найдем её параметрические уравнения. Пусть окружность в начальный момент времени касается начала координат, в котором расположена отмеченная точка. Предположим, что окружность прокатилась по оси абсцисс и повернулась на некоторый угол величиной t . При этом отмеченная точка окружности переместится в точку A . Поскольку дуга AP окружности при этом прокатилась по отрезку OP , то их длины равны, т. е. $AP = OP = t$. Для координат x, y точки A выполняются равенства

$$x = OP - AQ = t - \sin t, \quad y = O_1P - O_1Q = 1 - \cos t.$$

Таким образом, параметрическими уравнениями циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

Кардиоида — кривая, являющаяся траекторией движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по окружности того же радиуса.

Рассмотрим единичную окружность с центром в начале координат.

Пусть вторая единичная окружность в начальный момент времени касается первой окружности с центром O в точке $P(1, 0)$, в которой расположена отмеченная точка.

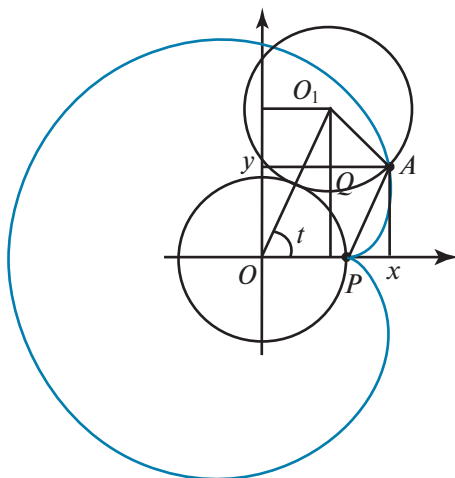


Рис. 28.4

Предположим, что вторая окружность прокатилась по первой окружности и повернулась вокруг точки O на некоторый угол величиной t (рис. 28.4 на с. 130). При этом отмеченная точка переместится в точку A . Имеем

$$OO_1 = 2, O_1A = 1, \angle AO_1Q = t - (90^\circ - t) = 2t - 90^\circ, \\ AQ = \sin(2t - 90^\circ) = -\cos 2t, O_1Q = \cos(2t - 90^\circ) = \sin 2t.$$

Следовательно, для координат x, y точки A выполняются равенства

$$x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t.$$

Таким образом, параметрическими уравнениями кардиоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

Вопросы

1. Какая кривая называется параметрически заданной?
2. Какие уравнения называются параметрическими?
3. Какими параметрическими уравнениями задаётся окружность?
4. Какими параметрическими уравнениями задаётся прямая?
5. Какими параметрическими уравнениями задаётся циклоида?
6. Какими параметрическими уравнениями задаётся кардиоида?

Задачи

1. Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$.
2. Напишите параметрические уравнения прямой, заданной уравнением: а) $x = 1$; б) $y = 1$.
3. Движение точки по прямой задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - 4t. \end{cases}$$

Найдите длину вектора скорости.

4. Найдите параметрические уравнения окружности с центром в точке $O(x_0, y_0)$ и радиусом R .
5. Напишите параметрические уравнения эллипса, полуоси которого равны a и b .
6. Какую кривую задают параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2? \end{cases}$$

7. Напишите параметрические уравнения спирали Архимеда, задаваемой уравнением в полярных координатах $r = a\varphi$.
8. Изобразите кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

Какая это кривая?

9. Изобразите кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Какая это кривая?

10. Изобразите кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

Какая это кривая?

§ 29* Использование программы GeoGebra для моделирования кривых на плоскости

Программа GeoGebra — это свободно распространяемая программа, которую можно скачать с официального сайта <http://geogebra.org>.

Она позволяет моделировать и решать различные алгебраические и геометрические задачи, строить графики функций, находить наибольшие и наименьшие значения, пределы, производные, интегралы, получать изображения плоских и пространственных фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков.

Кроме того, эта программа позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливая зависимости между геометрическими величинами и мн. др.

Здесь мы рассмотрим возможности GeoGebra для моделирования кривых на плоскости.

Рабочее окно этой программы имеет вид, показанный на рисунке 29.1.

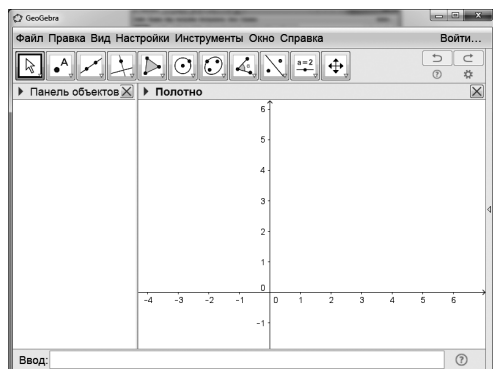


Рис. 29.1

Внизу рабочего окна находится строка «Ввод», в которой можно задавать фигуры аналитическими выражениями. Рассмотрим некоторые из них.

Прямая. Если в строке «Ввод» набрать

$$2x + 3y - 6 = 0$$

и нажать «Enter», то появится прямая, задаваемая этим уравнением (рис. 29.2).

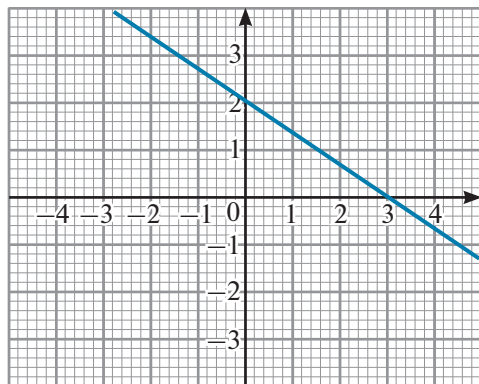


Рис. 29.2

Цвет и размеры этой и других фигур можно менять.

Прямую можно задавать и в общем виде

$$ax + by + c = 0,$$

где a , b , c — действительные числа, a и b одновременно не равны нулю.

Для этого нужно воспользоваться инструментом «Ползунок» и создать параметры a , b , c , которые могут изменяться в заданных промежутках.

После этого в строке «Ввод» нужно набрать

$$ax + by + c = 0$$

и нажать «Enter». Появится прямая, задаваемая этим уравнением. При изменении параметров положение прямой будет меняться. В результате можно будет увидеть, как изменение коэффициентов a , b , c влияет на расположение прямой.

Окружность. Если в строке «Ввод» набрать

$$x^2 + y^2 = 1$$

и нажать «Enter», то появится окружность с центром в начале координат и радиусом 1 (рис. 29.3).

Окружность можно задавать и в общем виде

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

Для этого нужно воспользоваться инструментом «Ползунок» и создать параметры a , b , c , которые могут изменяться в заданных промежутках.

После этого в строке «Ввод» нужно набрать

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

и нажать «Enter». Появится окружность, задаваемая этим уравнением. При изменении параметров положение окружности и её размеры будут меняться. В результате можно будет увидеть, как изменение коэффициентов a , b , c влияет на расположение и форму окружности.

Парабола. Для моделирования параболы, заданной уравнением

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a , b , c — действительные числа, a не равно нулю, воспользуемся инструментом «Ползунок» и создадим параметры a , b , c , которые могут изменяться в заданных промежутках.

После этого в строке «Ввод» нужно набрать

$$y = ax^2 + bx + c$$

и нажать «Enter». Появится парабола, задаваемая этим уравнением (рис. 29.4).

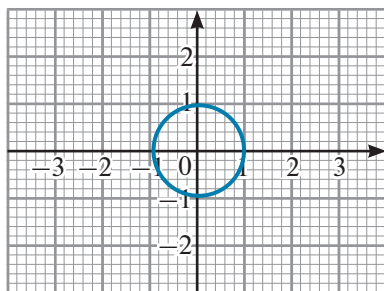


Рис. 29.3

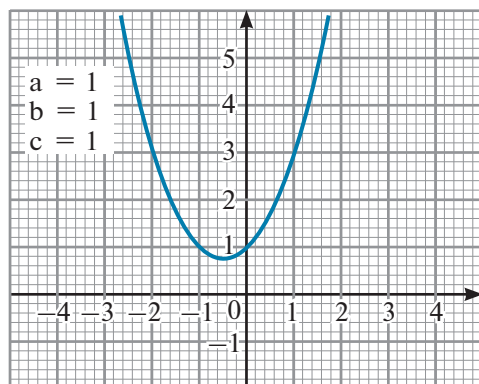


Рис. 29.4

При изменении параметров положение и форма параболы будут меняться. В результате можно будет увидеть, как изменение коэффициентов a , b , c влияет на расположение и форму параболы.

Спираль Архимеда — кривая, заданная уравнением в полярных координатах $r = a\varphi$.

Для её моделирования выберем $a = 1$. В строке «Ввод» наберём

Кривая((t;t),t,0,12Pi)

и нажмём «Enter». Появится спираль Архимеда (рис. 29.5).

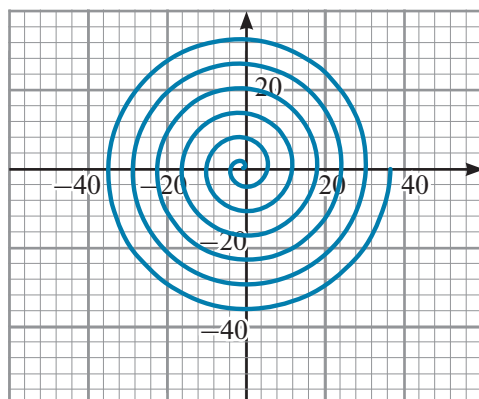


Рис. 29.5

Трилистник — кривая, заданная уравнением в полярных координатах $r = \sin 3\varphi$.

Для её моделирования в строке «Ввод» наберём

Кривая((t;t),t,0,12Pi)

и нажмём «Enter». Появится трилистник (рис. 29.6).

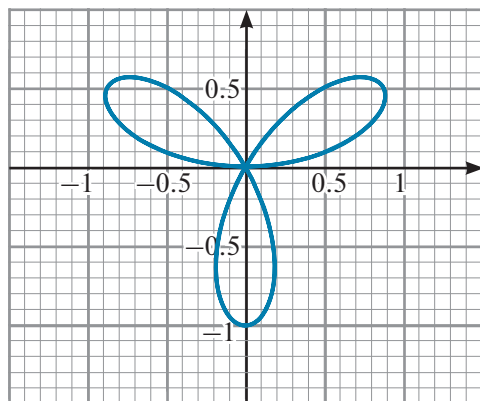


Рис. 29.6

Циклоида. Для получения циклоиды, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$$

в строке «Ввод» нужно набрать

Кривая(t-sin(t),1-cos(t),t,0,2Pi)

и нажать «Enter». Появится циклоида, задаваемая этим уравнением (рис. 29.7).

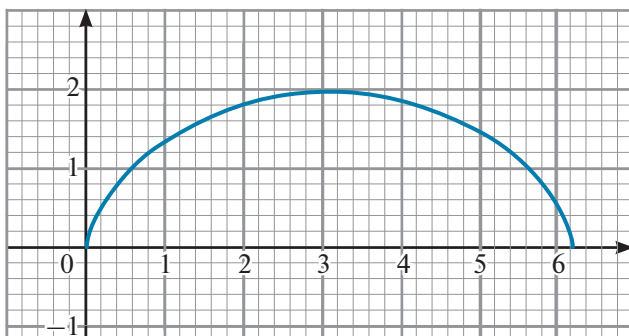


Рис. 29.7

В программе GeoGebra можно увидеть, как окружность катится по прямой, а точка, закреплённая на этой окружности, описывает циклоиду.

Для этого сделаем следующие операции.

1. Создадим ползунок a ($0 < a < 2\pi$).
2. В строке «Ввод» наберём $O=(a,1)$ и нажмём «Enter».
3. Используя инструмент «Окружность по центру и радиусу», построим окружность с центром в точке O и радиусом 1.
4. В строке «Ввод» наберём $A=(a-\sin(a), 1-\cos(a))$ и нажмём «Enter».
5. Используя инструмент «Отрезок», соединим отрезком точки O и A .
6. В строке «Ввод» наберём Кривая($t-\sin(t), 1-\cos(t), t, 0, a$) и нажмём «Enter».
7. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и в появившемся окне выберем инструмент «Анимировать».
8. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.

Один из моментов движения окружности изображён на рисунке 29.8.

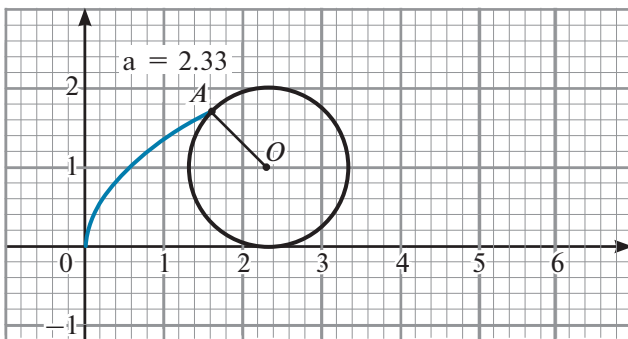


Рис. 29.8

Кардиоида. Для получения кардиоиды, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases}$$

в строке «Ввод» нужно набрать

Кривая($2\cos(t)-\cos(2t), 2\sin(t)-\sin(2t), t, 0, 2\pi$)

и нажать «Enter».

Появится кардиоида, задаваемая этим уравнением (рис. 29.9).

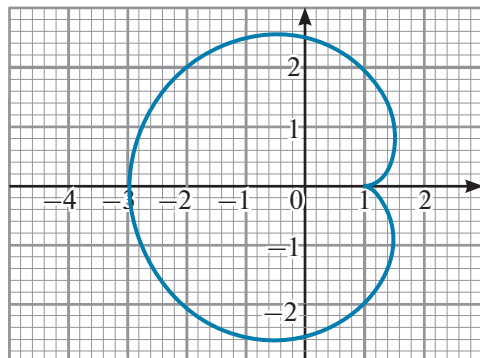


Рис. 29.9

Кривые, как траектории движения точек, в программе GeoGebra можно моделировать, используя инструмент «Оставлять след».

В качестве примера рассмотрим моделирование кардиоиды — траектории движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса.

Для получения кардиоиды проделаем следующие операции.

1. Создадим ползунок t ($0 < t < 2\pi$).
2. Используя инструмент «Окружность по центру и радиусу», построим окружность с центром в начале координат радиусом 1.
3. Построим точки $A(1, 0)$ и $O(2, 0)$.
4. Используя инструмент «Поворот», повернём эти точки вокруг начала координат против часовой стрелки на угол t . Получим точки соответственно A' и O' .
5. Используя инструмент «Поворот вокруг точки», повернём точку A' вокруг точки O' против часовой стрелки на угол t и нажмём «Enter». Получим точку A'' .
6. Используя инструмент «Отрезок», соединим отрезком точки O' и A'' .
7. Установим ползунок в положение $t=0$.
8. Нажмём правой кнопкой «мыши» на точку A'' и в открывшемся окне выберем строчку «Оставлять след».
9. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок t и в появившемся окне выберем инструмент «Анимировать».
10. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.

Один из моментов движения окружности изображён на рисунке 29.10.

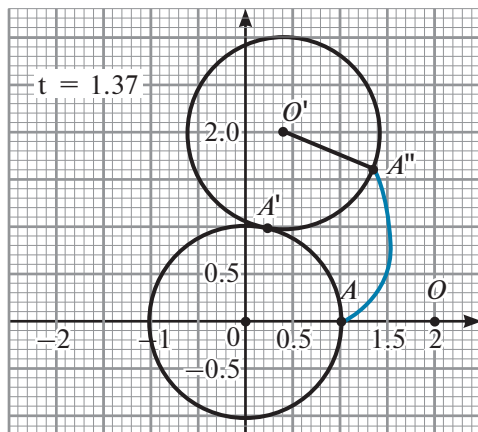


Рис. 29.10

Задачи

1. Получите изображение окружности с центром в точке (1, 2) и радиусом 3.
2. Получите изображение кривой, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$.

Что это за кривая?

3. Получите изображение эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. Получите изображение гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

5. Получите кривую, называемую *лемнискатой Бернулли*, задаваемую уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

6. Получите кривую, называемую *листом Декарта*, задаваемую уравнением

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

7. Получите кривую, заданную уравнением в полярных координатах

$$r = \sin \frac{5\varphi}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq 3\pi.$$

8. Получите кривую, заданную уравнением в полярных координатах

$$r = 1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi.$$

9. Получите кривую, заданную уравнением в полярных координатах

$$r = 30 + 15\sin 60\varphi \cdot \sin 2,5\varphi.$$

10. Получите астроиду, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

11. Получите циклоиду, как траекторию движения точки, используя инструмент «Оставлять след».

12. Получите кардиоиду, как траекторию движения точки, используя её задание параметрическими уравнениями.

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ

1. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

1. Прямая a' центрально-симметрична прямой a относительно центра O , отстоящего от прямой a на расстояние 2. Найдите расстояние между прямыми a и a' .

2. Точка P принадлежит единичной окружности. Найдите расстояние между центром этой окружности и центром центрально-симметричной ей окружности относительно точки P .

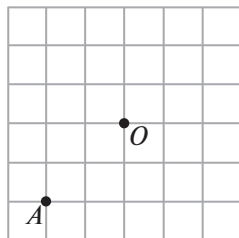
3. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью правильного треугольника и центрально-симметричного ему треугольника относительно центра описанной окружности?

4. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью равнобедренной трапеции и центрально-симметричной ей трапеции относительно точки пересечения её диагоналей?

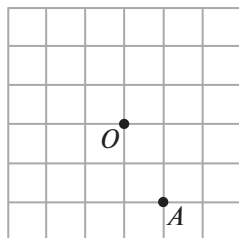
5. Точка P принадлежит диагонали AC квадрата $ABCD$ со стороной 2 и делит её в отношении $3:1$, считая от вершины A . Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью квадрата $ABCD$ и центрально-симметричного ему квадрата относительно центра P ?

6. Точка P принадлежит радиусу окружности и делит его пополам. Найдите градусную величину дуги AB этой окружности, лежащей внутри центрально-симметричной ей окружности относительно точки P .

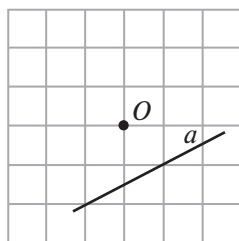
7. Изобразите точку, симметричную точке A относительно точки O .



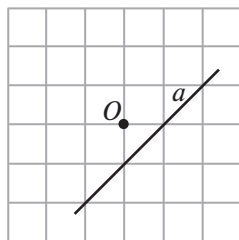
8. Изобразите точку, симметричную точке A относительно точки O .



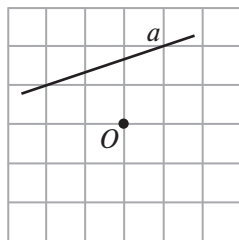
9. Изобразите прямую, симметричную прямой a относительно точки O .



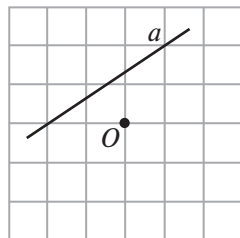
10. Изобразите прямую, симметричную прямой a относительно точки O .



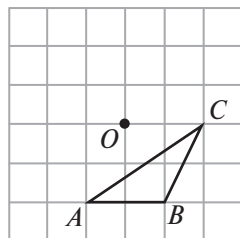
11. Изобразите прямую, симметричную прямой a относительно точки O .



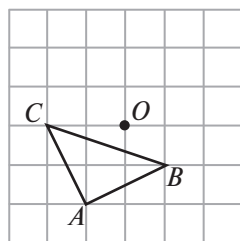
12. Изобразите прямую, симметричную прямой a относительно точки O .



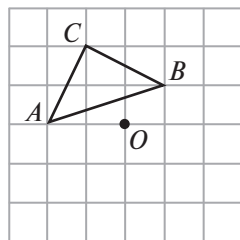
13. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O .



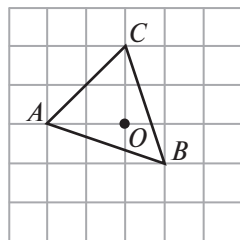
14. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O .



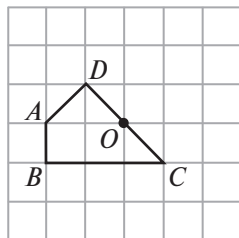
15. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O .



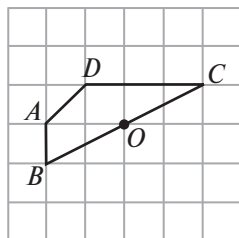
16. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O .



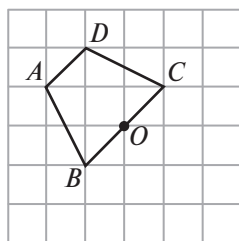
17. Изобразите четырёхугольник, симметричный четырёхугольнику $ABCD$ относительно середины стороны CD .



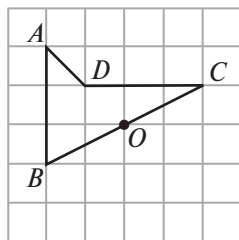
18. Изобразите четырёхугольник, симметричный четырёхугольнику $ABCD$ относительно середины стороны BC .



19. Изобразите четырёхугольник, симметричный четырёхугольнику $ABCD$ относительно середины стороны BC .



20. Изобразите четырёхугольник, симметричный четырёхугольнику $ABCD$ относительно середины стороны BC .



2. ПОВОРОТ. СИММЕТРИЯ n -ГО ПОРЯДКА

1. На какой угол нужно повернуть прямую вокруг точки, ей не принадлежащей, чтобы полученная прямая была параллельна исходной?

2. Прямая повёрнута вокруг точки A , находящейся от неё на расстоянии 1, на угол 180° . Найдите расстояние между исходной прямой и повёрнутой.

3. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный треугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы он совместился сам с собой?

4. На какой наименьший угол нужно повернуть квадрат вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы он совместился сам с собой?

5. На какой наименьший угол нужно повернуть прямоугольник, отличный от квадрата, вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы он совместился сам с собой?

6. На какой наименьший угол нужно повернуть ромб, отличный от квадрата, вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы он совместился сам с собой?

7. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный пятиугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы он совместился сам с собой?

8. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный шестиугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы он совместился сам с собой?

9. Правильный треугольник повернули на 60° вокруг центра его описанной окружности. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного треугольника и повёрнутого?

10. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный треугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы общей частью исходного треугольника и повёрнутого был правильный шестиугольник?

11. Правильный треугольник повернули вокруг середины его стороны на угол 60° . Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного треугольника и повёрнутого?

12. Правильный треугольник со стороной 2 повернули вокруг середины его стороны на угол 60° . Найдите периметр многоугольника, являющегося общей частью исходного треугольника и повёрнутого.

13. Квадрат повернули на 45° вокруг точки пересечения его диагоналей. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного квадрата и повернутого?

14. На какой наименьший угол нужно повернуть квадрат вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы общей частью исходного квадрата и повернутого был правильный восьмиугольник?

15. Квадрат со стороной 2 повернули вокруг середины его стороны на угол 90° . Найдите периметр многоугольника, являющегося общей частью исходного квадрата и повернутого.

16. Прямоугольник со сторонами 6 и 10 повернули вокруг точки пересечения его диагоналей на угол 90° . Найдите периметр общей части исходного прямоугольника и повернутого.

17. Правильный пятиугольник повернули на 36° вокруг центра его описанной окружности. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного пятиугольника и повернутого?

18. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный пятиугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы общей частью исходного пятиугольника и повернутого был правильный десятиугольник?

19. Правильный шестиугольник повернули на 30° вокруг центра его описанной окружности. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного шестиугольника и повернутого?

20. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный шестиугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы общей частью исходного шестиугольника и повернутого был правильный двенадцатиугольник?

21. Правильный шестиугольник со стороной 2 повернули на 60° вокруг одной из его вершин. Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного шестиугольника и повернутого?

22. На какой наименьший угол нужно повернуть окружность вокруг точки, ей принадлежащей, чтобы повернутая окружность касалась исходной?

23. Точка удалена от центра окружности радиуса 2 на расстояние 4. На какой наименьший угол нужно повернуть окружность вокруг этой точки, чтобы повернутая окружность касалась исходной?

24. Окружность повернута вокруг точки, ей принадлежащей, на угол 60° . Найдите градусную величину дуги исходной окружности, лежащей внутри повернутой.

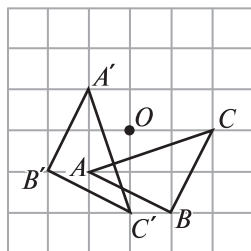
25. Окружность радиуса 2 повернута вокруг точки, ей принадлежащей, на угол 60° . Найдите расстояние между центрами исходной окружности и повернутой.

26. Окружность повернута вокруг точки, ей принадлежащей, на угол 90° . Найдите градусную величину дуги исходной окружности, лежащей внутри повернутой.

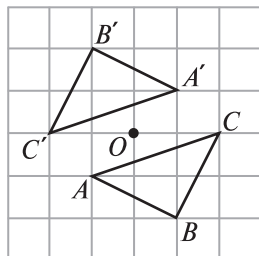
27. Окружность повернута вокруг точки, ей принадлежащей, на угол 120° . Найдите градусную величину дуги исходной окружности, лежащей внутри повернутой.

28. Окружность радиуса 2 повернута вокруг точки, ей принадлежащей, на угол 120° . Найдите длину хорды, соединяющей точки пересечения исходной окружности и повернутой.

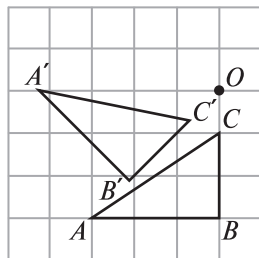
29. Треугольник $A'B'C'$ получен поворотом треугольника ABC по часовой стрелке вокруг точки O . Найдите угол поворота.



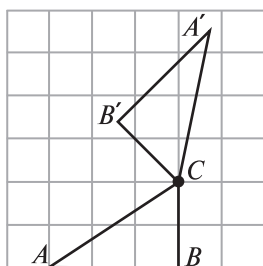
30. Треугольник $A'B'C'$ получен поворотом треугольника ABC против часовой стрелки вокруг точки O . Найдите угол поворота.



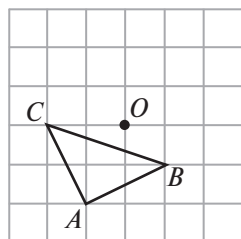
31. Треугольник $A'B'C'$ получен поворотом треугольника ABC по часовой стрелке вокруг точки O . Найдите угол поворота.



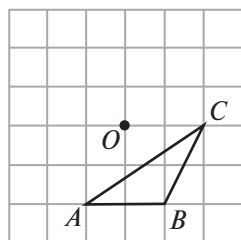
32. Треугольник $A'B'C'$ получен поворотом треугольника ABC против часовой стрелки вокруг точки C . Найдите угол поворота.



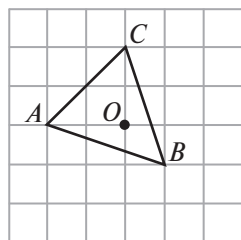
33. Изобразите треугольник, полученный поворотом треугольника ABC вокруг точки O на угол 90° против часовой стрелки.



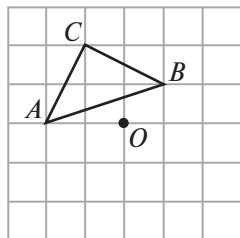
34. Изобразите треугольник, полученный поворотом треугольника ABC вокруг точки O на угол 90° против часовой стрелки.



35. Изобразите треугольник, полученный поворотом треугольника ABC вокруг точки O на угол 90° против часовой стрелки.



36. Изобразите треугольник, полученный поворотом треугольника ABC вокруг точки O на угол 90° против часовой стрелки.

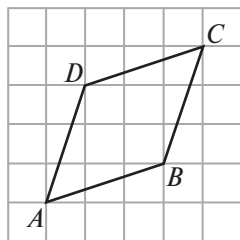


3. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

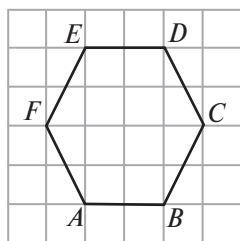
1. Сколько осей симметрии имеет правильный треугольник?
2. Сколько осей симметрии имеет квадрат?
3. Сколько осей симметрии имеет правильный пятиугольник?
4. Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник?
5. Сколько осей симметрии имеет фигура, составленная из двух прямых, пересекающихся под прямым углом?
6. Сколько осей симметрии имеет фигура, составленная из двух прямых, пересекающихся под углом 60° ?
7. Сколько осей симметрии имеет прямоугольник, отличный от квадрата?
8. Сколько осей симметрии имеет ромб, отличный от квадрата?
9. Сколько осей симметрии имеет параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба?
10. Правильный треугольник со стороной 1 симметрично отразили относительно прямой, содержащей его среднюю линию. Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного треугольника и симметричного?

11. Равнобедренную трапецию, основания которой равны 6 и 8, а боковые стороны равны 4, симметрично отразили относительно прямой, содержащей её среднюю линию. Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью исходной трапеции и симметричной?

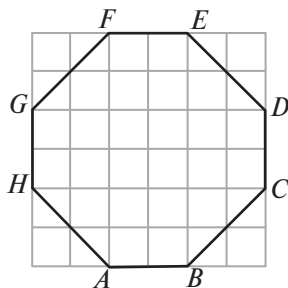
12. Сколько осей симметрии имеет четырёхугольник $ABCD$, изображённый на рисунке?



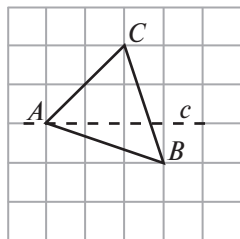
13. Сколько осей симметрии имеет шестиугольник $ABCDEF$, изображённый на рисунке?



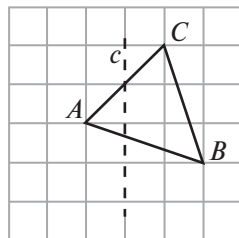
14. Сколько осей симметрии имеет восьмиугольник $ABCDEFGH$, изображённый на рисунке?



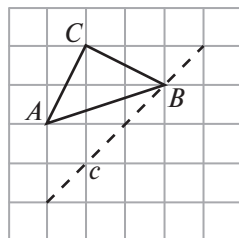
15. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой c .



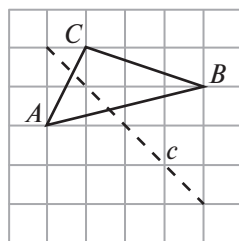
16. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой c .



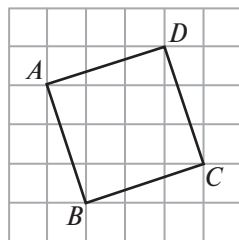
17. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой c .



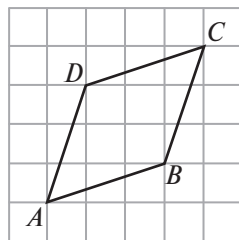
18. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой c .



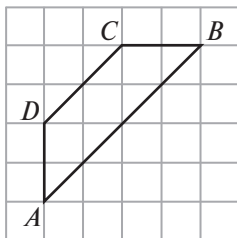
19. Изобразите все оси симметрии четырёхугольника $ABCD$.



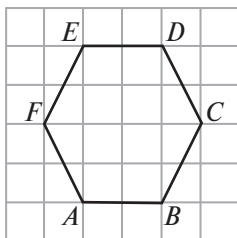
20. Изобразите все оси симметрии четырёхугольника $ABCD$.



21. Изобразите все оси симметрии четырёхугольника $ABCD$.



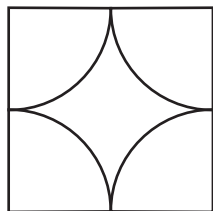
22. Изобразите все оси симметрии шестиугольника $ABCDEF$.



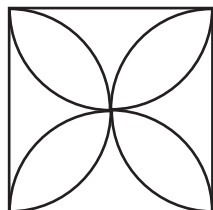
4. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

1. Найдите длину окружности, диаметр которой равен 1.
2. Найдите диаметр окружности, длина которой равна 1.
3. Во сколько раз увеличится длина окружности, если её радиус увеличить в три раза?
4. На сколько уменьшится длина окружности, если её радиус уменьшить на 1?
5. Найдите длину окружности, описанной около правильного шестиугольника со стороной 1.
6. Найдите длину полуокружности радиуса 3.
7. Найдите длину дуги окружности радиуса 4, на которую опирается центральный угол величиной 90° .
8. Найдите длину дуги окружности радиуса 6, на которую опирается центральный угол величиной 120° .
9. Хорда, длина которой равна 9, стягивает дугу окружности величиной 60° . Найдите длину дуги.

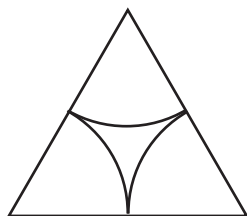
10. Найдите длину кривой, изображённой на рисунке, составленной из четырёх дуг окружностей с центрами в вершинах единичного квадрата.



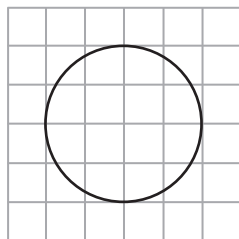
11. Найдите длину кривой, изображённой на рисунке, составленной из четырёх дуг окружностей с центрами в серединах сторон единичного квадрата.



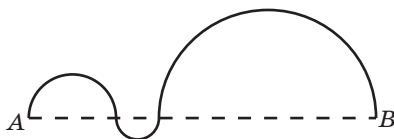
12. Найдите длину кривой, изображённой на рисунке, составленной из трёх дуг окружностей с центрами в вершинах правильного треугольника со сторонами 2.



13. Найдите длину окружности, изображённой на рисунке. Стороны квадратных клеток равны 1.

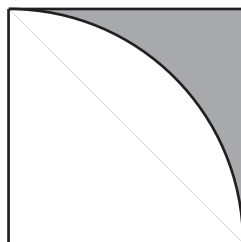


14. Найдите длину кривой, составленной из трёх полуокружностей, изображённых на рисунке, диаметры которых составляют отрезок AB длины 6.

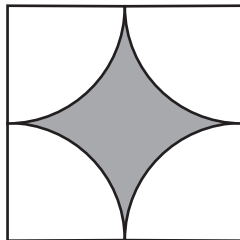


5. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ

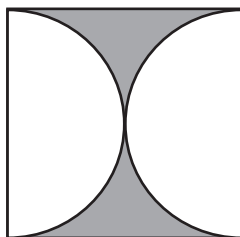
1. Найдите площадь круга, диаметр которого равен 12.
2. Найдите радиус круга, площадь которого равна 16π .
3. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус увеличить в три раза?
4. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна 4π .
5. Радиусы двух кругов равны 3 и 4. Найдите радиус круга, площадь которого равна сумме площадей этих кругов.
6. Площадь круга равна π . Найдите длину его окружности.
7. Найдите площадь круга, вписанного в квадрат со стороной 2.
8. Найдите площадь круга, описанного около квадрата со стороной, равной 1.
9. Площадь круга, вписанного в квадрат, равна 1. Найдите площадь круга, описанного около этого квадрата.
10. Найдите площадь сектора круга радиуса 6, центральный угол которого равен 60° .
11. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, центральный угол которого равен 90° .
12. Найдите площадь сектора круга радиуса 3, центральный угол которого равен 120° .
13. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.
14. Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны 1 и 2.
15. Площадь сектора круга радиуса 3 равна 6. Найдите длину его дуги.
16. Найдите площадь части единичного квадрата, расположенной вне единичного круга с центром в вершине этого квадрата.



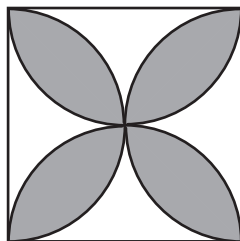
17. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке, ограниченной четырьмя дугами окружностей с центрами в вершинах единичного квадрата.



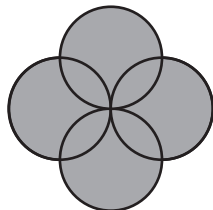
18. Найдите площадь части квадрата, изображённой на рисунке, ограниченной двумя полуокружностями с центрами в серединах двух противоположных сторон единичного квадрата.



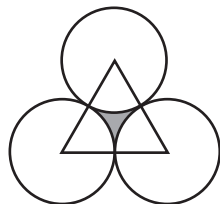
19. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке, ограниченной дугами окружностей с центрами в серединах сторон единичного квадрата.



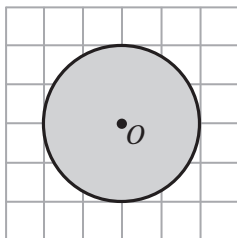
20. Найдите площадь фигуры, покрываемой четырьмя единичными кругами, изображёнными на рисунке.



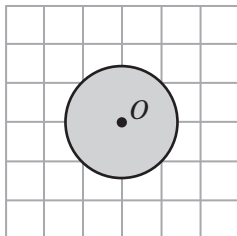
21. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке, ограниченной тремя дугами окружностей с центрами в вершинах правильного треугольника со стороной, равной 2.



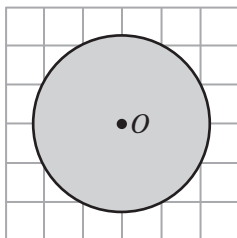
22. Найдите площадь круга, изображённого на рисунке. Стороны квадратных клеток равны 1.



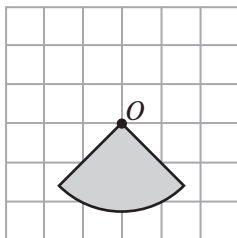
23. Найдите площадь круга, изображённого на рисунке. Стороны квадратных клеток равны 1.



24. Найдите площадь круга, считая стороны квадратных клеток равными 1.



25. Найдите площадь сектора, считая стороны квадратных клеток равными 1.



6. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1. Из точки $A(6, 8)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите абсциссу основания перпендикуляра.

2. Через точку $A(6, 8)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите ординату её точки пересечения с осью Oy .

3. Найдите расстояние от точки A с координатами $(6, 8)$ до оси абсцисс.

4. Найдите расстояние от точки A с координатами $(6, 8)$ до оси ординат.

5. Найдите расстояние от точки A с координатами $(6, 8)$ до начала координат.

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно оси Oy .

7. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно оси Ox .

8. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно начала координат.

9. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$.

10. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-2, 2)$.

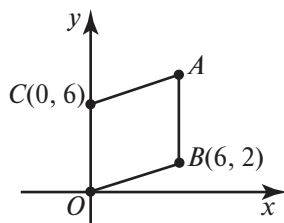
11. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-6, 0)$.

12. Прямая a проходит через точки с координатами $(0, 4)$ и $(6, 0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0, 8)$ и параллельна прямой a . Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox .

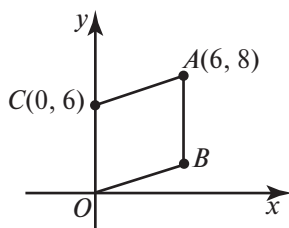
13. Прямая a проходит через точки с координатами $(0, 4)$ и $(-6, 0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0, -6)$ и параллельна прямой a . Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox .

14. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и прямой, проходящей через точку $B(6, 4)$ и параллельной прямой, проходящей через начало координат и точку $A(6, 8)$.

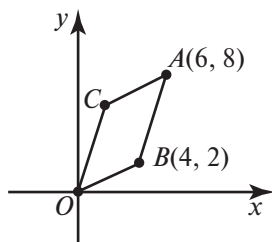
15. Точки $O(0, 0)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ и A являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты точки A .



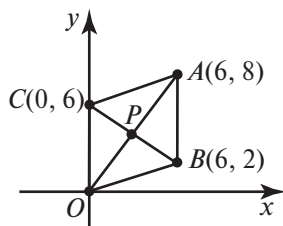
16. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $C(0, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки B .



17. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(4, 2)$ и C являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты точки C .



18. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки P пересечения его диагоналей.



7. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$.

2. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-2, 2)$.

3. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 0)$, $B(8, 6)$, $C(2, 6)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину её средней линии.

4. Окружность с центром в начале координат проходит через точку $P(8, 6)$. Найдите её радиус.

5. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси абсцисс?

6. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси ординат?

7. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(-2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$.

8. Найдите координаты центра окружности, описанной около прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(-2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$.

9. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8, 0)$, $(0, 6)$, $(8, 6)$.

10. Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8, 0)$, $(0, 6)$, $(8, 6)$.

11. Какому наименьшему натуральному числу должен равняться радиус окружности с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы эта окружность пересекалась с осью абсцисс?

12. Какому наибольшему натуральному числу должен равняться радиус окружности с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы эта окружность не имела общих точек с осью ординат?

13. Какого радиуса должна быть окружность с центром в начале координат, чтобы она касалась прямой, заданной уравнением $x + y = 2\sqrt{2}$?

14. Найдите радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.

15. Найдите координаты центра окружности, заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.

16. Найдите координаты центра окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 12 = 0$.

17. Какого радиуса должна быть окружность с центром в начале координат, чтобы она касалась внешним образом окружности с центром в точке $P(8, 6)$ и радиусом 2?

18. Какого радиуса должна быть окружность с центром в начале координат, чтобы она касалась внутренним образом окружности с центром в точке $P(8, 6)$ и радиусом 2?

19. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась внешним образом окружности с центром в начале координат и радиусом 4?

20. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась внутренним образом окружности с центром в начале координат и радиусом 4?

8. ВЕКТОРЫ

1. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

2. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

5. В прямоугольнике $ABCD$ дано: $AB = 6$, $AD = 8$. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

6. В прямоугольнике $ABCD$ дано: $AB = 6$, $AD = 8$. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

7. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

8. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

9. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

10. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

11. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$.

12. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$.

13. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

14. Стороны правильного треугольника ABC равны $\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

15. Стороны правильного треугольника ABC равны 1. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

16. Стороны правильного треугольника ABC равны 2. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

17. Стороны правильного треугольника ABC равны $\sqrt{3}$, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

18. Стороны правильного треугольника ABC равны 3, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

19. Стороны правильного треугольника ABC равны 3, O — центр описанной окружности. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

20. Стороны правильного треугольника ABC равны 1, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

21. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(2, 4)$ имеет координаты $(6, 2)$. Найдите координаты точки B .

22. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5, 3)$ имеет координаты $(3, 1)$. Найдите координаты точки A .

9. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

1. Найдите абсциссу точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Ox .

2. Найдите ординату точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Oy .

3. Найдите координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 10$ и $y = x$.

4. Найдите координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями $y = 3x - 2$ и $y = 2x + 3$.

5. Найдите координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями $2x + 3y = 6$ и $3x + 2y = 4$.

6. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $y = 2x + 3$.

7. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $x = 2y + 4$.

8. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $3x + 4y = 6$.

9. Найдите расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением $x + y = 2\sqrt{2}$.

10. Найдите расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением $4x + 3y = 12$.

11. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $x + y = 2$, $x - y = 3$.

12. Найдите косинус угла между прямыми, заданными уравнениями $3x + 4y = 1$, $4x + 3y = 2$.

Абсцисса 80
Аналитическое задание
— выпуклых многоугольников 108
— фигур 109
Астроида 68

Вектор 15, 88
— направляющий 129
— нормали 103
— противоположный 92
Векторы
— коллинеарные 88
— одинаково направленные 16, 88
— противоположно направленные 16, 88
— равные 16, 88
Вращающиеся квадраты 38

Гармоническое отношение 36
Гипербола 111
Гомотетия 34

Единичная окружность 119

Движение 19
Декартовы координаты 80
Длина
— вектора 16, 88
— окружности 60

Задача Дидоны 75
Задачи оптимизации 115
Золотая спираль 38
Золотое сечение 35
Золотой прямоугольник 37
— треугольник 39

Изопериметрическая задача 74

Кардиоида 67, 130
Композиция движений 20
Координатная
— ось 79
— плоскость 80
— прямая 79

Координатные векторы 97
Координаты
— вектора 97
— точки 80
Коэффициент подобия 31
Круговой
— сегмент 71
— сектор 71

Математическая модель 116
Многоугольник ограниченный 116
Модуль вектора 16, 88

Направляющий вектор 129
Начало координат 79

Окружность 124, 128
Ордината 80
Ось
— абсцисс 80
— ординат 80
— симметрии 12

Парабола 109
Параллельный перенос 15
Параметрически заданная кривая 128
Параметрические уравнения 128
Паркет 25
— правильный 25
Пентаграмма 40
Площадь круга 70
Поворот 8
Подобие 31

- Полюс 123
Полярная ось 123
Полярный
— радиус 123
— угол 123
Полярные координаты 122
Произведение вектора на число 92
Прямая 129
Прямоугольная система координат 80
Радян 62
Радянная мера угла 62
Разность векторов 93
Расстояние между точками 85
Симметрия
— осевая 12
— центральная 4
Скалярное произведение 100
Скалярный квадрат 100
Спираль Архимеда 124
Сумма векторов 89
Теорема
— Ван Обеля 57
— косинусов 45
— Менелая 54
— синусов 49
— Чевы 55
Точка
— Жергона 56
— Нагеля 59
Тригонометрические функции 119
Трилистник 125
Угловой коэффициент прямой 104
Уравнение
— окружности 85
— прямой 103
Фигуры
— подобные 32
— равные 21
Формула Герона 46
— расстояния от точки до прямой 105
Центр симметрии 4
— n -го порядка 8
Центрально-симметричные
— точки 4
— фигуры 4
Циклоида 64, 130
Циклоидальные кривые 64
Эллипс 110

ОТВЕТЫ

§ 1

1. Центр симметрии. 2. Прямые, проходящие через центр симметрии. 3. Середина отрезка. 4. В середине отрезка AA' . 5. Нет. 6. Да. 7. Нет. 8. Да. 9. Да. 15. б), в), г), д). 17. Н, I, N, O, S, X, Z. 19. Две прямые параллельны третьей и находятся от неё на равном расстоянии. 22. $\frac{2}{3}$.

§ 2

2. а) 90° ; б) 180° . 5. Нет. 6. Нет. 7. Да. 10. Правильный шестиугольник. 11. а) Центр описанной окружности, 120° ; б) точка пересечения диагоналей, 180° ; в) центр описанной окружности, 60° ; г) центр окружности, произвольный угол; д) центр описанной окружности, 72° . 12. а), б), в) 2-го порядка; г) 4-го порядка. 14. 6-го порядка. 16. $\frac{2}{3}$. 17. 9. 18. $2\sqrt{2} - 2$.

§ 3

1. Принадлежащие оси симметрии. 2. Ось симметрии и прямые, ей перпендикулярные. 3. Перпендикулярна отрезку AA' и проходит через его середину. 4. Да. 8. а) A, B, C, D, E, M, T, U, V, W, Y; б) H, I, O, X. 11. Если она параллельна оси симметрии. 12. Нет. 14. а) Две оси симметрии, проходящие через середины противоположных сторон; б) две прямые, проходящие через середины противоположных сторон, и две прямые, содержащие диагонали. 16. н. 17. а) Правильный треугольник; б) параллелограмм. 20. Последовательное выполнение двух осевых симметрий относительно перпендикулярных прямых будет центральной симметрией относительно точки пересечения этих прямых. 21. $\frac{1}{2}$. 22. 9.

§ 4

1. а) 1 и 8; 2 и 7; 3 и 12; 5, 9 и 15; б) 1 и 2; 1 и 7; 2 и 8; 3 и 14; 4 и 6; 5 и 10; 7 и 8; 9 и 10; 10 и 15; 12 и 14. 2. $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{BA}$ и $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$, $\overline{DA}$ и $\overline{CB}$, $\overline{AO}$ и $\overline{OC}$, $\overline{OA}$ и $\overline{CO}$, $\overline{DO}$ и $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ и $\overline{BO}$; всего имеется 12 различных векторов. 4. Ромб. 8. Отрезки равны и лежат на параллельных прямых или на одной прямой. 9. Бесконечно много. 10. Нет.

§ 5

1. Нет. 10. а, б, д; в, г, з; е, ж. 15. Нет, не всегда.

§ 6*

1. а), в) Нет; б) да. 2. а), б) Да; в) нет. 3. Да.

§ 7

1. $\frac{1}{k}$. 2. Например, прямая. 3. Да. 4. а) A' лежит между O и A ; б) A лежит между O и A' . 5. Да, прямые, проходящие через центр гомотетии. 6. Да. 7. а) Имеют общий центр; б) касаются внутренним образом. 11. 2,8 см, 4,2 см, 2 см, 8,4 см. 12. Нет. 13. Нет. 14. а) Равны соответствующие углы; б) равны соответствующие углы, и пропорциональны соответствующие стороны; в) равны соответствующие углы, и пропорциональны соответствующие стороны.
17. $\frac{b^2}{a}$. 18. 8 см. 19. $\sqrt{127\,500} \approx 357$ (км). 22. а), б) Нет.

§ 8*

1. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 2. $b\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 4. $\varphi^4 = 2 - 3\varphi$. 9. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 10. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
12. а) $\sqrt{5}+1$; б) $\sqrt{5}-1$.

§ 9

1. а) 4 : 9; б) 2 : 3; в) 1 : 2,25. 2. а) 2 : 3; б) $\sqrt{3} : 2$; в) 1 : 2. 3. 36 : 49.
4. а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 25 раз. 5. Четвёртую часть. 6. Четвёртую часть. 7. 9 : 4 : 1. 8. $(\sqrt{2}-1) : 1$. 9. 20 см².
10. 14,4 м². 11. а) Увеличится в n^2 раз; б) уменьшится в m^2 раз.
12. $a^2 : b^2$. 14. $\sqrt{2} + 1$. 15. $\frac{b^3}{3}$. 16. $\sqrt{S+T} - \sqrt{S}$. 17. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

§ 10

1. $4\sqrt{7}$ см. 2. а) 14 см; б) 26 мм. 3. а) $\angle A < 90^\circ$; б) $\angle A = 90^\circ$; в) $\angle A > 90^\circ$. 4. а) Тупоугольный; б) прямоугольный; в) остроугольный. 5. а) На стороне треугольника; б) внутри треугольника; в) вне треугольника. 6. $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{19}{35}$. 7. $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 - 2dc \cos \varphi}$,
 $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2dc \cos \varphi}$. 8. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}$; $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}$.
9. 2,25 м и 3,75 м. 12. $12\sqrt{5}$. 14. 7. 16. $2\sqrt{7}$. 17. 26. 19. $12\sqrt{5}$.

20. $\frac{12\sqrt{2}}{7}$. 21. 6. 22. Если $2c^2 < AB^2$, то таких точек нет. Если $2c^2 = AB^2$, то имеется одна точка — середина отрезка AB . Если $2c^2 > AB^2$, то искомым ГМТ является окружность с центром в середине отрезка AB и диаметром d , $d^2 = 2c^2 - AB^2$.

§ 11

1. 2 : 3 : 4. 2. 3 : 4 : 5, прямоугольный. 3. а) $\sqrt{3} : 3$, $\sqrt{3} : 3$; б) 1 : 2 и $\sqrt{3} : 2$. 4. $2\sqrt{6}$ см. 5. а) 10 см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см. г) 5 см; д) 10 см. 6. а) 3 см; б) $3\sqrt{2}$ см; в) $3\sqrt{3}$ см; г) 6 см; д) 3 см. 7. $\frac{c \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}$, $\frac{c \cdot \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}$. 8. 1 : $\sqrt{3} : 2$. 9. $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$ ч ≈ 2 ч 5 мин. 10. $\frac{AD \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi}{\sin(\psi - \varphi)}$. 15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 16. 1. 17. 1. 18. 30° или 150° . 19. $3\frac{1}{8}$. 20. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$. 21. $h = \frac{a \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi}{\sin(\psi - \varphi)}$. 22. $AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}$, $AD = \frac{AB \cdot \sin(\beta + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}$, $d^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \varphi$.

§ 12*

1. 2 : 1. 2. 3 : 1. 3. Да. 4. 1 : 3. 6. 1 : 2. 7. $\frac{2}{7}$.

§ 13

1. а) 4; б) 8; в) 12. 2. а) $3\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{2}$; в) 6. 3. а) Увеличится в три раза; б) уменьшится в два раза. 4. $\pi a\sqrt{2}$. 5. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $\frac{7\pi}{4}$. 6. $\frac{180}{\pi}$ м. 7. $R\sqrt{3}$. 8. $2Rn \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{\pi}$. 10. $3 < \pi < 2\sqrt{3}$. 11. $(2\sqrt{3} - 3)R$. 12. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$. 13. а) 90° ; б) 45° ; в) $22^\circ 30'$; г) 150° ; д) 70° ; е) 240° . 14. $\approx 6\,369\,427$ м. 15. На 2π м.

§ 14*

2. а) Да; б) нет. 7. а) Да; б) нет. 10. а), б) Да.

§ 15

1. а) 4π см²; б) 25π м². 2. а) $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$ см; б) $\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi}$ м. 3. $\pi(b^2 - a^2)$.
 4. $\frac{\pi(a^2 + b^2)}{4}$. 5. $\frac{\pi a^2}{12}$. 6. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. 7. а) $\frac{\pi R^2}{6}$; б) $\frac{\pi R^2}{9}$; в) $\frac{5\pi R^2}{12}$. 8. а) $(\pi - 2)R^2$;
 б) $(4\pi - 3\sqrt{3})\frac{R^2}{4}$; в) $(2\pi - 3\sqrt{3})\frac{R^2}{2}$. 9. а) $\frac{a^2}{4}(4 - \pi)$; б) $\frac{1}{4}(\sqrt{3}a^2 - 2\pi b^2)$.
 10. $\frac{\pi a^2}{4}$. 12. $8 + \frac{\pi}{2}$ см². 15. а) $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$; б) $2\pi - 4$.

§ 16*

4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 7. 1.

§ 17

1. а) 2; б) 1; в) -4. 3. (1, 2), (2, 1), (-1, 1,5), (-2,5, 1), (-1, -1,5),
 (-2, -3), (1, -2,5), (2, -2). 4. 2. 5. 3. 6. (2, 0). 7. (0, 3). 9. а) $(x, -y)$;
 б) $(-x, y)$; в) $(-x, -y)$. 10. $N(-2, 6)$; $N_1(2, 6)$. 11. а) $(-1, 2)$;
 б) $(-3, -1)$; в) $(3, -2)$; г) $(3, 1)$. 12. а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
 13. а) Прямая, параллельная оси ординат; б) прямая, параллельная
 оси абсцисс; в) две прямые, параллельные оси ординат; г) две полу-
 плоскости; д) прямая; е) прямая. 15. а) $\sqrt{2}$; б) 5; в) $\sqrt{5}$. 17. а) (3, 2);
 б) (-1, 3); в) (1, 1).

§ 18

1. а) $\sqrt{5}$; б) 5. 2. Одинаково. 3. $\sqrt{34} + \sqrt{13} + \sqrt{29}$. 4. Равнобедрен-
 ный прямоугольный. 6. а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$.
 7. а) Внутри окружности; б), в), г) на окружности; д) вне окружно-
 сти. 8. а) (2, -5), 3; б) (0, 6), $\sqrt{11}$. 10. $(x - 3)^2 + y^2 = 11$. 11. $x^2 +$
 $+(y - 3)^2 = 13$. 12. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. 13. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 =$
 $= 25$. 14. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R^2$. 15. (4, 0). 16. (3, 3).

§ 19

1. 8. 2. а) 3 см; б) 4 см; в) 3 см; г) 5 см; д) 5 см. 3. а) 13 см;
 б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\sqrt{74}$ см. 4. а), в) Да; б), г) нет. 5. а), г) Да; б), в) нет.
 10. а), б), в), д), е) Да; г) нет. 12. а) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{b} + \vec{c}$; в) $\vec{a} + \vec{b}$.

14. Векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
 16. а) a ; б) $a\sqrt{3}$; в) $a\sqrt{3}$. 17. а) 14; б) 10; в) 14; г) 10.

§ 20

4. а) $-\vec{a}$; б) $\vec{b}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $\vec{b} - 2\vec{a}$; д) $2(\vec{a} - \vec{b})$. 5. а) $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$;
 б) $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$; в) $\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$. 10. а) $\vec{a} = \vec{b}$; б) $\vec{a} = \vec{0}$. 11. а) $\overline{AB}$; б) $\overline{AC}$. 12. а),
 б) a . 13. а) -2 ; б) 10; в) -2 ; г) 10.

§ 21

1. а) $(-2, 6)$; б) $(1, 3)$; в) $(0, -3)$; г) $(-5, 0)$. 2. $(5, -2)$. 3. $\sqrt{x^2 + y^2}$.
 4. $(5, -6)$. 5. а) $(-7, 9)$; б) $(5, -8)$; в) $(8, 0)$. 6. $(-a, -b)$. 8. $(-2, 0)$.
 9. $(1, 3)$ и $(1, -3)$. 10. а) $(1, -2)$; б) $(-1, 2)$; в) $(11, -22)$. 12. $\left(2, 2\frac{1}{3}\right)$.

§ 22

1. а) $3\sqrt{2}$; б) 0; в) $-3\sqrt{2}$. 2. а) $-\frac{a^2}{2}$; б) 0; в) a^2 . 3. -4 . 4. б), г), д).
 5. а) $0^\circ < \varphi < 90^\circ$; б) $90^\circ < \varphi < 180^\circ$; в) $\varphi = 90^\circ$; г) $\varphi = 180^\circ$. 6. а) 0° ;
 б) 180° . 7. а) $\cos \varphi = -\frac{4\sqrt{65}}{65}$; б) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 11. 60° . 12. $t = 0$. 13. 60° .
 14. а) 36; б) 68; в) 82; г) 50. 15. $A = 17$.

§ 23

1. а) $y = 0$; б) $x = 0$. 2. $(1, -2)$. 3. а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{2}x$;
 г) $y = -x$; д) $y = -2x$; е) $y = -\frac{1}{2}x$. 4. а) $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$. 5. $x - y + 1 = 0$.
 6. $x + y - 1 = 0$. 7. $2x - y - 7 = 0$; $\vec{n}(2, -1)$. 8. а) $y = -2$; б) $x = 1$;
 в) $y = x - 3$. 9. $x - 2y + 10 = 0$. 10. $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$. 11. а), в).
 13. 90° . 15. а) $(-1, 2)$; б) $(-3, -7)$. 17. $h_a: x + 2y - 7 = 0$; $h_b: 3x -$
 $-y - 9 = 0$; $h_c: 2x - 3y - 2 = 0$; $H\left(3\frac{4}{7}, 1\frac{5}{7}\right)$. 18. 2, 4. 19. 2. 20. 1, 2.

§ 24*

2. Системой данных неравенств. 3. а), б) Первой; в) второй.
 4. Прямоугольник. 6. $3x + 2y - 9 \geq 0$; $2x - y - 6 \leq 0$; $x + 3y - 10 \leq 0$. 7. $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$; $x = -\frac{1}{4}$. 13. $a = b$. 15. $F_1(0, 1)$, $F_2(0, -1)$.
 17. $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$; $y = x$, $y = -x$. 21. $\sqrt{5}$. 22. $x = 7\frac{3}{4}$. 23. $x = 3$,
 $y = 4$.

§ 25*

2. 3,5. 3. -2. 4. 60; 60.

§ 26

2. $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. 3. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. а), б) Нет, не
 могут. 5. а) $360^\circ k < \varphi < 180^\circ + 360^\circ k$; б) $\varphi = 180^\circ k$; в) $180^\circ + 360^\circ k <$
 $< \varphi < 360^\circ + 360^\circ k$. 6. а) $-90^\circ + 360^\circ k < \varphi < 90^\circ + 360^\circ k$; б) $\varphi =$
 $= 90^\circ + 180^\circ k$; в) $90^\circ + 360^\circ k < \varphi < 270^\circ + 360^\circ k$. 7. а) $\varphi = 90^\circ +$
 $+ 180^\circ k$; б) $\varphi = 180^\circ k$. 8. а), б) Да. 9. а) $180^\circ k < \varphi < 90^\circ + 180^\circ k$;
 б) $\varphi = 180^\circ k$; в) $-90^\circ + 180^\circ k < \varphi < 180^\circ k$. 10. а) $180^\circ k < \varphi < 90^\circ +$
 $+ 180^\circ k$; б) $\varphi = 90^\circ + 180^\circ k$; в) $90^\circ + 180^\circ k < \varphi < 180^\circ + 180^\circ k$.
 12. а) 45° ; б) 90° ; в) 150° ; г) 135° . 13. а) 630° ; б) 900° ; в) 1200° .

§ 27*

3. а) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 4. а) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$; б) $(10, \pi)$; в) $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$;
 г) $\left(2; -\frac{5\pi}{6}\right)$. 5. Да. 13. $r = 2R(1 - \cos \varphi)$. 15.
$$\begin{cases} x = R \cos^3 \frac{\varphi}{4}, \\ y = R \sin^3 \frac{\varphi}{4}. \end{cases}$$

§ 28*

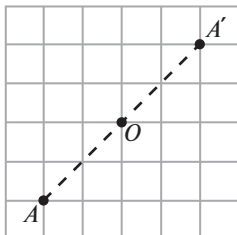
1. $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \end{cases}$ 2. а) $\begin{cases} x = 1, \\ y = t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t, \\ y = 1. \end{cases}$ 3. 5.
 4. $\begin{cases} x = x_0 + R \cos t, \\ y = y_0 + R \sin t. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$ 6. Параболу. 7. $\begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t. \end{cases}$
 8. Окружность. 9. Отрезок. 10. Астроида.

Обобщающее повторение

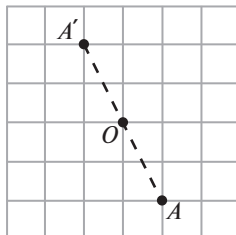
1. Центральная симметрия

1. 4. 2. 2. 3. 6. 4. 6. 5. 4. 6. 120° .

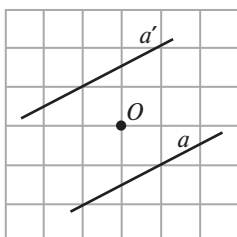
7.



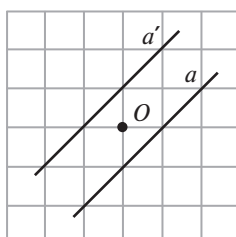
8.



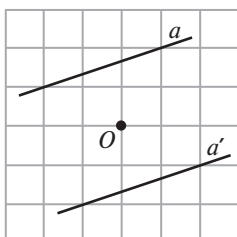
9.



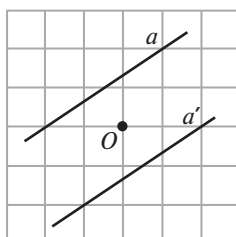
10.



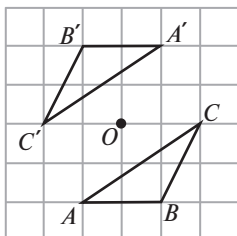
11.



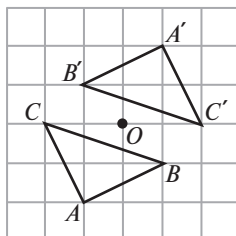
12.



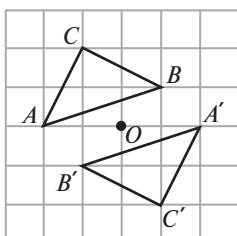
13.



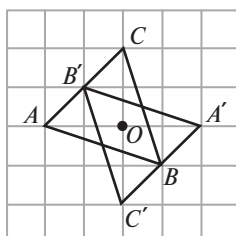
14.



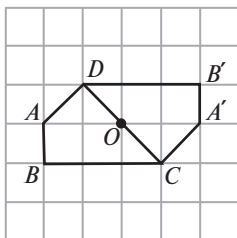
15.



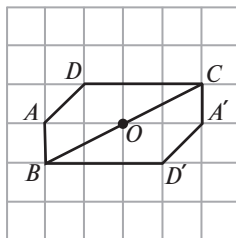
16.



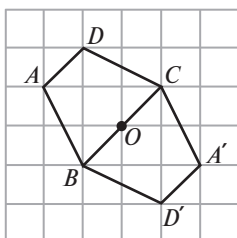
17.



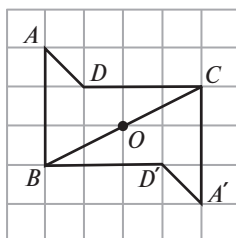
18.



19.



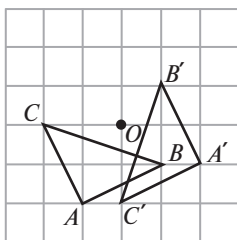
20.



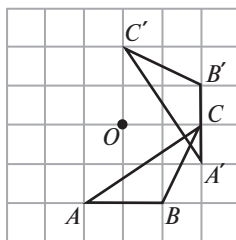
2. Поворот. Симметрия n -го порядка

1. 180° . 2. 2. 3. 120° . 4. 90° . 5. 180° . 6. 180° . 7. 72° . 8. 60° . 9. 6.
10. 60° . 11. 4. 12. 4. 13. 8. 14. 45° . 15. 4. 16. 24. 17. 10. 18. 36° . 19. 12.
20. 30° . 21. 8. 22. 180° . 23. 60° . 24. 120° . 25. 2. 26. 90° . 27. 60° . 28. 2.
29. 90° . 30. 180° . 31. 45° . 32. 225° .

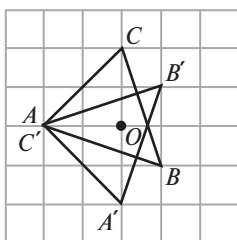
33.



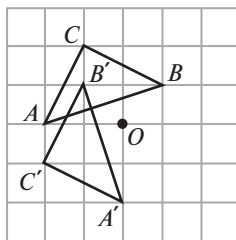
34.



35.



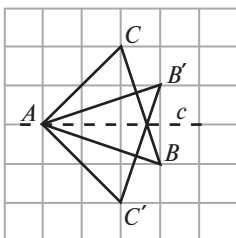
36.



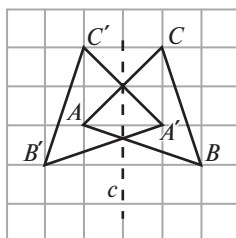
3. Осевая симметрия

1. 3. 2. 4. 3. 5. 4. 6. 5. 2. 6. 2. 7. 2. 8. 2. 9. 0. 10. 2. 11. 20. 12. 2. 13. 2. 14. 4.

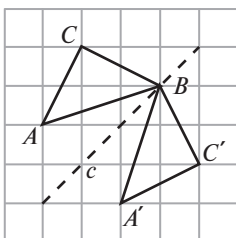
15.



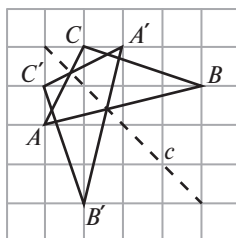
16.



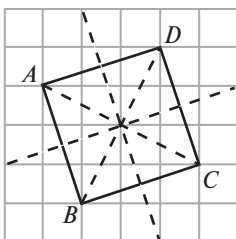
17.



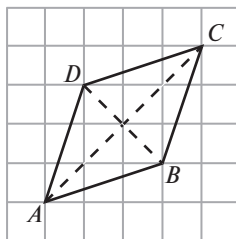
18.



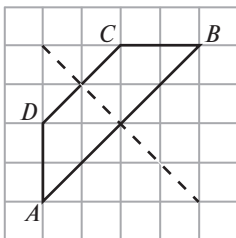
19.



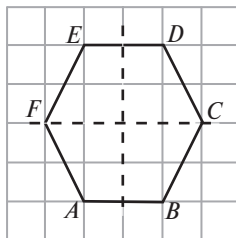
20.



21.



22.



4. Длина окружности

1. π . 2. $\frac{1}{\pi}$. 3. 3. 4. 2π . 5. 2π . 6. 3π . 7. 2π . 8. 4π . 9. 3π . 10. π . 11. 2π .
12. π . 13. 4π . 14. 3π .

5. Площадь круга и его частей

1. 36π . 2. 4. 3. 9. 4. 4π . 5. 5. 6. 2π . 7. π . 8. $\frac{\pi}{2}$. 9. 2. 10. 6π . 11. $0,25\pi$.
 12. 3π . 13. 1. 14. 3π . 15. 4. 16. $1 - \frac{\pi}{4}$. 17. $1 - \frac{\pi}{4}$. 18. $1 - \frac{\pi}{4}$. 19. $\frac{\pi}{2} - 1$.
 20. $2(2 + \pi)$. 21. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$. 22. 4π . 23. 2π . 24. 5π . 25. $\frac{5\pi}{4}$.

6. Прямоугольная система координат

1. 6. 2. 8. 3. 8. 4. 6. 5. 10. 6. $(-6, 8)$. 7. $(6, -8)$. 8. $(-6, -8)$. 9. $(3, 4)$.
 10. $(2, 5)$. 11. 4. 12. 12. 13. 9. 14. -4 . 15. 8. 16. 2. 17. $(2, 6)$. 18. $(3, 4)$.

7. Расстояние между точками.

Уравнение окружности

1. 10. 2. 10. 3. 8. 4. 10. 5. 6. 6. 8. 7. 5. 8. $(2, 1)$. 9. 5. 10. $(4, 3)$. 11. 7. 12. 7.
 13. 2. 14. 3. 15. $(1, 0)$. 16. $(-3, 1)$. 17. 8. 18. 12. 19. 6. 20. 14.

8. Векторы

1. 10. 2. 10. 3. 10. 4. 0. 5. 8. 6. 6. 7. 10. 8. 12. 9. 16. 10. 10. 11. 10.
 12. 10. 13. 0. 14. 3. 15. 1. 16. 2. 17. 1. 18. 3. 19. $-1,5$. 20. 0. 21. $(8, 6)$.
 22. $(2, 2)$.

9. Уравнение прямой

1. 2. 2. 3. 3. $(2, 2)$. 4. $(5, 13)$. 5. $(0, 2)$. 6. 2. 7. 0,5. 8. $-0,75$. 9. 2. 10. 2,4.
 11. 90° . 12. 0,96.

| | |
|--|-----|
| Введение | 3 |
| ГЛАВА I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ | |
| § 1. Центральная симметрия | 4 |
| § 2. Поворот. Симметрия n -го порядка | 8 |
| § 3. Осевая симметрия | 12 |
| § 4. Параллельный перенос | 15 |
| § 5. Движение. Равенство фигур | 19 |
| § 6*. Паркеты | 25 |
| § 7. Подобие фигур. Гомотетия | 31 |
| § 8*. Золотое сечение | 35 |
| § 9. Площади подобных фигур | 42 |
| ГЛАВА II. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ | |
| § 10. Теорема косинусов | 45 |
| § 11. Теорема синусов | 49 |
| § 12*. Теоремы Менелая и Чевы | 53 |
| ГЛАВА III. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ | |
| § 13. Длина окружности | 60 |
| § 14*. Циклоидальные кривые | 64 |
| § 15. Площадь круга и его частей | 70 |
| § 16*. Изопериметрическая задача | 74 |
| ГЛАВА IV. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ | |
| § 17. Прямоугольная система координат | 79 |
| § 18. Расстояние между точками. Уравнение окружности | 85 |
| § 19. Векторы. Сложение векторов | 88 |
| § 20. Умножение вектора на число | 92 |
| § 21. Координаты вектора | 97 |
| § 22. Скалярное произведение векторов | 100 |
| § 23. Уравнение прямой | 103 |
| § 24*. Аналитическое задание фигур на плоскости | 108 |
| § 25*. Задачи оптимизации | 115 |
| § 26. Тригонометрические функции произвольного угла | 119 |
| § 27*. Полярные координаты | 122 |
| § 28*. Кривые, заданные параметрическими уравнениями | 128 |
| § 29*. Использование программы GeoGebra
для моделирования кривых на плоскости | 132 |
| ГЛАВА V. ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ | 141 |
| Предметный указатель | 163 |
| Ответы | 165 |

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна,
Смирнов Владимир Алексеевич

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для общеобразовательных организаций

Редакторы *В. В. Черноруцкий, И. В. Рекман*

Оформление и художественное редактирование: *Е. А. Адамов*

Технический редактор *О. Б. Резникова*

Корректоры *В. И. Антонов, С. В. Никитина*

Компьютерная вёрстка и графика: *А. В. Челюканов*

Формат 60×90¹/16.

Гарнитура «Newton». Усл. печ. л. 11.

Издательство «Мнемозина».

111033, Москва, ул. Волочаевская, 40г.

Тел.: 8 (495) 181 6888.

E-mail: ioc@mnemozina.ru

www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.

Тел.: 8 (495) 640 9399.

www.shop.mnemozina.ru