Программа GeoGebra это свободно распространяемая программа, с сайта http://geogebra.org, позволяющая которую можно скачать моделировать и решать различные алгебраические и геометрические задачи, строить графики функций, находить наибольшие и наименьшие значения, пределы, производные интегралы, получать изображения фигур, пространственных проводить дополнительные плоских И построения, создавать анимацию рисунков.

Кроме того, она позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между геометрическими величинами и мн. др.

Здесь мы рассмотрим возможности GeoGebra для использования её в обучении геометрии в школе. Начнем с планиметрии



## 1. ИНСТРУМЕНТЫ ПЛАНИМЕТРИИ

Рабочее окно этой программы имеет вид, показанный на рисунке 1.1.

Рис. 1.1

Изображения объектов создаются в части окна, называемом «Полотно». Изначально в нём изображены оси координат.

Если нажать левой кнопкой мыши на маленький треугольник, расположенный слева от надписи «Полотно», то откроется дополнительная строка, в которой можно убрать оси координат, или выбрать в качестве фона клетчатую бумагу (рис. 1.2).

GeoGebra		
Файл Правка Вид Нас	тройки Инструменты Окно Справка	Войти
▶ Панель объектов 🔀	▼ Полотно	$\times$
Ввод:		?

Рис. 1.2

В верхней части рабочего окна имеется панель инструментов - строка с окошками с изображением инструментов.

В крайнем левом окошке изображен курсор. Для выбора этого инструмента нужно нажать по нему левой кнопкой мыши. Появится подсказка (рис. 1.3).



Рис. 1.3

Нажимая и удерживая левую кнопку мыши на выбранном объекте, его можно перемещать и поворачивать.

Вторым слева расположено окошко с изображением точки. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.4).

🗇 GeoGebra			
Файл Прав	ка Вид Настройки Инструм	енты Окно Справка	Войти
	Точка	<b>↑</b>	$\mathbf{X}$
	Точка на объекте	6 -	
<ul> <li>Z</li> </ul>	Прикрепить / Снять Точку	5 -	
$\succ$	Пересесечение	4 -	
	Середина или центр	3 -	4
• <sup>Z</sup>	Комплексное число	2 -	
$\sim$	Extremum	1 -	
f	Roots	-1 0 1 2 3	4 5 6
		-1 -	
Ввод:	1		0

Рис. 1.4

Для получения изображения точек нужно сначала нажать левой кнопкой мыши на инструмент «Точка» с изображением точки А.

Затем левой кнопкой мыши на полотне нужно отметить точки. На рисунке 1.5 показано изображение точек, полученных таким образом.



Рис. 1.5

Нажимая левой кнопкой мыши на изображение точки и перемещая курсор, можно перемещать и саму точку.

Цвет, размеры и обозначения точек можно изменять. Для этого следует воспользоваться панелью объектов, расположенной в левой части рабочего окна.

Например, если нажать правой кнопкой мыши по надписи «Точка», то откроется дополнительное окно (рис. 1.6).

🗘 GeoGebra							
Файл Правка Вид Настройки Инструменты Окно Справка Войти							
▶ Панель объектов 🖉 🔻 Полотно	$\times$						
О Точна Выбор							
В Полярные координаты							
🔂 Показывать объект							
АА Показывать обозначение							
Оставлять след							
<i>В</i> _ Удалить							
🔅 Свойства							
AB							
Ввод:	?						

Рис. 1.6

Нажатием левой кнопкой мыши на строку «Свойства» открывается новое окно (рис. 1.7), в котором можно выбирать цвет и стиль изображения точек.

🗘 Настройки	×
	D,
Основные Цвет Стиль Алгебра Дополнительно	
В ГОКАЗЫВАТЬ Объект	
🗷 Показывать обозначение: Имя 👻	
🗖 Оставлять след	
🔲 Закрепить объект	
🗖 Вспомогательный объект	

Рис. 1.7



На рисунке 1.8 показан пример такого выбора.

Рис. 1.8

Если же нажать левой кнопкой мыши по строке с обозначением одной из вершин, например, с надписью «А=(0, 2)», то откроется окно, в котором можно выбирать обозначение цвет и стиль именно этой вершины. На рисунке 1.9 показан пример такого выбора.



Рис. 1.9

Инструмент «Пересечение» с изображением двух пересекающихся прямых позволяет получать точки пересечение различных линий. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши поочерёдно на одну и другую линии. На полотне появятся точки их пересечения.

На рисунке 1.10 показаны полученные точки D и E пересечения прямой BC и окружности с центром А.



Рис. 1.10

Инструмент «Середина или центр» с изображением трёх точек позволяет получать изображение середины отрезка или центра окружности. Для этого нужно указать две точки, или отрезок, или окружность.

На рисунке 1.11 показана полученная точка С – середина отрезка AB. Положение и величину отрезка AB можно менять, при этом точка C останется его серединой.



Третьим слева в панели инструментов находится окошко с изображением прямой, проходящей через две точки. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.12).



Рис. 1.12

Для получения изображения прямой нужно сначала нажать левой кнопкой мыши на **инструмент** «Прямая» с изображением прямой. Затем левой кнопкой мыши на полотне нужно отметить две точки. На экране появится изображение этих точек и прямой, через них проходящей (рис. 1.13).



Рис. 1.13

Нажимая левой кнопкой мыши на изображение точки и перемещая курсор, можно перемещать саму точку, и саму прямую. Цвет, размеры и обозначения точек прямой можно изменять. Для этого следует

воспользоваться панелью объектов, расположенной в левой части рабочего окна.

Например, если нажать правой кнопкой мыши по надписи «Прямая», то откроется дополнительное окно, в котором, нажав на строку «Свойства», можно выбрать обозначение, цвет и стиль прямой.



Пример такого выбора показан на рисунке 1.14.

Рис. 1.14

Если нажать правой кнопкой мыши по надписи «Точка», то откроется дополнительное окно, в котором, нажав на строку «Свойства», можно выбрать обозначение, цвет и стиль точек.

Если нажать на одну из строк «A=(-2, 2)» или «B=(2, 4)», то откроется окно, в котором можно выбрать цвет и стиль соответствующей точки. Пример такого выбора показан на рисунке 1.15.



Рис. 1.15

Для получения изображения отрезка нужно сначала нажать левой кнопкой мыши на инструмент «Отрезок» с изображением отрезка.

Затем левой кнопкой мыши на полотне нужно отметить две точки. На экране появится изображение этих точек и отрезка, соединяющего эти точки (рис. 1.16).



Рис. 1.16

Положение, цвет, размеры и обозначения точек и отрезка можно изменять аналогично тому, как это было сделано для прямой.

Инструмент «Отрезок с фиксированной длиной» позволяет получать изображение отрезка заданной длины. Для этого, после выбора инструмента, нужно указать один из концов отрезка и ввести его длину.

Для получения изображения луча нужно выбрать **инструмент** «Луч», а затем указать вершину луча и точку на нём (рис. 1.17).



Инструмент «Ломаная» позволяет получать изображение ломаной. Для этого, после выбора инструмента, нужно последовательно указать вершины ломаной, заканчивая в начальной вершине. Пример ломаной показан на рисунке 1.18.



Рис. 1.18

Положение, цвет, размеры и обозначения точек и самой ломаной можно изменять аналогично тому, как это было сделано для прямой.

**Инструмент** «Вектор» позволяет получать изображение вектора. Для этого, после выбора инструмента, нужно последовательно указать начало и конец вектора. Пример вектора показан на рисунке 1.19.



Рис. 1.19

Как и ранее, положение, цвет, размеры и обозначения точек и самого вектора можно изменять.

**Инструмент** «Отложить вектор» позволяет откладывать данный вектор от данной точки. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши начальную точку и исходный вектор. Соответствующий пример показан на рисунке 1.20.



Рис. 1.20

Четвёртым слева в панели инструментов находится окошко с изображением прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную данной прямой.

Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.21).



Рис. 1.21

**Инструмент** «Перпендикулярная прямая» позволяет проводить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать точку и прямую. На рисунке 1.22 показана прямая g, проходящая через точку C и перпендикулярная прямой f.



Рис. 1.22

**Инструмент** «Параллельная прямая» позволяет проводить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать точку и прямую. На рисунке 1.23 показана прямая g, проходящая через точку C, и параллельная прямой f.



12

**Инструмент** «Серединный перпендикуляр» позволяет строить серединный перпендикуляр к данному отрезку. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать две точки или отрезок. На рисунке 1.24 показан серединный перпендикуляр g к отрезку AB.



Рис. 1.24

**Инструмент** «Биссектриса угла» позволяет строить биссектрису данного угла. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать три точки, вторая из которых – вершина угла, или две пересекающиеся прямые. На рисунке 1.25 показана биссектриса h угла ABC.



Рис. 1.25

**Инструмент** «Касательная» позволяет проводить касательную через данную точку к данной кривой. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать точку и кривую. На рисунке 1.26 показаны касательные к окружности с центром в точке А, проходящие через точку В.



Рис. 1.26

Пятым слева в панели инструментов находится окошко с изображением треугольника. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.27).



Рис. 1.27

Инструмент «Многоугольник» позволяет получать изображения многоугольников. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно

указать вершины многоугольника, заканчивая в начальной вершине. На рисунке 1.28 показан пятиугольник, полученный таким образом.



Рис. 1.28

Как и раньше, цвет, размеры вершин, сторон и самого многоугольника, а также их обозначения, можно изменять.

Инструмент «Правильный многоугольник» позволяет получать изображения правильных многоугольников. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить две соседние вершины многоугольника и в открывшемся окне указать число сторон. На рисунке 1.29 показаны правильные треугольник, четырёхугольник (квадрат), пятиугольник и шестиугольник, полученные таким образом.



Рис. 1.29

Шестым слева находится окошко с изображением окружности. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.30).



Рис. 1.30

Инструмент «Окружность по центру и точке» позволяет получать изображение окружности с данным центром и точкой на этой окружности. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно указать центр окружности и точку на ней. На рисунке 1.31 показана окружность, полученная таким образом.



Рис. 1.31

Инструмент «Окружность по центру и радиусу» позволяет получать изображение окружности с данным центром и радиусом. Для этого нужно левой кнопкой мыши отметить центр окружности и в открывшемся окне указать радиус. На рисунке 1.32 показана окружность с радиусом 2.



Рис. 1.32

Инструмент «Циркуль» позволяет строить окружности с данным центром и данным радиусом (отрезком). Для этого нужно левой кнопкой мыши указать отрезок или две точки, задающие радиус, а затем отметить центр окружности. На рисунке 1.33 показана окружность, полученная таким образом.



Инструмент «Окружность по трём точкам» позволяет получать изображение окружности, проходящей через три точки. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. На рисунке 1.34 показана окружность, полученная таким образом.



Рис. 1.34

Инструмент «Полуокружность по двум точкам» позволяет получать изображение полуокружности с данными концами. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать на полотне две точки – концы полуокружности. На рисунке 1.35 показана полуокружность, полученная таким образом.



**Инструмент** «Дуга по центру и двум точкам» позволяет получать изображение дуги окружности с данными центром и концами дуги. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать центр окружности и две точки – концы дуги. На рисунке 1.36 показана дуга окружности.



Рис. 1.36

Инструмент «Дуга по трём точкам» позволяет получать изображение дуги окружности, с данными концами и точкой на этой дуге. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. Первая и третья точки будут концами дуги. На рисунке 1.37 показана окружность, полученная таким образом.



Рис. 1.37

Инструмент «Сектор по центру и двум точкам» позволяет получать изображение сектора окружности с данными центром и концами дуги сектора. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать центр окружности и две точки – концы дуги. На рисунке 1.38 показан сектор.



Рис. 1.38

Инструмент «Сектор по трём точкам» позволяет получать изображение сектора окружности, с данными концами дуги и точкой на этой дуге сектора. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. Первая и третья точки будут концами дуги сектора. На рисунке 1.39 показан сектор, полученный таким образом.



Рис. 1.39

Седьмым слева находится окошко с изображением эллипса и трёх точек. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.40).



Рис. 1.40

Инструмент «Эллипс» позволяет получать изображение эллипса, с данными фокусами и точкой на нём. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. Первая и вторая точки будут фокусами эллипса. На рисунке 1.41 показан эллипс, полученный таким образом.



Рис. 1.41

Инструмент «Гипербола» позволяет получать изображение гиперболы с данными фокусами и точкой на этой гиперболе. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. Первая и вторая точки будут фокусами гиперболы. На рисунке 1.42 показана гипербола, полученная таким образом.



Рис. 1.42

**Инструмент** «Парабола» позволяет получать изображение параболы с данными фокусом и директрисой (прямой). Для этого нужно левой кнопкой мыши отметить точку (фокус) и указать прямую (директрису) параболы. На рисунке 1.43 показана парабола, полученная таким образом.



Рис. 1.43

**Инструмент** «Коника по пяти точкам» позволяет получать изображения эллипса, гиперболы или параболы, проходящих через пять данных точек. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить пять точек. В зависимости от их расположения на полотне появятся эллипс, гипербола или парабола. На рисунке 1.44 показан эллипс.



Рис. 1.44

Восьмым слева находится окошко с изображением угла. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.45).



Рис. 1.45

**Инструмент** «Угол» позволяет находить величину угла. Для этого нужно указать три точки или две прямые, образующие угол. При этом на полотне появится величина этого угла. На рисунке 1.46 величина угла равна 52.13°.



Рис. 1.46

Инструмент «Угол заданной величины» позволяет получать изображение угла заданной величины. Для этого нужно указать две точки. Первая из них будет принадлежать стороне угла, вторая будет вершиной угла. После этого откроется окно, в котором нужно указать величину угла. При этом на полотне появится третья точка, принадлежащая второй стороне угла. Сам угол можно получить, проводя лучи через данные точки. На рисунке 1.47 показан угол, полученный таким образом, величиной 45°.



Рис. 1.47

Инструмент «Расстояние или длина» позволяет находить расстояние между двумя точками, периметр многоугольника, длину окружности и др.

Например, для нахождения расстояния между двумя точками нужно указать левой кнопкой мыши эти точки. На полотне появится расстояние между точками (рис. 1.48).

C GeoGebra		120-		1 1 2	
Файл Правка Вид Нас	гройки Инстр	ументы О	кно Справка		Войти
Панель объектов X	▼ Полотно				$\times$
– Текст	× • •	пк	Маленький	- 🗶 🚅	
- ТекстАВ = "АВ = Точка				В	
A = (-1, 1) B = (3, 4)					
Число расстояниеАВ =			AB = 5		
					₫
		A			
		Ť			
۰					
Ввод:					?

Рис. 1.48

Инструмент «Площадь» позволяет находить площади многоугольника, круга, эллипса и др. Для этого нужно указать соответствующую фигуру. После этого на полотне появится искомое значение площади (рис. 1.49).

② GeoGebra	AND DESCRIPTION DESCRIPTION APPROX DESCRIPTION OF				
Файл Правка Вид Настройки Инструменты Окно Справка Войти					
Панель объектов X	▼ Полотно	$\times$			
— Отрезок — а = 4.12	<u> </u>				
b = 3 c = 4.12					
● d = 3 — Текст	C C				
Текстмногоугол Точка		4			
→ A = (-1, -1) → B = (3, 0)	<mark>b</mark> Площадь ABCD = 12				
C = (3, 3) D = (-1, 2)	d				
<ul> <li>четырехугольник</li> <li>многоугольник1</li> </ul>	Aa				
< <u> </u>					
Ввод:		?			

Рис. 1.49

**Инструмент** «Наклон прямой» позволяет находить угловой коэффициент прямой. Для этого нужно указать соответствующую прямую. После этого на полотне появится искомое значение углового коэффициента (рис. 1.50).



Рис. 1.50

Девятым слева находится окошко с изображением прямой и двух точек. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.51).



Рис. 1.51

Инструмент «Отражение относительно прямой» позволяет получать изображения фигуры, симметричной данной относительно прямой. Для этого нужно указать фигуру и прямую. После этого на полотне появится фигура, симметричная указанной. На рисунке 1.52 показан треугольник A'B'C' симметричный треугольнику ABC относительно прямой DE.



Инструмент «Отражение относительно точки» позволяет получать изображения фигуры, центрально-симметричной данной. Для этого нужно указать фигуру и центр симметрии. После этого на полотне появится фигура, симметричная указанной. На рисунке 1.53 показан треугольник A'B'C' симметричный треугольнику ABC относительно центра D.



Рис. 1.53

Инструмент «Поворот вокруг точки» позволяет повернуть данную фигуру вокруг данной точки на данный угол. Для этого нужно указать фигуру и центр поворота. После этого появится окно, в котором нужно указать угол поворота. На рисунке 1.54 показан треугольник A'B'C' полученный поворотом треугольника ABC вокруг центра D на угол 90° против часовой стрелки.



Этот инструмент можно использовать для создания анимации вращения фигуры.

Для этого нужно изобразить фигуру, например квадрат (рис. 1.55). Отметить точку, которая будет центром вращения. Создать ползунок, в котором угол  $\alpha$  изменяется от 0° до 360°. Левой кнопкой мыши указать фигуру и центр поворота. Откроется окно, в котором, в качестве угла поворота нужно указать  $\alpha$ . После этого нажать правой кнопкой мыши на ползунок и запустить анимацию. Фигура будет вращаться вокруг указанного центра поворота.



Рис. 1.55

Инструмент «Параллельный перенос по вектору» позволяет параллельно перенести данную фигуру на данный вектор. Для этого нужно указать фигуру и вектор. На рисунке 1.56 показан треугольник A'B'C' полученный параллельным переносом треугольника ABC на вектор DE.



Рис. 1.56

Инструмент «Гомотетия относительно точки» позволяет получать изображение фигуры, гомотетичной данной. Для этого нужно указать фигуру и центр гомотетии. После этого появится окно, в котором нужно указать коэффициент гомотетии. На рисунке 1.57 показан треугольник A'B'C', гомотетичный треугольнику ABC относительно точки D и коэффициентом 2.



Десятым слева находится окошко с изображением отрезка с точкой. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.58).

🗘 GeoGebra					
Файл Правка Вид Нас	тройки Инструменты Окно Сг	правк	а	Bo	йти
		a=2	<b>•</b>	•	⊄
Панель объектов X	▼ Полотно	a=2	Ползунок		$\times$
		ABC	Текст		
		*	Изображение		
		ОК	Кнопка		
			Флажок		4
		a=1	Окно ввода		
Ввод:					?

Рис. 1.58

**Инструмент** «Ползунок» позволяет рассматривать переменные значения длин и углов. Для создания ползунка нужно нажать левой кнопкой мыши на какое-нибудь место полотна. Откроется окно, изображённое на рисунке 59.

Ползунок	×
⊚ Число	Имя
⊚ Угол	α
⊚ Целое число	🗆 Случайное число
Интервал Полз	унок Анимация
мин.: -5	макс.: 5 Шаг:
	ОК Отмена

Рис. 1.59

В этом окне можно выбрать название и промежуток изменения переменной.

После этого длину отрезка, радиус окружности, величину угла и др. можно сделать переменной. Например, на рисунке 1.60 показана окружность радиуса r, где r перемещением ползунка можно менять от 0 до 5.



Рис. 1.60

Если нажать на ползунок правой кнопкой мыши, то откроется дополнительное окно (рис. 1.61).

C GeoGebra				
Файл Правка Вид Настройки Инструменты Окно Справка				
$\mathbb{R} \bullet \mathcal{I} \mathcal{I} \mathcal{I} \mathcal{I} \mathcal{I} \mathcal{I} \mathcal{I} \mathcal{I}$			↓	<ul><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li><li></li></ul>
Панель объектов				$\times$
— Коника	•			
c: (x - 1) <sup>2</sup> + (y - 2) r = 2				
- Точка		Чиспо г		
	-	Показывать объект		
• r = 2				
		Закрепить объект		4
	1	Абсолютная позиция на экране		
		_		
	b	Переименовать		
	8_	Удалить		
	÷	Свойства		
4				
Ввод:				?

Рис. 1.61

Если в этом окне выбрать строку «Анимировать», то переменная г ползунка будет изменяться автоматически и вместе с ней будет изменяться окружность.

Полученное анимированное изображение можно сохранить в формате gif.

Инструмент «Текст» позволяет делать надписи. Для этого нужно нажать левой кнопкой мыши в каком-нибудь месте полотна. Откроется

окно, в котором можно будет ввести текст. После закрытия окна надпись появится на полотне. На рисунке 1.62 рядом с равносторонним треугольником ABC сделана надпись «Равносторонний треугольник».



Рис. 1.62

**Инструмент** «Изображение» позволяет вставлять рисунки. Для этого нужно нажать левой кнопкой мыши по окошку с этим инструментом. Откроется окно, в котором можно выбрать файл с рисунком. На рисунке 1.63 показан вставленный многогранник.



Рис. 1.63

Крайним справа находится окошко с изображением креста. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.64), которые позволяют перемещать чертёж, увеличивать или уменьшать его размеры и др.

GeoGebra	· ·	, î		
Файл Правка Вид Наст	ройки Инструменты	Окно Справк	a	Войти
		ABC		
▶ Панель объектов 🔀	▶ Полотно	•	<b></b>	Переместить чертёж
		6	⊕ <b>_</b>	Увеличить
		5 -	Q	Уменьшить
		4 -	•	Показать/скрыть объ
		3 -	AA	Показать/скрыть обо
		2 -	\$	Копировать стиль
		1 -	t	Удалить
	-4 -3 -2	-1 0 1	2 3	, , , , → 4 5 6
		-1-	-	
Ввод:				\$ ?

Рис. 1.64

Внизу рабочего окна находится строка **«Ввод»**, в которой можно набирать команды, или задавать фигуры аналитически. Например, если в этой строке набрать A=(3, 2) и нажать «Enter», то появится точка A. Если набрать f(x)=sin(x), то появится соответствующий график функции (рис. 1.65).



Рис. 1.65