

В.А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

Пособие для подготовки к ЕГЭ

Задача В11

Объём и площадь поверхности

2013

## ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие предназначено для подготовки к выполнению задания В11 ЕГЭ по математике. Его целями являются:

- показ примерной тематики и уровня трудности геометрических задач, включённых в содержание ЕГЭ;
- проверка качества знаний и умений учащихся по геометрии, их готовность к сдаче ЕГЭ;
- развитие представлений учащихся об основных геометрических фигурах и их свойствах, формирование навыков работы с рисунком;
- повышение вычислительной культуры учащихся, подготовка их к решению геометрических задач с числовым ответом.

Пособие содержит задачи на нахождение объёмов и площадей поверхностей пространственных фигур. Оно проверяет уровень развития пространственных представлений учащихся, умения находить объёмы и площади поверхностей многогранников, круглых тел и их комбинаций.

Для успешного выполнения предлагаемых задач требуются знания основных формул для нахождения значений геометрических величин пространственных фигур, умения проводить дополнительные построения на изображениях пространственных фигур, работать с формулами, выполнять арифметические действия и преобразования числовых выражений.

Вначале предлагается диагностическая работа, содержащая задачи, разбитые на девять различных типов по две задачи в каждом. Для тех, кто хочет проверить правильность решения предложенных задач или убедиться в верности полученного ответа, приводятся их решения и даются ответы. Затем, для закрепления рассмотренных методов решения задач, предлагаются тренировочные работы, каждая из которых содержит задачи одного типа.

В случае успешного решения этих задач можно переходить к выполнению заключительных диагностических работ, содержащих задачи разных типов.

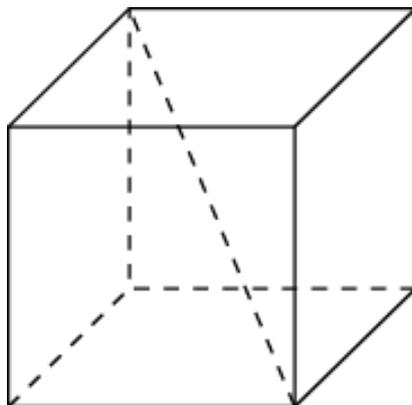
Все приведённые задачи сопровождаются рисунками, позволяющими лучше понять их условия, представить соответствующие геометрические ситуации, наметить план решения, при необходимости провести дополнительные построения и вычисления.

В конце пособия даны ответы ко всем задачам.

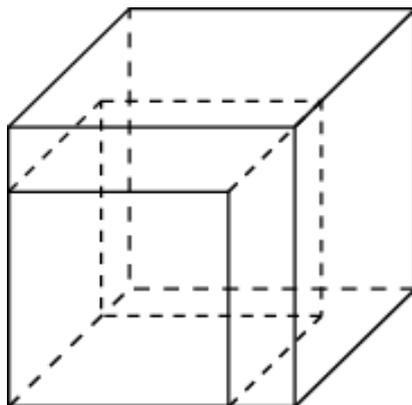
Отметим, что лучшим способом подготовки к ЕГЭ по геометрии являются систематические занятия по учебнику геометрии. Данное пособие не заменяет учебника. Оно может быть использовано в качестве дополнительного сборника задач при изучении геометрии, а также для организации обобщающего повторения или самостоятельных занятий по геометрии.

### Диагностическая работа

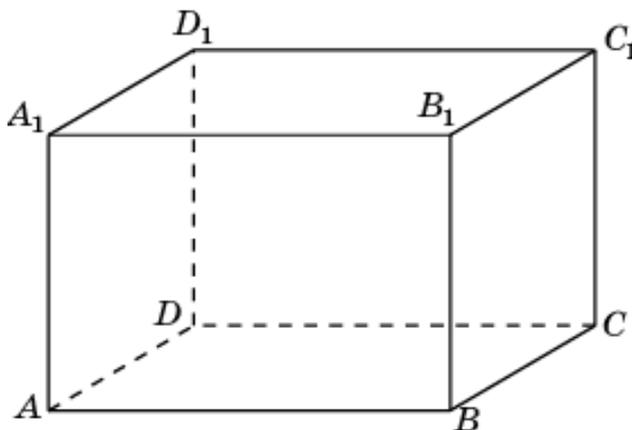
1.1. Диагональ куба равна  $\sqrt{12}$ . Найдите его объём.



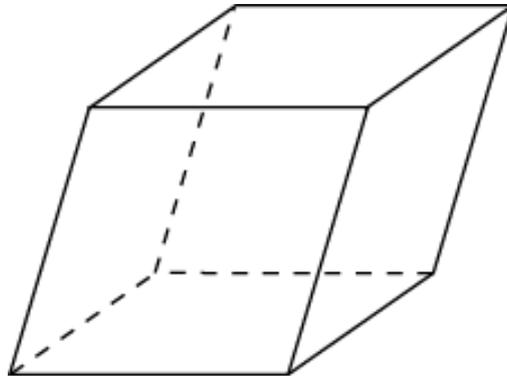
1.2. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 30. Найдите ребро куба.



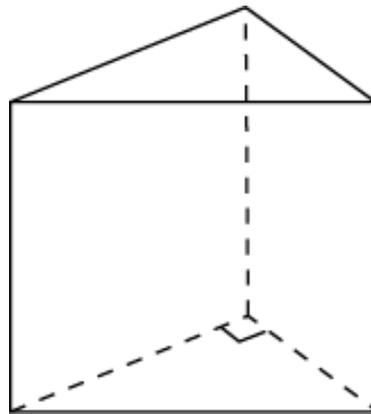
2.1. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его рёбра равны 5, 6, 7.



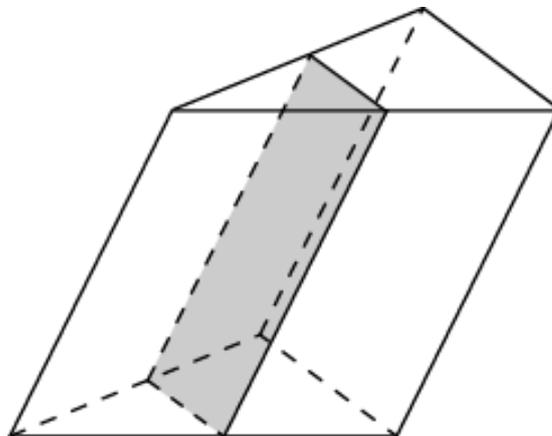
**2.2.** Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом  $60^\circ$ . Одно из рёбер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в  $60^\circ$  и равно 2. Найдите объём параллелепипеда.



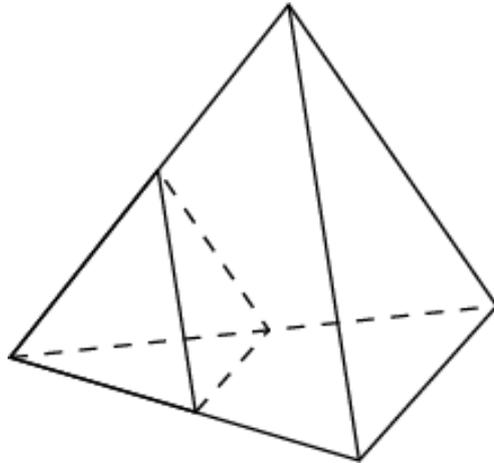
**3.1.** Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объём призмы.



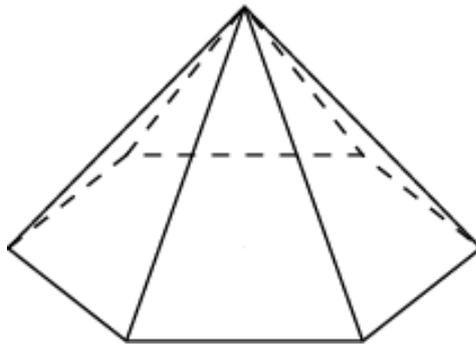
**3.2.** Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



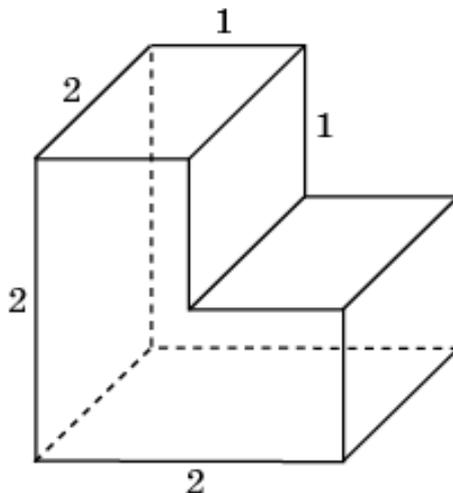
**4.1.** Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в два раза?



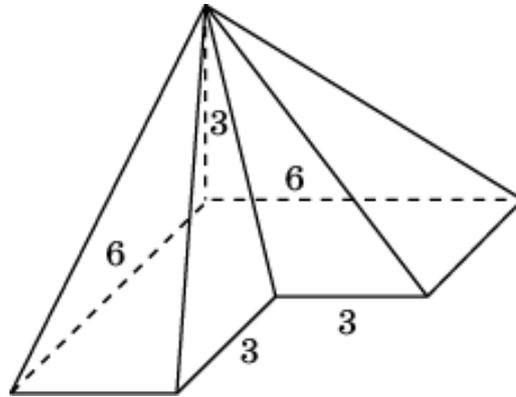
**4.2.** Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



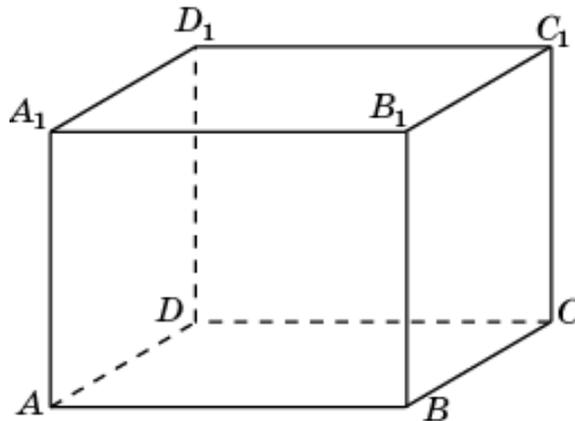
**5.1.** Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



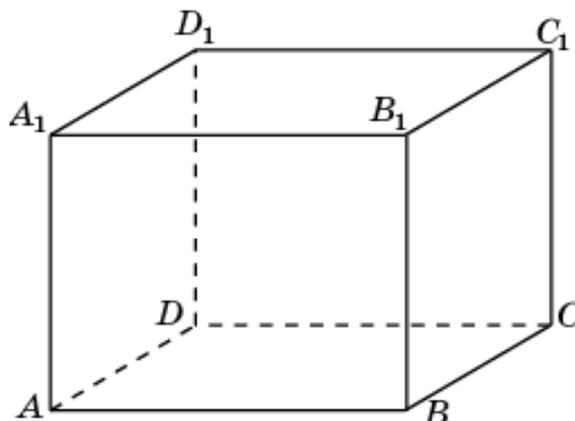
**5.2.** Найдите объём пирамиды, изображённой на рисунке. Её основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.



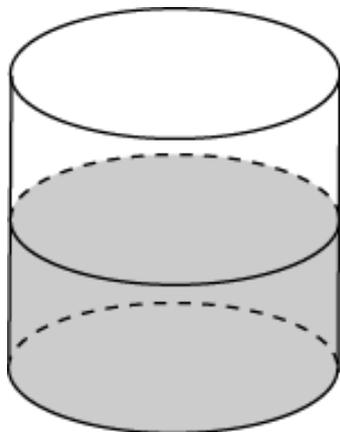
**6.1.** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, D, A_1, B, C, B_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 3, AD = 4, AA_1 = 5$ .



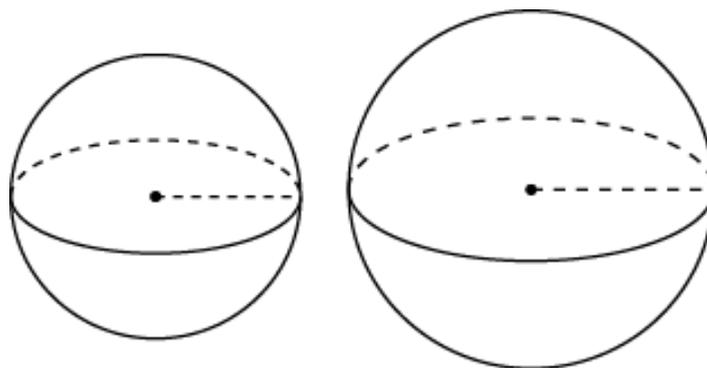
**6.2.** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $B, C, D, A_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$ .



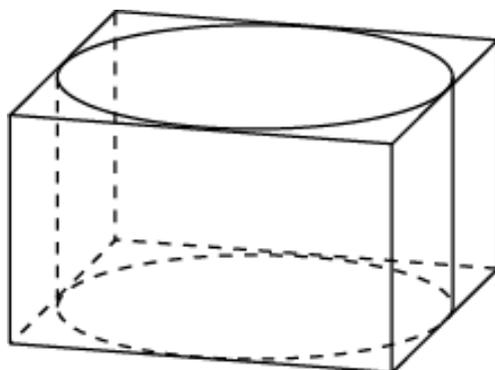
**7.1.** В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объём детали?



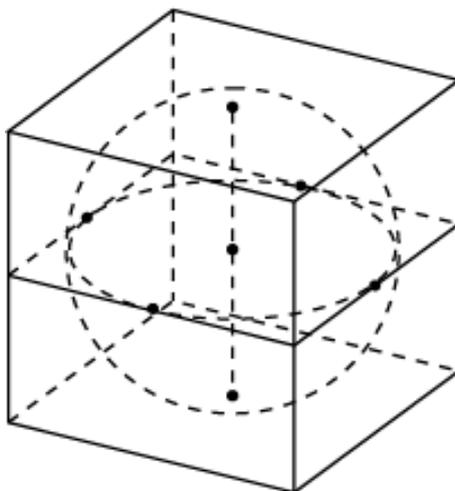
**7.2.** Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.



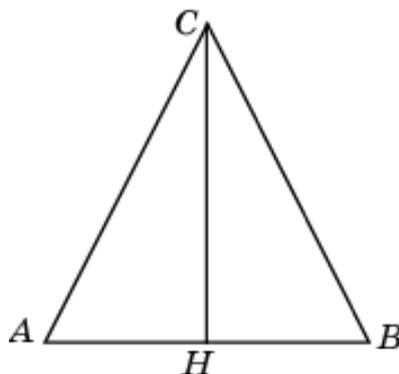
**8.1.** Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объём параллелепипеда.



**8.2.** В куб с ребром 6 вписан шар. Найдите объём шара, деленный на  $\pi$ .



**9.1.** Равнобедренный треугольник  $ABC$ , у которого основание  $AB$  равно  $2\sqrt{5}$ , а высота  $CH$  равна 6, вращается вокруг прямой  $CH$ . Найдите объём  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

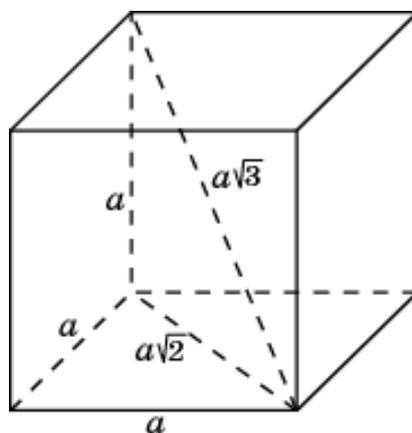


**9.2.** Прямоугольник  $ABCD$ , у которого  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ , вращается вокруг прямой  $AD$ . Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



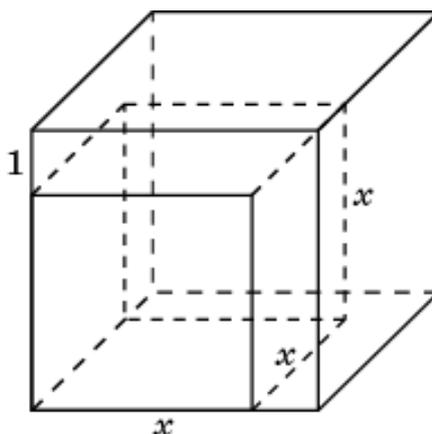
## Решения задач 1.1-1.2 диагностической работы

**1.1.** Если ребро куба равно  $a$ , то его диагональ равна  $a\sqrt{3}$ . Отсюда следует, что если диагональ куба равна  $\sqrt{12}$ , то его ребро равно 2 и, значит, объем этого куба равен 8.



Ответ. 8.

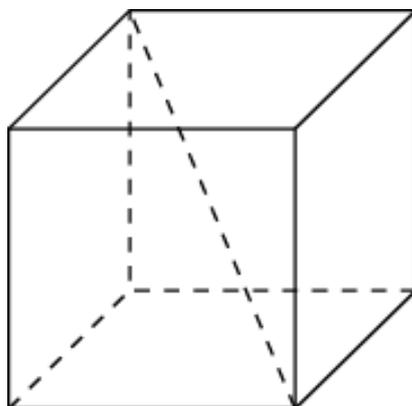
**1.2.** Если ребро куба равно  $x$ , то площадь его поверхности равна  $6x^2$ . Если ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности будет равна  $6(x+1)^2$ . Учитывая, что площадь поверхности куба при этом увеличивается на 30, получаем уравнение  $6(x+1)^2 = 6x^2 + 30$ , решая которое, находим  $x = 2$ .



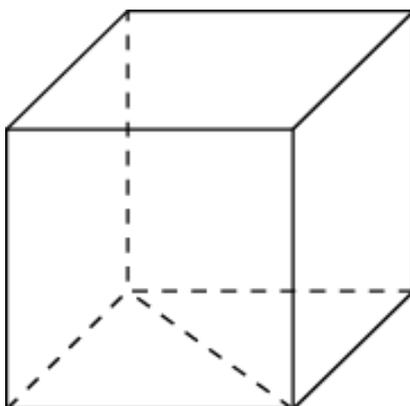
Ответ. 2.

## Тренировочная работа 1

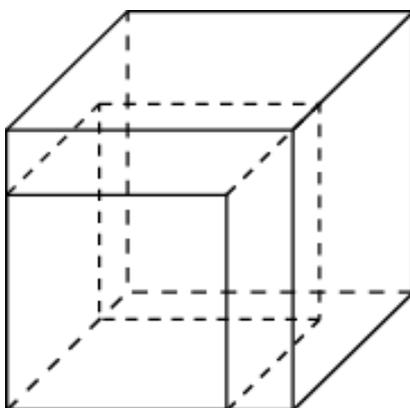
1. Диагональ куба равна  $\sqrt{27}$ . Найдите его объём.



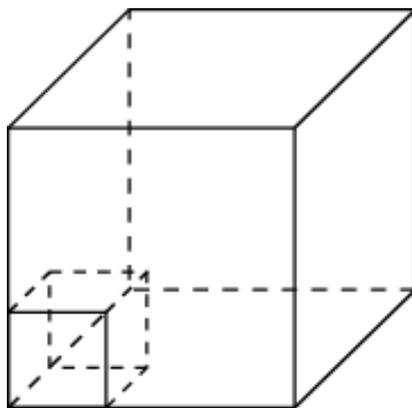
2. Диагональ грани куба равна  $\sqrt{8}$ . Найдите его объём.



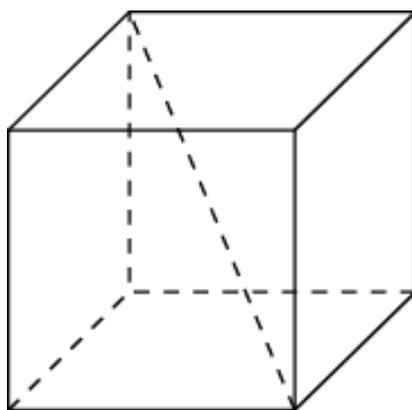
3. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объём увеличится на 19. Найдите ребро куба.



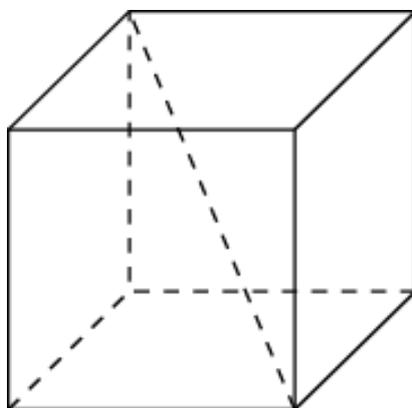
4. Во сколько раз увеличится объём куба, если его рёбра увеличить в три раза?



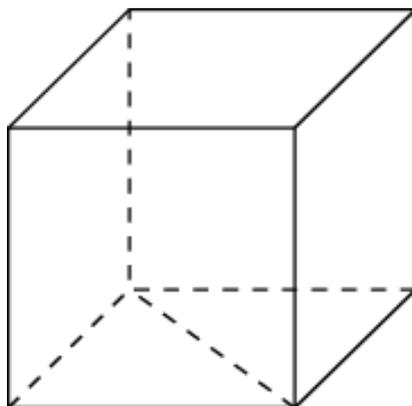
5. Диагональ куба равна 1. Найдите площадь его поверхности.



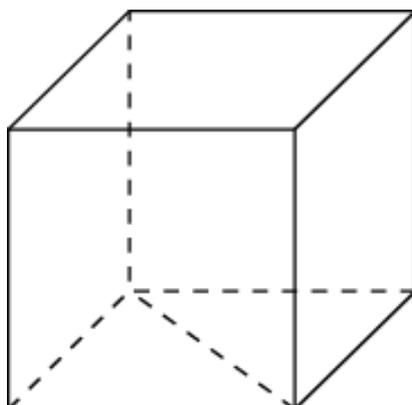
6. Площадь поверхности куба равна 8. Найдите его диагональ.



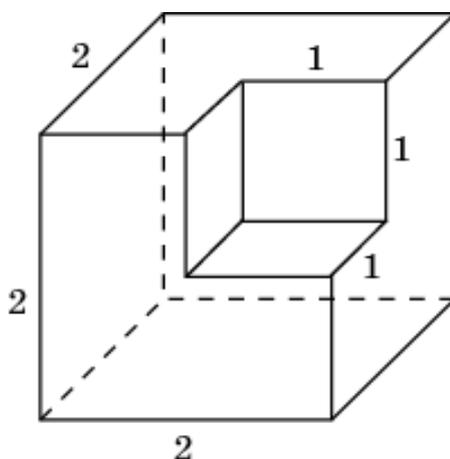
7. Диагональ грани куба равна 3. Найдите площадь его поверхности.



8. Площадь поверхности куба равна 48. Найдите диагональ грани куба.

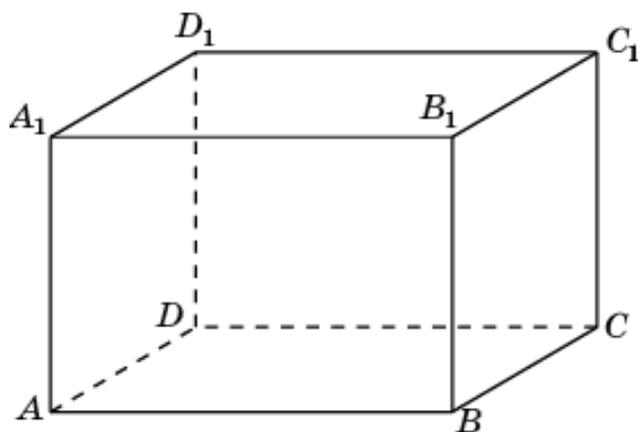


9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого равны  $90^\circ$ .



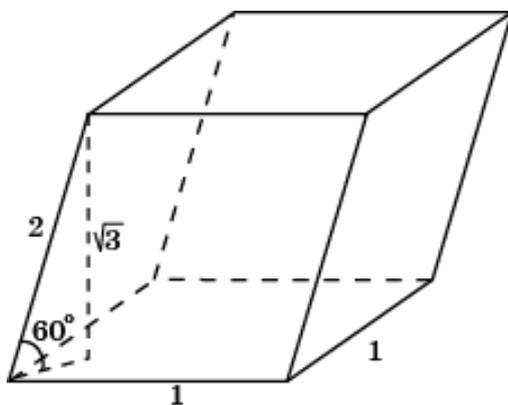
### Решения задач 2.1-2.2 диагностической работы

**2.1.** Если рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 5, 6, 7, то площади граней равны соответственно 30, 35, 42. Площадь поверхности параллелепипеда равна 214.



Ответ. 214.

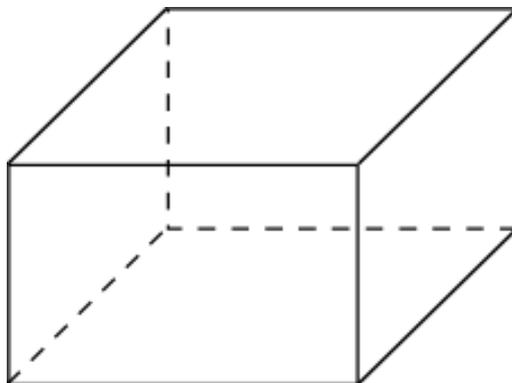
**2.2.** Площадь грани параллелепипеда, являющейся ромбом со стороной 1 и острым углом  $60^\circ$ , равна  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Высота, опущенная на эту грань, равна  $2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ . Объём параллелепипеда равен 1,5.



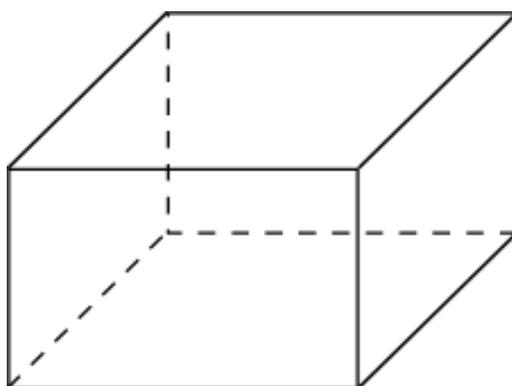
Ответ. 1,5.

## Тренировочная работа 2

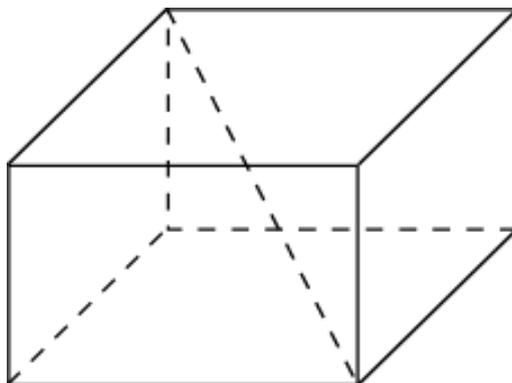
1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.



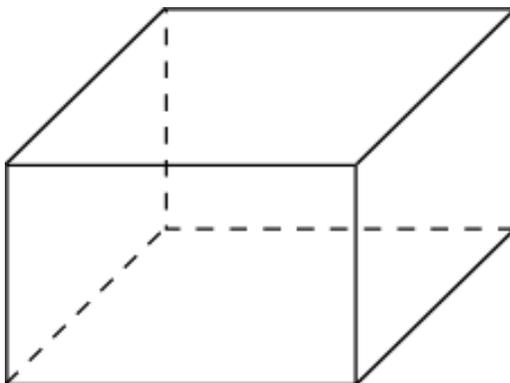
2. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.



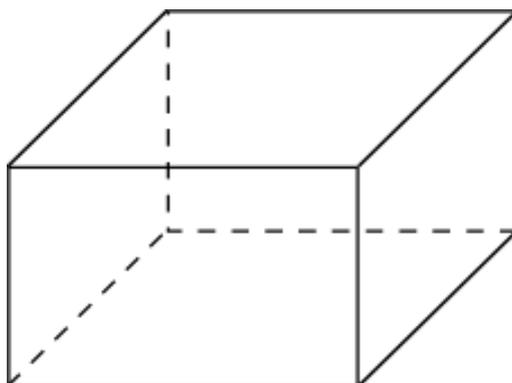
3. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объем параллелепипеда.



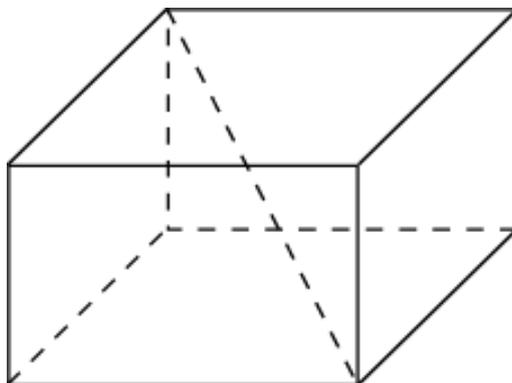
4. Рёбра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3, 4, 5. Найдите площадь его поверхности.



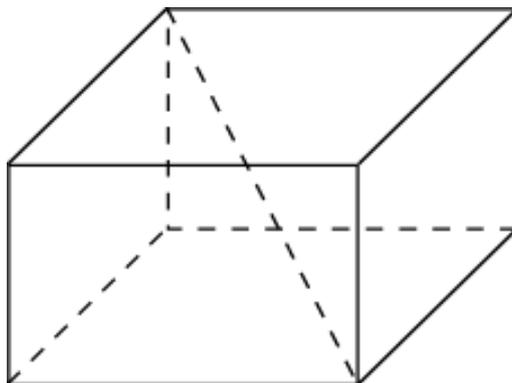
5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 52. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



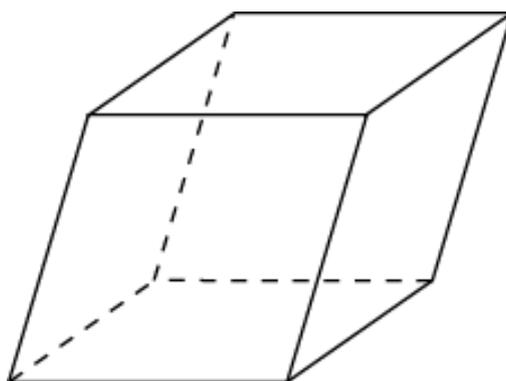
6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.



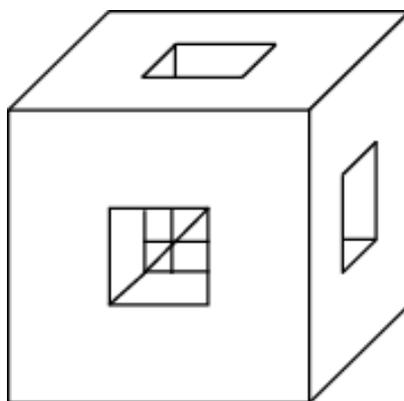
7. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.



8. Гранью параллелепипеда является квадрат со стороной 1. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в  $60^\circ$  и равно  $\sqrt{3}$ . Найдите объем параллелепипеда.



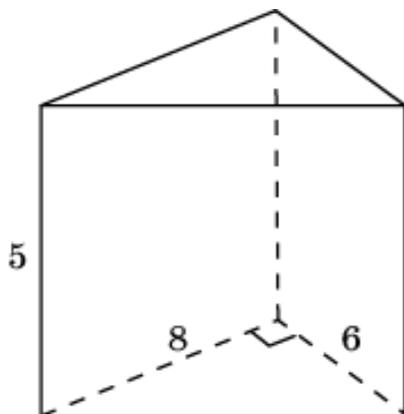
9. В каждой грани куба с ребром 6 проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2. Найдите объем оставшейся части



### Решения задач 3.1-3.2 диагностической работы

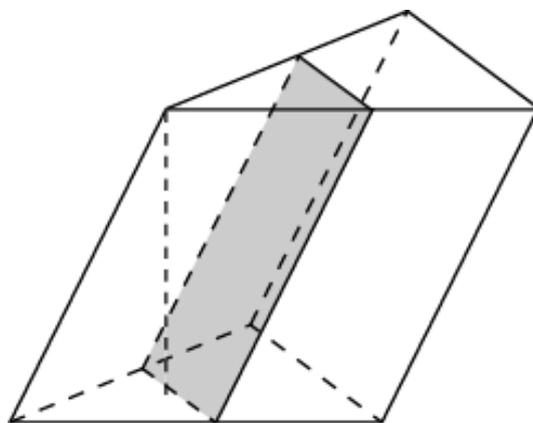
**3.1.** Площадь основания треугольной призмы равна  $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ .

Высота призмы равна 5. Объем призмы равен 120.



Ответ. 120.

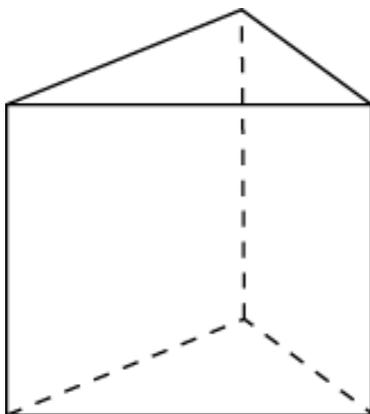
**3.2.** Площадь основания отсечённой призмы равна четверти площади основания исходной призмы. Высота отсечённой призмы равна высоте исходной призмы. Следовательно, объем отсечённой призмы равен четверти объёма исходной призмы, т.е. равен 8.



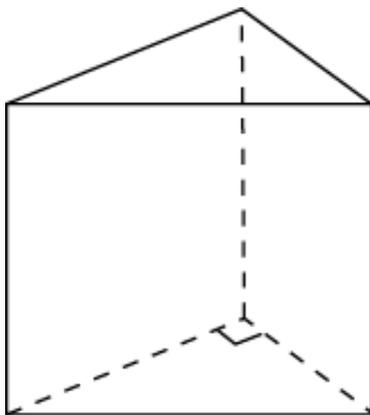
Ответ. 8.

### Тренировочная работа 3

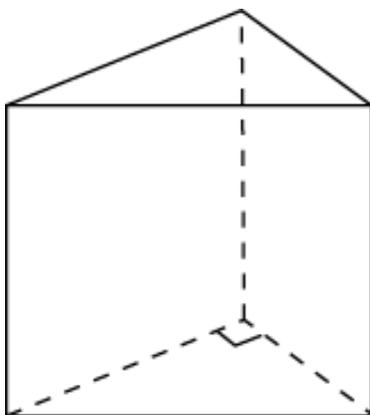
1. Найдите объём правильной треугольной призмы, все рёбра которой равны  $\sqrt{3}$ .



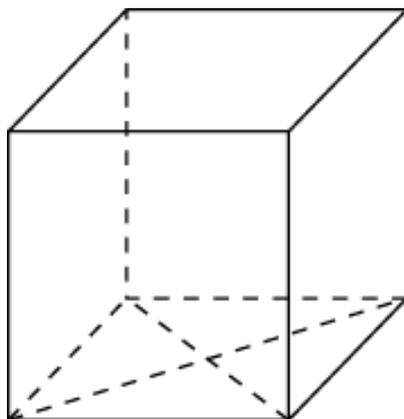
2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объём призмы равен 30. Найдите её боковое ребро.



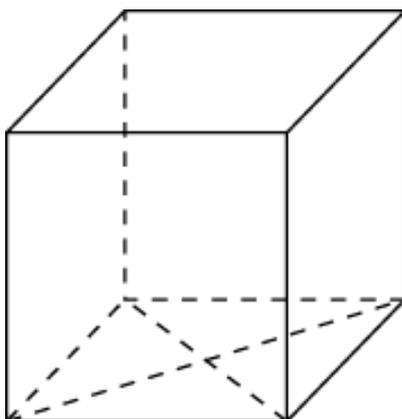
3. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь её поверхности.



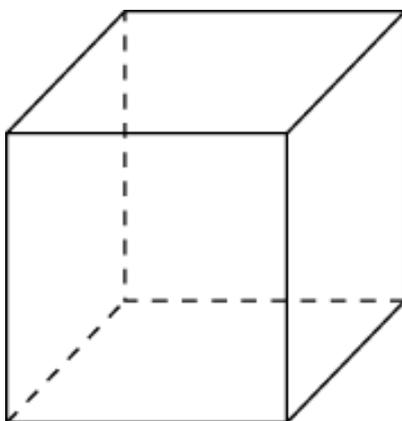
4. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 3 и 4, и боковым ребром, равным 5.



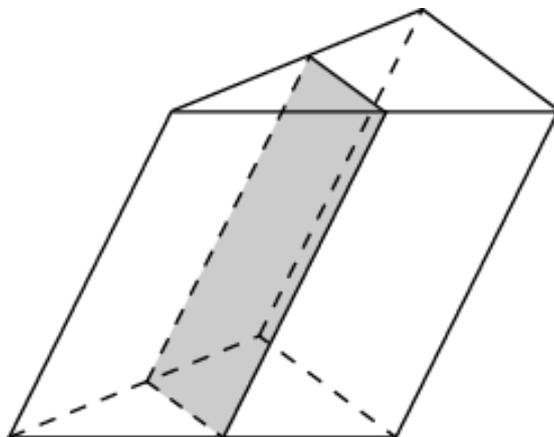
5. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь её поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.



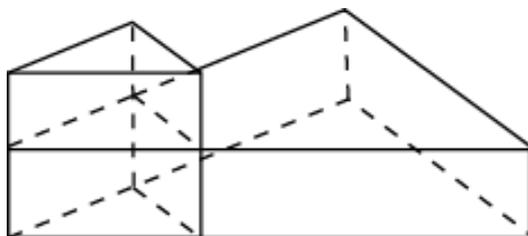
6. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной призмы, если стороны её основания равны 3, а площадь поверхности равна 66.



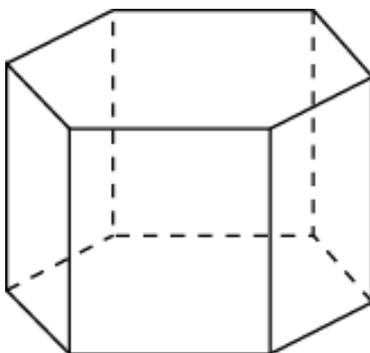
7. Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 12, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



8. Объём правильной треугольной призмы равен 6. Каким будет объём призмы, если стороны её основания увеличить в три раза, а высоту уменьшить в два раза?

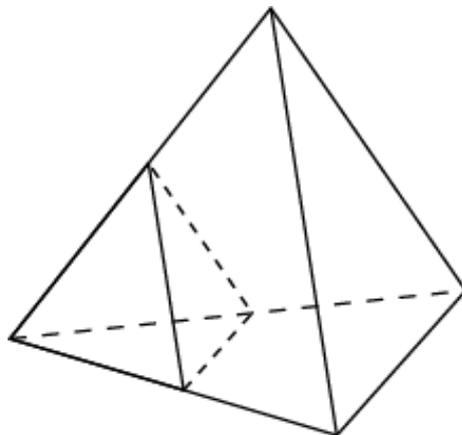


9. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны  $\sqrt{3}$ .



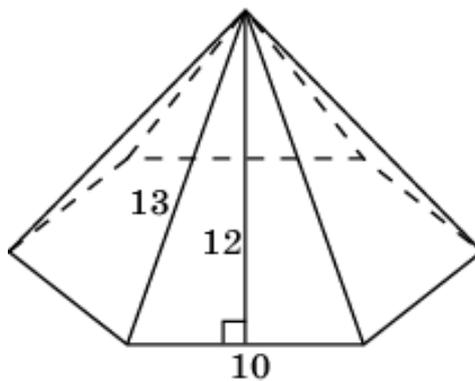
### Решения задач 4.1-4.2 диагностической работы

**4.1.** Воспользуемся тем, что если два тетраэдра подобны и коэффициент подобия равен  $k$ , то отношение объёмов этих тетраэдров равно  $k^3$ . Если ребра тетраэдра увеличить в два раза, то объём тетраэдра увеличится в 8 раз.



Ответ. 8.

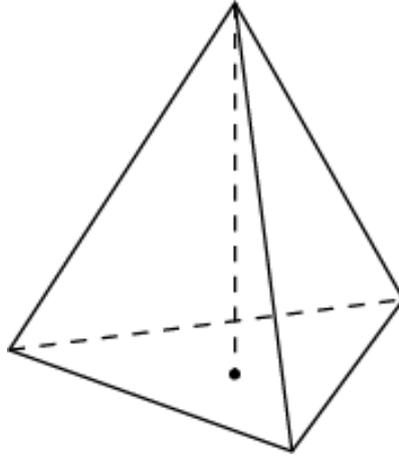
**4.2.** Высота боковой грани пирамиды равна 12. Площадь боковой грани равна 60. Площадь боковой поверхности этой пирамиды равна 360.



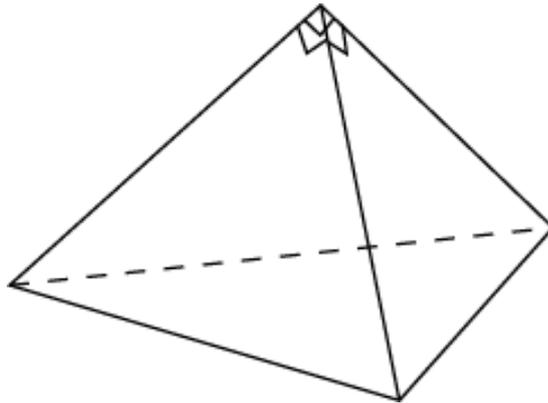
Ответ. 360.

### Тренировочная работа 4

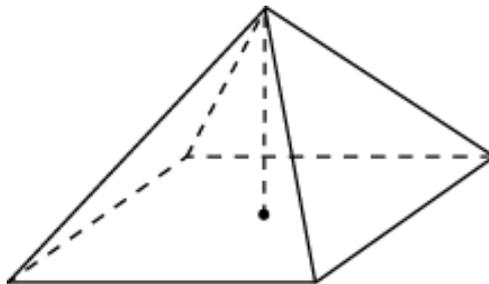
1. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна  $\sqrt{3}$ .



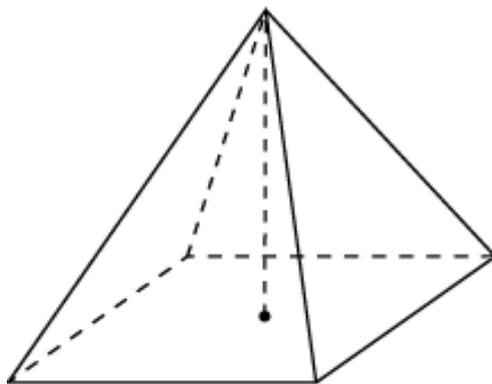
2. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объём пирамиды.



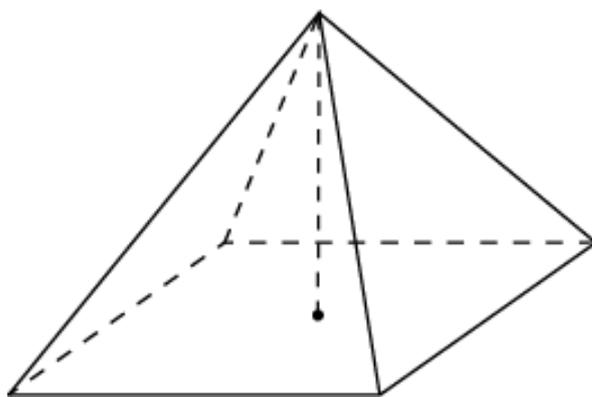
3. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 8. Боковое ребро равно 5. Найдите объём пирамиды.



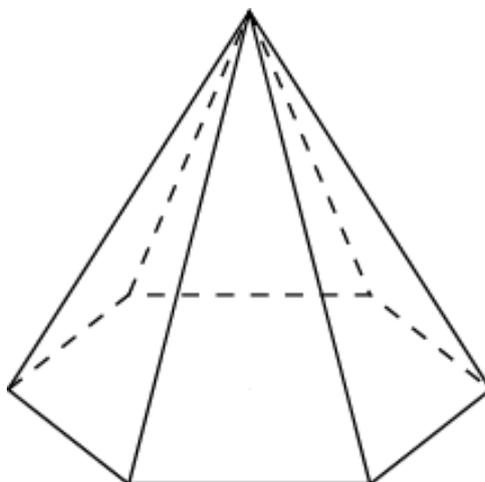
4. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 12, объём равен 200. Найдите боковое ребро пирамиды.



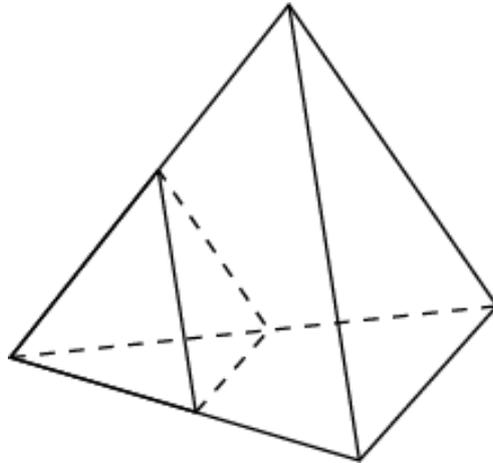
5. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь поверхности пирамиды.



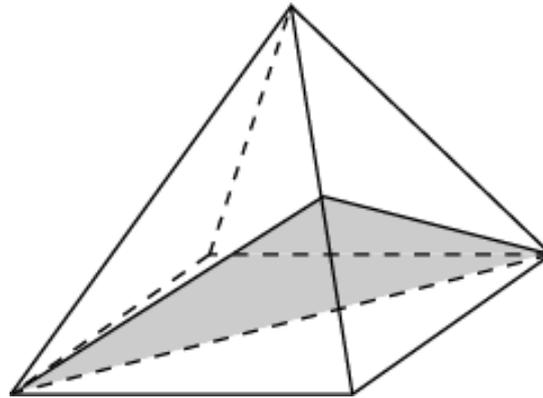
6. Объём правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.



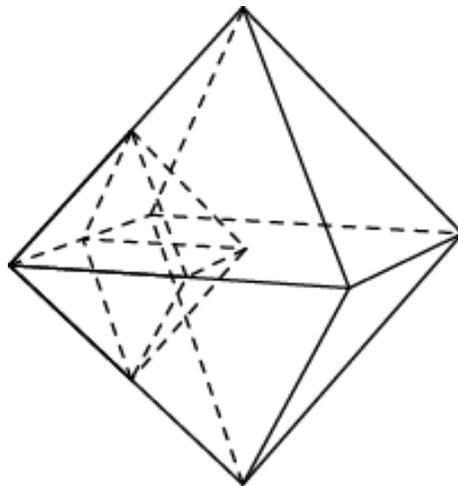
7. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в два раза?



8. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен 12. Найдите объём пирамиды, отсекаемой от неё плоскостью, проходящей через диагональ основания и середину противоположного бокового ребра.

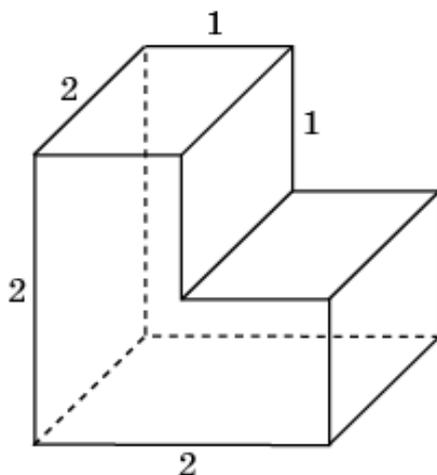


9. Во сколько раз уменьшится объём октаэдра, если все его рёбра уменьшить в два раза?



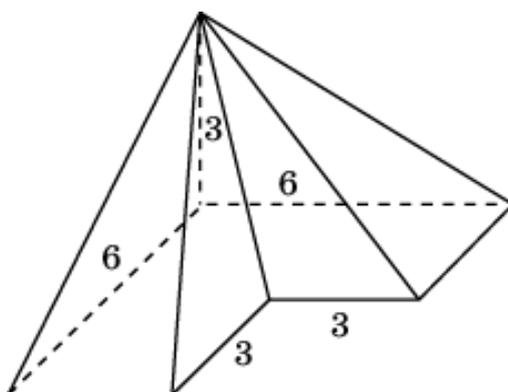
### Решения задач 5.1-5.2 диагностической работы

**5.1.** Поверхность многогранника состоит из двух квадратов, площадь которых равна 4, четырёх прямоугольников, площадь которых равна 2, и двух невыпуклых шестиугольников, площадь которых равна 3. Следовательно, площадь поверхности многогранника равна 22.



Ответ. 22.

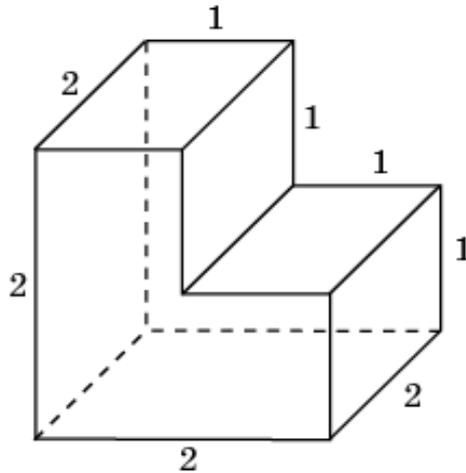
**5.2.** Площадь основания пирамиды равна 27, высота равна 3. Следовательно, объём пирамиды равен 27.



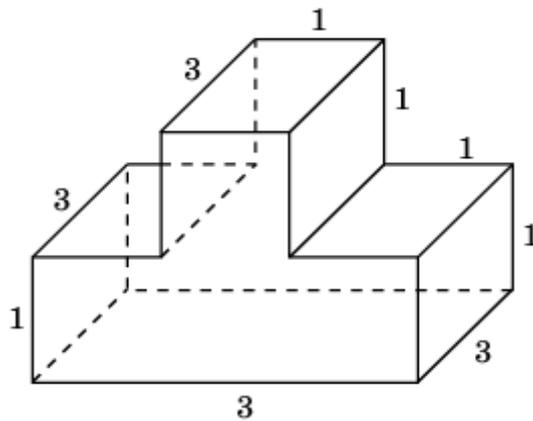
Ответ. 27.

### Тренировочная работа 5

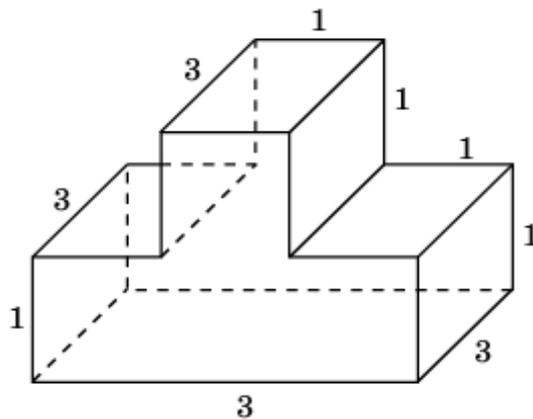
1. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



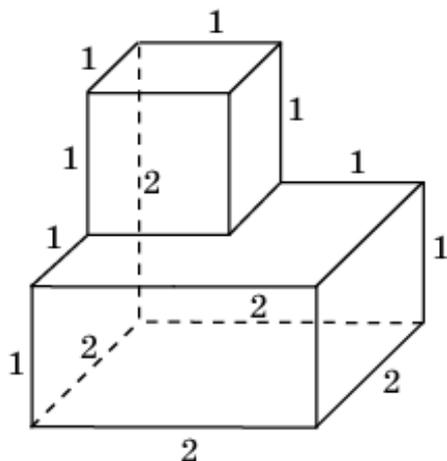
2. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



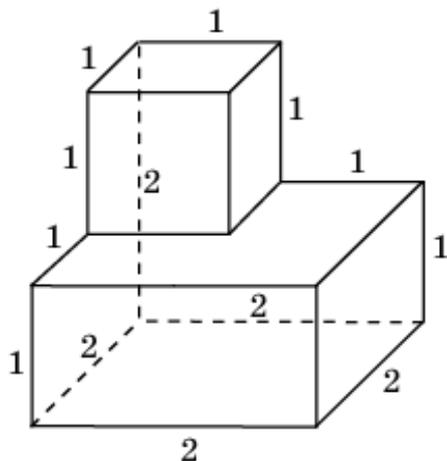
3. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



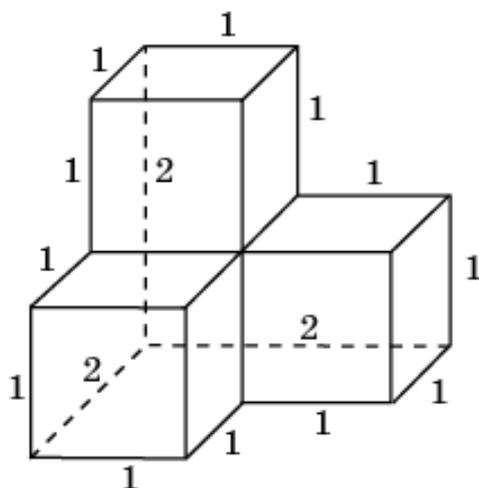
4. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



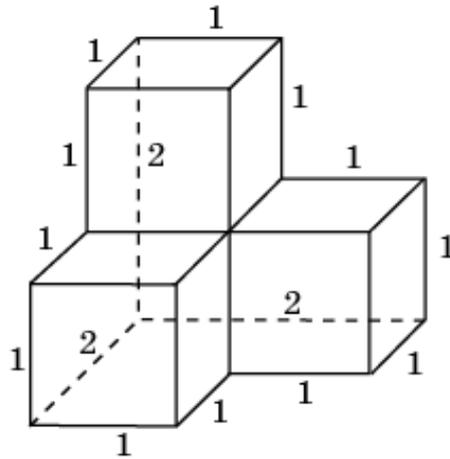
5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



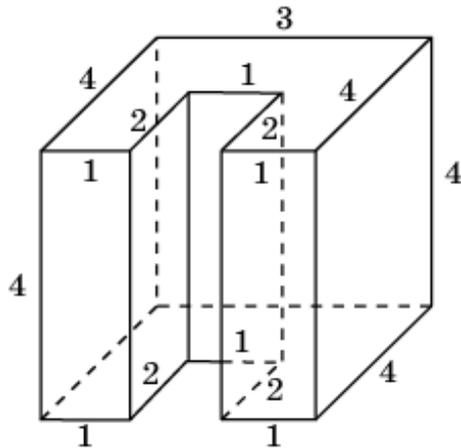
6. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



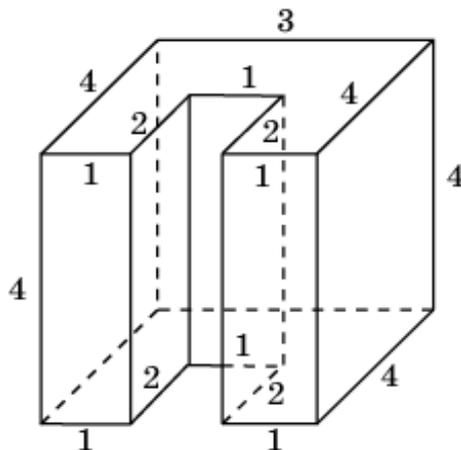
7. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

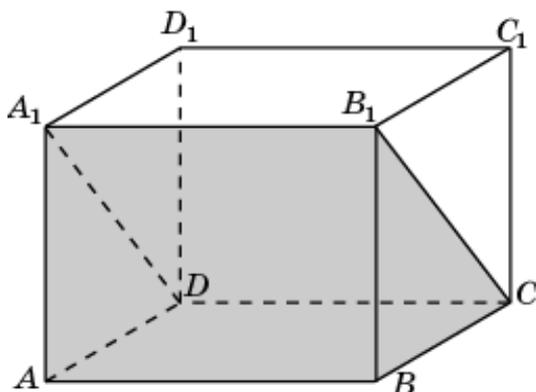


9. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



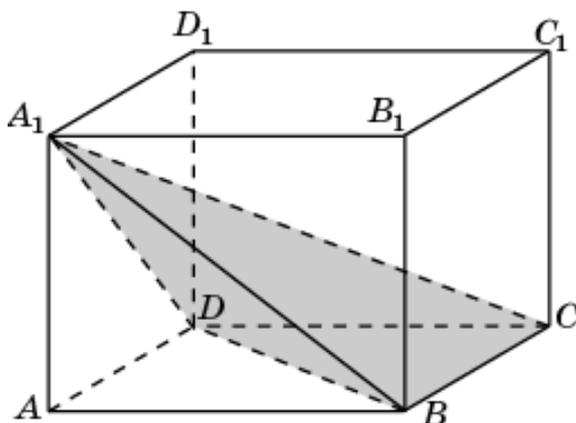
## Решения задач 6.1-6.2 диагностической работы

**6.1.** Искомым многогранником является прямая треугольная призма  $ADA_1BCB_1$ . Площадь её основания  $ADA_1$  равна 10, высота  $AB$  равна 3. Следовательно, объём этой призмы равен 30.



Ответ. 30.

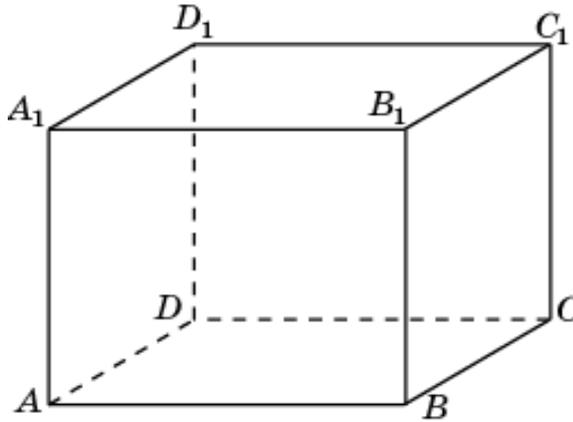
**6.2.** Искомым многогранником является прямая треугольная пирамида  $A_1BCD$ . Площадь её основания  $BCD$  равна 6, высота  $A_1A$  равна 4. Следовательно, объём этой пирамиды равен 8.



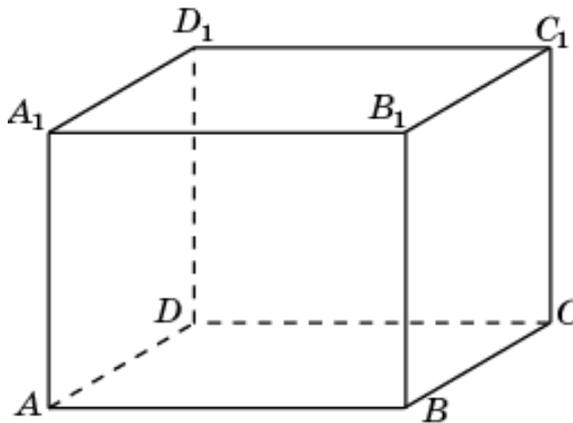
Ответ. 8.

### Тренировочная работа 6

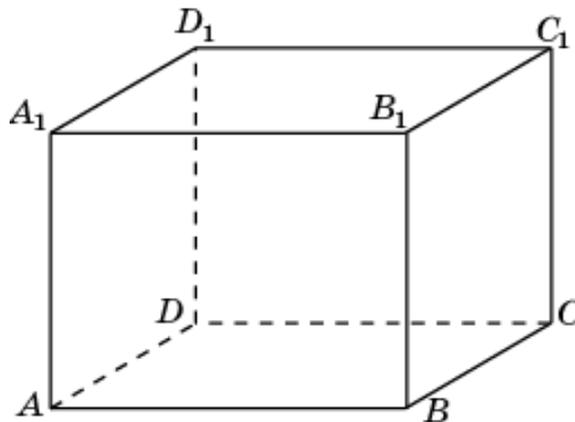
1. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 3, AD = 4, AA_1 = 5$ .



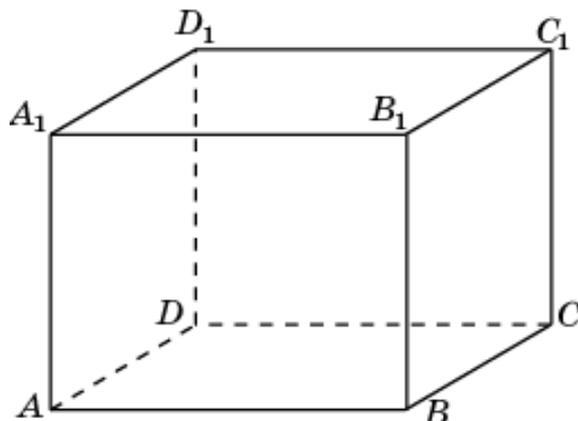
2. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A_1, B, C, C_1, B_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$ .



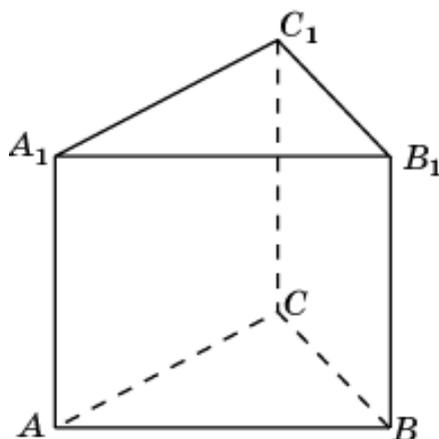
3. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, B_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 3, AD = 3, AA_1 = 4$ .



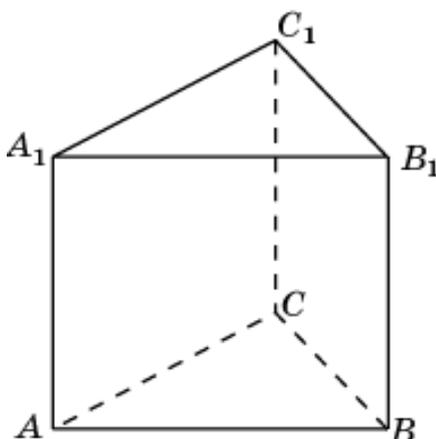
4. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, B_1, C_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 5, AD = 3, AA_1 = 4$ .



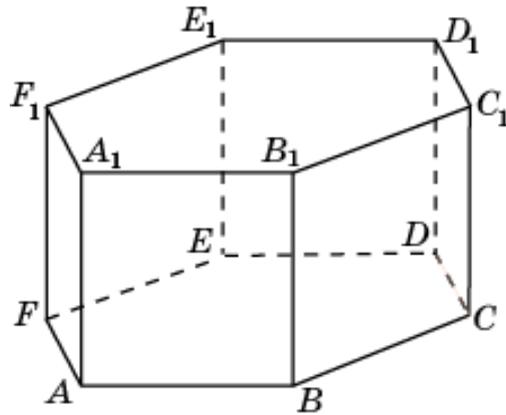
5. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, A_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$ , площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.



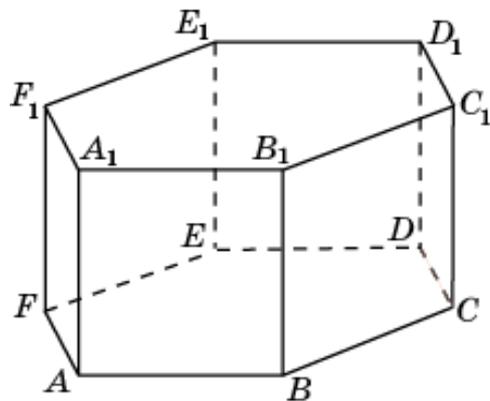
6. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, A_1, C_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$ , площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



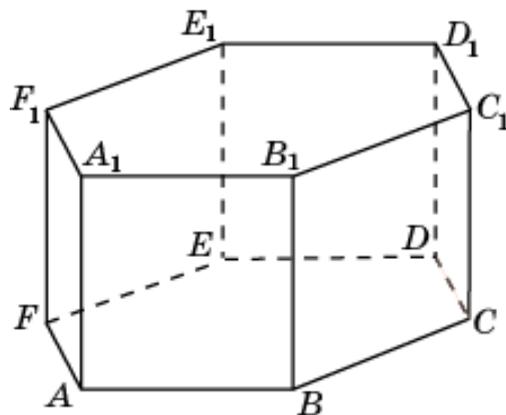
7. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, D, E, F, A_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.

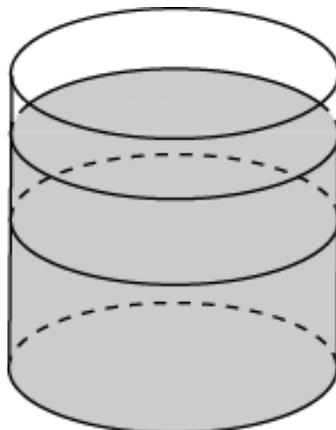


9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.



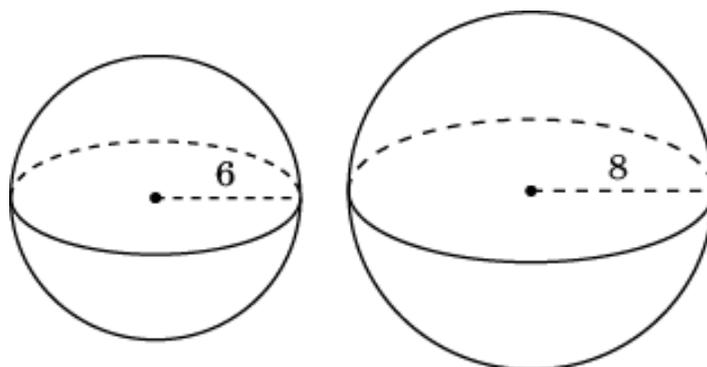
### Решения задач 7.1-7.2 диагностической работы

**7.1.** Так как уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза, то и объём увеличился в 1,5 раза, т. е. стал равен 9. Следовательно, объём детали равен 3.



Ответ. 3.

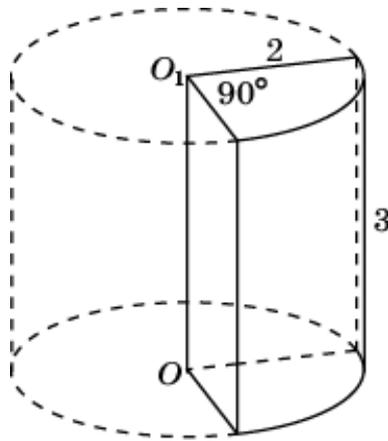
**7.2.** Площади поверхностей данных шаров равны  $4\pi \cdot 36$  и  $4\pi \cdot 64$ . Их сумма равна  $4\pi \cdot 100$ . Следовательно, радиус шара, площадь поверхности которого равна этой сумме, равен 10.



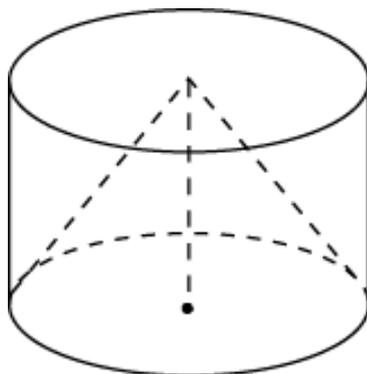
Ответ. 10.

### Тренировочная работа 7

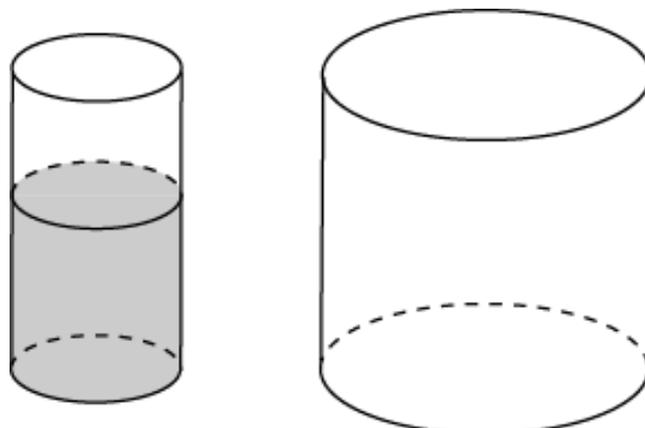
1. Найдите объём  $V$  части цилиндра, изображённой на рисунке, высекаемой из цилиндра прямым двугранным углом. Радиус основания цилиндра равен 2, а образующая равна 3. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



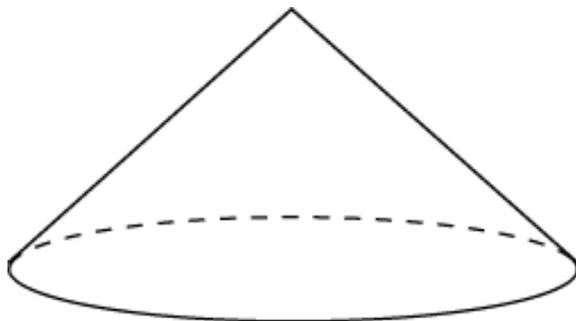
2. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объём цилиндра, если объём конуса равен 50.



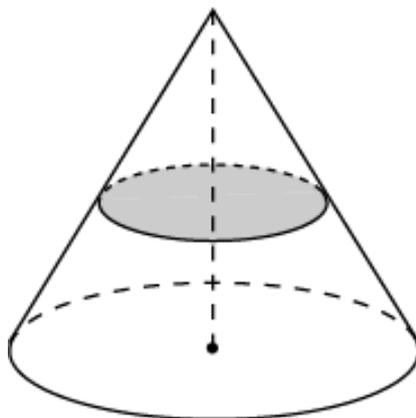
3. Воду, находящуюся в цилиндрическом сосуде на уровне 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, в два раза большего диаметра. На какой высоте будет находиться уровень воды во втором сосуде?



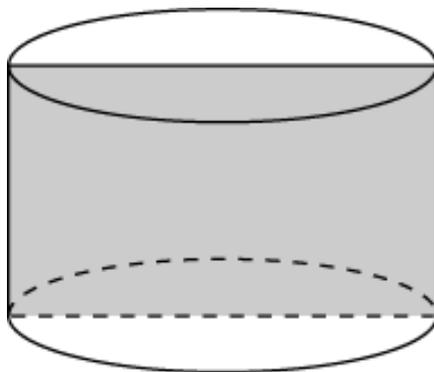
4. Найдите объём  $V$  конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



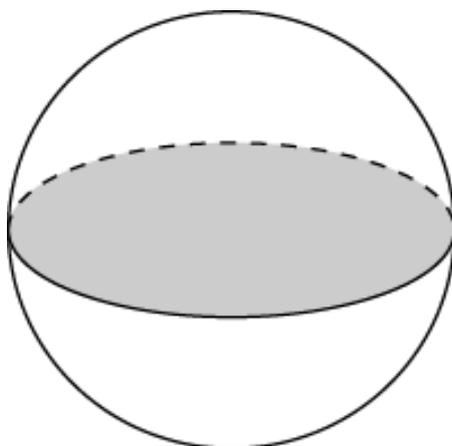
5. Объём конуса равен 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите объём отсечённого конуса.



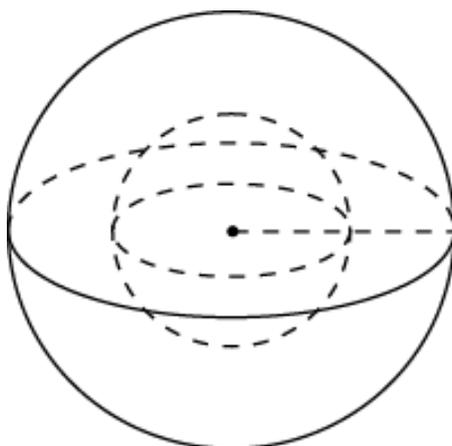
6. Площадь осевого сечения цилиндра равна  $\frac{2}{\pi}$ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



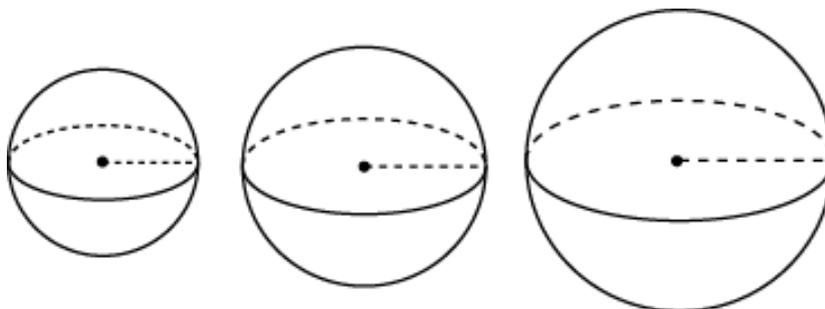
7. Площадь большого круга шара равна 1. Найдите площадь поверхности шара.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в два раза?

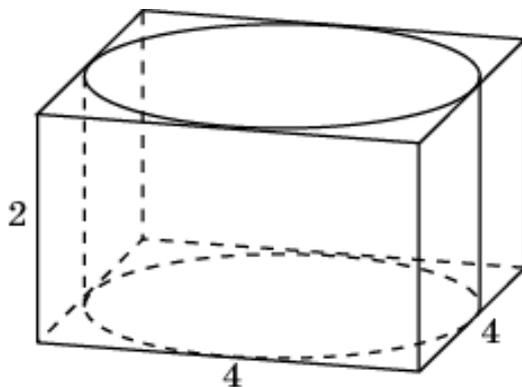


9. Радиусы трёх шаров равны 3, 4 и 5. Найдите радиус шара, объём которого равен сумме их объёмов.



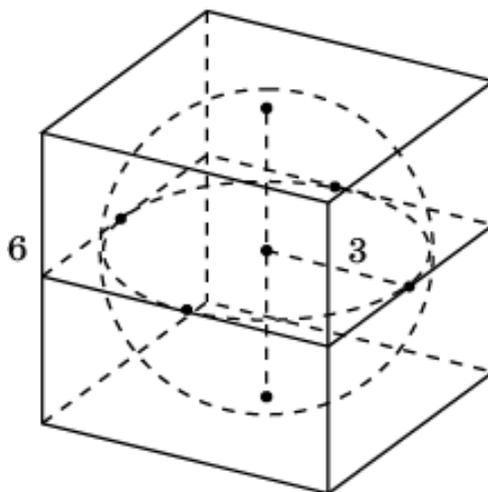
## Решения задач 8.1-8.2 диагностической работы

**8.1.** Рёбра параллелепипеда равны 4, 4, 2, следовательно, его объём равен 32.



Ответ. 32.

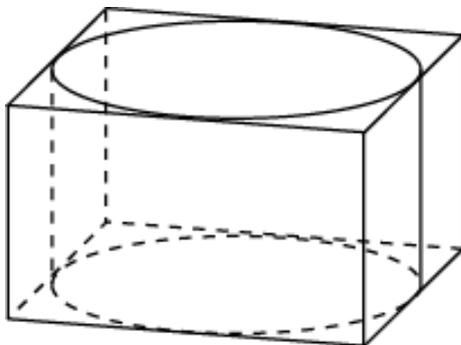
**8.2.** Радиус шара равен 3. Объём шара равен  $36\pi$ , а объём, делённый на  $\pi$ , равен 36.



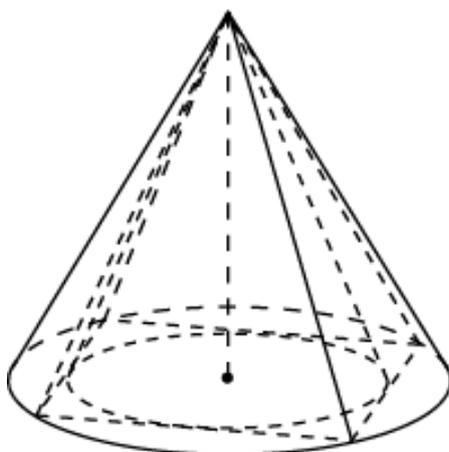
Ответ. 36.

## Тренировочная работа 8

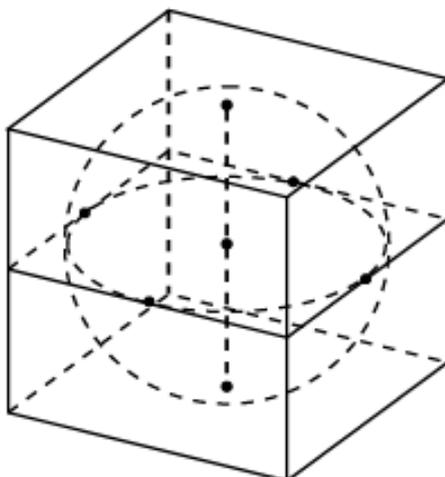
1. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



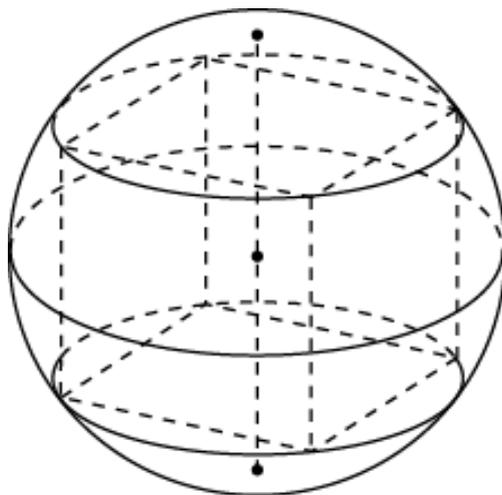
2. Во сколько раз объём конуса, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, больше объёма конуса, вписанного в эту пирамиду?



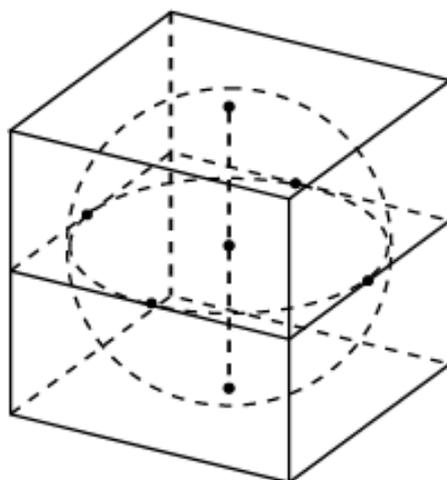
3. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2. Найдите площадь его поверхности.



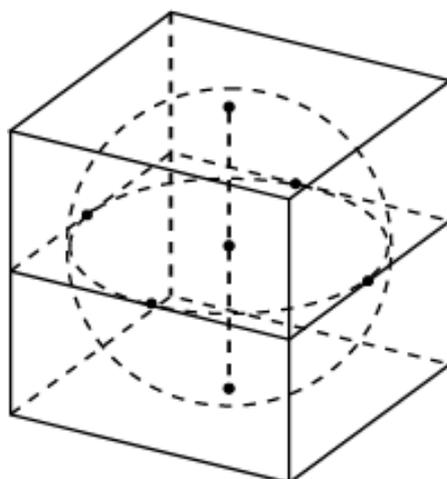
4. Куб вписан в шар радиуса  $\sqrt{3}$ . Найдите площадь поверхности куба.



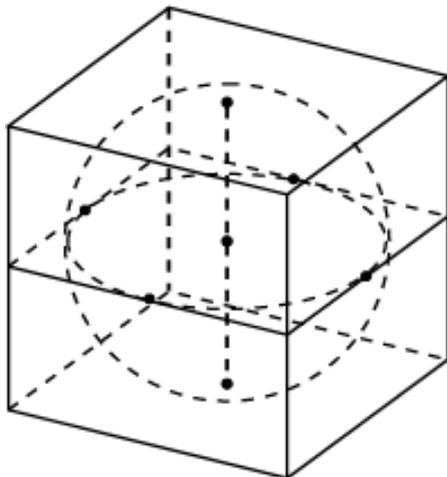
5. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2. Найдите его объём.



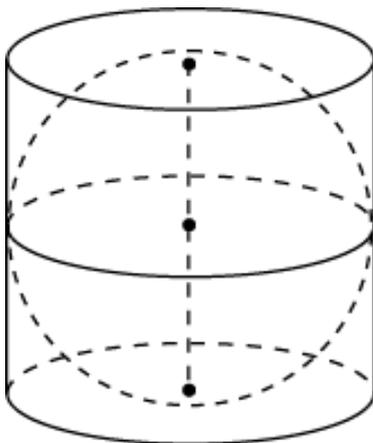
6. Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



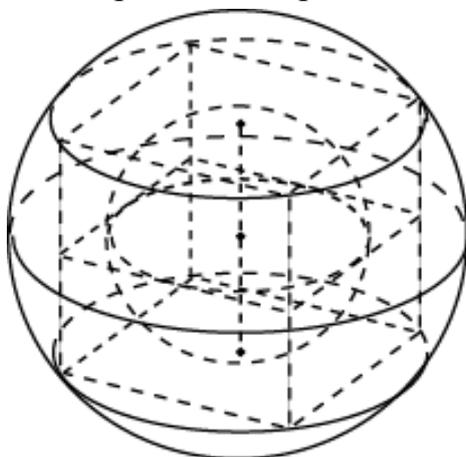
7. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равна 96. Найдите радиус сферы.



8. Около шара описан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна 9. Найдите площадь поверхности шара.

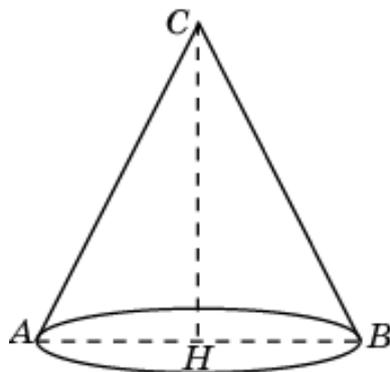


9. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?



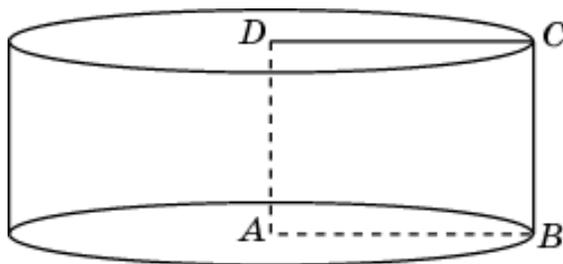
## Решения задач 9.1-9.2 диагностической работы

**9.1.** Телом вращения является конус, радиус основания которого равен  $\sqrt{5}$ , а высота  $CH$  равна 6. Объём  $V$  этого конуса равен  $10\pi$ .  
Значит,  $\frac{V}{\pi} = 10$ .



Ответ. 10.

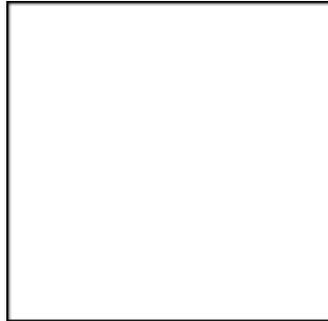
**9.2.** Телом вращения является цилиндр, радиус основания которого равен 4, а высота равна 3. Площадь  $S$  поверхности этого цилиндра равна  $56\pi$ . Значит,  $\frac{S}{\pi} = 56$ .



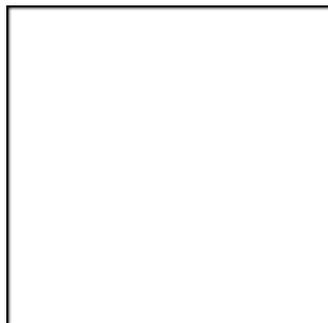
Ответ. 56.

## Тренировочная работа 9

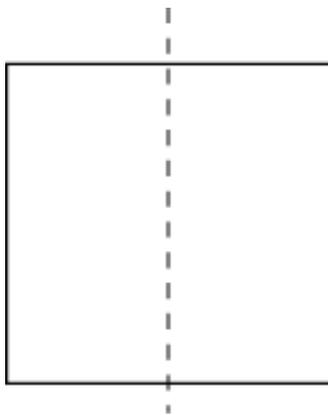
1. Единичный квадрат вращается вокруг прямой, содержащей одну его сторону. Найдите объём  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



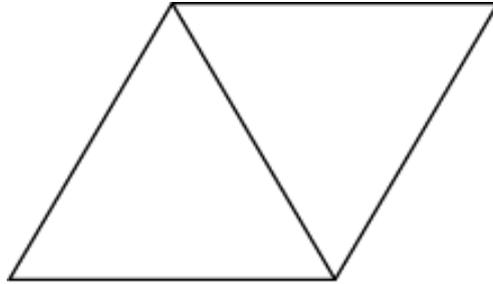
2. Единичный квадрат вращается вокруг прямой, содержащей одну его сторону. Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



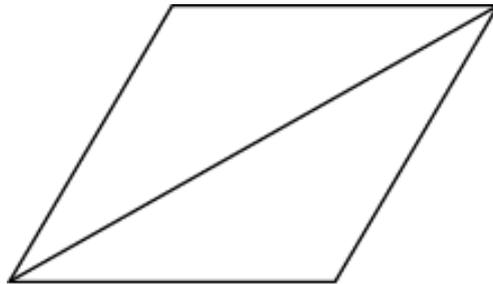
3. Единичный квадрат вращается вокруг прямой, проходящей через середины двух противоположных сторон. Найдите объём  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



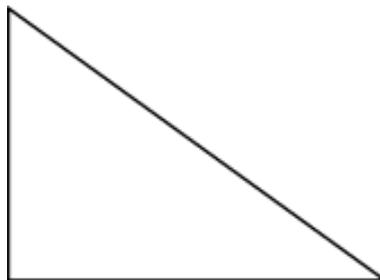
4. Ромб со стороной 2 и острым углом  $60^\circ$  вращается вокруг прямой, содержащей его меньшую диагональ. Найдите объем  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



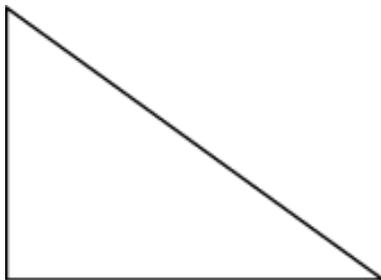
5. Ромб со стороной 2 и острым углом  $60^\circ$  вращается вокруг прямой, содержащей его большую диагональ. Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



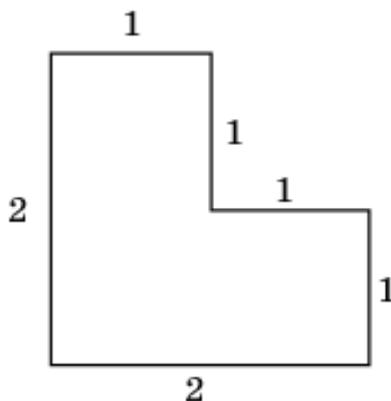
6. Треугольник со сторонами 3, 4, 5 вращается вокруг прямой, содержащей сторону, равную 3. Найдите объем  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



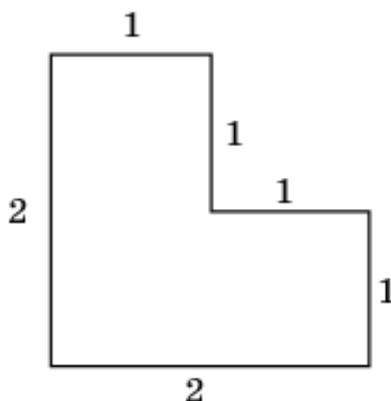
7. Треугольник со сторонами 3, 4, 5 вращается вокруг прямой, содержащей сторону, равную 4. Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



8. Многоугольник, изображённый на рисунке, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой, содержащей сторону, равную 2. Найдите объём  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

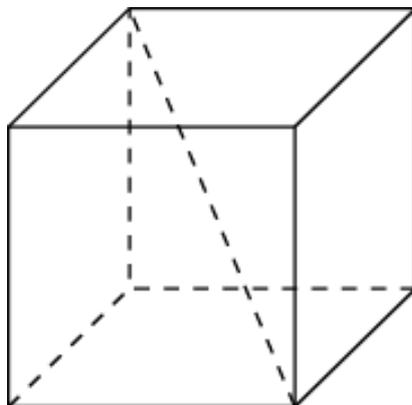


9. Многоугольник, изображённый на рисунке, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой, содержащей сторону, равную 2. Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .

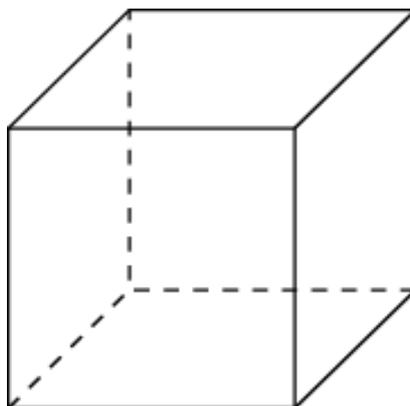


### Диагностическая работа 1

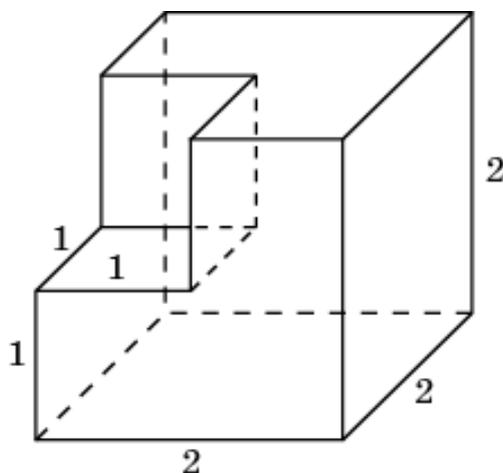
1. Диагональ куба равна  $3\sqrt{3}$ . Найдите его площадь поверхности.



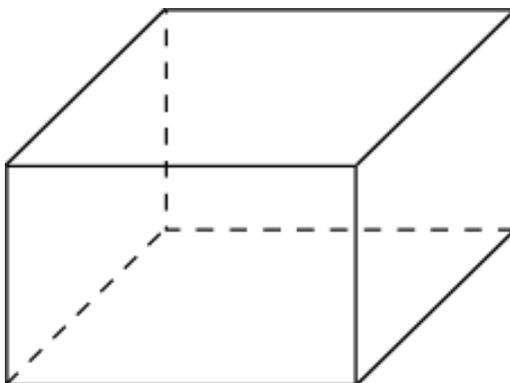
2. Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объём.



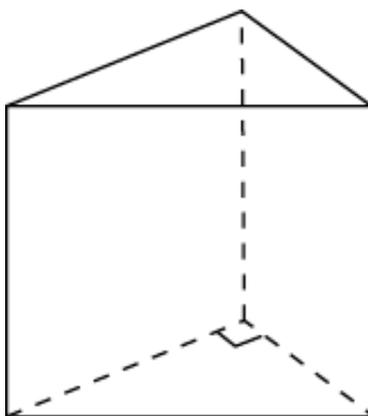
3. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



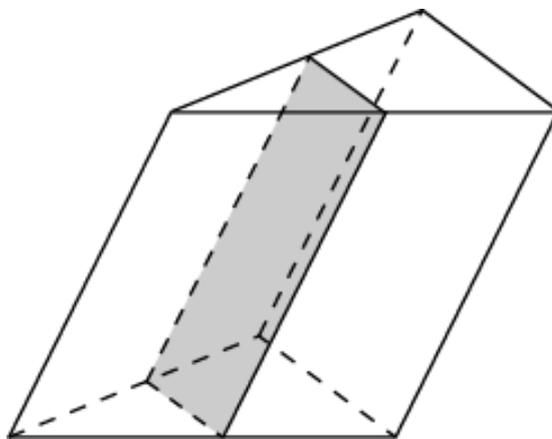
4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объём параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



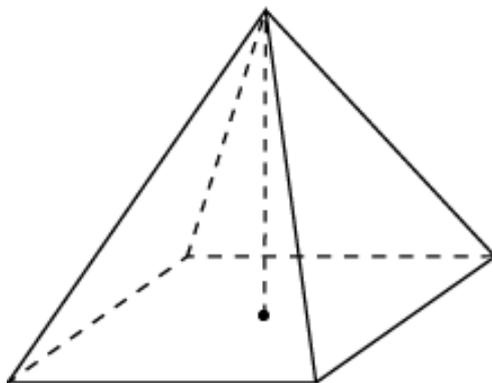
5. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь её поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.



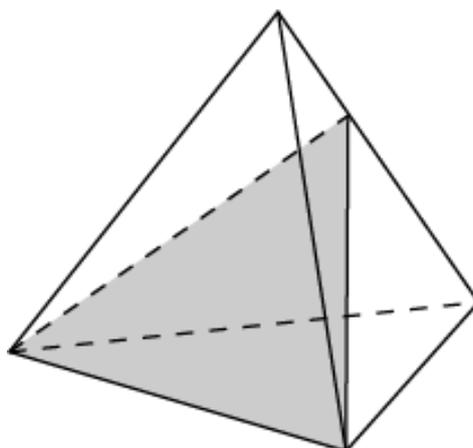
6. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсечённой треугольной призмы равен 5. Найдите объём исходной призмы.



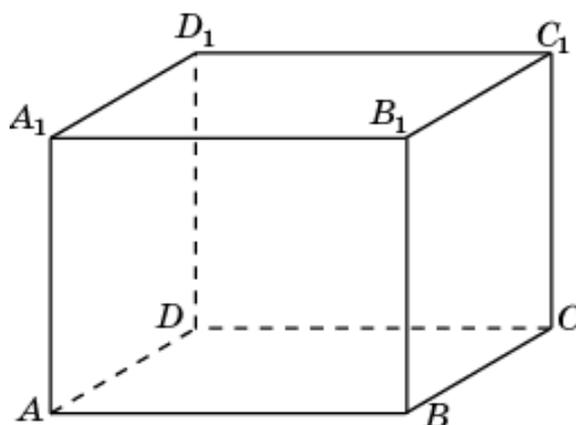
7. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Её объём равен 16. Найдите высоту пирамиды.



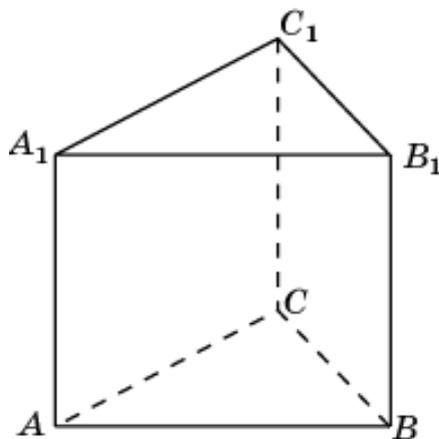
8. Объём треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



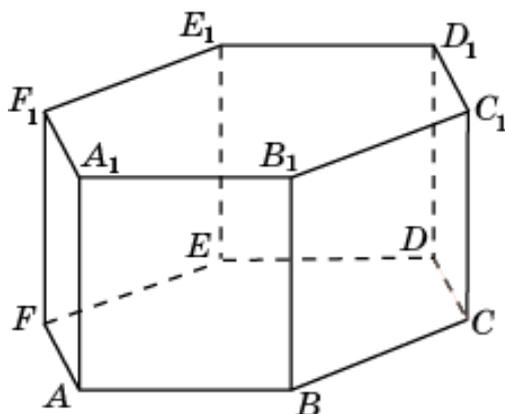
9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $D_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 3$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 3$ .



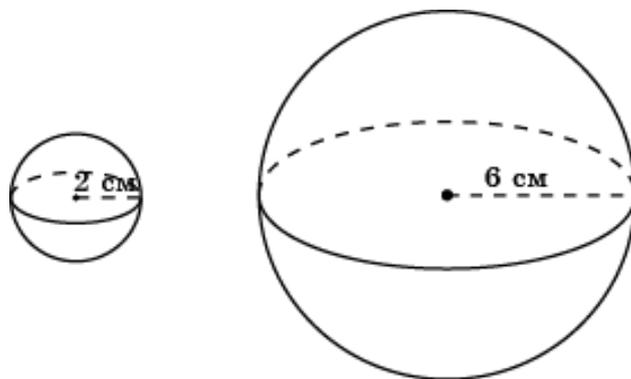
**10.** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $C, A_1, B_1, C_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



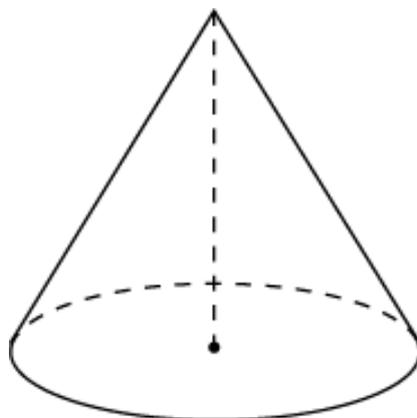
**11.** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, D, E, F, D_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



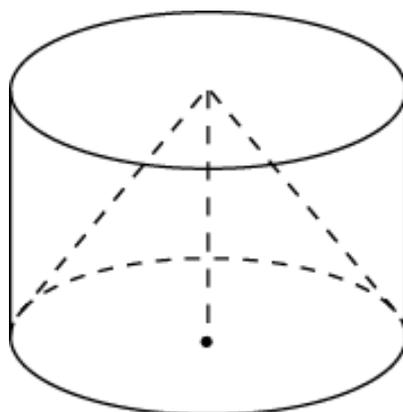
**12.** Сколько нужно взять медных шаров радиуса 2 см, чтобы из них можно было выплавить шар радиуса 6 см?



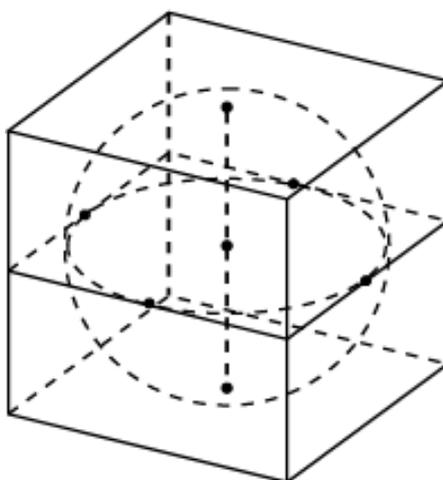
**13.** Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объём, делённый на  $\pi$ .



**14.** Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 48.



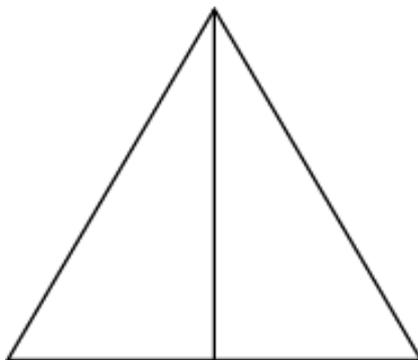
**15.** В куб вписан шар радиуса 2. Найдите объём куба.



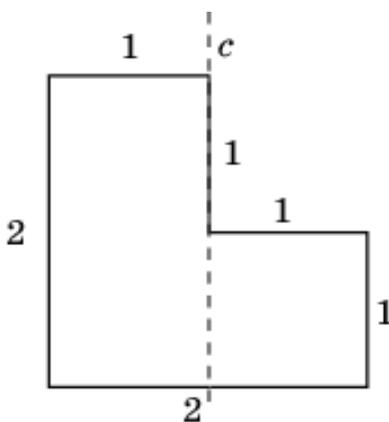
**16.** Прямоугольник со сторонами 4 и 6 вращается вокруг прямой, проходящей через середины больших сторон. Найдите объём  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



**17.** Равносторонний треугольник со стороной 2 вращается вокруг прямой, содержащей его высоту. Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .

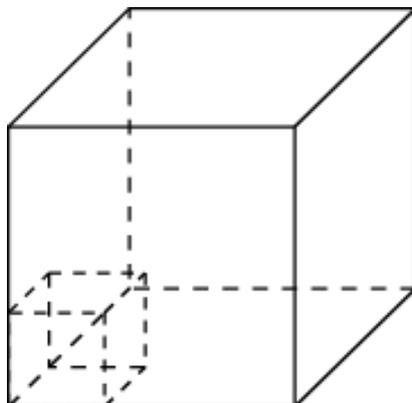


**18.** Многоугольник, изображённый на рисунке, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой  $c$ . Найдите объём  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

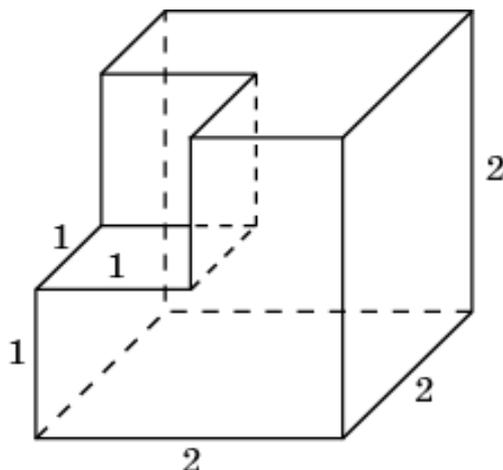


## Диагностическая работа 2

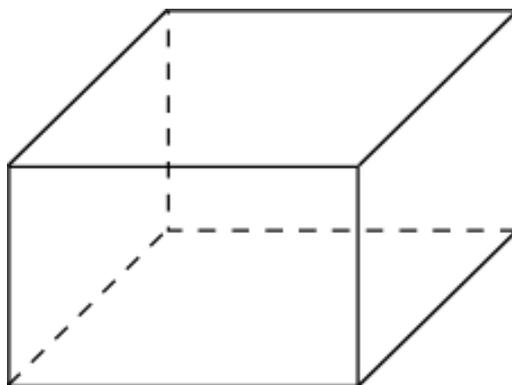
1. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в три раза?



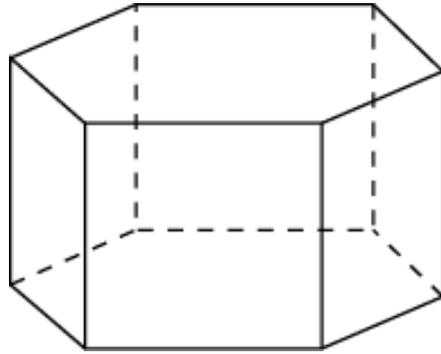
2. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



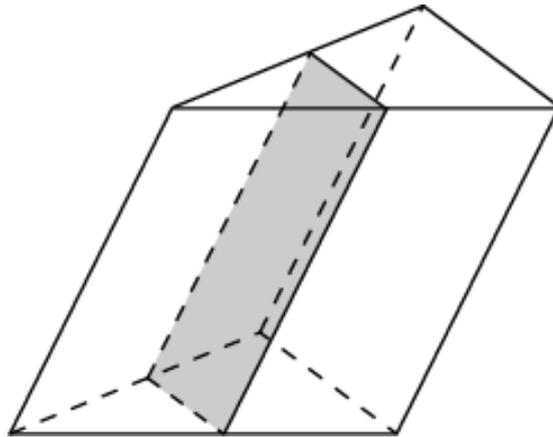
3. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.



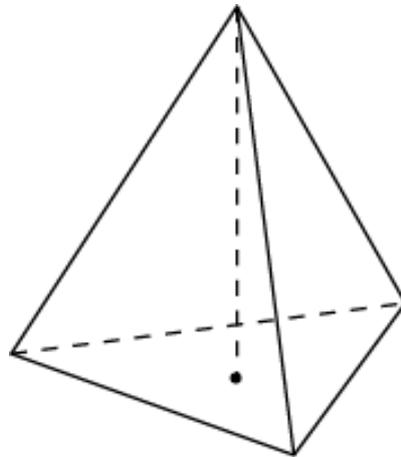
4. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны  $\sqrt{3}$ .



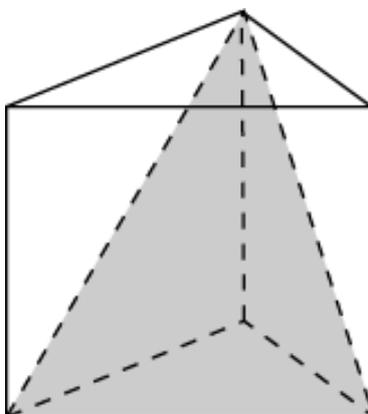
5. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



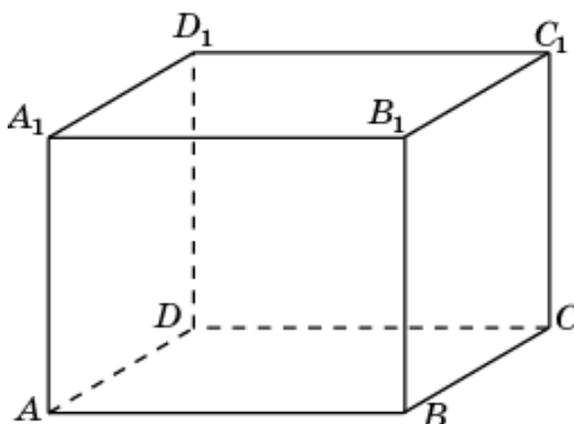
6. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объём равен  $\sqrt{3}$ .



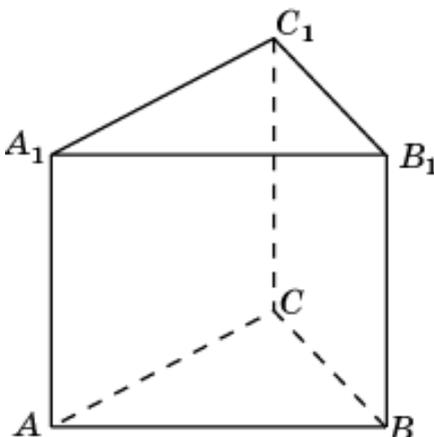
7. От призмы, объём которой равен 6, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части.



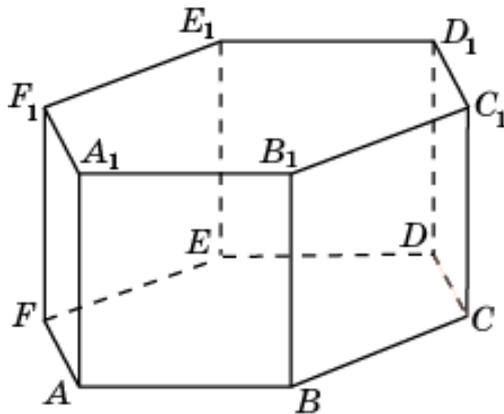
8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $B_1, A, B, C, D$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 5$ .



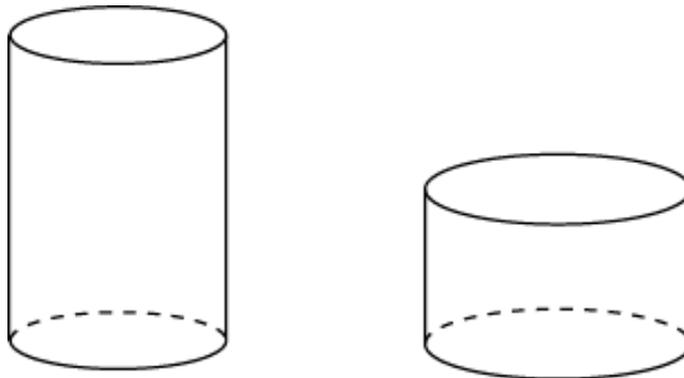
9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, A_1, B_1, C_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$ , площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



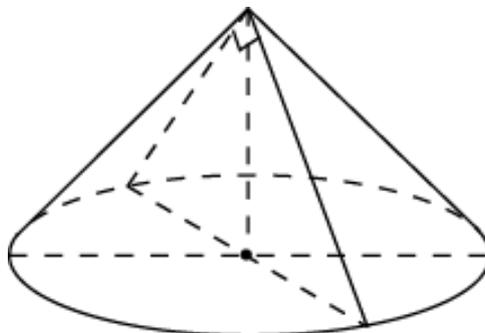
**10.** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.



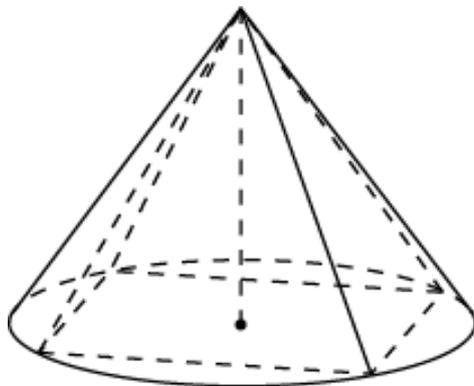
**11.** Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



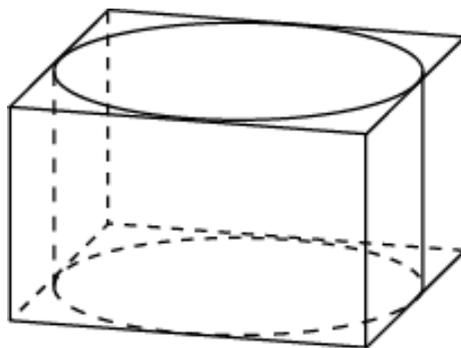
**12.** Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен  $90^\circ$ . Вычислите объём конуса, делённый на  $\pi$ .



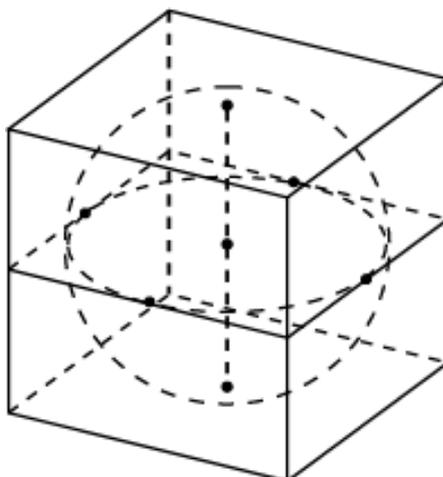
13. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объём, делённый на  $\pi$ .



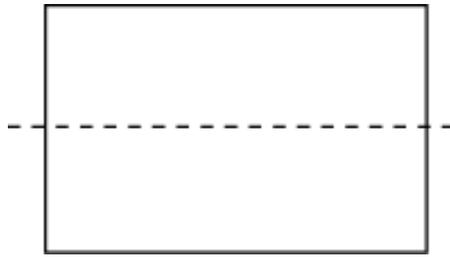
14. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 1. Объём параллелепипеда равен 8. Найдите высоту цилиндра.



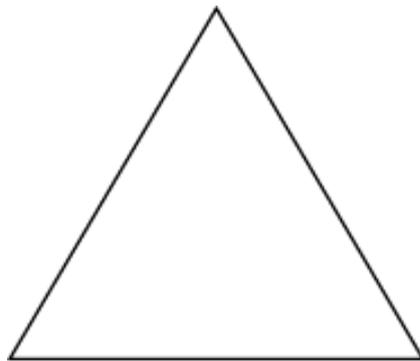
15. В куб вписан шар радиуса 3. Найдите площадь поверхности куба.



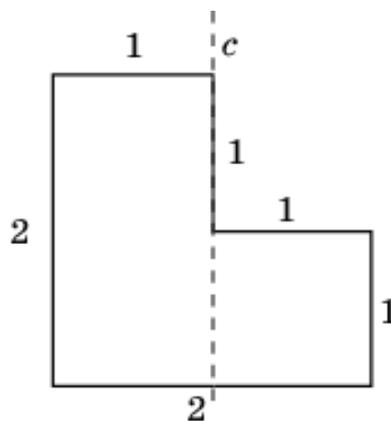
**16.** Прямоугольник со сторонами 4 и 6 вращается вокруг прямой, проходящей через середины меньших сторон. Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



**17.** Равносторонний треугольник со стороной 2 вращается вокруг прямой, содержащей его сторону. Найдите объём  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

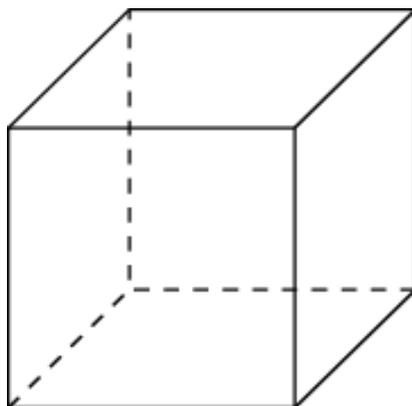


**18.** Многоугольник, изображённый на рисунке, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой  $c$ . Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .

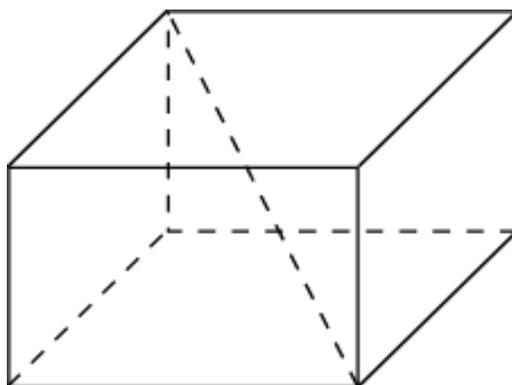


### Диагностическая работа 3

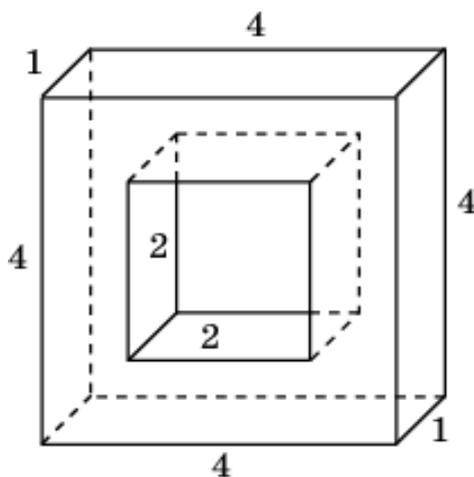
1. Объем куба равен 27. Найдите площадь его поверхности.



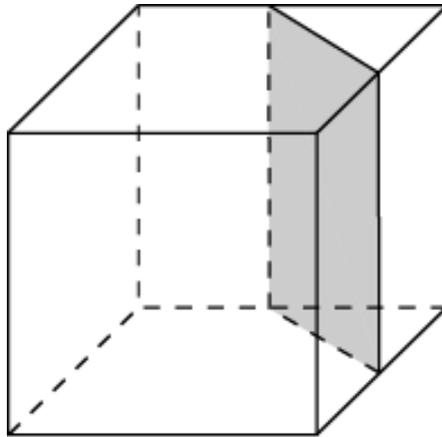
2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 3. Объем параллелепипеда равен 36. Найдите его диагональ.



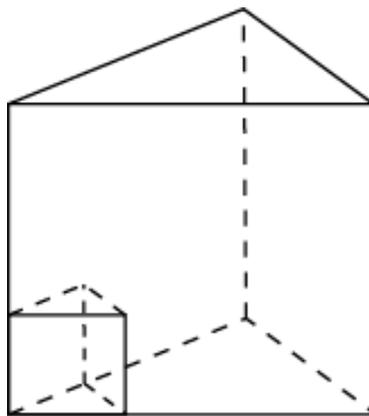
3. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



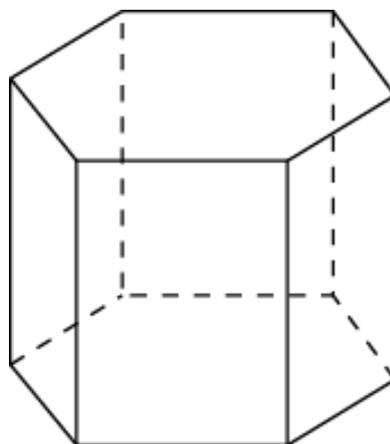
4. Объем куба равен 12. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



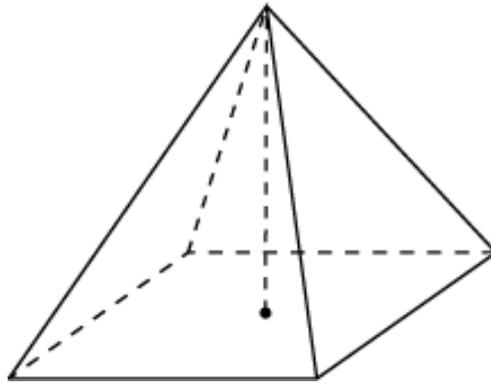
5. Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 6. Какой будет площадь поверхности призмы, если все её ребра увеличить в три раза?



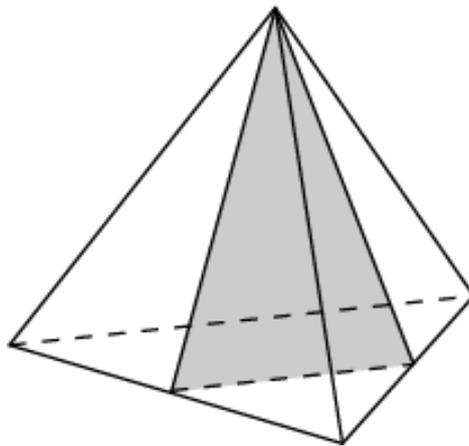
6. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 3, а высота равна 6.



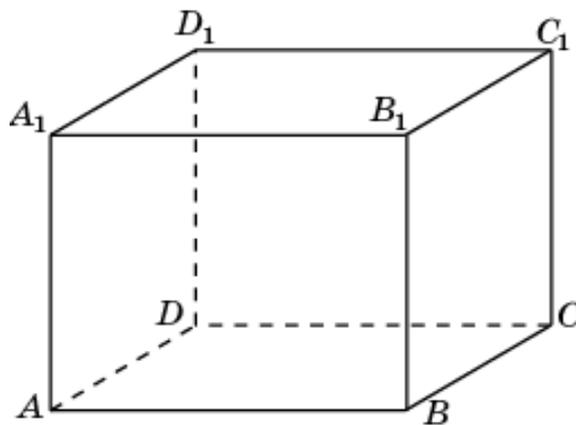
7. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите её объём.



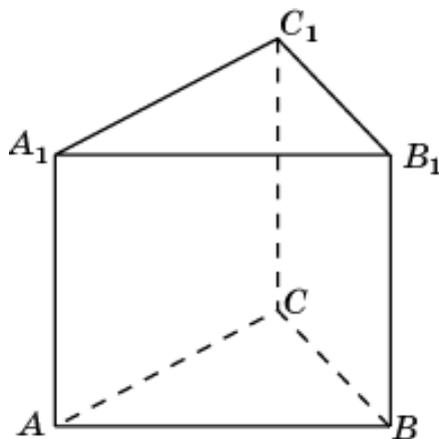
8. От треугольной пирамиды, объём которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.



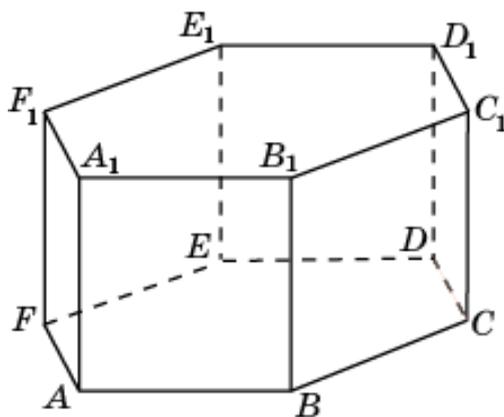
9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, C, D, D_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCA_1B_1C_1D_1$ , у которого  $AB = 3, AD = 5, AA_1 = 4$ .



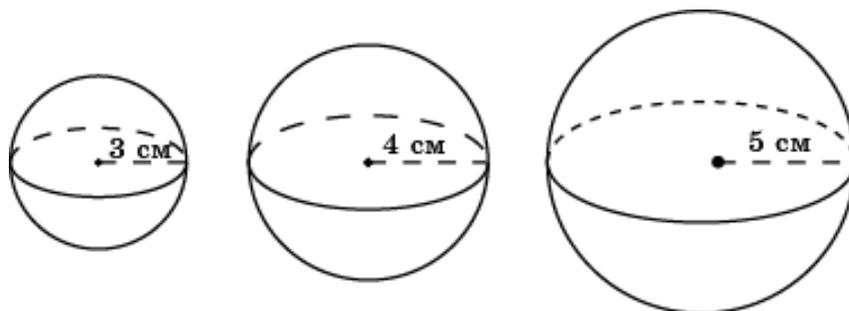
**10.** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A_1, B_1, B, C$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



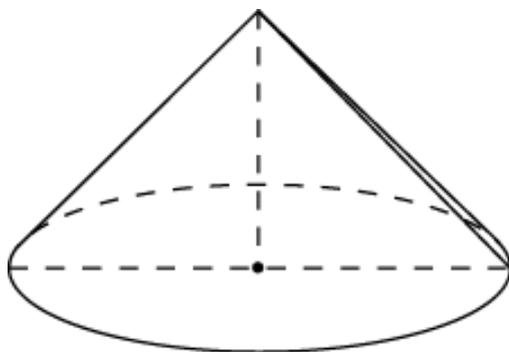
**11.** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, B_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.



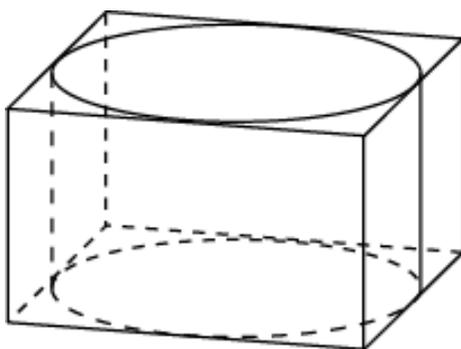
**12.** Найдите радиус шара, который можно выплавить из трёх медных шаров радиусов 3 см, 4 см и 5 см.



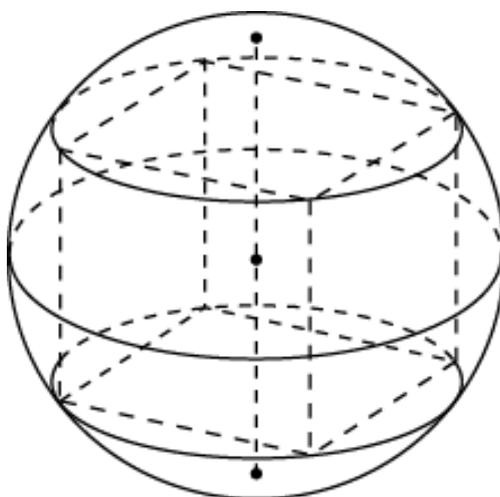
13. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 6. Найдите его объём, делённый на  $\pi$ .



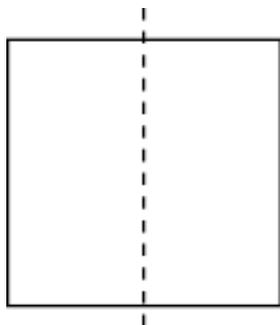
14. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.



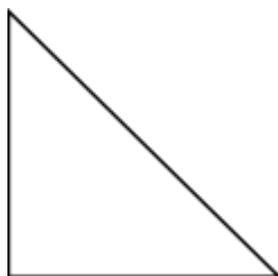
15. Куб вписан в шар радиуса  $\sqrt{3}$ . Найдите объём куба.



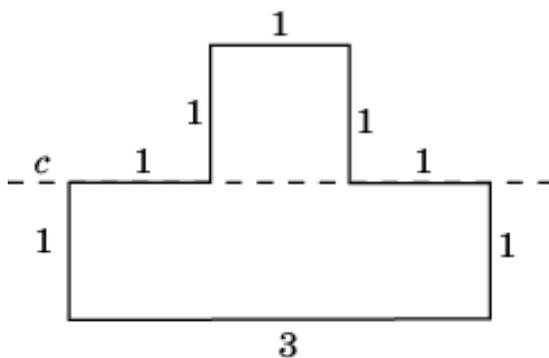
16. Квадрат со стороной 4 вращается вокруг прямой, проходящей через середины двух противоположных сторон. Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



17. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6, вращается вокруг прямой, содержащей один его катет. Найдите объём  $V$  тела вращения. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



18. Многоугольник, изображённый на рисунке, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой  $c$ . Найдите площадь  $S$  поверхности тела вращения. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



## Ответы

### Диагностическая работа

1.1. 8. 1.2. 2. 2.1. 214. 2.2. 1,5. 3.1. 120. 3.2. 8. 4.1. 8. 4.2. 360. 5.1. 22. 5.2. 27. 6.1. 30. 6.2. 8. 7.1. 3. 7.2. 10. 8.1. 32. 8.2. 36. 9.1. 10. 9.2. 56.

### Тренировочная работа 1

1. 27. 2. 8. 3. 2. 4. 27. 5. 2. 6. 2. 7. 27. 8. 4. 9. 7.

### Тренировочная работа 2

1. 8. 2. 5. 3. 32. 4. 94. 5. 2. 6. 64. 7. 3. 8. 1,5. 9. 160.

### Тренировочная работа 3

1. 2,25. 2. 4. 3. 288. 4. 62. 5. 10. 6. 4. 7. 6. 8. 27. 9. 4,5.

### Тренировочная работа 4

1. 0,25. 2. 4,5. 3. 32. 4. 13. 5. 84. 6. 7. 7. 4. 8. 3. 9. 8.

### Тренировочная работа 5

1. 6. 2. 12. 3. 38. 4. 5. 5. 20. 6. 4. 7. 18. 8. 40. 9. 92.

### Тренировочная работа 6

1. 30. 2. 16. 3. 6. 4. 10. 5. 2. 6. 2. 7. 4. 8. 3. 9. 8.

### Тренировочная работа 7

1. 3. 2. 150. 3. 3. 4. 1. 5. 1,5. 6. 2. 7. 4. 8. 4. 9. 6.

### Тренировочная работа 8

1. 32. 2. 2. 3. 96. 4. 24. 5. 64. 6. 3. 7. 2. 8. 9. 9. 3.

### Тренировочная работа 9

1. 1. 2. 4. 3. 0,25. 4. 2. 5. 4. 6. 16. 7. 24. 8. 5. 9. 14.

### Диагностическая работа 1

1. 54. 2. 8. 3. 7. 4. 4. 5. 10. 6. 20. 7. 4. 8. 10. 9. 18. 10. 4. 11. 2. 12. 27. 13. 128. 14. 16. 15. 64. 16. 36. 17. 3. 18. 2.

### Диагностическая работа 2

1. 9. 2. 24. 3. 6. 4. 13,5. 5. 16. 6. 3. 7. 4. 8. 20. 9. 4. 10. 6. 11. 1,125. 12. 9. 13. 16. 14. 2. 15. 216. 16. 32. 17. 2. 18. 6.

### Диагностическая работа 3

1. 54. 2. 7. 3. 12. 4. 1,5. 5. 54. 6. 108. 7. 256. 8. 3. 9. 10. 10. 4. 11. 1. 12. 6. 13. 72. 14. 3. 15. 8. 16. 24. 17. 72. 18. 8.

## Содержание

|  |       |
|--|-------|
| Введение                                     |       |
| Диагностическая работа                       | ..... |
| Решения задач 1.1-1.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 1                       | ..... |
| Решения задач 2.1-2.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 2                       | ..... |
| Решения задач 3.1-3.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 3                       | ..... |
| Решения задач 4.1-4.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 4                       | ..... |
| Решения задач 5.1-5.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 5.                      | ..... |
| Решения задач 6.1-6.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 6.                      | ..... |
| Решения задач 7.1-7.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 7                       | ..... |
| Решения задач 8.1-8.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 8                       | ..... |
| Решения задач 9.1-9.2 диагностической работы | ..... |
| Тренировочная работа 9                       | ..... |
| Диагностическая работа 1                     | ..... |
| Диагностическая работа 2                     | ..... |
| Диагностическая работа 3                     | ..... |
| Ответы                                       | ..... |