ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA ДЛЯ ЗНАКОМСТВА УЧАЩИХСЯ 9-х КЛАССОВ С ИНВЕРСИЕЙ И МОДЕЛЬЮ ПУАНКАРЕ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В. А. Смирнов
Московский педагогический государственный университет
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru
Аннотация: в работе рассматриваются возможности компьютерной программы GeoGebra для знакомства учащихся 9-х классов с инверсией и её свойствами. Показывается использование инверсии для проведения построений на модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.
Ключевые слова: инверсия, модель Пуанкаре плоскости Лобачевского, компьютерная программа GeoGebra.

ABOUT USING THE GEOGEBRA COMPUTER PROGRAM TO INTRODUCE STUDENTS IN GRADES 9 TO INVERSION AND THE POINCARÉ MODEL OF LOBACHEVSKY'S GEOMETRY

V. A. Smirnov
Moscow State Pedagogical University
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
I.M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru
Adstract: the paper investigates the possibilities of the computer program GeoGebra to introduce students in grades 9 to inversion and its properties. The use of inversion for constructions on the Poincaré model of the Lobachevsky’s plain is demonstrated.
Keywords: inversion, Poincaré model of the Lobachevsky’s plain, computer program GeoGebra.

Преобразования играют большую роль в математике. Формирование представлений учащихся о различных преобразованиях плоскости является одной их важнейших задач обучения геометрии. В школьном курсе геометрии изучаются такие преобразования, как центральная и осевая симметрии, параллельный перенос, движение, гомотетия, подобие.

В данной статье рассматривается ещё одно важное преобразование плоскости – инверсия [1]. Устанавливаются свойства инверсии. Предлагаются упражнения для самостоятельной работы учащихся. Показывается использование инверсии для знакомства учащихся с моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского [2, 3]. С целью повышения наглядности обучения, повышения доступности учебного материала, используется свободно распространяемая компьютерная программа GeoGebra [4].

Изучение данного материала может быть реализовано в рамках учебного курса внеурочной деятельности с учащимися 9-го класса [5].

Напомним, что инверсия относительно окружности с центром O и радиусом R сопоставляет каждой точке A плоскости, отличной от точки O, точку A', принадлежащую лучу OA, для которой выполняется равенство $OA \cdot OA' = R^2$. Сама окружность называется *окружностью инверсии*.

Инверсию можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого в ней имеется инструмент «Отражение относительно окружности». Выбрав этот инструмент и указав фигуру и окружность инверсии, получим инверсию данной фигуры.

Например, на рисунке 1 показана фигура, полученная инверсией квадрата $ABCD$ относительно окружности с центром O.

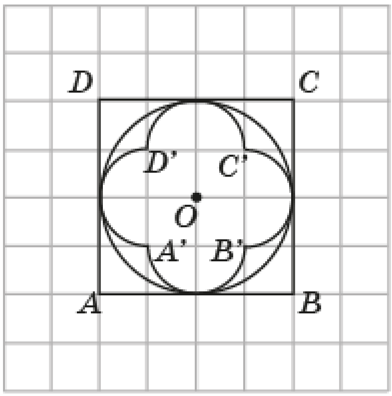


Рис. 1

Точки A', полученные инверсией точек A, можно построить геометрически. А именно, рассмотрим случай, когда точка A расположена внутри окружности (рис. 2). Проведём через неё прямую, перпендикулярную прямой OA. Обозначим B её точку пересечения с окружностью. Через точку B проведём касательную к окружности. Искомой точкой A' будет точка пересечения этой касательной с лучом OA. Действительно, треугольники OAB и OBA' подобны. Следовательно, имеет место равенство $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OA'}$, из которого следуют равенства $OA \cdot OA' = OB^2 = R^2$.

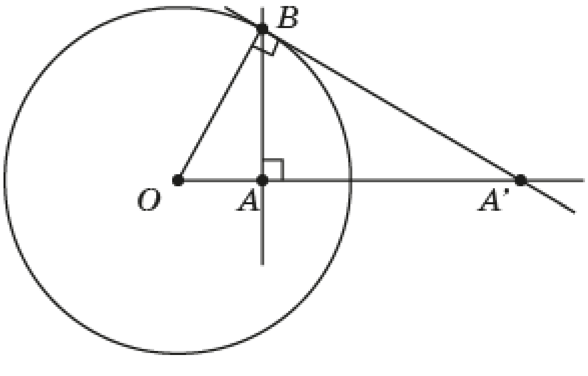
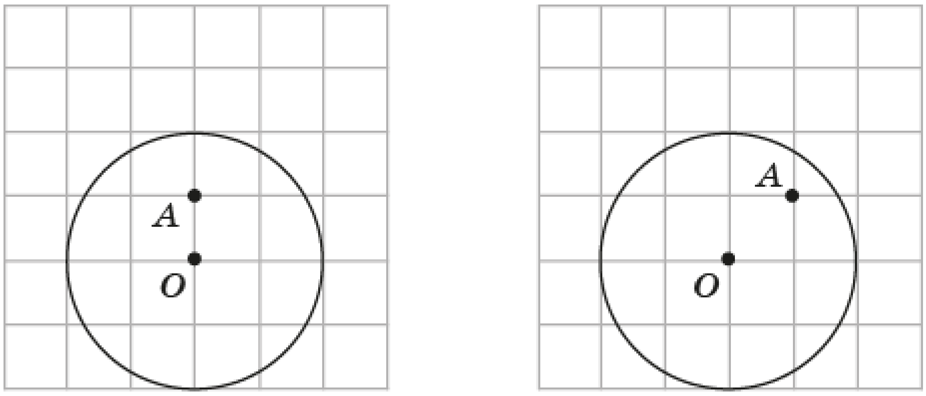


Рис. 2

Учащимся можно предложить самостоятельно рассмотреть случай, когда точка A расположена вне окружности с центром O и указать построение её инверсии A'.

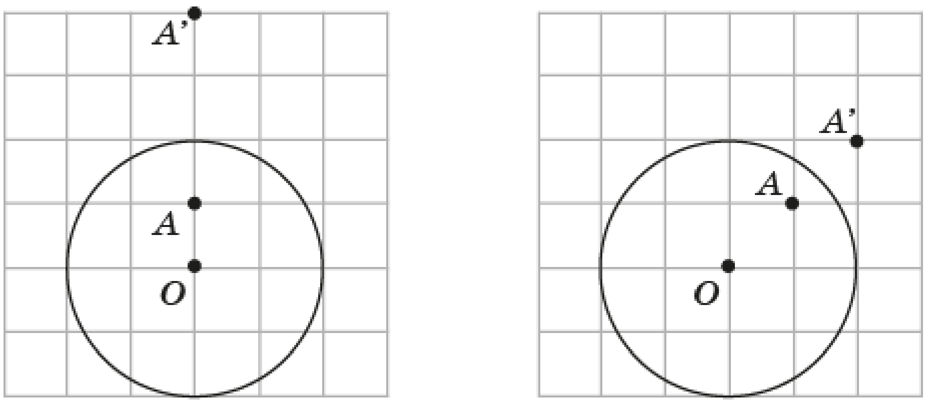
Упражнения

1. Изобразите на клетчатой бумаге инверсию точки *A* (рис. 3).



а) **Рис. 3** б)

Ответ. Рисунок 4.



а) **Рис. 4** б)

2. Докажите, что если при инверсии относительно окружности с центром *O* точки *A*, *B* переходят соответственно в точки *A'*, *B'*, то треугольники *OAB* и *OB'A'* будут подобны (рис. 5).

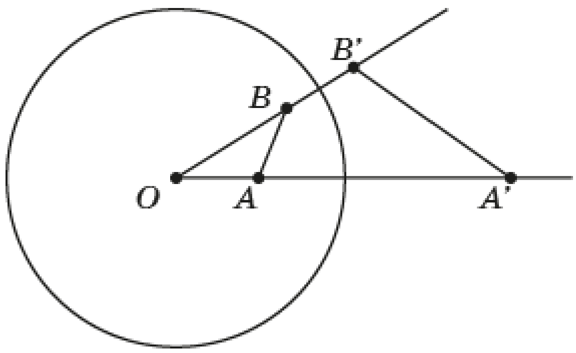


Рис. 5

Доказательство. Треугольники *OAB* и *OB'A'* имеют общий угол *O*. Кроме того, выполняются равенства $OA \cdot OA' = R^2$, $OB \cdot OB' = R^2$.

Следовательно, имеет место равенство $\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}$. По признаку подобия треугольников треугольники OAB и $OB'A'$ будут подобны.

3. Докажите, что инверсия переводит прямую, не проходящую через центр O, в окружность, проходящую через центр O, без этого центра (рис. 6).

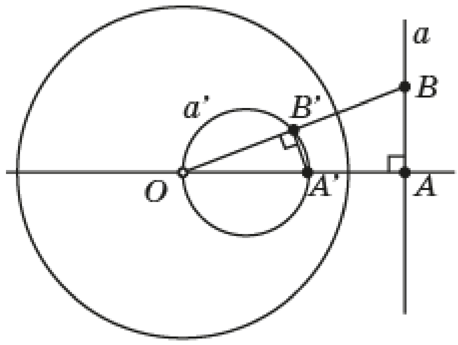


Рис. 6

Доказательство. Пусть прямая a не проходит через центр O окружности. Опустим перпендикуляр OA на эту прямую. Обозначим A' инверсию точки A. Для произвольной точки B прямой a обозначим B' её инверсию. Из подобия треугольников OAB и $OB'A'$ следует, что $\angle OB'A' = 90°$. Следовательно, точка B' принадлежит окружности a' с диаметром OA'. Значит, точки прямой a переходят в точки окружности a' с диаметром OA' без точки O.

4. Докажите, что при инверсии окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии (рис. 7).

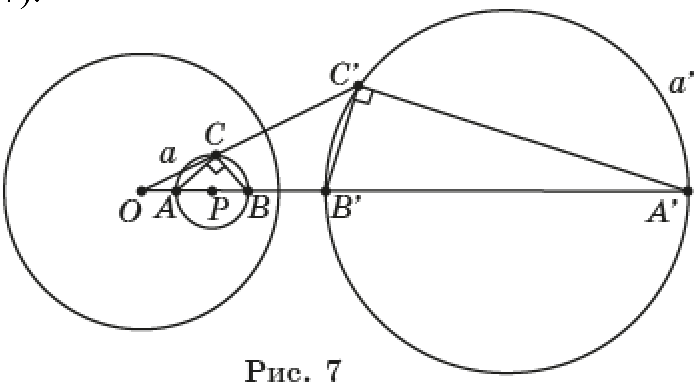


Рис. 7

Доказательство. Рассмотрим окружность a с центром P, не проходящую через центр инверсии O. Проведём прямую OP. Обозначим A, B точки пересечения этой прямой с окружностью. Обозначим A', B' инверсии точек соответственно A и B. Пусть точка C принадлежит окружности с центром P, C' – инверсия точки C. Треугольники OAC и $OC'A'$ подобны. Следовательно, $\angle OAC = \angle OC'A'$. Треугольники OBC и $OC'B'$ подобны. Следовательно, $\angle OBC = \angle OC'B'$. Тогда $\angle A'C'B' =$

$\angle OC'A' - \angle OC'B' = \angle OAC - \angle OBC = 90°$. Значит, точка *C’* принадлежит окружности *a’* с диаметром *A’B’*.

5. Постройте инверсию квадрата, изображённого на рисунке 8.

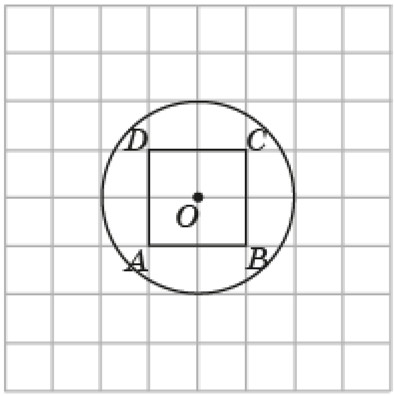


Рис. 8

Ответ. Рисунок 9.

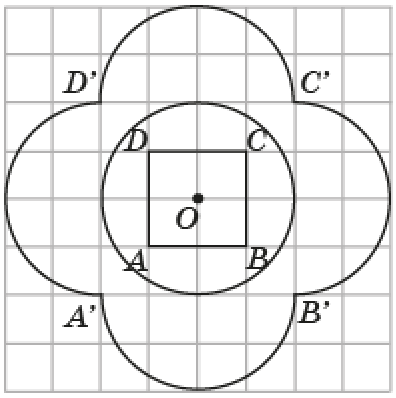


Рис. 9

6. Докажите, что окружность с центром *P* при инверсии относительно данной окружности с центром *O* переходит сама в себя тогда и только тогда, когда она перпендикулярна данной окружности (рис. 10).

Доказательство. Пусть окружность *b* с центром *P* переходит сама в себя при инверсии относительно данной окружности *a* с центром *O*, C_1, C_2 – их точки пересечения. Следовательно, прямая OC_1 не имеет других общих точек с окружностью *b*, т. е. является касательной к этой окружности. Значит, окружности *a* и *b* перпендикулярны.

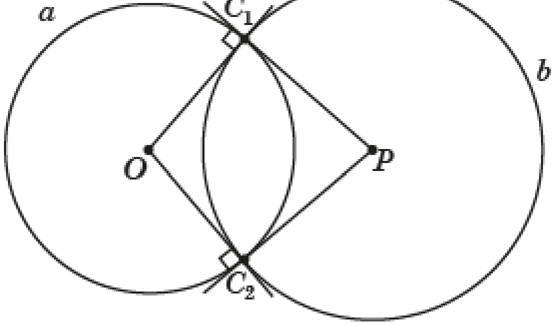


Рис. 10

Обратно. Пусть окружность b с центром P перпендикулярна окружности a с центром O, C_1, C_2 – их точки пересечения. Тогда прямые OC_1, OC_2 – касательные к окружности b. При инверсии относительно окружности b точки C_1, C_2 остаются на месте, а касательные OC_1, OC_2 переходят сами в себя. Так как окружность однозначно определяется двумя точками и касательными, проведёнными в этих точках, то окружность b и её инверсия относительно окружности a совпадают.

7. Докажите, что окружность, проходящая через две точки, получающиеся друг из друга инверсией относительно данной окружности, перпендикулярна этой окружности (рис. 11).

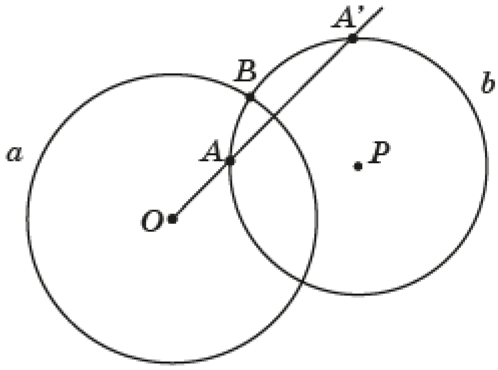


Рис. 11

Доказательство. Пусть точка A' получена инверсией точки A относительно окружности с центром O, а окружность с центром P проходит через эти точки. Обозначим B точку пересечения этих окружностей. Так как через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная окружность, то окружность с центром P при инверсии относительно окружности с центром O переходит сама в себя. Следовательно, эти окружности перпендикулярны.

8. Используя инверсию, докажите следующую теорему Птолемея.

Теорема. Для четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, выполняется равенство: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (рис. 12).

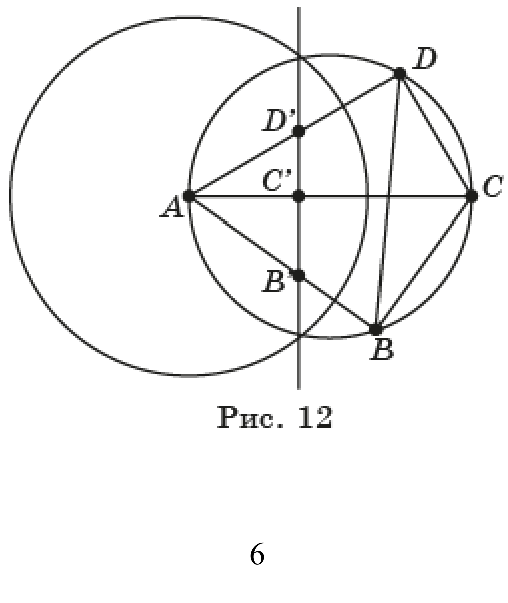


Рис. 12

Доказательство. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром A и радиусом 1. Обозначим B', C', D' точки, в которые при этой инверсии перейдут точки соответственно B, C, D.

Имеют место равенства

$$AB' = \frac{1}{AB}, AC' = \frac{1}{AC}, AD' = \frac{1}{AD}.$$

Так как окружность, проходящая через центр инверсии, при инверсии переходит в прямую, то точки B', C', D' будут принадлежать одной прямой.

Из подобия треугольников ABC и $AC'B'$ следуют равенства

$$B'C' = \frac{BC \cdot AB'}{AC} = \frac{BC}{AB \cdot AC}.$$

Из подобия треугольников ACD и $AD'C'$ следует равенство

$$C'D' = \frac{CD \cdot AC'}{AD} = \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

Из подобия треугольников ABD и $AD'B'$ следует равенство

$$B'D' = \frac{BD \cdot AB'}{AD} = \frac{BD}{AB \cdot AD}.$$

Подставляя в равенство $B'C' + C'D' = B'D'$ эти выражения, получим искомое равенство $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Напомним, что параболой называется геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки и данной прямой, не проходящей через эту точку. Данная точка называется фокусом, а данная прямая – директрисой параболы (рис. 13).

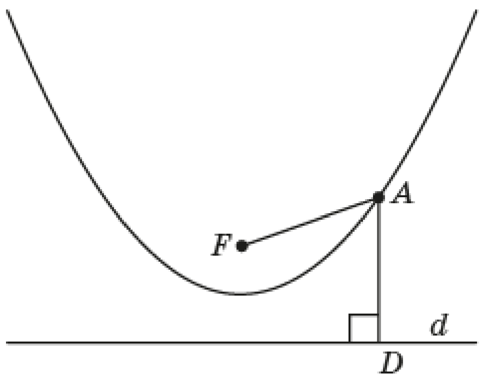


Рис. 13

Для получения параболы в компьютерной программе GeoGebra имеется инструмент «Парабола». Если выбрать этот инструмент и указать левой кнопкой мыши на данную точку и данную прямую, то на экране появится парабола с фокусом в данной точке и данной прямой в качестве директрисы.

9. В компьютерной программе GeoGebra получите параболу. Постройте её инверсию относительно окружности с центром в фокусе параболы (рис. 14).

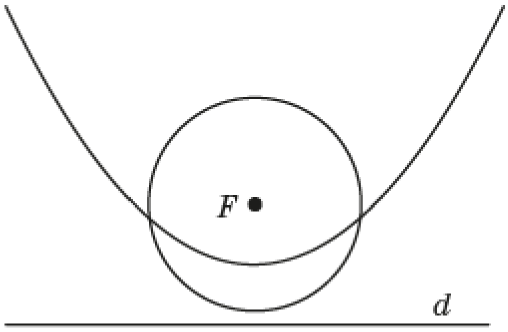


Рис. 14

Ответ. Искомая кривая показана на рисунке 15. Она является улиткой Паскаля.

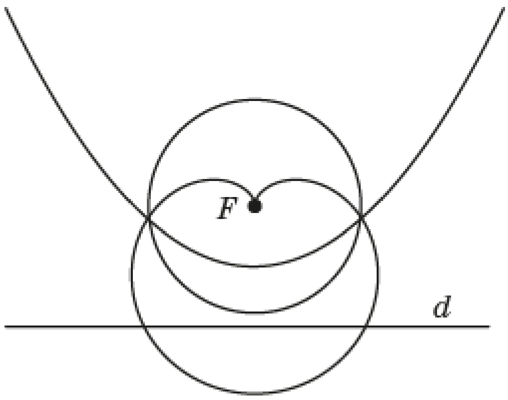


Рис. 15

Аналогичным образом можно получать инверсии эллипса, гиперболы и других кривых.

Воспользуемся инверсией для знакомства с моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского [2, 3]. Напомним, что в геометрии Лобачевского на плоскости выполняются все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы параллельных, вместо которой принимается следующая аксиома.

На плоскости через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит более одной прямой, не пересекающихся с данной.

Одна из моделей плоскости Лобачевского была предложена французским математиком А. Пуанкаре (1854-1912). В этой модели плоскостью является внутренность круга. Будем называть её *плоскостью Лобачевского*. Сам круг и окружность, его ограничивающую, будем называть соответственно *кругом и окружностью Пуанкаре*.

Точками на плоскости Лобачевского являются точки, расположенные внутри круга Пуанкаре.

Прямыми на плоскости Лобачевского являются диаметры круга Пуанкаре без его концов, а также дуги окружностей, расположенные внутри круга Пуанкаре, перпендикулярные его окружности (рис. 16). Будем называть их *прямыми Лобачевского*.

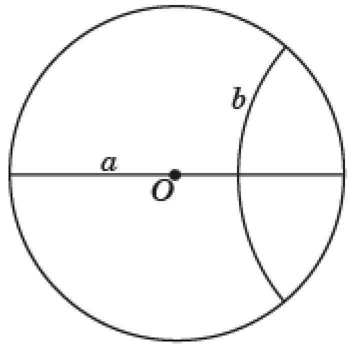


Рис. 16

Определим понятие равенства фигур на плоскости Лобачевского. Для этого рассмотрим следующие преобразования круга Пуанкаре с центром *O*.

1. Поворот вокруг точки *O*.

2. Осевая симметрия относительно прямой *c*, проходящей через точку *O*.

3. Инверсия относительно окружности *c*, перпендикулярной окружности Пуанкаре. Будет её также называть осевой симметрией относительно прямой Лобачевского.

Заметим, что из условия перпендикулярности прямой Лобачевского *c* и окружности Пуанкаре (рис. 17) следует, что при инверсии относительно *c* точки *A*, расположенные на окружности Пуанкаре, переходят в точки *A'*, расположенные на окружности Пуанкаре, а точки *A*, расположенные внутри круга Пуанкаре, переходят в точки *A'*, расположенные внутри этого круга.

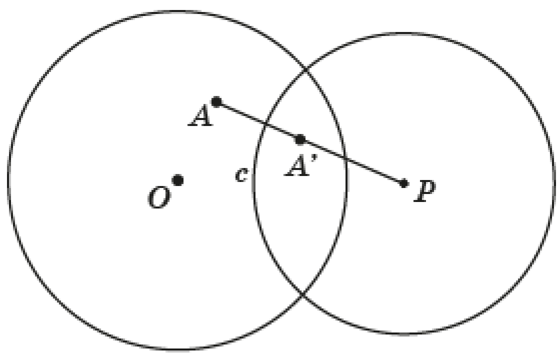


Рис. 17

Таким образом, осевая симметрия относительно прямой Лобачевского является преобразованием плоскости Лобачевского на себя.

Отметим, что все эти преобразования можно реализовать в компьютерной программе GeoGebra.

Фигуры *F* и *F'*, расположенные на плоскости Лобачевского, будем называть равными, если они получаются друг из друга с помощью указанных выше преобразований или их композиций.

Упражнения

10. Постройте прямую Лобачевского, проходящую через точки *A*, *B* плоскости Лобачевского.

Если точки *A* и *B* расположены на одной прямой с центром *O*, то искомой прямой является диаметр, проходящий через эти точки (рис. 18, а). Если точки *A* и *B* не принадлежат диаметру, то построим инверсию *A'* точки *A*. Через точки *A*, *B*, *A'* проведём окружность. Она будет перпендикулярна окружности Пуанкаре, а дуга *CD* построенной окружности, расположенная внутри круга Пуанкаре, будет искомой прямой Лобачевского, проходящей через точки *A* и *B* (рис. 18, б).

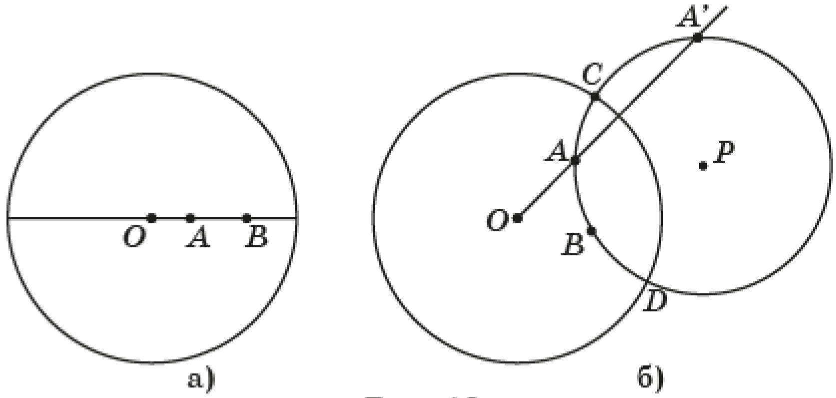


Рис. 18

11. Докажите, что окружностями на плоскости Лобачевского являются обычные окружности.

Доказательство. Ясно, что окружность на плоскости Лобачевского с центром в точке *O* является обычная окружность. Любая другая окружность получается из такой окружности с помощью осевой симметрии (рис. 19).

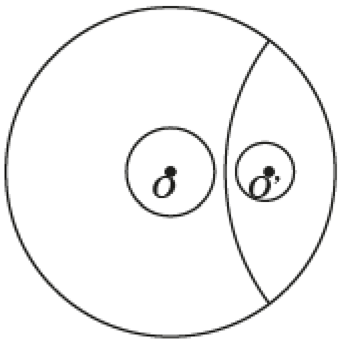


Рис. 19

Учитывая, что инверсия переводит обычные окружности в обычные окружности, получаем, что окружностями на плоскости Лобачевского являются обычные окружности.

Отметим, что центр *O'* окружности на плоскости Лобачевского отличается от обычного центра этой окружности.

12. На плоскости Лобачевского постройте прямую Лобачевского, перпендикулярную данной прямой Лобачевского *AB*, проходящую через данную точку *C*, не принадлежащую данной прямой (рис. 20).

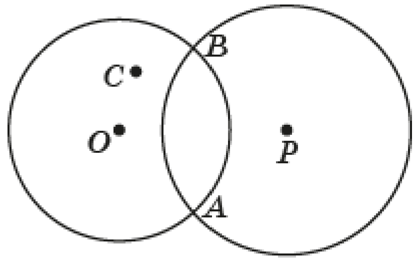


Рис. 20

Решение. Построим инверсию *C'* точки *C* относительно окружности с центром *O*. Проведём серединный перпендикуляр *c* к отрезку *CC'*. Центр *Q* искомой окружности принадлежит этому серединному перпендикуляру. Через точки *A* и *B* проведём прямую *d*. Так как точка *A* при инверсии относительно искомой окружности переходит в точку *B*, то центр *Q* должен принадлежать этой прямой. Следовательно, точка *Q* является точкой пересечения прямых *c* и *d*. Построим окружность с центром *Q*, проходящую через точку *C*. Её дуга *DE* будет искомой прямой Лобачевского (рис. 21).

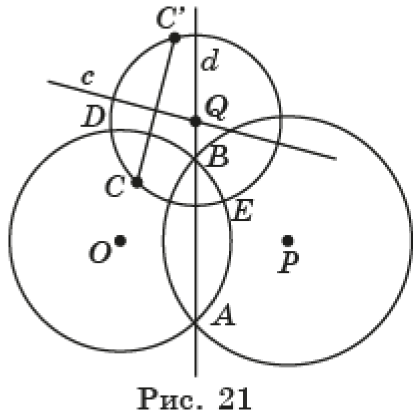


Рис. 21

13. На плоскости Лобачевского постройте серединный перпендикуляр к отрезку *CD* прямой Лобачевского *AB* (рис. 22).

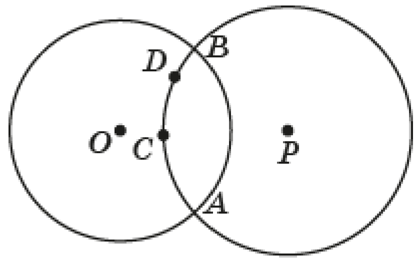


Рис. 22

Решение. Так как дуга окружности, соответствующая серединному перпендикуляру, должна быть перпендикулярна прямой Лобачевского AB, то её центр Q должен принадлежать прямой AB. Так как при инверсии относительно этой окружности точка C должна переходить в точку D, то центр Q должен принадлежать прямой CD (рис. 23).

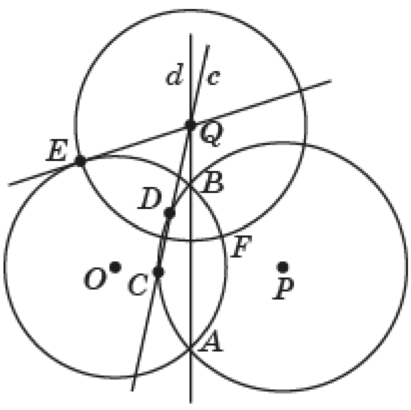


Рис. 23

Проведём прямые AB и CD. Обозначим Q их точку пересечения. Через точку Q проведём касательную к окружности Пуанкаре. Обозначим E точу касания. С центром в точке Q и радиусом QE проведём окружность. Её дуга EF будет искомым серединным перпендикуляром.

14. На плоскости Лобачевского постройте биссектрису c угла, образованного двумя прямыми Лобачевского A_1A_2 и B_1B_2, пересекающимися в точке C (рис. 24).

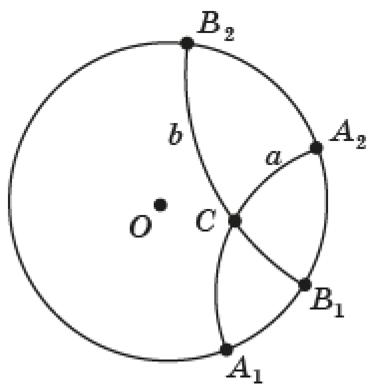


Рис. 24

Решение. Проведём прямую A_1B_1. Так как при инверсии относительно окружности, соответствующей искомой биссектрисе, точка A_1 переходит в точку B_1, то центр P этой окружности должен быть расположен на прямой A_1B_1. Проведём прямую A_2B_2. Центр P окружности, на которой лежит искомая биссектриса, должен быть расположен на этой прямой. Таким образом, точка P является точкой пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2. Проведём окружность с центром P и радиусом PC. Искомая биссектриса C_1C_2 будет дугой этой окружности (рис. 25).

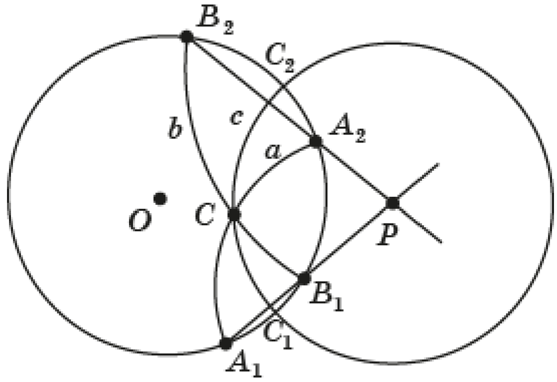


Рис. 25

15. В компьютерной программе GeoGebra на модели Пуанкаре плоскости Лобачевского постройте параболу, фокусом *F* которой является центр окружности Пуанкаре, а директрисой – прямая Лобачевского *AB* (рис. 26).

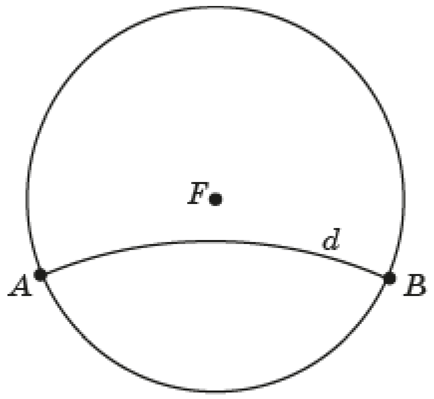


Рис. 26

Решение. На прямой Лобачевского *AB* выберем какую-нибудь точку *D*. Построим серединный перпендикуляр *a* к отрезку *FD*. Построим прямую Лобачевского *b*, проходящую через точку *D* и перпендикулярную прямой Лобачевского *AB*. Обозначим *C* точку пересечения построенных прямых *a* и *b*. Она будет равноудалена от точки *F* и прямой Лобачевского *AB*. Выберем в свойствах точки *C* строчку «Оставлять след». При перемещении точки *D* по прямой Лобачевского *AB* точка *C* будет оставлять след *c* в виде параболы (рис. 27).

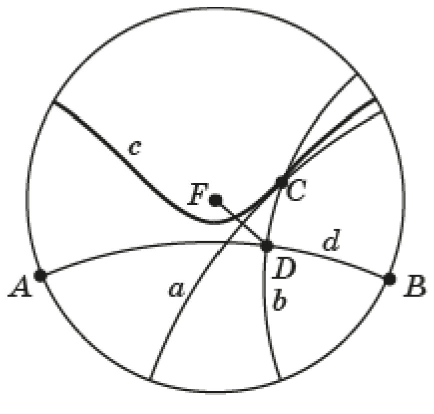


Рис. 27

16. На плоскости Лобачевского постройте правильный пятиугольник с центром в точке O, углы которого равны 90°.

Решение. Построим прямую Лобачевского, проходящую через точку A, соответствующую окружности с центром P. Повернём эту окружность вокруг точки O на угол 72°. Обозначим B точку пересечения исходной окружности и повёрнутой. Измерим угол, образованный этими окружностями. Перемещая точку A, найдём такое её положение, при котором этот угол равен 90°. Продолжая поворачивать построенную окружность вокруг точки O на углы 72°, получим окружности, ограничивающие правильный пятиугольник $ABCDE$, углы которого равны 90° (рис. 28).

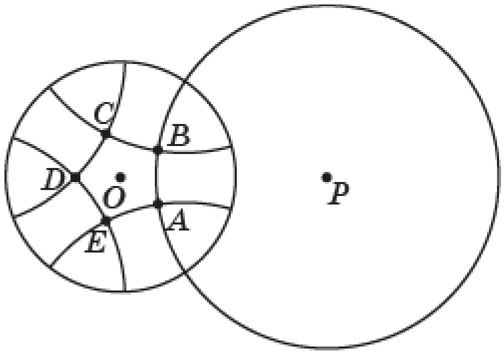


Рис. 28

Положение точки A можно найти точно. Для этого установим зависимость между углом α, на который поворачивается дуга a, углом φ между дугой a и дугой b, полученной поворотом дуги a на угол α, и расстоянием d между точками O и A. Обозначим B точку, полученную поворотом точки A на угол α. Обозначим C точку пересечения дуг a и b. Обозначим ψ – угол ACB. Заметим, что ψ = 180° – φ (рис. 29).

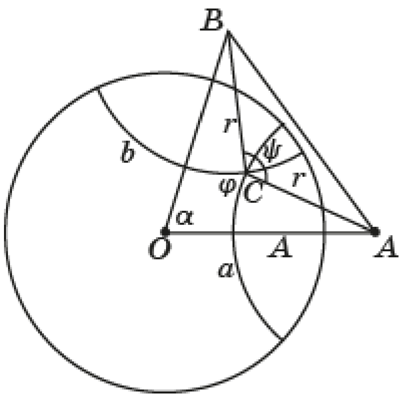


Рис. 29

По теореме косинусов, применённой к треугольнику OAB, имеем: $AB^2 = 2d^2 - 2d^2\cos\alpha$. По теореме косинусов, применённой к треугольнику ABC, имеем: $AB^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\psi$, где r – радиус окружности, порождающей дугу a, $r^2 = d^2 - 1$. Следовательно, имеем равенство

$$d^2(1 - \cos\alpha) = (d^2 - 1)(1 - \cos\psi),$$

из которого получаем формулу для квадрата расстояния d

$$d^2 = \frac{1 - \cos\psi}{\cos\alpha - \cos\psi} = \frac{1 + \cos\varphi}{\cos\alpha + \cos\varphi}.$$

Подставляя в эту формулу $\alpha = 72°$, $\varphi = 90°$, находим $d = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$.

Известно, что на обычной плоскости имеется только три паркета, состоящих из одноимённых правильных многоугольников:

- паркет из правильных треугольников, в каждой вершине которого сходится шесть правильных треугольников (рис. 30);

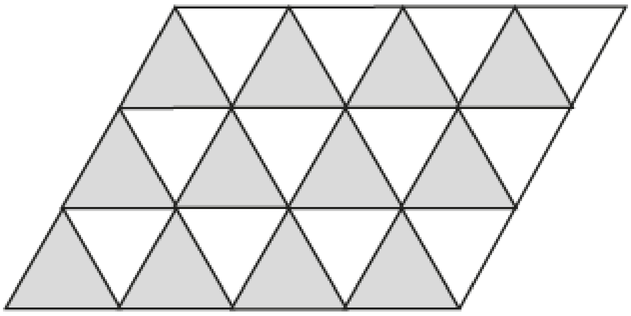


Рис. 30

- паркет из квадратов, в каждой вершине которого сходится четыре квадрата (рис. 31);

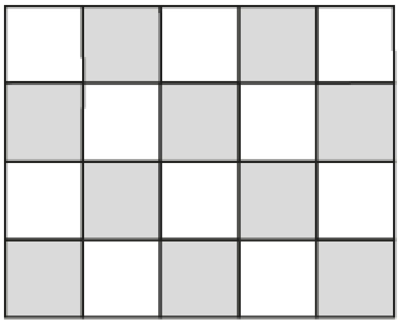


Рис. 31

- паркет из правильных шестиугольников, в каждой вершине которого сходится три правильных шестиугольника (рис. 32).

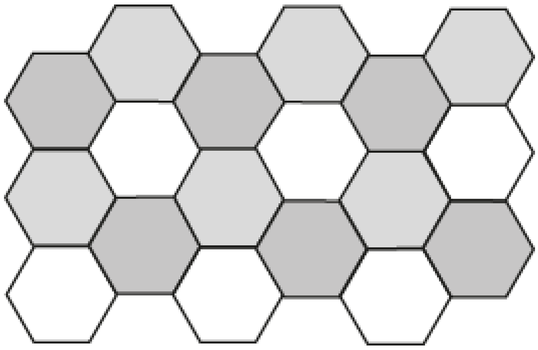


Рис. 32

В отличие от этого, на плоскости Лобачевского паркеты могут состоять из любых правильных n-угольников. При этом в каждой вершине таких паркетов может сходиться m n-угольников, где $m > \frac{n}{n-2}$. Это следует из того, что углы правильного n-угольника на плоскости Лобачевского должны быть меньше углов правильного n-угольника на обычной плоскости. Если в вершинах паркета сходится m n-угольников, то углы этих n-угольников равны $\frac{360°}{m}$. Значит, должно выполняться неравенство $\frac{360°}{m} < \frac{180°(n-2)}{n}$, из которого следует искомое неравенство $m > \frac{n}{n-2}$.

17. На плоскости Лобачевского постройте паркет, состоящий из правильных пятиугольников, в каждой вершине которого сходится четыре пятиугольника.

Ответ. На рисунке 33 показан фрагмент паркета на плоскости Лобачевского из правильных пятиугольников, углы которых равны 90°, полученный в компьютерной программе GeoGebra.

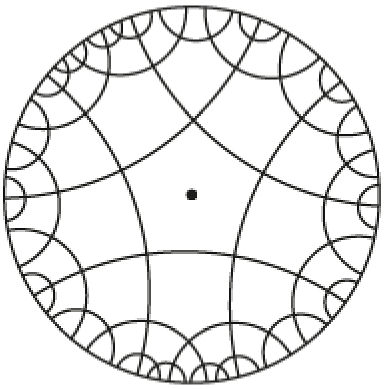


Рис. 33

18. На плоскости Лобачевского постройте паркет, состоящий из правильных треугольников, в каждой вершине которого сходится восемь треугольников.

Ответ. Фрагмент паркета показан на рисунке 34.

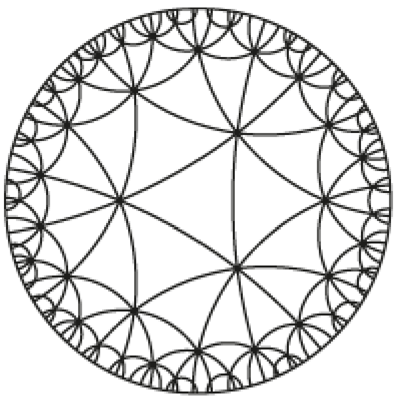


Рис. 34

19. На плоскости Лобачевского постройте паркет из правильных шестиугольников, в каждой вершине которого сходится четыре шестиугольника.

Ответ. Фрагмент паркета показан на рисунке 35.

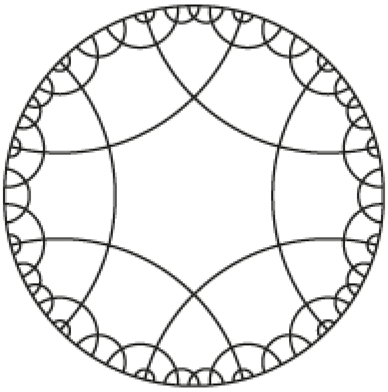


Рис. 35

Список источников

1. Бакельман И. Я. Инверсия. М.: Наука, 1966.
2. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского. Книга для учащихся. М.: Просвещение, 2001.
3. Прасолов В. В. Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2004.
4. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия. М: Прометей, 2018.
5. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Моя математика. Курс по выбору. Геометрия. 7–9 классы: учебное пособие. М.: Просвещение, 2025.