Математика в школе 2026. № 3. С. 39–42 Mathematics at school 2026. № 3. P. 39–42

О НЕКОТОРЫХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ ТРЕУГОЛЬНИКА

ABOUT SOME REMARKABLE LINES OF A TRIANGLE

Научная статья 5.8.2
УДК: 372.851
Scientific article 5.8.2
DOI: 10.47639/0130-9358_2026_3_39

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова,
Московский педагогический государственный университет, Москва,
v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov, I.M. Smirnova,
Moscow State Pedagogical University,
Moscow,
v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация: в работе рассматриваются несколько замечательных линий треугольника, с которыми можно познакомить учащихся классов с углублённым изучением математики

Abstract: the paper discusses several remarkable triangle lines that can be that can be introduced to students in advanced mathematics classes

Ключевые слова: треугольник, замечательные линии

Keywords: triangle, remarkable lines

В школьном курсе геометрии к замечательным линиям треугольника обычно относят биссектрисы, медианы и высоты.

Здесь мы рассмотрим несколько других замечательных линий треугольника, с которыми можно познакомить учащихся классов с углублённым изучением математики. Первые две из них являются классическими линиями треугольника. Изучение остальных линий можно предложить учащимся в качестве упражнений.

Одной из классических замечательных линий является прямая Симсона [1], названная в честь шотландского математика Роберта Симсона (1687–1768). Эта линия и её обобщения рассматривались в работе [3].

Линия 1. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Из произвольной точки S этой окружности опустим перпендикуляры SA_1, SB_1, SC_1 соответственно на прямые BC, AC, AB. Тогда основания A_1, B_1, C_1 этих перпендикуляров будут принадлежать одной прямой, которая называется *прямой Симсона* (рис. 1).

Ещё одной классической замечательной линией треугольника является прямая Эйлера [1].

Линия 2. Ортоцентр H треугольника ABC, точка M пересечения его медиан, центр O описанной около него окружности и центр N окружности Эйлера (окружности девяти точек) принадлежат одной прямой (рис. 2), которая называется *прямой Эйлера* (1707–1783).

Доказательство этого утверждения можно посмотреть в книге [1].

Рассмотрим ещё несколько замечательных линий. Для доказательств мы будем использовать теорему Менелая [1], доказанную древнегреческим математиком и

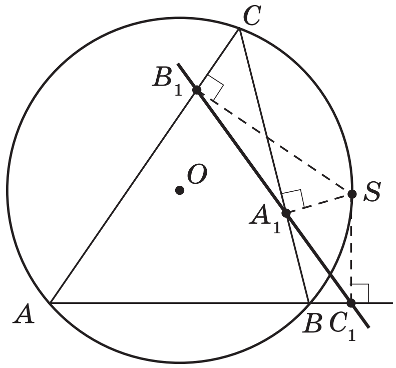


Рис. 1

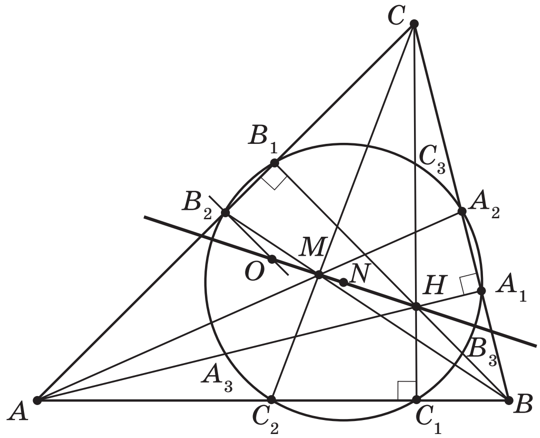
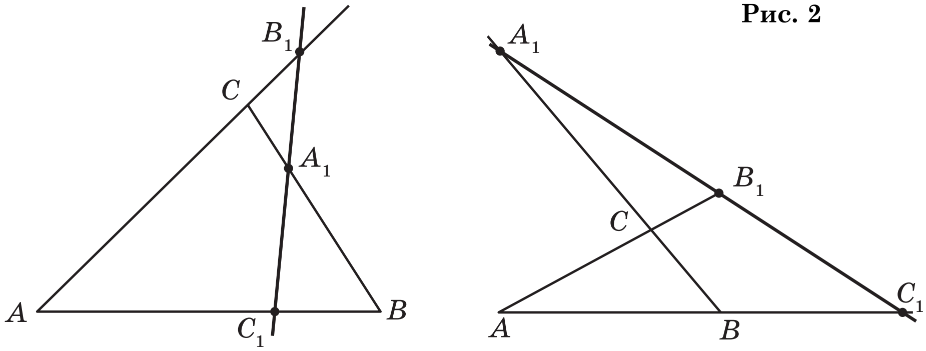


Рис. 2



а) б)

Рис. 3

астрономом Менелаем Александрийским, жившим в I веке до нашей эры.

Теорема. Пусть на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC или их продолжениях взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 (рис. 3). Точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой. Опустим из вершин треугольника ABC перпендикуляры AA', BB', CC' на эту прямую (рис. 4).

Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны и, следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AA'}{BB'}$. Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BB'}{CC'} \text{ и } \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CC'}{AA'}.$$

Перемножая эти три равенства, получаем требуемое равенство.

Докажем обратное. Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, для которых выполняется равенство (*). Предположим, что прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C_2. По доказанному выполняется равенство $\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$ Учитывая равенство (*), получаем равенство $\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Прибавим к его обеим частям единицу и приведём суммы к общему знаменателю. Получим равенство $\frac{AB}{C_2B}=\frac{AB}{C_1B}$,

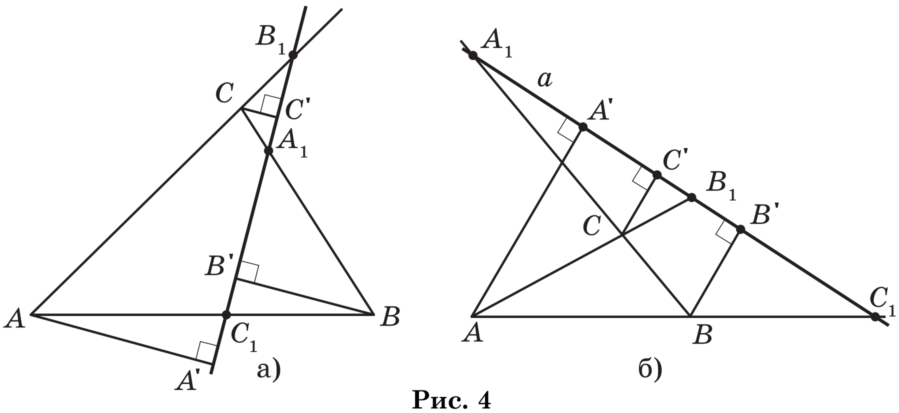


Рис. 4

из которого следует, что C_2 и C_1 совпадают. Следовательно, точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой.

Установление следующих замечательных линий можно предложить учащимся в качестве упражнений на применение этой теоремы.

Линия 3. Точки пересечения биссектрис внешних углов разностороннего треугольника с прямыми, содержащими соответствующие противолежащие стороны, принадлежат одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим разносторонний треугольник ABC. Пусть биссектрисы внешних углов этого треугольника пересекают прямые AB, AC и BC соответственно в точках C_1, B_1 и A_1 (рис. 5).

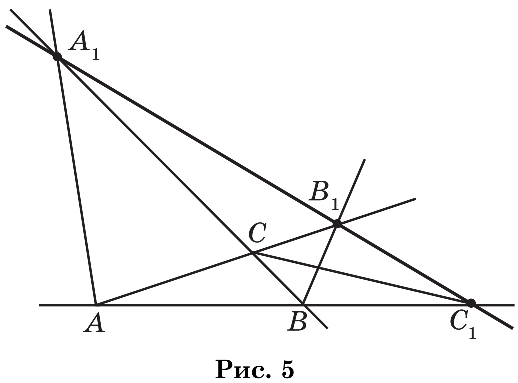


Рис. 5

Воспользуемся тем, что биссектриса внешнего угла разностороннего треугольника пересекает прямую, содержащую противолежащую сторону этого треугольника в точке, отношение расстояний от которой до концов этой стороны равно отношению прилежащих сторон треугольника (см., например, [2]).

Имеем

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{BC},\ \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC},\ \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC}{AB}.$$

Следовательно, выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Значит, точки C_1, B_1 и A_1 принадлежат одной прямой.

Линия 4. Точки пересечения биссектрис двух внутренних и одного внешнего углов треугольника с прямыми, содержащими соответствующие противолежащие стороны, принадлежат одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть биссектрисы внутренних углов A и B этого треугольника пересекают прямые BC, AC соответственно в точках A_1 и B_1, а биссектриса внешнего угла C пересекает прямую AB в точке C_1 (рис. 6).

Воспользуемся тем, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, а также тем, что аналогичное свойство верно и для биссектрисы внешнего угла треугольника. Имеем

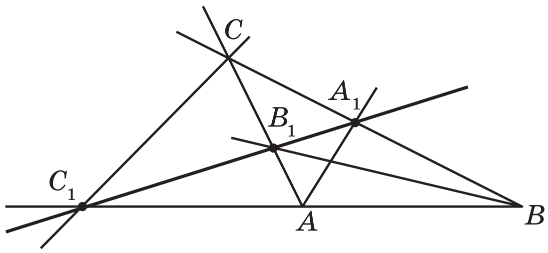


Рис. 6

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC},\ \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{AC}{AB},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC}{AC}.$$

Следовательно, выполняется равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Значит, точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной прямой.

Линия 5. Касательные к окружности, описанной около разностороннего треугольника, проведённые через его вершины, пересекают прямые, содержащие соответствующие противолежащие стороны этого треугольника, в точках, принадлежащих одной прямой. Она называется *прямой Паскаля* [2].

Доказательство. Рассмотрим разносторонний треугольник ABC и описанную около него окружность. Так как углы A и B различны, то серединный перпендикуляр c к отрезку AB не проходит через точку C. Следовательно, касательная к описанной окружности в точке C не параллельна прямой AB. Обозначим C_1 точку их пересечения. Аналогично обозначим A_1 и B_1 точки пересечения касательных к описанной окружности в точках A и B с прямыми BC и AC соответственно (рис. 7).

Углы BAC и B_1BC равны, так как измеряются половиной дуги BC окружности. Следовательно, треугольники ABB_1 и

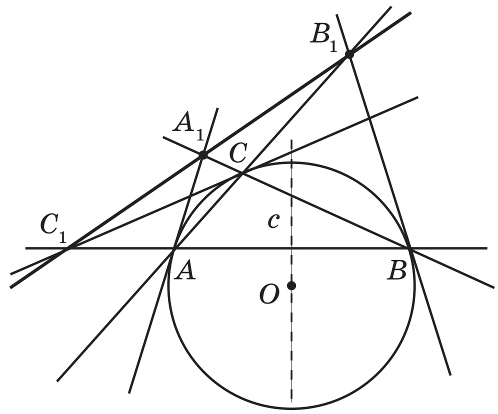


Рис. 7

BCB_1 подобны. Значит, $\frac{AB_1}{BB_1}=\frac{AB}{BC}=\frac{BB_1}{B_1C}$.

Следовательно, $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB^2}{BC^2}$. Аналогичным образом доказывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB^2}{AC^2},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC^2}{AC^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{AB^2}{BC^2}\cdot\frac{AC^2}{AB^2}\cdot\frac{BC^2}{AC^2}=1.$$

Значит, точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной прямой.

Список источников

1. *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника. Пособие для учителей. 2-е издание. – М.: Учпедгиз, 1962.

2. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия. В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004.

3. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Об одном обобщении прямой Симсона // Математика для школьников. 2025. № 2. С. 7–12.

Статья поступила в редакцию 06.03.2025.

Принята к публикации 15.01.2026.