ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA ДЛЯ ЗНАКОМСТВА УЧАЩИХСЯ С МОДЕЛЬЮ ПУАНКАРЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕСКОГО

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический
государственный университет (МПГУ)
v-a-smirnov@mail.ru, i-m-smirnova@yandex.ru

Одна из моделей геометрии Лобачевского [1, 2] была предложена французским математиком А. Пуанкаре (1854-1912).

В этой модели плоскостью Лобачевского является внутренность круга. Будем называть её ***плоскостью Лобачевского.*** Сам круг и окружность, его ограничивающую, будем называть соответственно ***кругом и окружностью Пуанкаре***.

Точками на плоскости Лобачевского являются точки, расположенные внутри круга Пуанкаре. Прямыми являются диаметры круга Пуанкаре без его концов, а также дуги окружностей, расположенные внутри круга Пуанкаре, перпендикулярные его окружности (рис. 1). Будем называть их ***прямыми Лобачевского***.

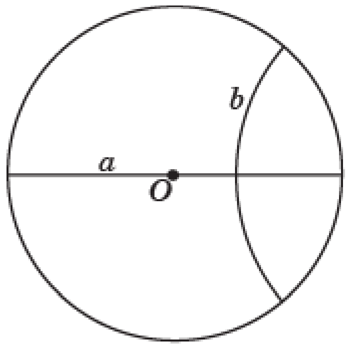

Рис. 1

В настоящей работе мы рассмотрим возможности использования компьютерной программы GeoGebra [3] для моделирования фигур на этой модели и проведения дополнительных построений.

Рабочее окно этой программы показано на рисунке 2.

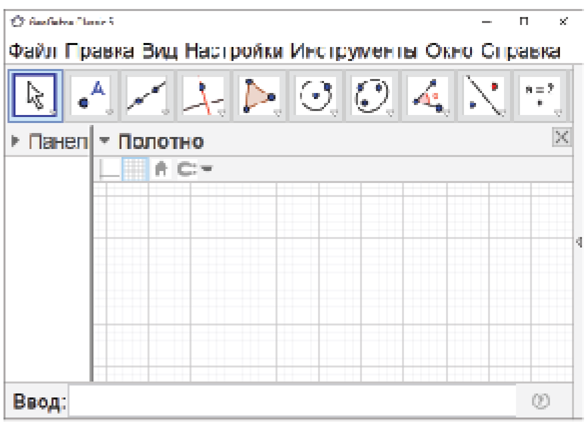

Рис. 2

В верхней его части расположены окошки с инструментами. Если нажать левой кнопкой мыши на одно из них, то откроются окошки с дополнительными инструментами.

Используя инструмент «Окружность по центру и радиусу», построим окружность с центром O и каким-нибудь радиусом. Она будет окружностью Пуанкаре, ограничивающей круг Пуанкаре.

Для построения прямой Лобачевского отметим какую-нибудь точку P вне круга Пуанкаре. Используя инструмент «Касательная», через точку P проведём касательные. Используя инструмент «Пересечение», найдём их точки касания A и B. С помощью инструмента «Дуга по центру и двум точкам» построим дугу окружности с центром в точке P и концами в точках A и B. Она и будет искомой прямой Лобачевского AB (рис. 3).

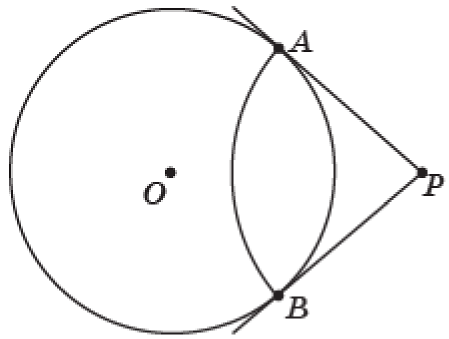

Рис. 3

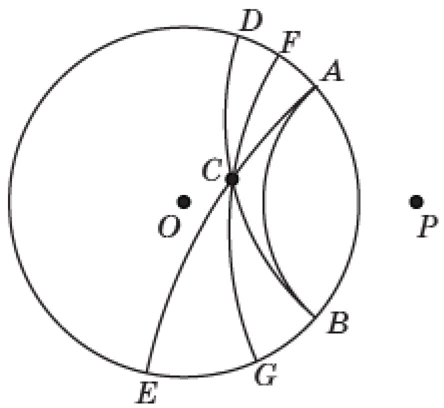

Рис. 4

Заметим, что на плоскости Лобачевского через точку C, не принадлежащую прямой AB, проходит много прямых, не пересекающихся с прямой AB. Это прямые AE, BD и все прямые FG, расположенные между ними (рис. 4).

Для проведения построений на этой модели нам понадобится преобразование инверсии и некоторые её свойства [4].

Напомним, что инверсия относительно окружности с центром O и радиусом R сопоставляет каждой точке A плоскости, отличной от точки O, точку A', принадлежащую лучу OA, для которой выполняется равенство $OA \cdot OA' = R^2$. На рисунке 5 показано построение инверсии A' точки A.

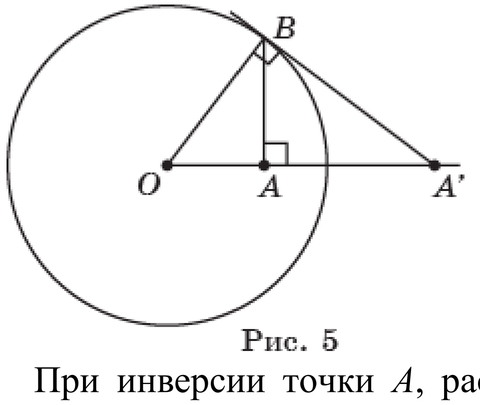

Рис. 5

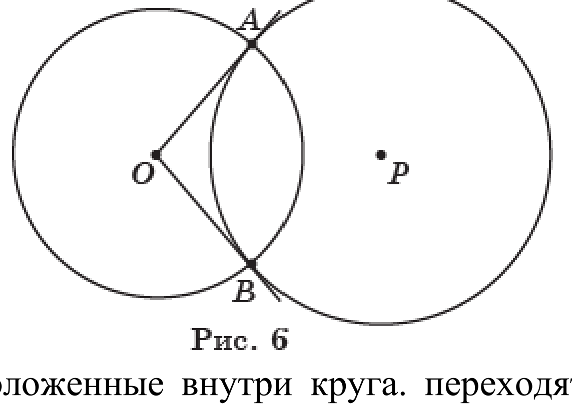

Рис. 6

При инверсии точки A, расположенные внутри круга. переходят в точки A', расположенные вне круга, и наоборот. Точки, принадлежащие окружности, остаются на месте.

Инверсию можно получить в компьютерной программе GeoGebra, в которой для этого имеется инструмент «Отражение относительно окружности».

Мы будем использовать следующие свойства инверсии, доказательства которых имеются в книге [4].

Свойство 1. Инверсия относительно данной окружности переводит прямую, не проходящую через её центр, в окружность, проходящую через центр, без самого этого центра, и наоборот.

Свойство 2. Инверсия относительно данной окружности переводит окружность, не проходящую через её центр, в окружность, не проходящую через центр.

Справедливость этих свойств можно проверить в компьютерной программе GeoGebra.

Рассмотрим некоторые дополнительные свойства инверсии.

Свойство 3. Окружность, перпендикулярная данной окружности, при инверсии переходит сама в себя.

Доказательство. Рассмотрим окружность с центром P, перпендикулярную окружности с центром O (рис. 6). Пусть A и B – точки пересечения этих окружностей. Тогда прямые OA и OB являются касательными к окружности с центром P. Так как эта окружность расположена между этими касательными, то и окружность, полученная её инверсией, также будет расположена между этими касательными. Так как окружность однозначно определяется двумя своими точками и касательными, проведёнными через эти точки, то при инверсии окружность с центром P будет переходить сама в себя.

Свойство 4. Окружность, проходящая через две точки, получающиеся друг из друга инверсией относительно данной окружности, перпендикулярна этой окружности.

Доказательство. Пусть точка A' получена инверсией точки A относительно окружности a с центром O, а окружность b с центром P проходит через эти точки. Обозначим B одну из точек пересечения окружностей a и b (рис. 7).

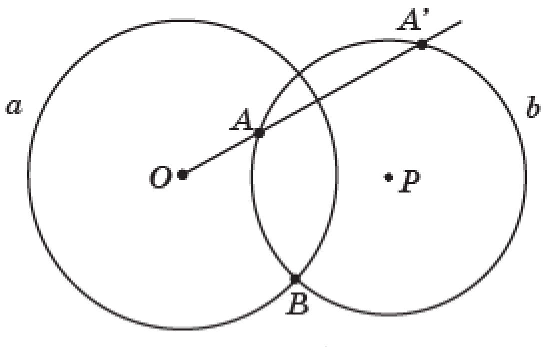

Рис. 7

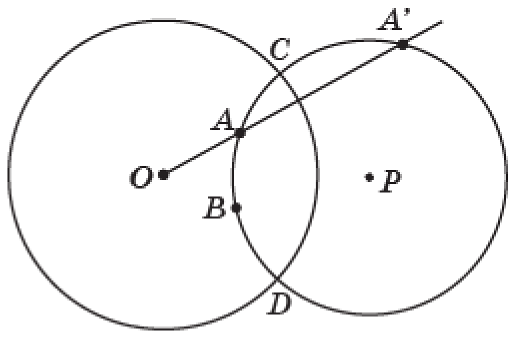

Рис. 8

Так как через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная окружность, то окружность b при инверсии относительно окружности a переходит сама в себя. Следовательно, она перпендикулярна окружности a.

Используя эти свойства, построим прямую Лобачевского, проходящую через точки A, B плоскости Лобачевского.

Если точки A и B расположены на одной прямой с центром O, то искомой прямой является диаметр, проходящий через эти точки. Если точки A и B не принадлежат диаметру (рис. 8), то построим инверсию A' точки A. Через точки A, B, A' проведём окружность. Она будет перпендикулярна окружности Пуанкаре, а дуга CD построенной окружности, расположенная внутри круга Пуанкаре, будет искомой прямой Лобачевского, проходящей через точки A и B.

Определим понятие равенства фигур на плоскости Лобачевского. Для этого рассмотрим следующие преобразования круга Пуанкаре с центром O.

1. Поворот вокруг точки O.

2. Осевая симметрия относительно прямой c, проходящей через точку O.

3. Инверсия относительно окружности c, перпендикулярной окружности Пуанкаре. Будет её также называть осевой симметрией относительно прямой Лобачевского.

Заметим, что из условия перпендикулярности окружности c и окружности Пуанкаре следует, что при инверсии относительно окружности c точки A, расположенные на окружности Пуанкаре, переходят в точки A', расположенные на окружности Пуанкаре, а точки A, расположенные внутри круга Пуанкаре, переходят в точки A', расположенные внутри этого круга (рис. 9).

Таким образом, осевая симметрия относительно прямой Лобачевского является преобразованием плоскости Лобачевского на себя.

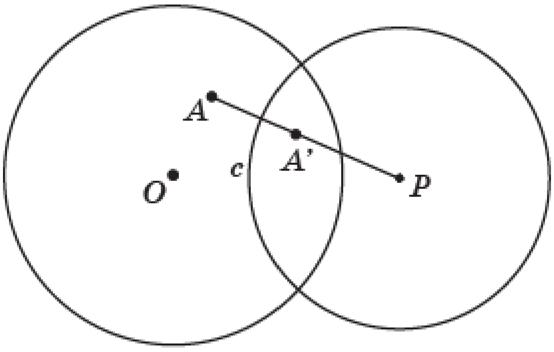

Рис. 9

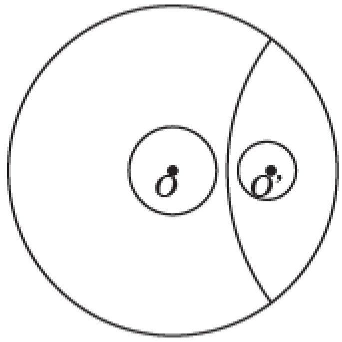

Рис. 10

Фигуры F и F', расположенные на плоскости Лобачевского, будем называть равными, если они получаются друг из друга с помощью указанных выше преобразований или их композиций.

Свойство 5. Окружностями на плоскости Лобачевского являются обычные окружности.

Доказательство. Ясно, что окружность на плоскости Лобачевского с центром в точке O является обычная окружность (рис. 10).

Любая другая окружность получается из такой окружности с помощью осевой симметрии. Учитывая, что инверсия переводит обычные окружности в обычные окружности, получаем, что окружностями на плоскости Лобачевского являются обычные окружности.

Отметим, что центр *O'* окружности на плоскости Лобачевского отличается от обычного центра этой окружности.

Приведём несколько задач на построение на плоскости Лобачевского.

Задача 1. На плоскости Лобачевского постройте прямую Лобачевского, перпендикулярную данной прямой Лобачевского *AB*, проходящую через данную точку *C*, не принадлежащую данной прямой (рис. 11).

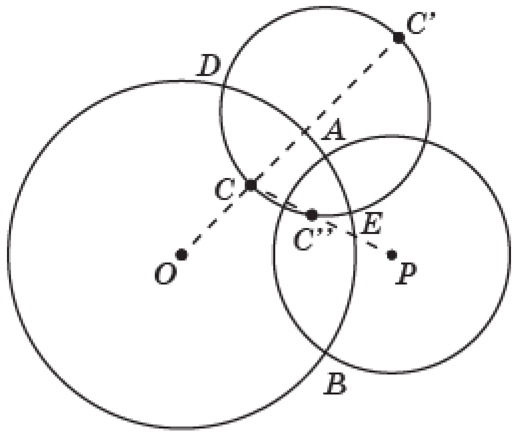

Рис. 11

Решение. Построим инверсию *C'* точки *C* относительно окружности с центром *O* и инверсию *C''* точки *C* относительно окружности с центром *P*. Через точки *C*, *C'* и *C''* проведём окружность. Её дуга *DE* будет искомой прямой Лобачевского.

Задача 2. На плоскости Лобачевского постройте серединный перпендикуляр к отрезку *CD* прямой Лобачевского *AB* (рис. 12),

Решение. Так как дуга окружности, соответствующая серединному перпендикуляру, должна быть перпендикулярна прямой Лобачевского *AB*, то её центр *Q* должен принадлежать прямой *AB*. Так как при инверсии относительно этой окружности точка *C* должна переходить в точку *D*, то центр *Q* должен принадлежать прямой *CD*.

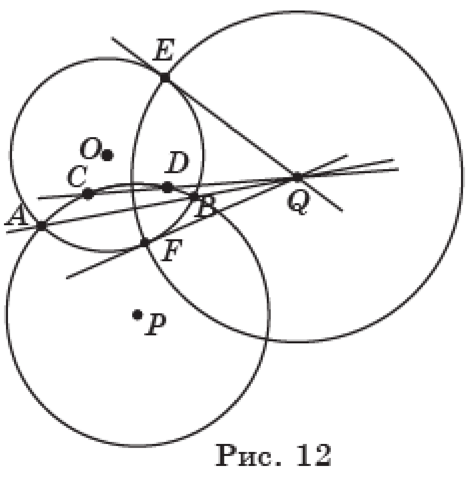

Рис. 12

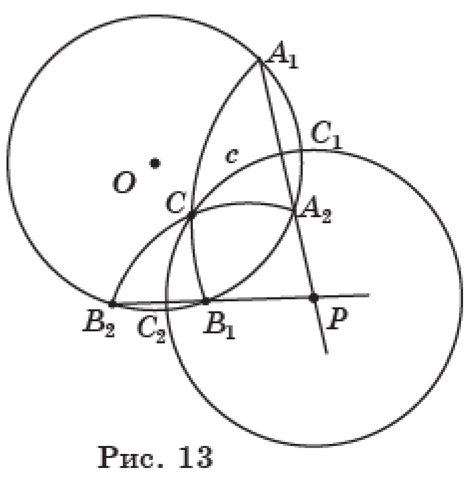

Рис. 13

Проведём прямые AB и CD. Обозначим Q их точку пересечения. Через точку Q проведём касательные к окружности Пуанкаре. Обозначим E, F точки касания. С центром в точке Q и радиусом QE проведём окружность. Её дуга EF будет искомым серединным перпендикуляром.

Задача 3. На плоскости Лобачевского постройте биссектрису c угла, образованного двумя прямыми Лобачевского A_1B_1 и A_2B_2, пересекающимися в точке C (рис. 13).

Решение. Проведём прямую A_1A_2. Так как при инверсии относительно окружности c, соответствующей искомой биссектрисе, точка A_1 переходит в точку A_2, то центр P этой окружности должен быть расположен на прямой A_1A_2. Проведём прямую B_1B_2. Центр P окружности, на которой лежит искомая биссектриса c, должен быть расположен на этой прямой. Таким образом, точка P является точкой пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2. Проведём окружность с центром P и радиусом PC. Искомая биссектриса C_1C_2 будет лежать на этой окружности.

Задача 4. На плоскости Лобачевского постройте правильный пятиугольник с центром в точке O, углы которого равны 90°.

Решение. Построим прямую Лобачевского, проходящую через точку A, соответствующую окружности с центром P. Повернём эту окружность вокруг точки O на угол 72°. Обозначим B точку пересечения исходной окружности и повёрнутой. Измерим угол, образованный этими окружностями. Перемещая точку A, найдём такое её положение, при котором этот угол равен 90°. Продолжая поворачивать построенную окружность вокруг точки O на углы 72°, получим окружности, ограничивающие правильный пятиугольник $ABCDE$, углы которого равны 90° (рис. 14).

На рисунке 15 показан фрагмент паркета на плоскости Лобачевского из равных правильных пятиугольников, углы которых равны 90°, полученный в компьютерной программе GeoGebra.

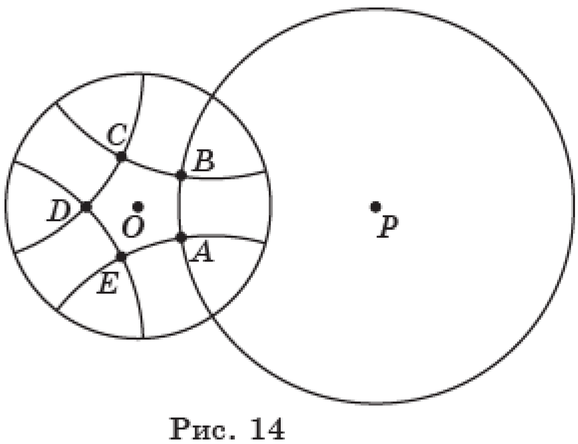

Рис. 14

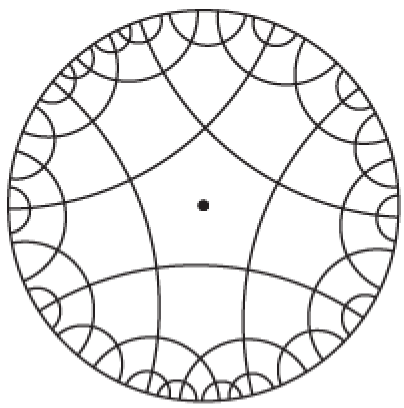
Рис. 15

В нём правильные многоугольники получаются осевыми симметриями центрального правильного пятиугольника и полученных правильных пятиугольников.

Заметим, что на евклидовой плоскости паркета из правильных пятиугольников не существует.

Учащимся можно предложить следующие упражнения.

1. Получите в компьютерной программе GeoGebra инверсию: а) точки; б) прямой; в) окружности.

2. На плоскости Лобачевского постройте прямую Лобачевского, проходящую через две точки, принадлежащие окружности Пуанкаре.

3. На плоскости Лобачевского постройте прямую Лобачевского, проходящую через точку внутри круга Пуанкаре и точку на его границе.

4. На плоскости Лобачевского постройте прямую Лобачевского, перпендикулярную данной прямой Лобачевского и проходящую через точку, принадлежащую этой прямой.

5. На плоскости Лобачевского постройте отрезок. Найдите его середину.

6. На плоскости Лобачевского постройте окружность. Найдите её центр.

7. На плоскости Лобачевского постройте треугольник, около которого можно описать окружность. Постройте эту окружность и её центр.

8. На плоскости Лобачевского постройте треугольник, для которого не существует описанной окружности.

9. На плоскости Лобачевского постройте правильный треугольник, углы которого равны 45°.

10. На плоскости Лобачевского постройте паркет из правильных треугольников, в каждой вершине которого сходится восемь правильных треугольников.

Литература

1. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского. Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 2001.
2. Прасолов В. В. Геометрия Лобачевского. – М.: МЦНМО, 2004.
3. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. – М.: Прометей, 2018.
4. Бакельман И. Я. Инверсия. – М.: Наука, 1966.