В.А. Смирнов,
И.М. Смирнова,
Московский педагогический
государственный университет (МПГУ);
v-a-smirnov@mail.ru, i-m-smirnova@yandex.ru

О ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НА ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ КОСИНУСОВ И СИНУСОВ

В работе предлагаются задачи на применение теорем косинусов и синусов, которые можно использовать при изучении геометрии в 9-м классе.

В настоящей статье мы рассмотрим примеры задач, которые можно использовать при изучении учащимися темы «Решение практических задач на применение теоремы косинусов и теоремы синусов».

Задача 1. Расстояние d между двумя пунктами A и B на берегу моря равно 1 км. Из пункта A корабль C виден под углом $\varphi = 80°$ к берегу, а из пункта B этот корабль виден под углом $\psi = 70^{\circ}$ к берегу. Найдите расстояние от пункта A до корабля C (рис. 1).

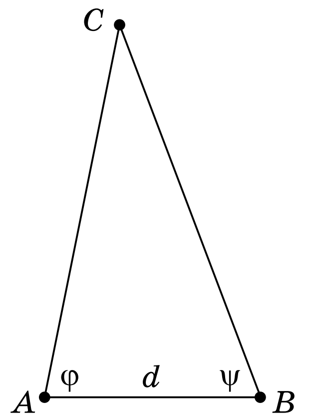

Рис. 1

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой синусов, применённой к треугольнику ABC. Получим: $\dfrac{AC}{\sin\psi} = \dfrac{AB}{\sin(\varphi+\psi)}$. Следовательно, $AC = \dfrac{d \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$. В нашем случае $d = 1$, $\sin\psi \approx 0{,}94$, $\sin(\varphi + \psi) = 0{,}5$. Значит, $AC \approx 1{,}88$ км.

Задача 2. Расстояния от пункта C до точек A и B на противоположных берегах озера равны соответственно $a = 500$ м, $b = 600$ м. Угол ACB равен $\varphi = 60^{\circ}$. Найдите ширину AB озера (рис. 2).

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой косинусов, применённой к треугольнику ABC. Получим: $AB^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\varphi$. В нашем случае $a = 500$ м, $b = 600$ м, $\varphi = 60^{\circ}$. Следовательно, $AB \approx 557$ м.

Задача 3. Населённые пункты A и B расположены вне прямой видимости. Из точки C они видны под углом $\gamma = 120°$, а расстояния до них равны соответственно $b = 1$ км, $a = 2$ км (рис. 3). Под каким углом к прямой AC нужно строить прямолинейную дорогу из пункта A в пункт B?

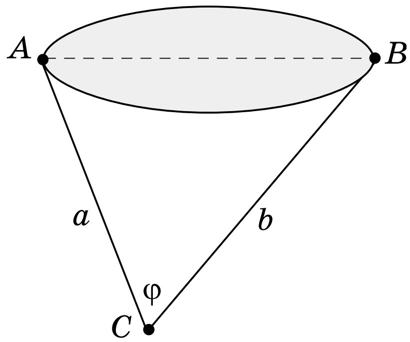

Рис. 2

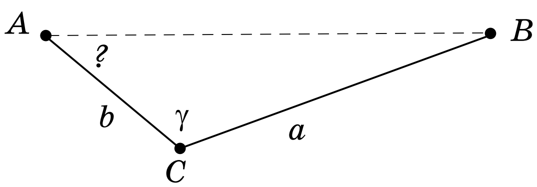

Рис. 3

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой косинусов, применённой к треугольнику ABC. Получим: $AB^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$. Для нахождения угла BAC воспользуемся теоремой синусов. Будем иметь: $\sin\angle BAC = \dfrac{a \cdot \sin\gamma}{AB}$. В нашем случае $AB = \sqrt{7}$ км, $\sin\angle BAC = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \approx 0{,}65$, $\angle BAC \approx 40{,}9°$.

Задача 4. Из пункта A вершина C горы видна под углом $\varphi = 45^{\circ}$. Из пункта B, расположенного ближе к горе на расстояние $d = 500$ м, вершина C горы видна под углом $\psi = 55^{\circ}$. Найдите высоту $h = CD$ горы (рис. 4).

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой синусов, применённой к треугольнику ABC. Получим: $\dfrac{AC}{\sin\psi} = \dfrac{AB}{\sin(\psi - \varphi)}$. Следо-

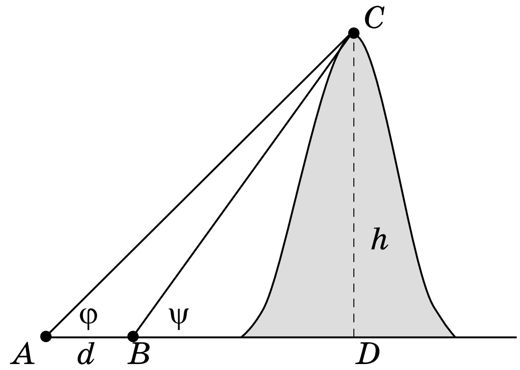

Рис. 4

вательно, $AC = \dfrac{AB \cdot \sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)}$. Значит, $h = \dfrac{AB \sin\varphi \cdot \sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)}$. В нашем случае $\varphi = 45^{\circ}$, $\psi = 55^{\circ}$, $AB = 500$ м. Следовательно, $h \approx 1670$ м.

Задача 5. Маяк AB расположен на горе. Высота d маяка равна 70 м. Камень C у основания горы виден из верхней точки A маяка под углом $\varphi = 30^{\circ}$, а из точки B у основания маяка камень C виден под углом $\psi = 32^{\circ}$. Найдите высоту h горы (рис. 5).

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой синусов, применённой к треугольнику

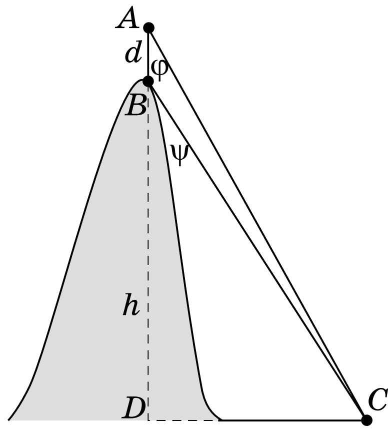

Рис. 5

ABC. Получим: $AC = \dfrac{d \cdot \sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)}$. Следовательно, $h = \dfrac{d \cdot \sin\psi \cdot \cos\varphi}{\sin(\psi - \varphi)} - d$. В нашем случае $h \approx 850$ м.

Задача 6. Расстояние d между портами A_1, A_2 на берегу моря равно $d = 10$ км. Из порта A_1 отплыл корабль в направлении, составляющем угол $\alpha_1 = 60°$ с направлением A_1A_2, со скоростью $v_1 = 15$ км/ч. Найдите угол α_2 к направлению A_2A_1, под которым должен идти второй корабль из порта A_2 со скоростью $v_2 = 20$ км/ч, чтобы, не меняя курса, встретиться с первым кораблём (рис. 10).

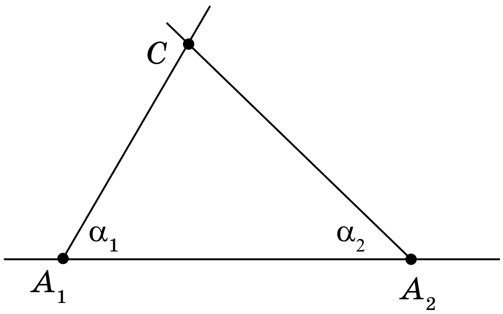

Рис. 6

Р е ш е н и е. За время t ч первый корабль пройдёт v_1t км. Для того чтобы второй корабль встретился с первым, нужно, чтобы $A_2C = v_2t$. Воспользуемся теоремой синусов, применённой к треугольнику A_1A_2C. Получим равенство $\dfrac{v_1t}{\sin\alpha_2} = \dfrac{v_2t}{\sin\alpha_1}$, из которого следует, что $\sin\alpha_2 = \dfrac{v_1 \cdot \sin\alpha_1}{v_2}$.

В нашем случае $\sin\alpha_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}65$, откуда находим $\alpha_2 \approx 40{,}5°$.

Задача 7. Используя рисунок 7, укажите способ нахождения угла, под которым видна башня CD из недоступного пункта B, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle CAD = \varphi$, $\angle CBD = \psi$.

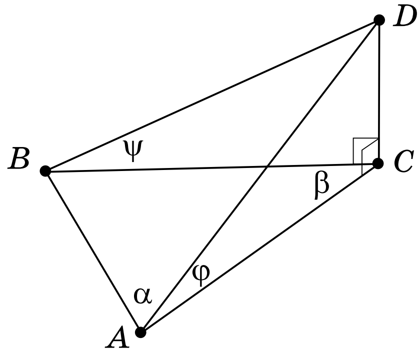

Рис. 7

Р е ш е н и е. В прямоугольном треугольнике ACD найдём $CD = AC \cdot \operatorname{tg}\varphi$. По теореме синусов, применённой к треугольнику ABC, имеем: $BC = \dfrac{AC \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{CD}{BC} = \frac{\operatorname{tg}\varphi \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)},$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\varphi \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}.$$

Задача 8. Используя рисунок 8, укажите способ нахождения угла, под которым виден участок дороги BD из недоступного пункта C.

Р е ш е н и е. Находим:

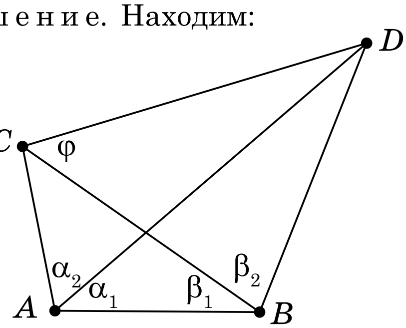

Рис. 8

$$BD = \frac{AB \cdot \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2)},$$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)}.$$

К треугольнику BCD применим теорему косинусов:

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cdot \cos\beta_2.$$

Теперь, зная длины всех сторон треугольника BCD, искомый угол можно отыскать с помощью теоремы синусов или теоремы косинусов.

Задача 9. Используя рисунок 9, укажите способ нахождения расстояния d_1 между двумя недоступными объектами A_1 и B_1.

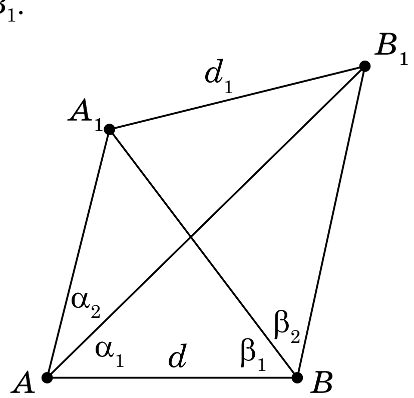

Рис. 9

Р е ш е н и е. Отыскав

$$AA_1 = \frac{AB \cdot \sin\beta_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)} \text{ и}$$

$$AB_1 = \frac{AB \cdot \sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2)},$$

найдём

$$d_1^2 = AA_1^2 + AB_1^2 - 2AA_1 \cdot AB_1 \cdot \cos\alpha_2.$$

Обратим внимание, что, зная расстояние AB и углы α_1, α_2, β_1, β_2, можно найти все остальные расстояния и углы, образованные отрезками, указанными на рисунке 9.

Заметим: для нахождения расстояния до удалённого объекта, находящегося вне прямой видимости, выбирают промежуточные объекты и измеряют соответствующие углы (рис. 9).

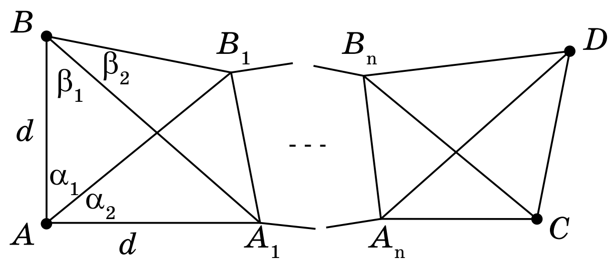

Рис. 10

Такой метод нахождения расстояний был придуман голландским математиком, физиком и астрономом Снеллиусом в начале XVII века. Для нахождения расстояния между значительно удалёнными друг от друга пунктами Снеллиус строил сеть треугольников, которую он называл триангуляцией, от французского слова «triangle», что значит «треугольник». Сеть строилась таким образом, чтобы из каждой вершины треугольника были видны соседние с ней вершины. Измерив один раз расстояние между начальными пунктами A, B и углы, образованные сторонами треугольников, с помощью тригонометрических формул можно найти расстояние между удалёнными пунктами A и D. Именно этот метод использовался в конце XVIII века для измерения Земли и введения единой меры длины, в качестве которой была принята одна десятимиллионная часть дуги парижского меридиана от Северного полюса до экватора. Она была названа метром, от греческого слова «метрос», что значит «мера». Об истории измерения Земли можно прочитать в замечательной книге [1].

Рассмотрим теперь в общем виде задачу нахождения расстояния между пунктами на поверхности Земли.

Будем считать поверхность Земли сферой. Напомним, что сферическим треугольником называется фигура, образованная тремя точками сферы и тремя дугами больших окружностей, попарно соединяющих эти точки. Точки называются вершинами, а дуги — сторонами сферического треугольника. Стороны сферического треугольника на единичной сфере измеряются центральными углами больших окружностей, а углы — углами между касательными к сторонам, проведёнными через вершины.

Воспользуемся следующим аналогом теоремы косинусов для сферических треугольников.

Теорема. Для сферического треугольника ABC (рис. 11), стороны BC, AC, AB которого соответственно равны a, b, c, а углы A, B, C равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma.$$

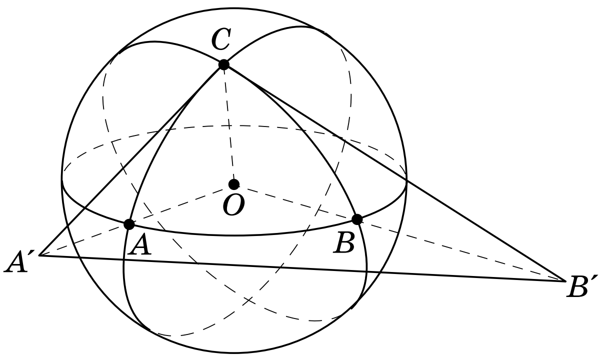

Рис. 11

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу с центром O и сферический треугольник ABC, стороны BC, AC, AB которого соответственно равны a, b, c. Предположим, что $a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$. Через вершину C проведём касательные к большим окружностям, содержащим стороны AC и BC сферического треугольника ABC.

Обозначим A', B' точки пересечения этих касательных с прямыми OA и OB соответственно. В треугольнике $OA'C$ имеем: $OC = 1$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle O = b$, $A'C = \operatorname{tg} b$, $OA' = \frac{1}{\cos b.}$ В треугольнике $OB'C$ имеем: $OC = 1$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle O = a$, $B'C = \operatorname{tg} a$, $OB' = \frac{1}{\cos\alpha}$. В треугольнике $A'B'C$ угол $A'CB'$ равен углу ACB сферического треугольника ABC.

Применим теорему косинусов к треугольнику $A'B'C$. Получим равенство

$$(A'B')^2 = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \cos\gamma.$$

В треугольнике $A'B'O$ угол $A'OB$ равен c. Применим к этому треугольнику теорему косинусов. Получим равенство

$$(A'B')^2 = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{1}{\cos a}\cdot\frac{1}{\cos b}\cdot\cos c.$$

Приравнивая правые части полученных равенств для $(A'B')^2$ и используя равенство $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + tg^2 a$, получим искомое равенство

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma.$$

В частности, имеем следующий аналог теоремы Пифагора для прямоугольного сферического треугольника:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Аналогичным образом можно доказать,

что указанное равенство выполняется и для других значений a и b.

Применим сферическую теорему косинусов для нахождения кратчайшего расстояния между двумя точками на единичной сфере с заданными сферическими координатами на единичной сфере (рис. 12).

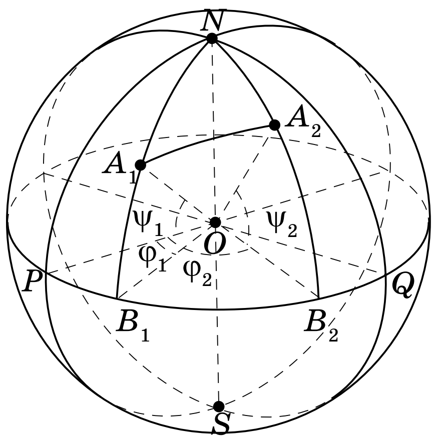

Рис. 12

Отметим, что для точек на единичной сфере первая сферическая координата равна 1, а вторая и третья аналогичны соответственно географической долготе и географической широте точек на поверхности Земли. Поэтому при указании сферических координат точек на единичной сфере будем писать только их вторую и третью координату.

Пусть $A_1(\varphi_1;\ \psi_1)$, $A_2(\varphi_2;\ \psi_2)$, PQ — экватор, N — полюс. Применяя теорему косинусов к сферическому треугольнику NA_1A_2, получим:

$$\cos A_1A_2 = \sin \psi_1 \cdot \sin \psi_2 + \\ + \cos \psi_1 \cdot \cos \psi_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

В качестве примера найдём расстояние от Москвы M (38°; 56°) до Владивостока V (132°; 43°). Учитывая, что длины больших окружностей на поверхности Земли равны 40000 км, получим, что расстояние от Москвы до Владивостока приближённо равно 6400 км.

Заметим, что с помощью компьютерной программы GeoGebra [2] это приближённое расстояние можно найти значительно проще.

Итак, теоремы синусов и косинусов — эффективные инструменты геометрии. В своей работе мы показали, что не только для решения треугольников, но и для вычислений на местности данные теоремы могут успешно применяться. А их новые возможности демонстрирует осмысление аналога теоремы косинусов для сферического треугольника.

Список источников

1. *Арманд Д. Л.* Как измерили Землю. М.; Л.: Издательство детской литературы, 1941. 196 с.

2. Динамическая геометрическая среда GeoGebra. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения: 31.05.2025).