

# О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРАВИЛЬНЫХ ЗВЁЗДЧАТЫХ МНОГОГРАННИКОВ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЕ GEOGEBRA

**В. А. Смирнов, И. М. Смирнова**

Московский педагогический государственный университет (МПГУ)

e-mail: [v-a-smirnov@mail.ru](mailto:v-a-smirnov@mail.ru)

[i-m-smirnova@yandex.ru](mailto:i-m-smirnova@yandex.ru)

**Аннотация:** в работе рассматриваются правильные звёздчатые многогранники (тела Кеплера-Пуансо); показываются способы их моделирования в компьютерной программе GeoGebra; предлагаются упражнения для самостоятельного решения.

**Ключевые слова:** правильные звёздчатые многогранники, моделирование.

## ON MODELING REGULAR STAR POLYHEDRA IN THE GEOGEBRA COMPUTER PROGRAM

**V. A. Smirnov, I. M. Smirnova**

Moscow State Pedagogical University (MSPU)

e-mail: [v-a-smirnov@mail.ru](mailto:v-a-smirnov@mail.ru),

[i-m-smirnova@yandex.ru](mailto:i-m-smirnova@yandex.ru)

**Abstract:** the paper considers regular star polyhedral (Kepler-Poinsot polyhedra); it demonstrates methods for their modeling in the GeoGebra computer program; and it offers exercises for independent solution.

**Keywords:** regular star polyhedra, modeling.

В работе [1] рассматривались методы моделирования полуправильных многогранников в компьютерной программе GeoGebra [2]. Созданные модели многогранников в этой программе можно поворачивать в разные стороны, что позволяет сформировать пространственные представления учащихся о таких многогранниках.

Здесь мы рассмотрим правильные звёздчатые многогранники [3] (тела Кеплера-Пуансо) и их моделирование в компьютерной программе GeoGebra.

Предлагаемый материал может быть использован при проведении учебного курса внеурочной деятельности, а также для организации проектной деятельности учащихся.

Понятие звёздчатого многогранника можно считать пространственным аналогом звёздчатого многоугольника.

Звёздчатым многоугольником будем называть замкнутую ломаную, у которой некоторые не соседние стороны пересекаются в точках, являющихся внутренними для этих сторон.

Звёздчатый многоугольник разбивает плоскость на несколько частей. Неограниченную часть будем называть внешней областью, а соседние с ней части – внутренними областями.

Плоским звёздчатым многоугольником будем называть звёздчатый многоугольник вместе с его внутренними областями.

Правильным звёздчатым многоугольником будем называть звёздчатый многоугольник, у которого равны все стороны и равны все углы, образованные соседними сторонами.

На рисунке 1 показан правильный плоский звёздчатый пятиугольник  $ABCDE$ .

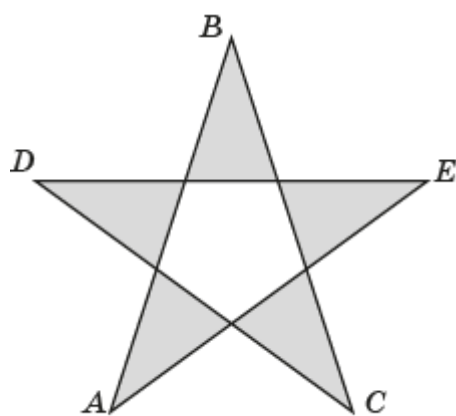


Рис. 1

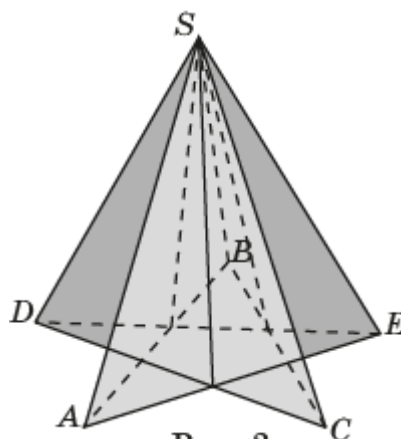


Рис. 2

По аналогии с определением звёздчатого многоугольника определим понятие звёздчатого многогранного угла.

Звёздчатым многогранным углом будем называть поверхность, образованную конечным набором плоских углов с общей вершиной, в которых соседние углы не имеют общих точек, кроме точек общего луча, а некоторые не соседние углы пересекаются по лучам, являющихся внутренними для этих углов.

Правильным звёздчатым многогранным углом будем называть звёздчатый многогранный угол, у которого равны все плоские углы и равны все двугранные углы.

На рисунке 2 показан правильный звёздчатый пятигранный угол  $SABCDE$ .

Общее определение звёздчатого многогранника получается, если в определении многогранника [4, с. 384] допустить, что гранями многогранника могут быть звёздчатые многоугольники, а многогранными углами – звёздчатые многогранные углы.

Имеется два типа правильных звёздчатых многогранников. В первом, открытом И. Кеплером, гранями являются равные правильные звёздчатые многоугольники, а многогранные углы являются равными и правильными.

Существует всего два таких многогранника. Один из них – малый звёздчатый додекаэдр (рис. 3). Его гранями являются правильные звёздчатые пятиугольники, а каждая вершина является вершиной правильного пятигранного угла.

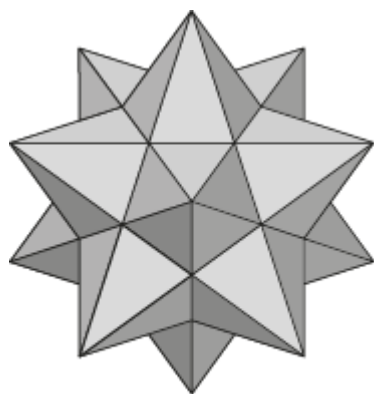


Рис. 3

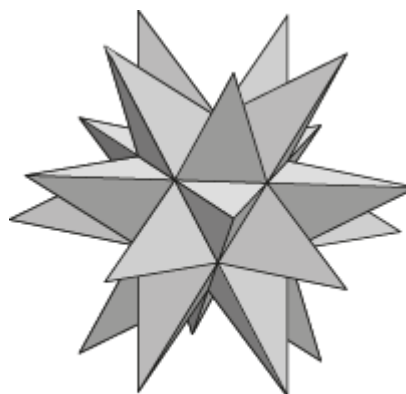


Рис. 4

Другой – большой звёздчатый додекаэдр (рис. 4). Его гранями также являются правильные звёздчатые пятиугольники, а каждая вершина является вершиной правильного трёхгранного угла.

Во втором типе правильных звёздчатых многогранников, открытом Л. Пуансо, гранями являются равные правильные многоугольники, а многогранными углами – равные правильные звёздчатые многогранные углы. Таких многогранников тоже два.

Один из них – большой додекаэдр (рис. 5). Его гранями являются правильные пятиугольники, а каждая вершина является вершиной правильного звёздчатого пятигранного угла.

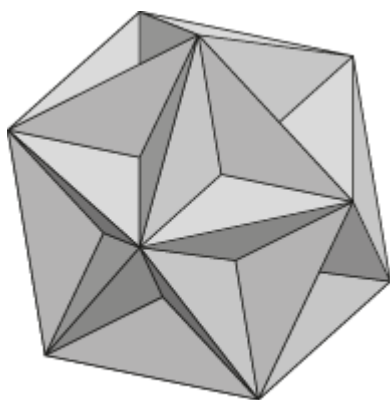


Рис. 5

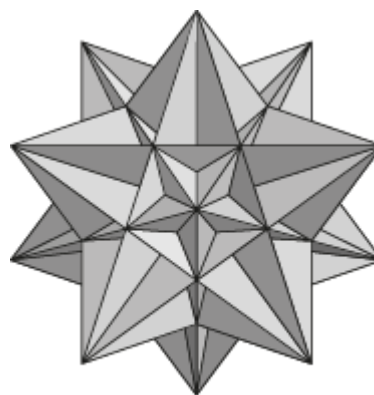


Рис. 6

Другой – большой икосаэдр (рис. 6). Его гранями являются правильные треугольники, а каждая вершина является вершиной правильного пятигранного угла.

Для моделирования малого звёздчатого додекаэдра в компьютерной программе GeoGebra построим додекаэдр (рис. 7). Для этого отметим какие-нибудь две точки  $A$ ,  $B$  и в строке «Ввод» напишем: Додекаэдр( $A$ , $B$ ). На экране появится додекаэдр, двумя вершинами которого будут отмеченные точки. Используя инструмент «Прямая», проведём прямые  $AF$  и  $BG$ , содержащие стороны одной из его грани. Используя инструмент «Пересечение», найдём точку  $S$  их пересечения. Используя инструмент «Пирамида», построим пирамиду, основанием которой является грань

$ABCDE$ , а вершиной – точка  $S$ . Сделаем то же самое для остальных граней додекаэдра. Получим малый звёздчатый додекаэдр.

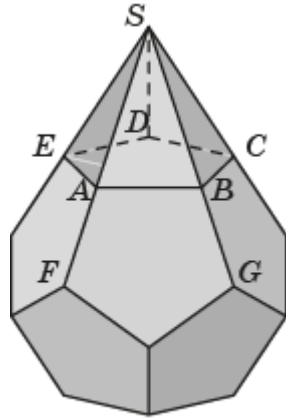


Рис. 7

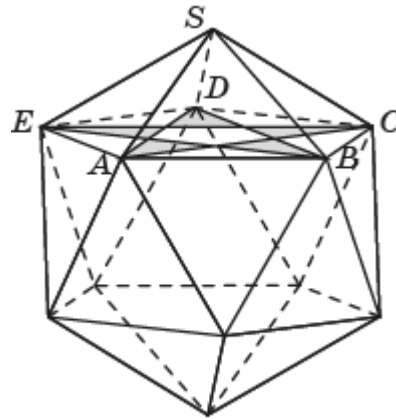


Рис. 8

Этот многогранник можно получить и другим способом. А именно, построим рёберный икосаэдр. Для этого отметим какие-нибудь две точки  $A$ ,  $B$  и в строке «Ввод» напишем: Икосаэдр( $A,B$ ). В его свойствах уберём цвет граней. Получим рёберный икосаэдр. Выберем какую-нибудь его вершину  $S$ . Используя инструмент «Многоугольник», построим звёздчатый пятиугольник  $ACEBD$ , вершинами которого являются концы рёбер, выходящих из этой вершины (рис. 8). Сделаем то же самое для остальных вершин икосаэдра. Получим малый звёздчатый додекаэдр.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Сколько вершин ( $V$ ), рёбер ( $P$ ), граней ( $\Gamma$ ) имеет малый звёздчатый додекаэдр?

Ответ:  $V = 12$ ,  $P = 30$ ,  $\Gamma = 12$ .

2. Найдите боковое ребро правильной пятиугольной пирамиды, которая участвует в построении малого звёздчатого додекаэдра, если ребро додекаэдра, из которого он получен, равно 1.

Решение. Заметим, что боковыми гранями достраиваемых правильных пятиугольных пирамид являются золотые треугольники, у которых отношение основания к боковой стороне равно золотому отношению  $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . Следовательно, боковые рёбра этих пирамид равны

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. Найдите боковое ребро малого звёздчатого додекаэдра, построенного исходя из икосаэдра, рёбра которого равны 1.

Решение. Заметим, что треугольник  $ABC$ , участвующий в построении малого звёздчатого додекаэдра, является золотым,  $AC = \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Следовательно, рёбра соответствующего малого звёздчатого додекаэдра равны  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Для моделирования большого звёздчатого додекаэдра в компьютерной программе GeoGebra построим икосаэдр. Проведём прямые  $AE$  и  $CD$  (рис. 9). Обозначим  $S$  их точку пересечения. Построим пирамиду, основанием которой является грань  $ABC$ , а вершиной – точка  $S$ . Сделаем то же самое для остальных граней икосаэдра. Получим большой звёздчатый додекаэдр.

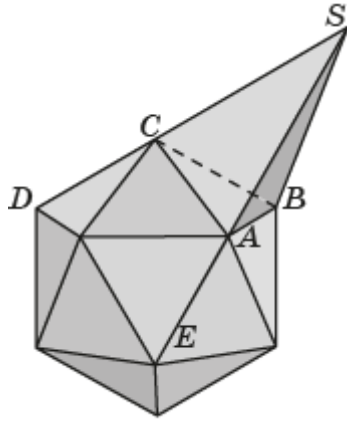


Рис. 9

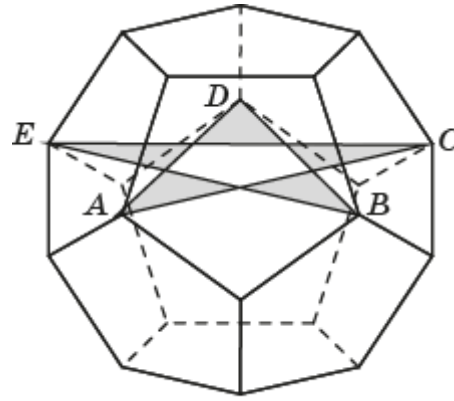


Рис. 10

Этот многогранник можно получить и другим способом. А именно, построим рёберный додекаэдр. Построим звёздчатый пятиугольник  $ACEBD$ , плоскость которого параллельна одной из его граней (рис. 10). Сделаем то же самое для остальных граней додекаэдра. Получим большой звёздчатый додекаэдр.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Сколько вершин ( $V$ ), рёбер ( $P$ ), граней ( $\Gamma$ ) имеет большой звёздчатый додекаэдр?

Ответ:  $V = 20$ ,  $P = 30$ ,  $\Gamma = 12$ .

2. Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, которая участвует в построении большого звёздчатого додекаэдра, если ребро икосаэдра, из которого он получен, равно 1.

Решение. Заметим, что боковыми гранями достраиваемых правильных треугольных пирамид являются золотые треугольники. Следовательно, боковые рёбра этих пирамид равны  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

3. Найдите боковое ребро большого звёздчатого додекаэдра, построенного исходя из додекаэдра, рёбра которого равны 1.

Решение. Заметим, что треугольник  $ABC$ , участвующий в построении малого звёздчатого додекаэдра, является золотым,  $AB = \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $AC = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ . Следовательно, рёбра соответствующего большого звёздчатого додекаэдра равны  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .

4. Какой выпуклый многогранник ограничен плоскостями граней большого звёздчатого додекаэдра?

Ответ. Додекаэдр.

Для моделирования большого додекаэдра построим рёберный икосаэдр. Выберем какую-нибудь его вершину  $S$  и построим пятиугольник  $ABCDE$ , вершинами которого являются концы рёбер, выходящих из этой вершины (рис. 11). Сделаем то же самое для остальных вершин икосаэдра. Получим большой додекаэдр.

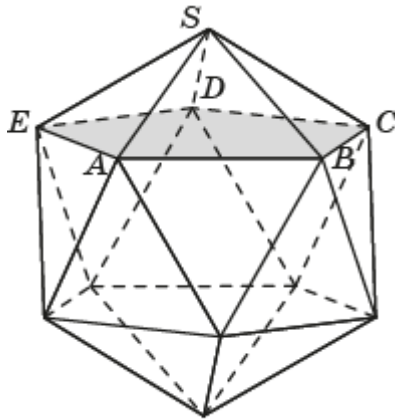


Рис. 11

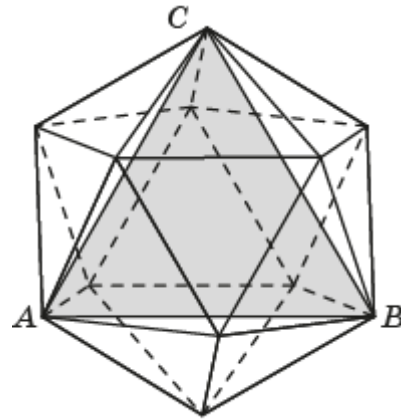


Рис. 12

Учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Сколько вершин ( $B$ ), рёбер ( $P$ ), граней ( $\Gamma$ ) имеет большой додекаэдр?

Ответ.  $B = 12, P = 30, \Gamma = 12$ .

2. Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, которая участвует в построении большого додекаэдра, если ребро икосаэдра, из которого он получен, равно 1.

Ответ.  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

3. Какой выпуклый многогранник ограничен плоскостями граней большого додекаэдра? Найдите его рёбра, если ребро икосаэдра, из которого получен большой додекаэдр, равно 1.

Ответ. Додекаэдр.

Для моделирования большого икосаэдра построим рёберный икосаэдр. Выберем какую-нибудь его грань и построим правильный треугольник  $ABC$ , вершинами которого являются вершины икосаэдра, а его плоскость параллельна плоскости выбранной грани (рис. 12). Сделаем то же самое для остальных граней икосаэдра. Получим большой икосаэдр.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Сколько вершин ( $B$ ), рёбер ( $P$ ), граней ( $\Gamma$ ) имеет большой икосаэдр?

Ответ.  $B = 12, P = 30, \Gamma = 20$ .

2. Найдите боковые рёбра треугольной пирамиды, которая участвует в построении большого икосаэдра, если ребро додекаэдра, из которого он получен, равно 1.

Ответ.  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

3. Какой выпуклый многогранник ограничен плоскостями граней большого икосаэдра?

Ответ. Икосаэдр.

Кроме правильных звёздчатых многогранников имеются и полуправильные звёздчатые многогранники. Одни из них показан на рисунке 13.

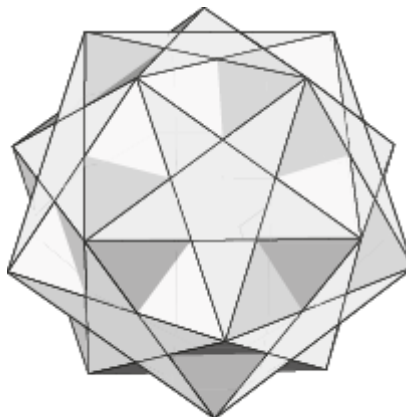


Рис. 13

Его гранями являются правильные треугольники и правильные звёздчатые пятиугольники, а многогранными углами – равные шестигранные углы.

Для его получения в компьютерной программе GeoGebra построим додекаэдр.

Вместо каждой его грани построим правильный звёздчатый пятиугольник.

Для каждой его вершины построим правильный треугольник, вершинами которого являются концы рёбер, выходящих из этой вершины.

В результате получим искомый звёздчатый многогранник, который называется малый битригональный икосододекаэдр.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Сколько у этого многогранника: а) звёздчатых пятиугольных граней; б) треугольных граней?

Ответ: а) 12; б) 20.

2. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р), граней (Г)?

Ответ: В = 20, Р = 60, Г = 32.

Учащимся можно предложить построить в компьютерной программе GeoGebra модели других полуправильных звёздчатых многогранников, используя модели, имеющиеся на сайте [zvzd3d.ru](http://zvzd3d.ru).

3D-модели правильных, полуправильных и звёздчатых многогранников можно посмотреть на сайте [zvzd3d.ru](http://zvzd3d.ru).

Учащимся можно предложить построить в компьютерной программе GeoGebra модели полуправильных звёздчатых многогранников, используя модели, имеющиеся на этом сайте.

### **Список источников**

1. Смирнов В. А., Смирнова И. М. О моделировании полуправильных многогранников в компьютерной программе GeoGebra // Математика в школе. 2025. № 5. С. 61-70.
2. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. М.: Прометей, 2018.
3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. М.: МЦНМО, 2010.
4. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвёртая. Геометрия. М.: Физ.-мат. лит., 1963.