В. А. Смирнов, И. М. Смирнова

Курс по выбору
Моя математика. Геометрия
7-9 классы

Рабочая тетрадь № 1

КРИВЫЕ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Москва
«Просвещение»
2026

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова

Моя математика. Курс по выбору. Геометрия: 7-9 классы. Рабочая тетрадь № 1. Кривые как геометрические места точек.

Тетрадь входит в учебно-методический комплект по математике «Лаборатория А. Г. Мордковича». Она содержит задачи на распознавание и изображение кривых как геометрических мест точек, проведение различных построений циркулем и линейкой, установление и доказательство свойств кривых и др.

Задачи имеют различный уровень трудности, не требуют знания специальных формул и теорем и направлены на развитие геометрических представлений и конструктивных умений учащихся 7-9 классов.

К каждой задаче прилагается рисунок на клетчатой бумаге. Стороны клеток предполагаются равными единице.

В конце пособия приведены ответы и указания ко всем задачам, а также список дополнительной литературы.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие кривой является одним из основных понятий геометрии. С древних времён кривые привлекали к себе внимание учёных и использовались ими для описания различных природных явлений от траектории брошенного камня до орбит космических тел.

Предлагаемая рабочая тетрадь посвящена кривым как геометрическим местам точек и предназначена для учащихся 7-9 классов, интересующихся математикой, и призвана способствовать повышению эффективности обучения геометрии, подготовке к изучению высшей геометрии и математического анализа в вузе.

Она входит в учебно-методический комплект по математике «Лаборатория А. Г. Мордковича» и служит дополнением к курсу по выбору:

Смирнов В. А., Смирнова И. М. Моя математика. Курс по выбору. Геометрия. 7-9 классы: учебное пособие. – М.: Просвещение, 2025.

В ней рассмотрены различные замечательные кривые на плоскости, среди которых: парабола, эллипс, гипербола, конхоида Никомеда, улитка Паскаля, циссоида Диоклеса и др.

Тетрадь содержит задачи на распознавание и изображение кривых, проведение построений циркулем и линейкой, установление взаимосвязи между различными кривыми, доказательство свойств кривых и др.

Предлагаемые задачи имеют различный уровень трудности. Они не требуют знания специальных формул и теорем и направлены на развитие геометрических представлений и конструктивных умений учащихся 7-9 классов.

К каждой задаче прилагается рисунок на клетчатой бумаге, стороны клеток которой предполагаются равными единице.

В конце тетради приведены ответы и указания ко всем задачам, а также список дополнительной литературы.

1. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек (ГМТ), равноудалённых от данной точки и данной прямой, не проходящей через эту точку.

1. Изобразите несколько точек, равноудалённых от точки F и прямой d (рис. 1.1). Соедините их плавной кривой. Получите параболу.

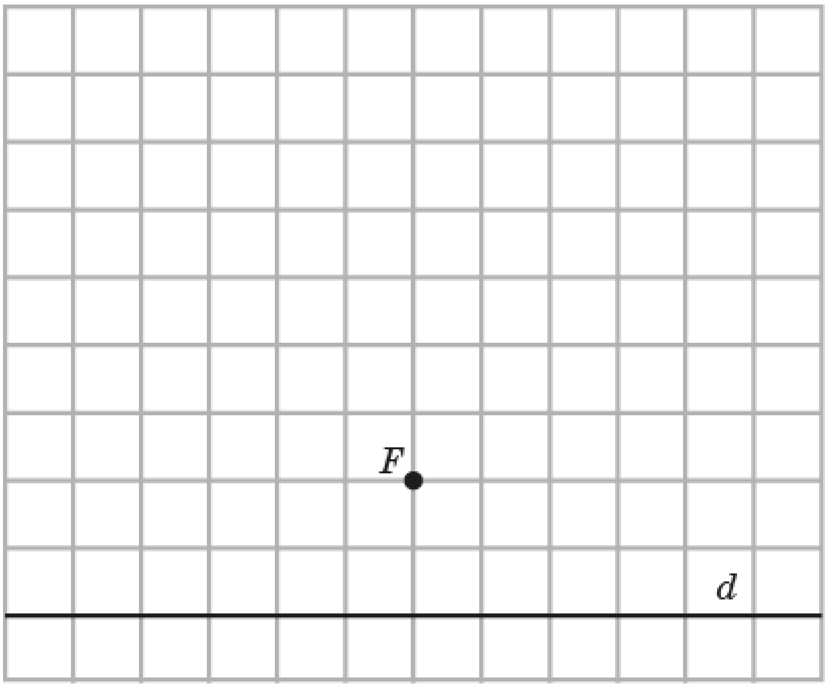

Рис. 1.1

2. Изобразите несколько точек, равноудалённых от точки F и прямой d (рис. 1.2). Соедините их плавной кривой. Получите параболу.

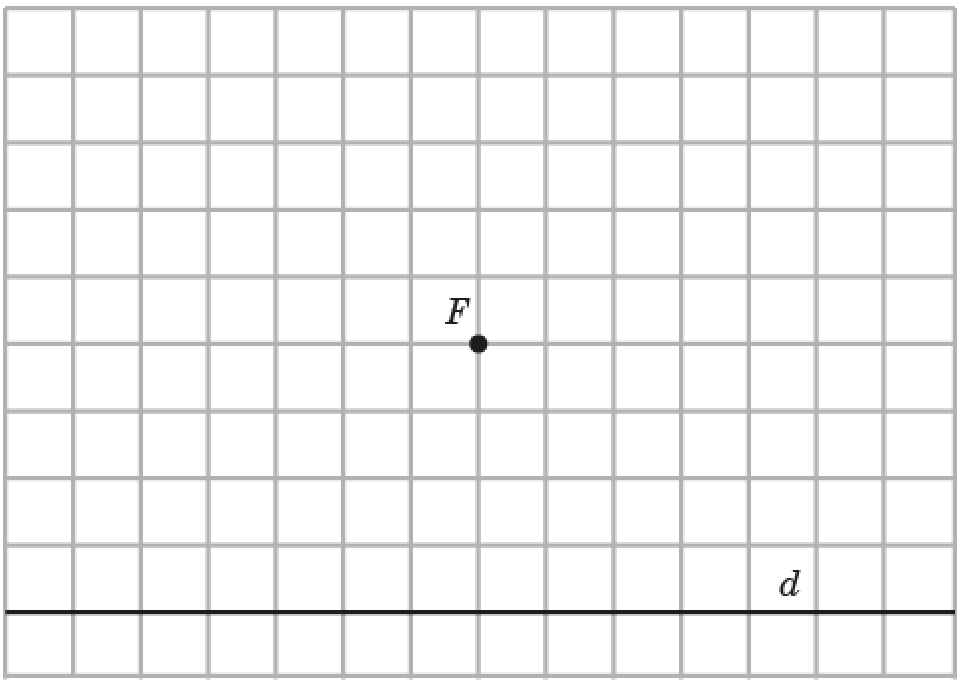

Рис. 1.2

3. Изобразите ГМТ, расстояние от которых до точки F меньше расстояния до прямой d (рис. 1.3).

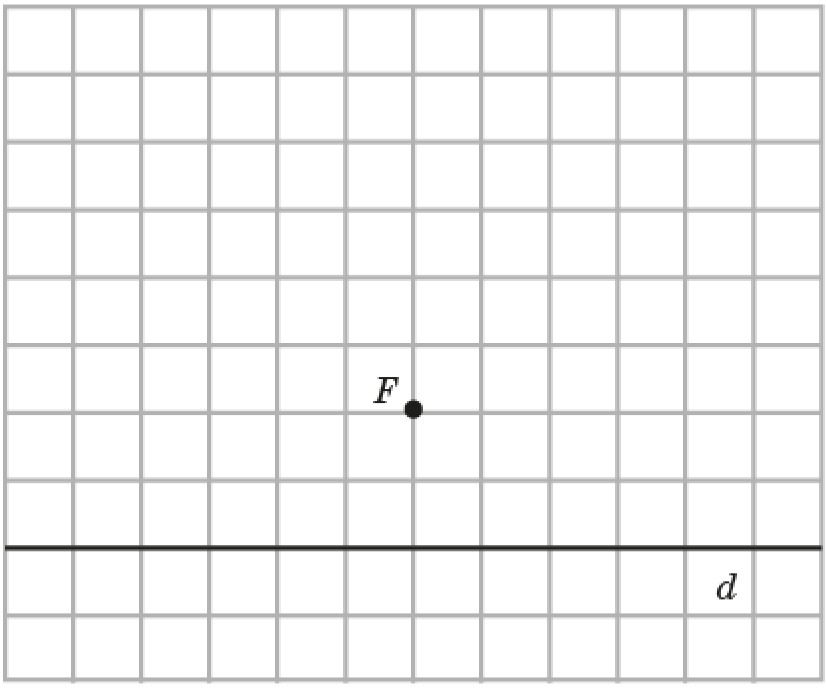

Рис. 1.3

4. Изобразите ГМТ, расстояние от которых до точки F больше расстояния до прямой d (рис. 1.4).

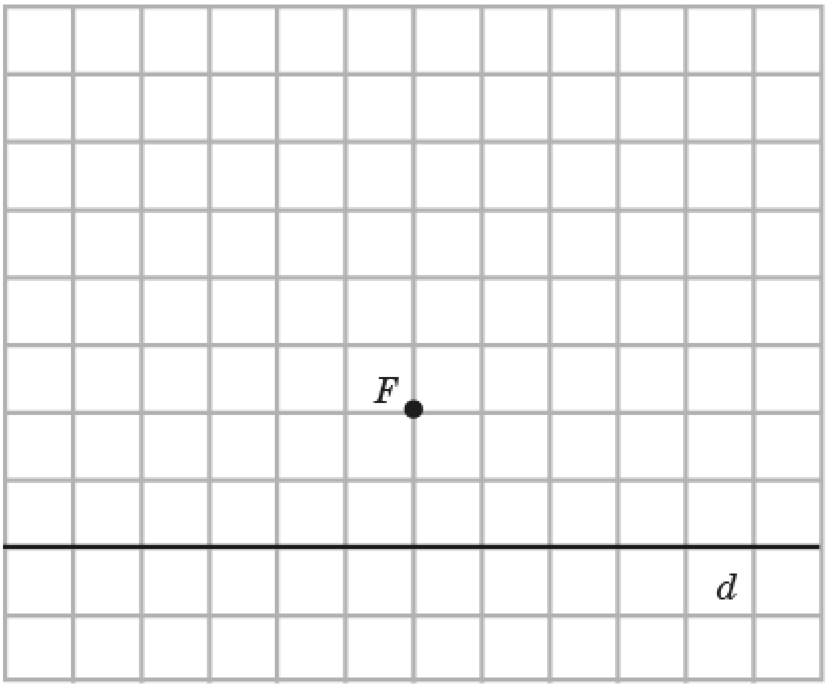

Рис. 1.4

5. Используя рисунок 1.5, докажите, что для точек *A'*, расположенных выше параболы, расстояние до фокуса *F* меньше расстояния до директрисы *d*.

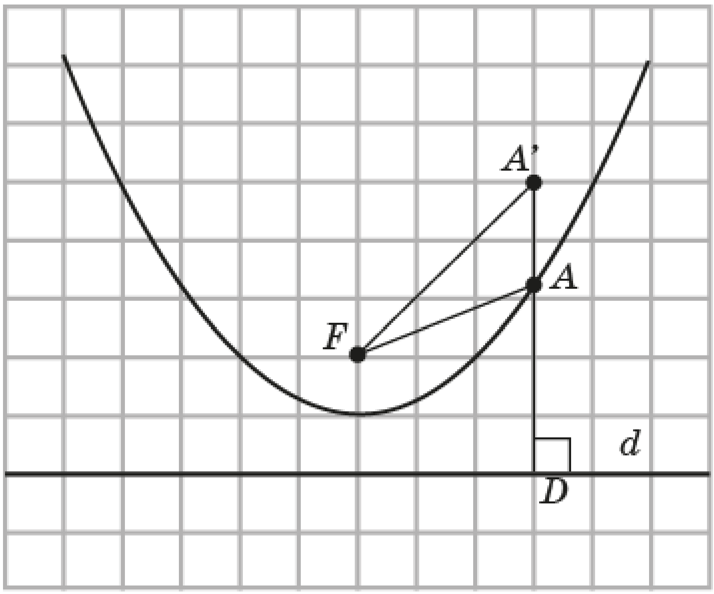

Рис. 1.5

____

____

____

6. Используя рисунок 1.6, докажите, что для точек *A''*, расположенных ниже параболы, расстояние до фокуса *F* больше расстояния до директрисы *d* (рис. 1.6).

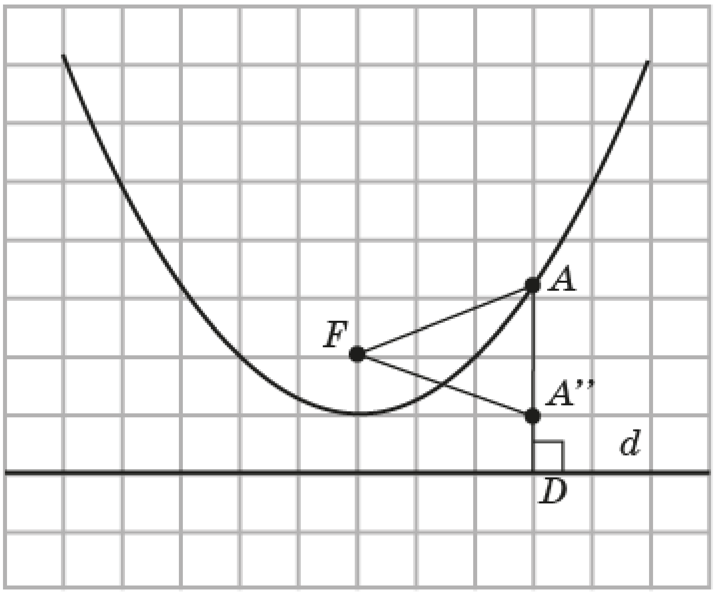

Рис. 1.6

____

____

____

7. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной прямой d и проходящих через данную точку F, не принадлежащую этой прямой (рис. 1.7), является парабола. Изобразите эту параболу.

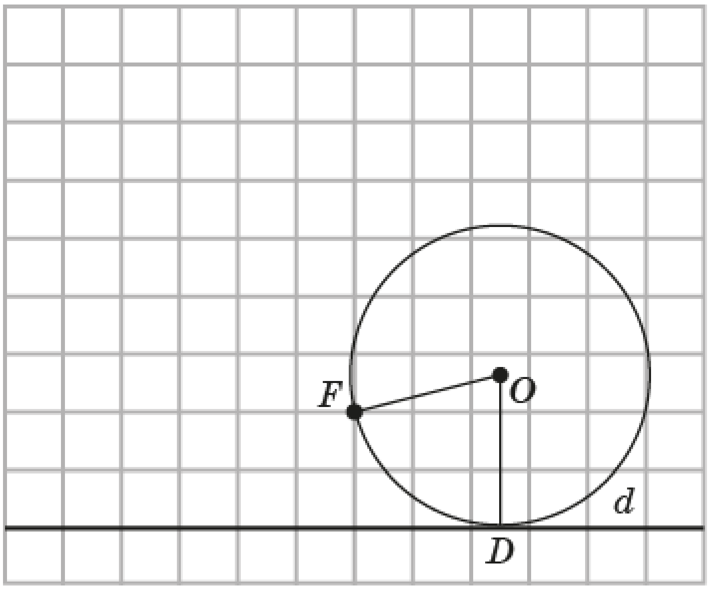

Рис. 1.7

8. Докажите, что геометрическим местом точек, равноудалённых от данной окружности и данной прямой (рис. 1.8), является парабола. Изобразите эту параболу и её директрису.

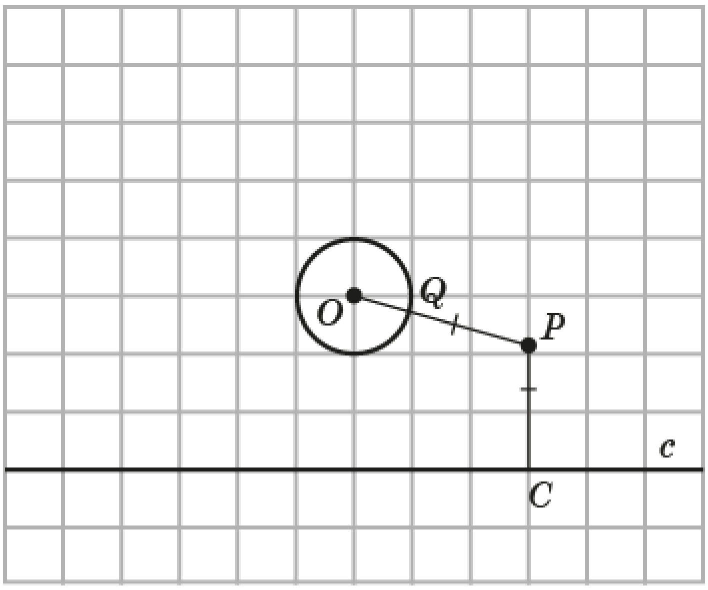

Рис. 1.8

9. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной прямой c и данной окружности с центром O внешним образом (рис. 1.9), является парабола. Изобразите эту параболу и её директрису.

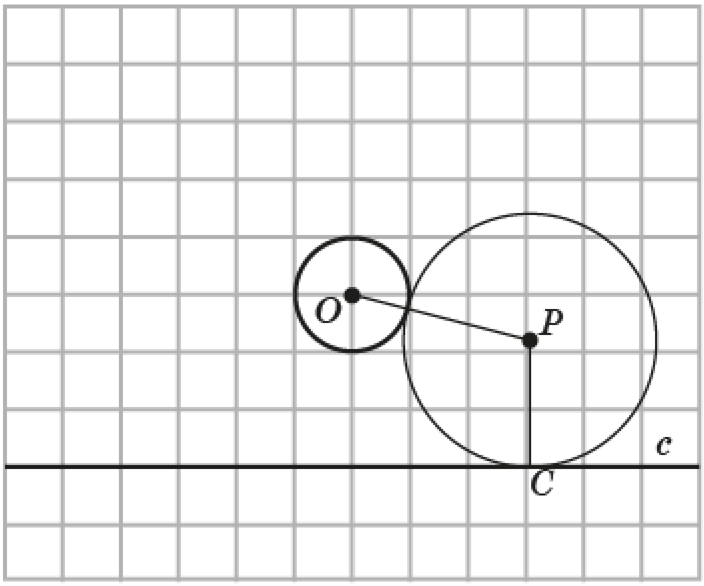

Рис. 1.9

____

____

____

10. Изобразите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой c и данной окружности с центром O внутренним образом (рис. 1.10).

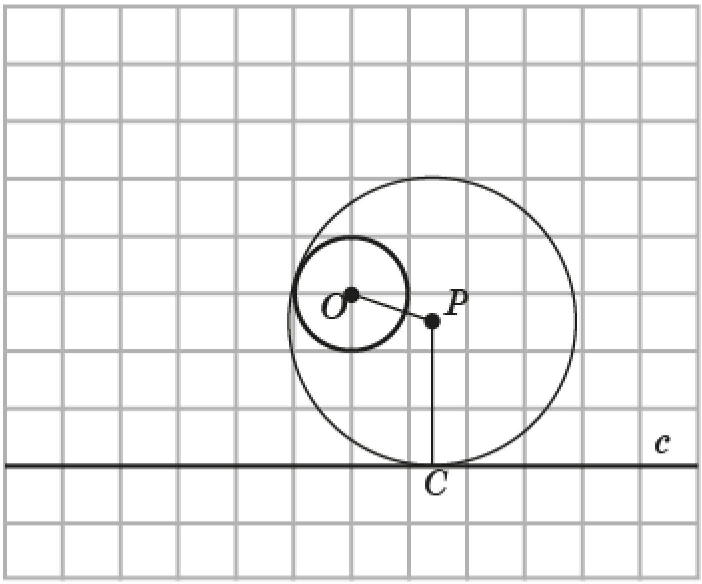

Рис. 1.10

____

____

____

11. Для данной точки A и прямой b, не проходящей через эту точку, укажите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников ABC ($AC = BC$), для которых вершина B принадлежит прямой b (рис. 1.11).

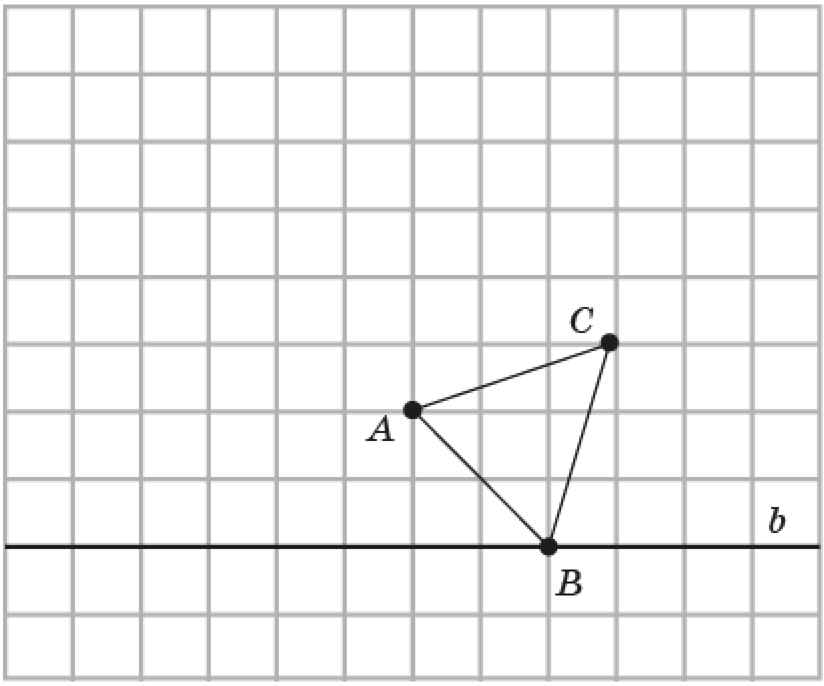

Рис. 1.11

12. Докажите, что геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до данной точки A и данной прямой c постоянна и равна h, является параболой. Изобразите эту параболу и её директрису для h = 1 (рис. 1.12).

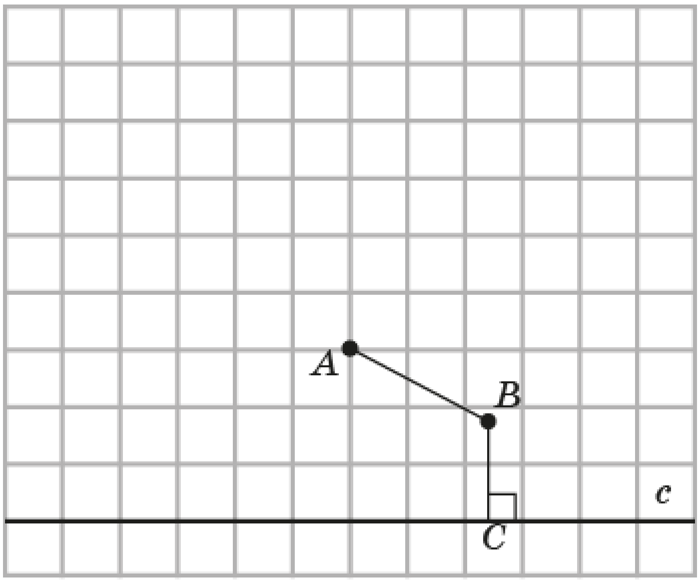

Рис. 1.12

13. Изобразите геометрическое место точек, равноудалённых от данной окружности и данной прямой (рис. 1.13).

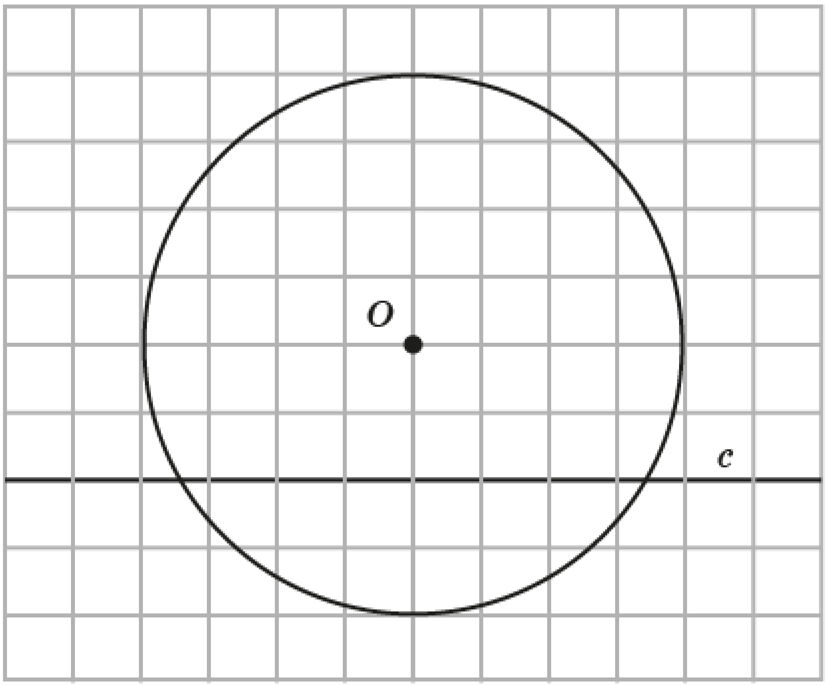

Рис. 1.13

14. Изобразите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и данной прямой (рис. 1.14).

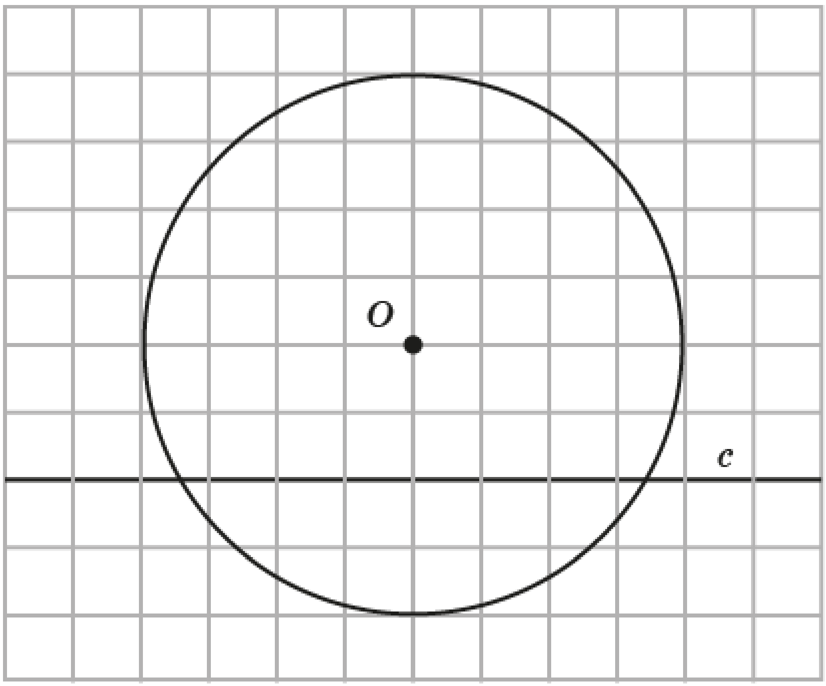

Рис. 1.14

15. Даны фокус F и директриса d параболы. Используя рисунок 1.15, докажите, что прямая, проходящая через точку A и содержащая биссектрису угла FAD, является касательной к параболе.

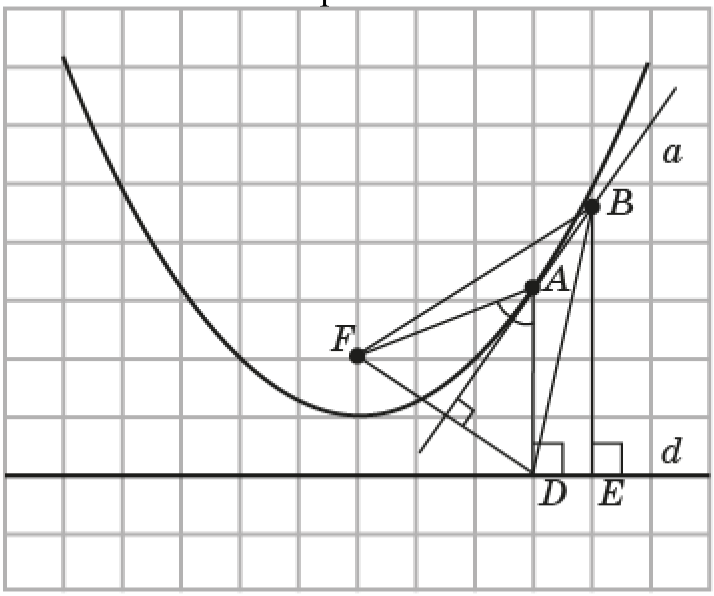

Рис. 1.15

16. Даны фокус F и директриса d параболы. Используя рисунок 1.16, докажите, что касательная к параболе, проходящая через точку B, не принадлежащую параболе, содержит биссектрису угла FBD, где F – фокус, D – точка директрисы, $BF = BD$.

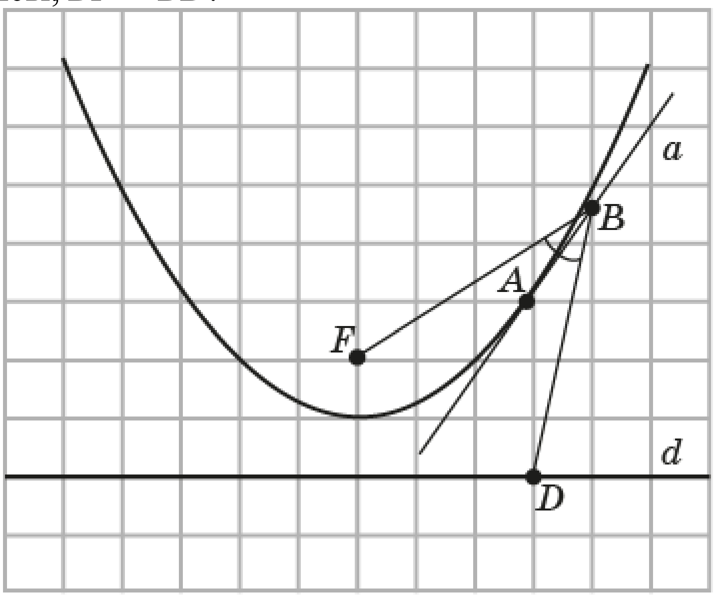

Рис. 1.16

17. Даны фокус F и директриса d параболы (рис. 1.17). Докажите, что для любой точки D директрисы серединный перпендикуляр a к отрезку FD является касательной к параболе. Укажите точку касания.

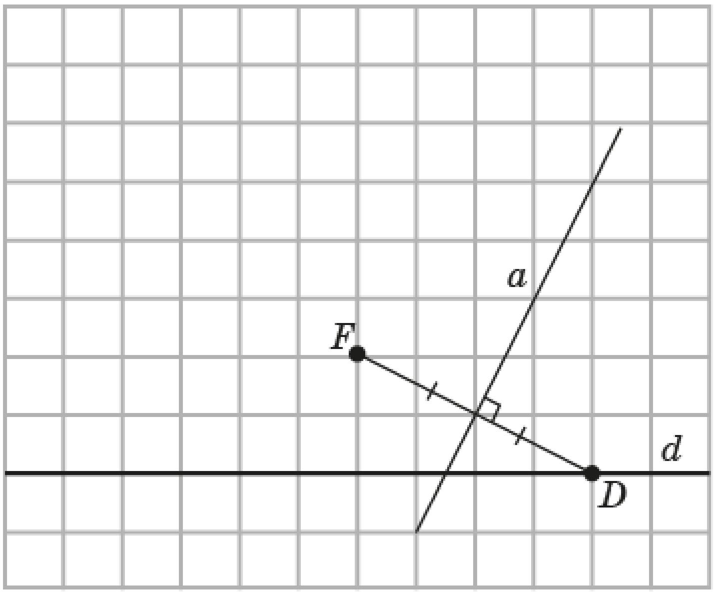

Рис. 1.17

____

____

____

18. Докажите, что если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе (рис. 1.18).

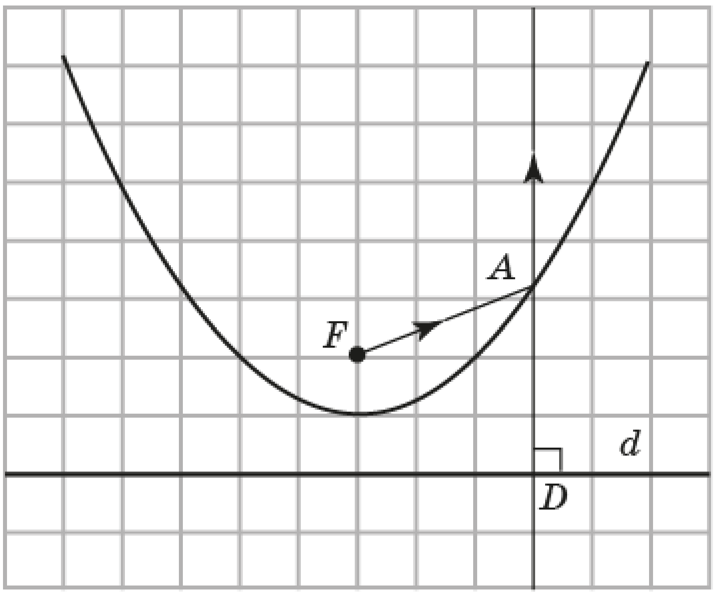

Рис. 1.18

____

____

____

19. Для данных фокуса F и директрисы d параболы постройте касательную к параболе, проходящую через данную точку A, принадлежащую параболе (рис. 1.19).

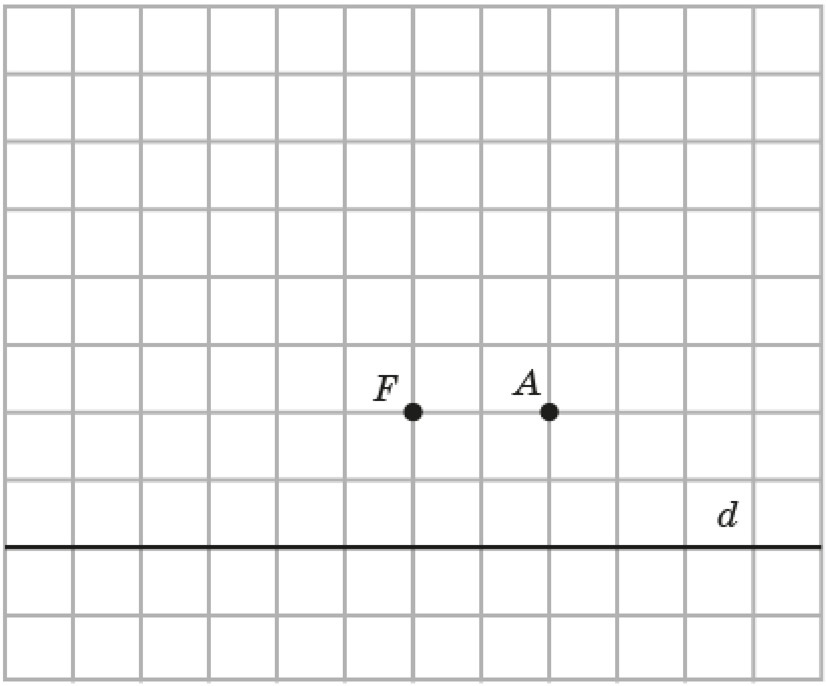

Рис. 1.19

20. Для данных фокуса F и директрисы d параболы постройте касательную к параболе, проходящую через данную точку B, не принадлежащую параболе (рис. 1.20). Укажите точку касания.

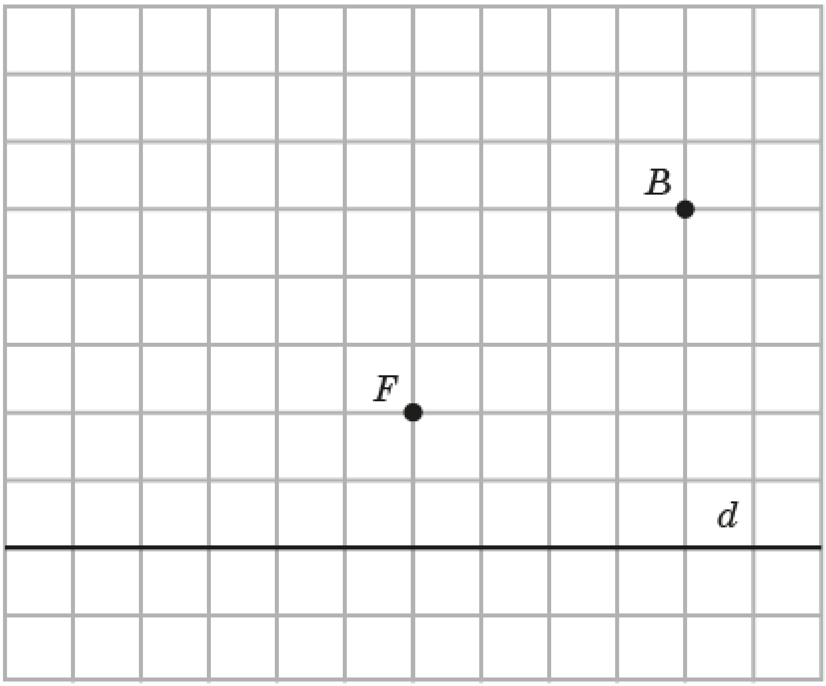

Рис. 1.20

21. Для данных фокуса F и директрисы d параболы постройте касательные к параболе, проходящие через данную точку C, не принадлежащую параболе (рис. 1.21). Укажите точки касания.

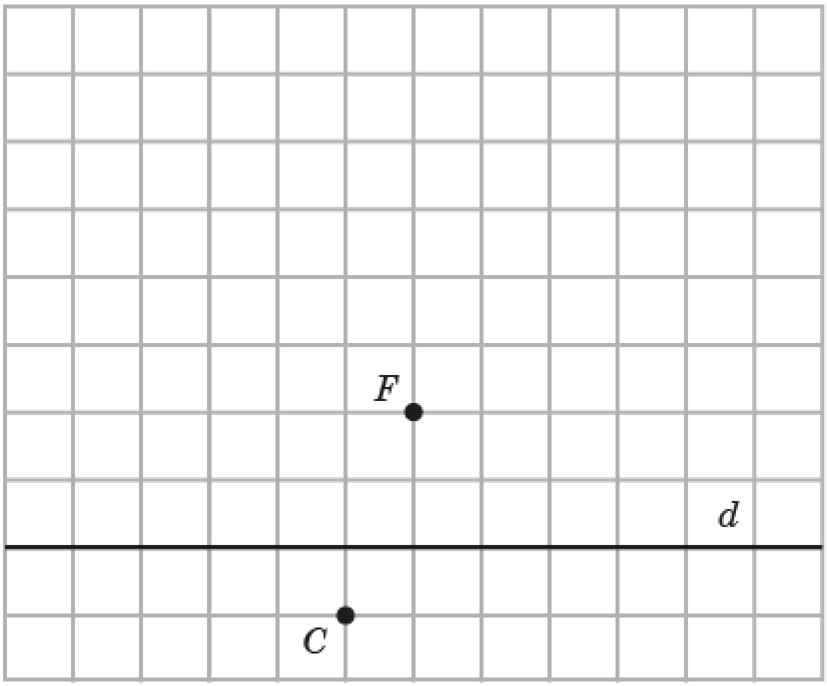

Рис. 1.21

22. Для данных фокуса F, директрисы d и касательной a к параболе (рис. 1.22) укажите точку касания.

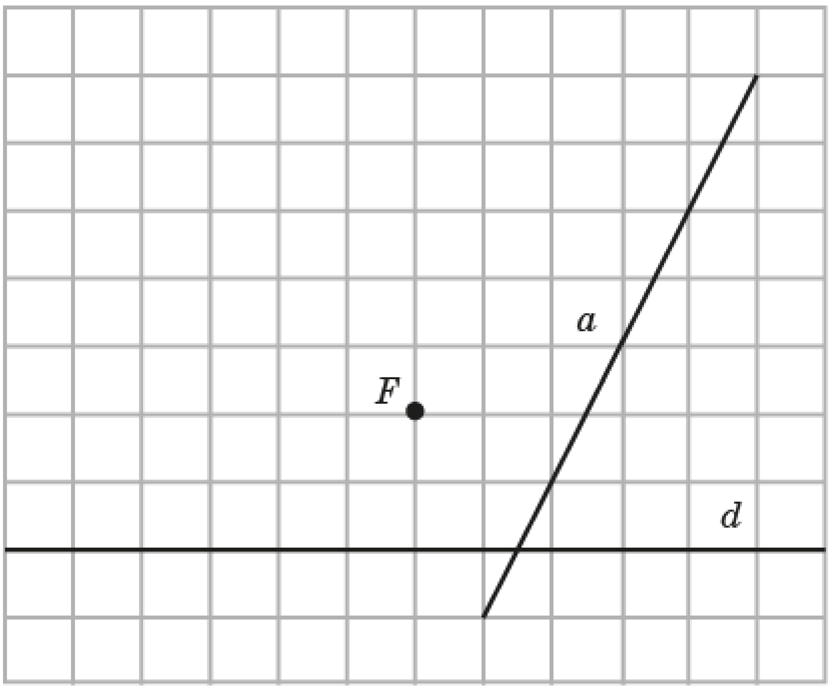

Рис. 1.22

23. Для двух данных точек параболы и её директрисы, используя циркуль и линейку, найдите положение фокуса параболы (рис. 1.23). Сколько решений имеет задача?

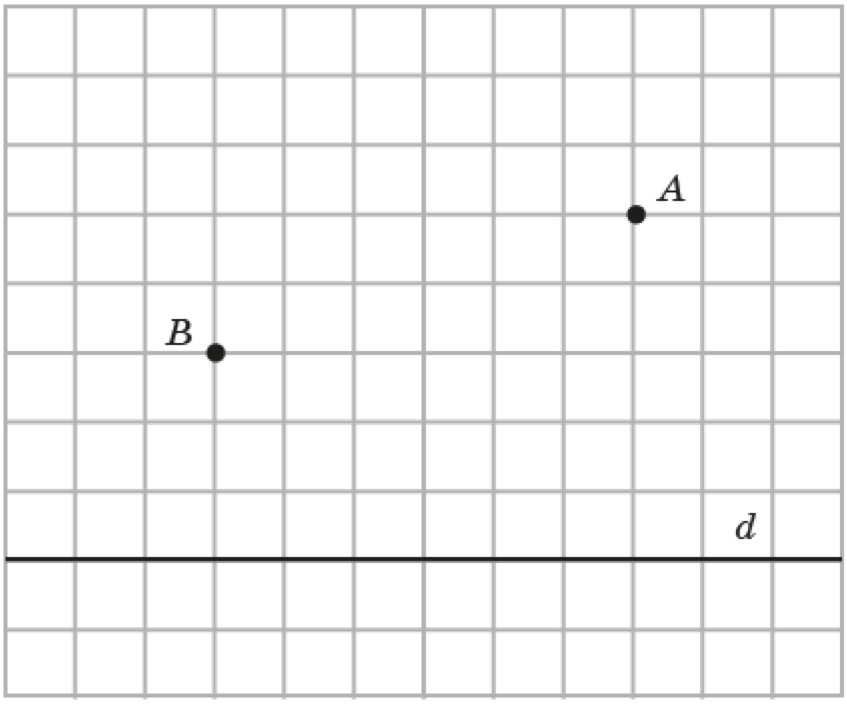

Рис. 1.23

24. Для двух данных точек параболы и её фокуса, используя циркуль и линейку, постройте директрису параболы (рис. 1.24). Сколько решений имеет задача?

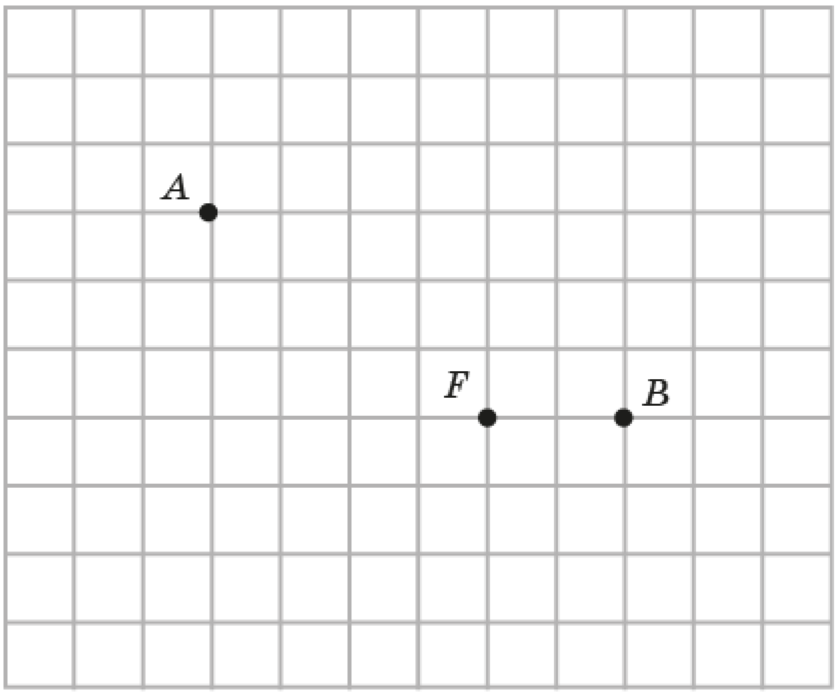

Рис. 1.24

25. Для данных фокуса F, касательной к параболе и точки B параболы (рис. 1.25) постройте директрису параболы.

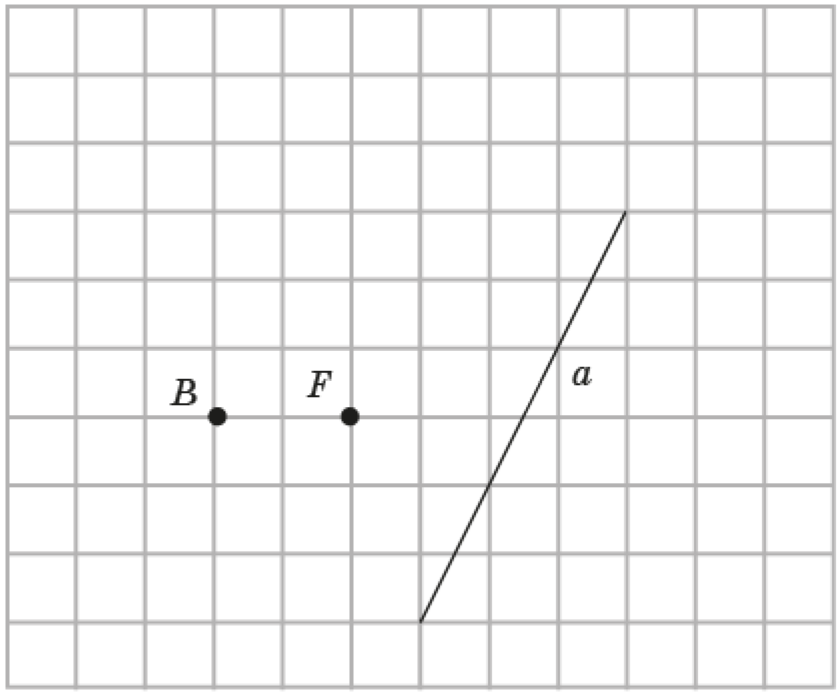

Рис. 1.25

26. Для двух данных касательных к параболе и её фокуса, используя циркуль и линейку, постройте директрису параболы (рис. 1.26).

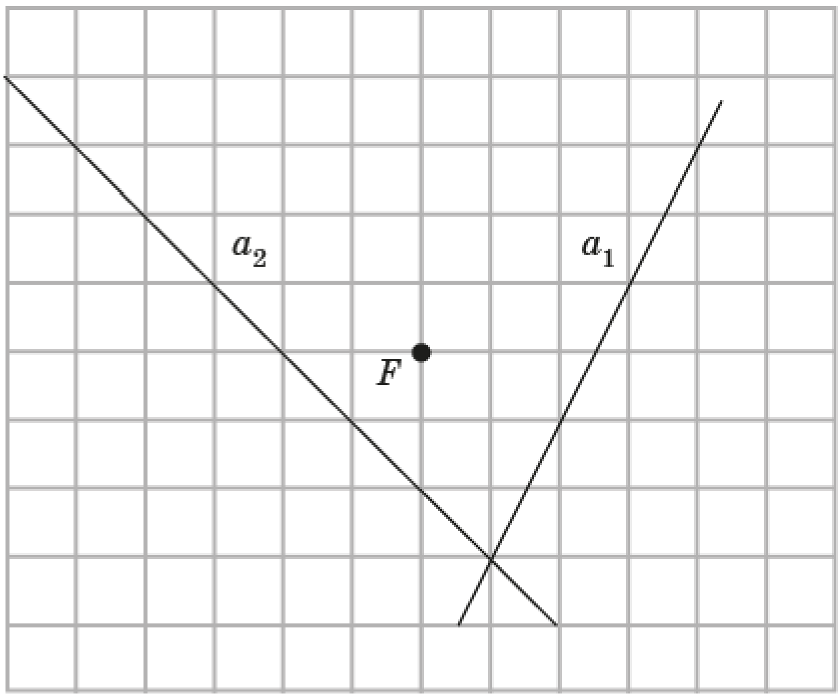

Рис. 1.26

27. Для данных касательной к параболе и её директрисы изобразите фокус параболы (рис. 1.27). Сколько решений имеет задача?

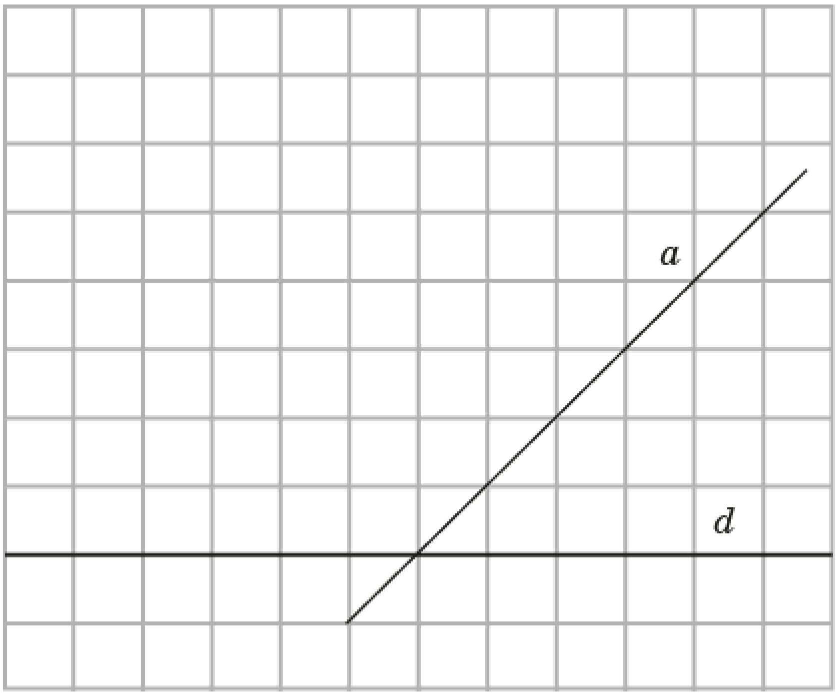

Рис. 1.27

28. Докажите, что угол между двумя касательными к параболе, проведёнными через точку директрисы, равен 90° (рис. 1.28).

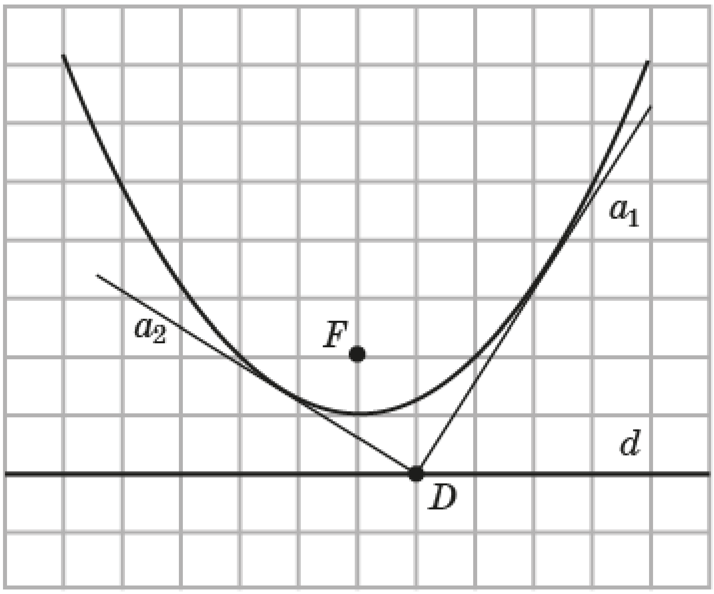

Рис. 1.28

29. Докажите, что угол между двумя касательными к параболе, проведёнными через точку A, расположенную между параболой и директрисой, больше 90^o (рис. 1.29).

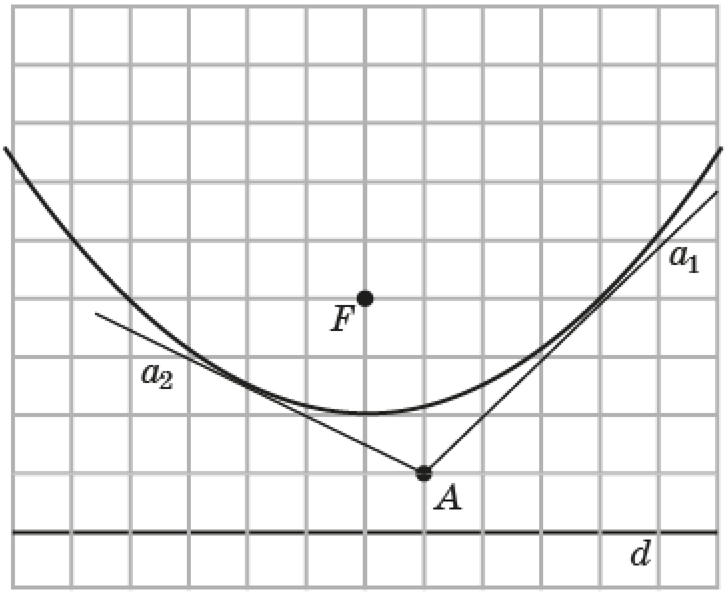

Рис. 1.29

30. Докажите, что угол между двумя касательными к параболе, проведёнными через точку B, расположенную ниже директрисы, меньше 90^o (рис. 1.30).

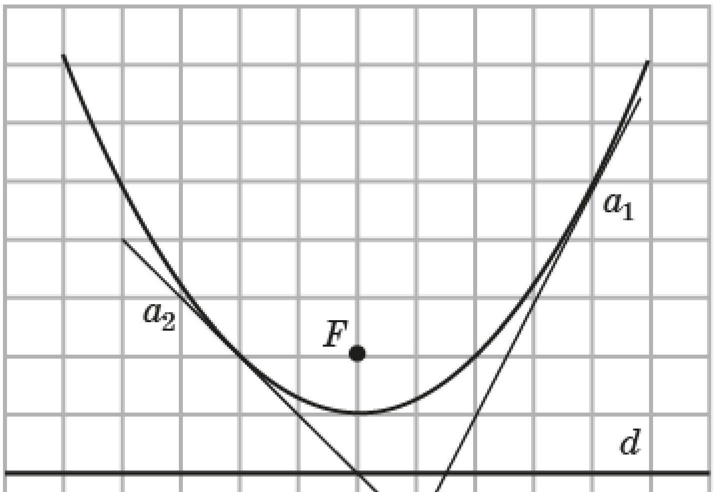

Рис. 1.30

31. Используя рисунок 1.31, докажите, что углы AFA_1, AFA_2, под которыми из фокуса F параболы видны отрезки AA_1, AA_2 касательных, проведённых к параболе из одной точки, равны.

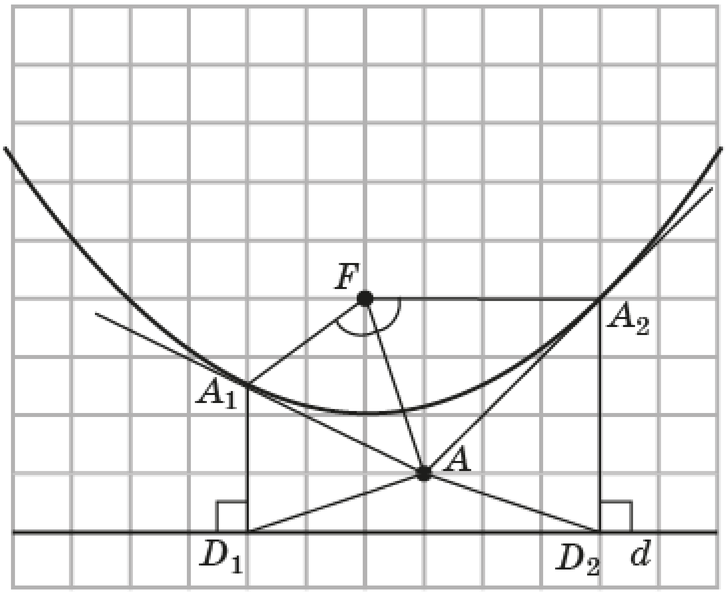

Рис. 1.31

32. Используя рисунок 1.32, докажите, что величина угла B_1FB_2, под которым из фокуса F виден отрезок B_1B_2 касательной, проведённой через точку B, расположенной внутри угла A_1AA_2, не зависит от положения точки B.

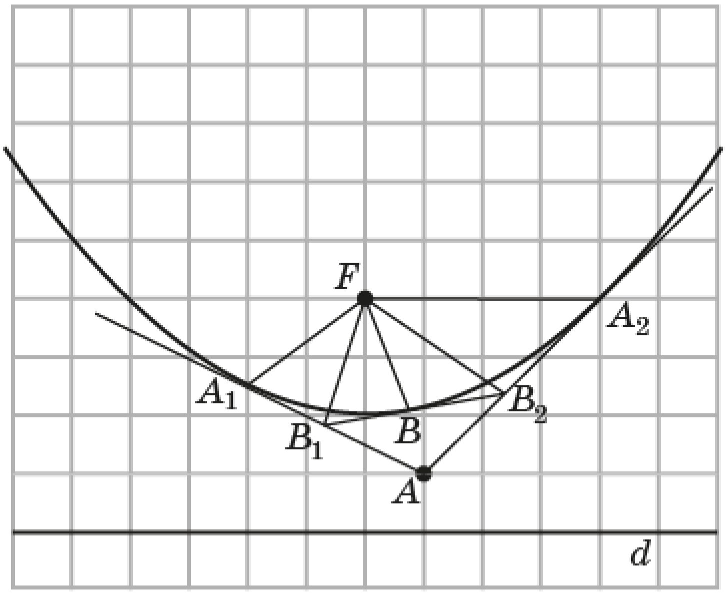

Рис. 1.32

2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек постоянна и равна числу, большему расстояния между этими точками.

1. Изобразите несколько точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 равна 8 (рис. 2.1). Соедините их плавной кривой. Получите эллипс.

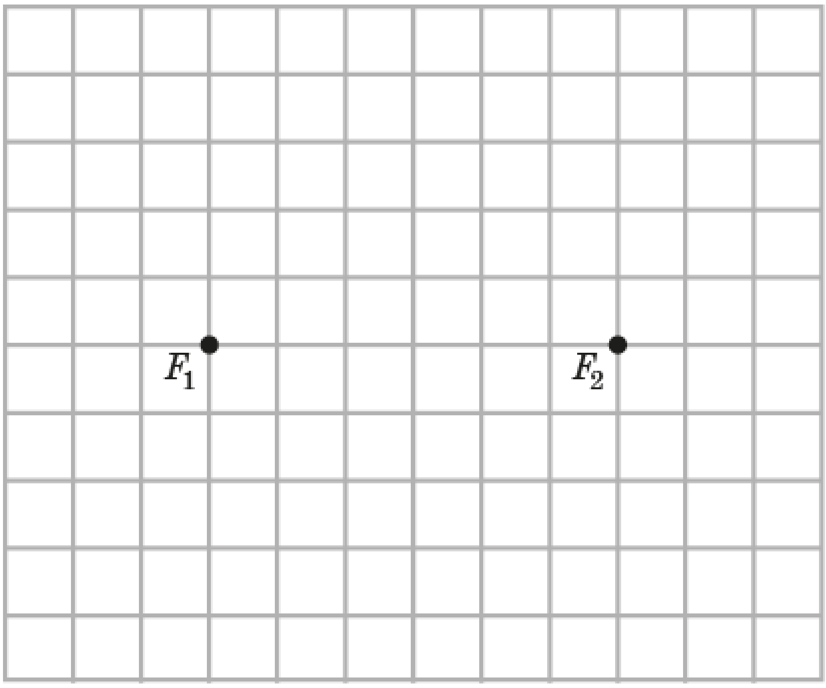

Рис. 2.1

2. Изобразите несколько точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 равна 10 (рис. 2.2). Соедините их плавной кривой. Получите эллипс.

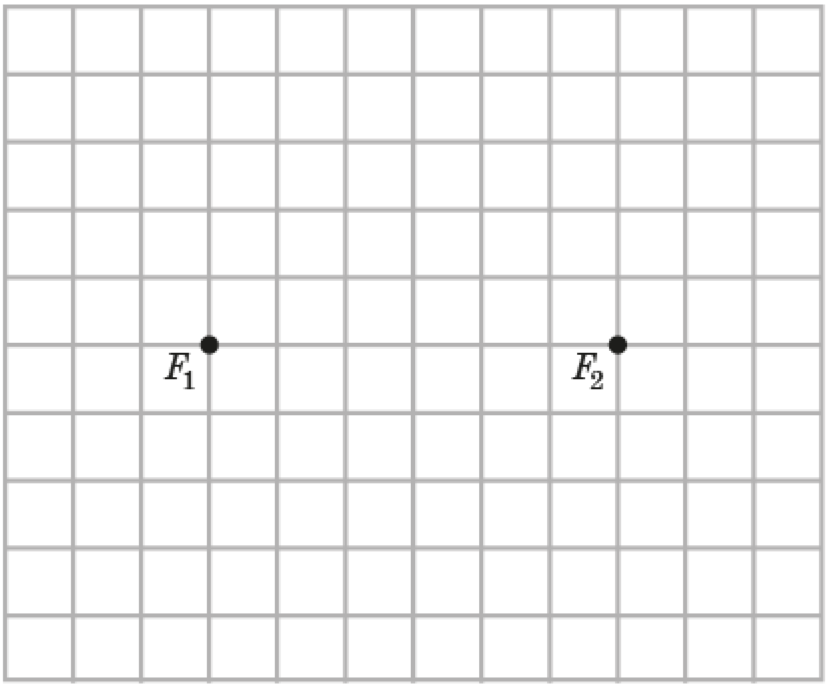

Рис. 2.2

3. Изобразите ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 меньше 8 (рис. 2.3).

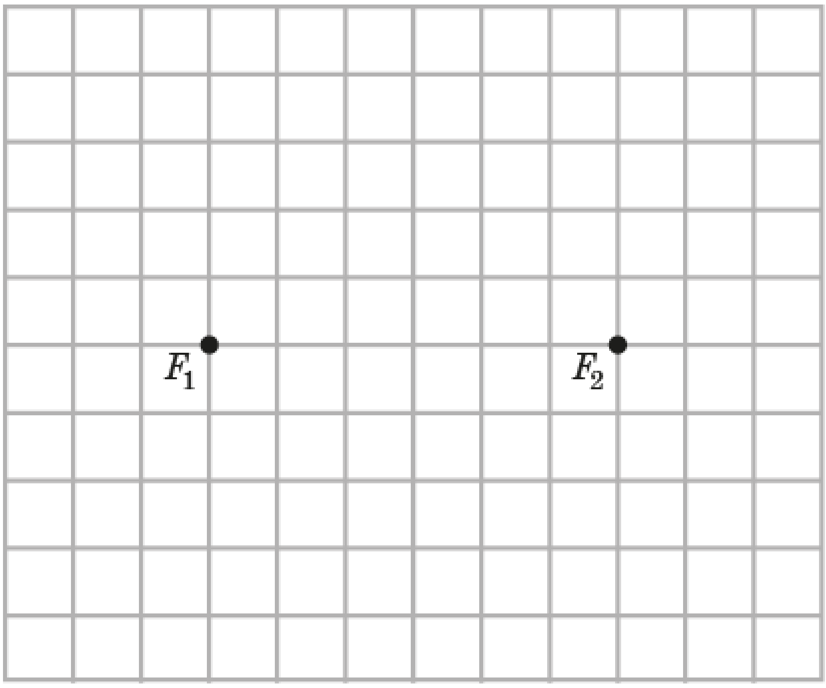

Рис. 2.3

4. Изобразите ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 больше 8 (рис. 2.4).

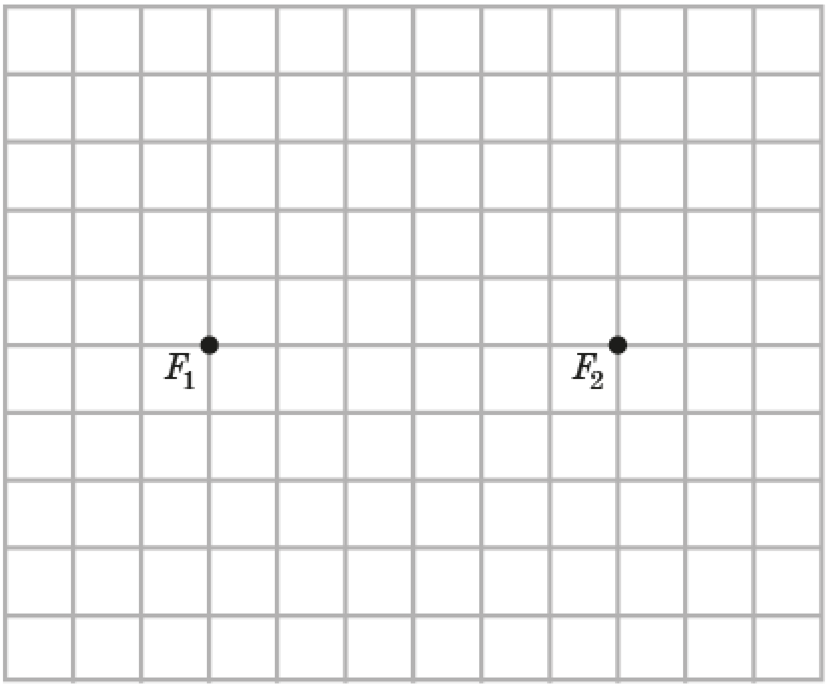

Рис. 2.4

5. Используя рисунок 2.5, докажите, что сумма расстояний от точек A', расположенных внутри эллипса, до фокусов F_1, F_2 эллипса меньше константы c эллипса.

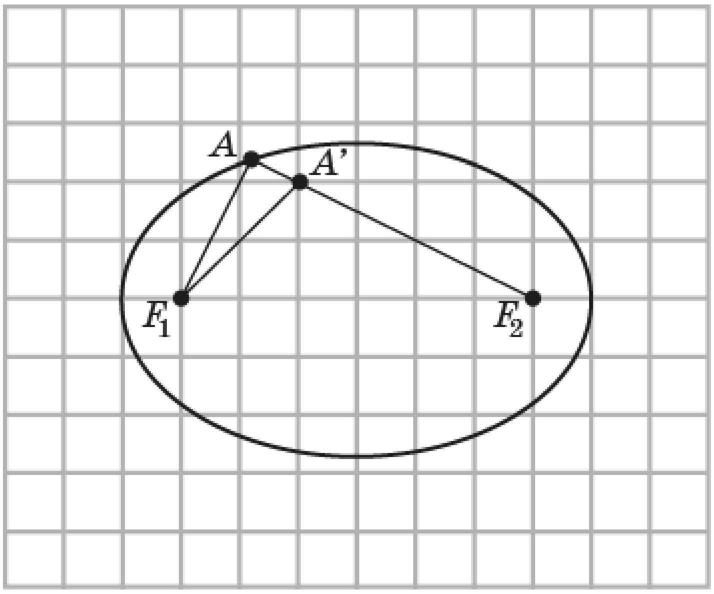

Рис. 2.5

____

____

____

6. Используя рисунок 2.6, докажите, что сумма расстояний от точек A'', расположенных во внешней области эллипса, до фокусов F_1, F_2 эллипса больше константы c эллипса.

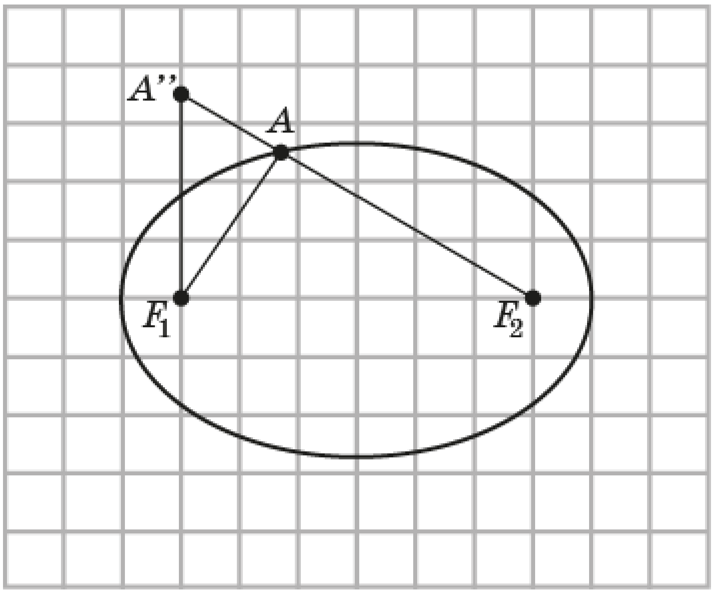

Рис. 2.6

____

____

____

7. Для данных точек A и B укажите геометрическое место вершин C треугольников ABC, периметр которых равен 10 (рис. 2.7).

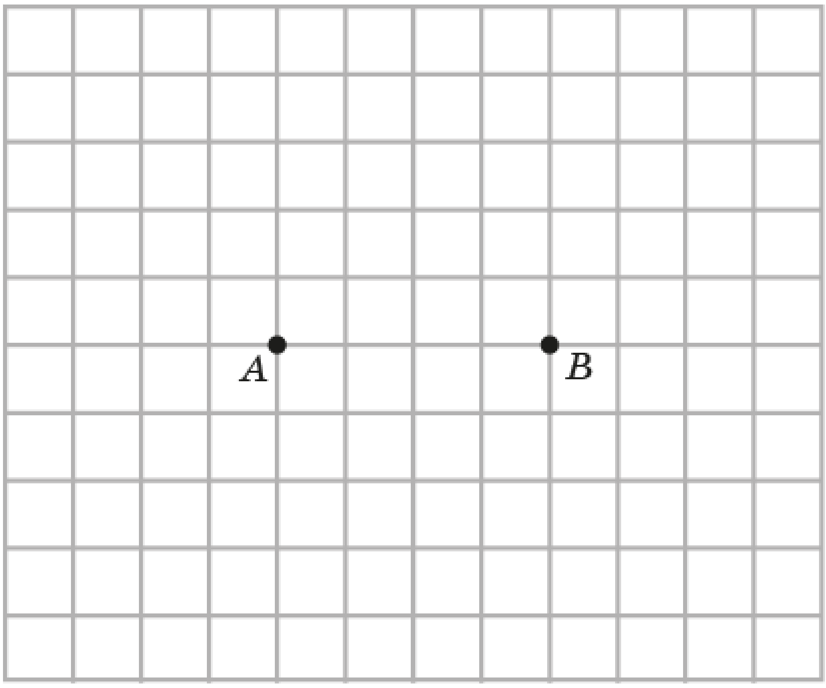

Рис. 2.7

8. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной окружности с центром O и проходящих через данную точку P, расположенную внутри этой окружности (рис. 2.8), является эллипс. Изобразите этот эллипс. Укажите его фокусы.

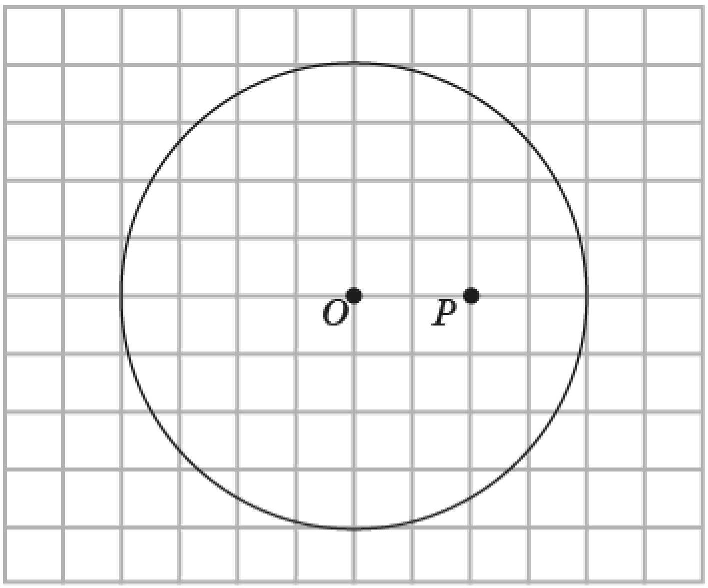

Рис. 2.8

9. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, равноудалённых от двух данных окружностей (рис. 2.9), является эллипс. Изобразите этот эллипс. Укажите его фокусы.

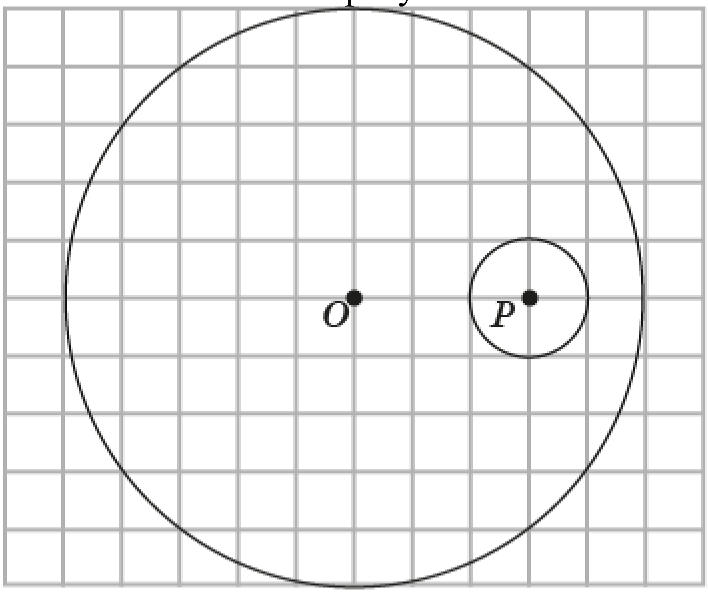

Рис. 2.9

10. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной окружности с центром O внутренним образом и данной окружности с центром P внешним образом (рис. 2.10), является эллипс. Изобразите этот эллипс. Укажите его фокусы.

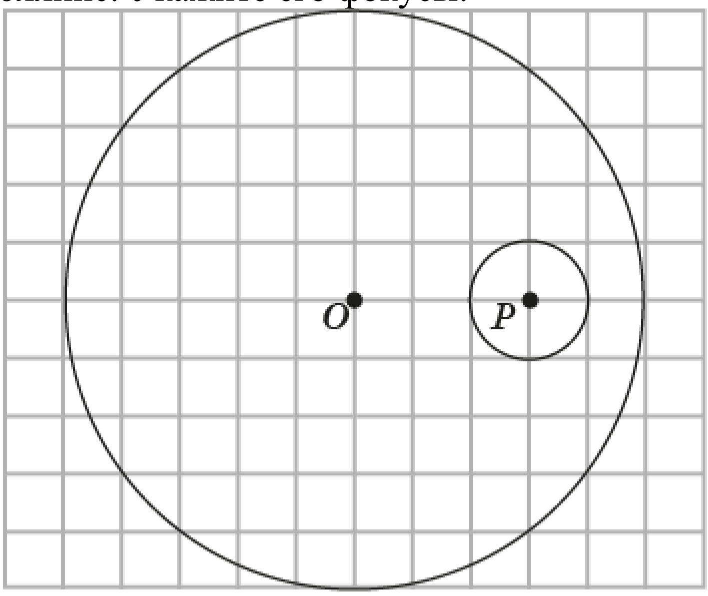

Рис. 2.10

11. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данных окружностей с центрами O и P внутренним образом (рис. 2.11), является эллипс. Изобразите этот эллипс. Укажите его фокусы.

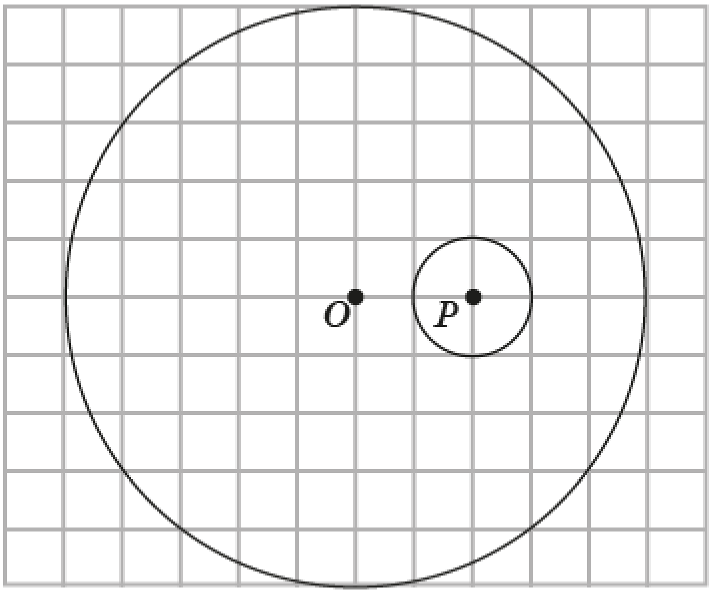

Рис. 2.11

12. Докажите, что геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до данной точки P и данной окружности постоянна и равна h, является эллипсом. Изобразите этот эллипс и его фокусы для $h = 1$ (рис. 2.12).

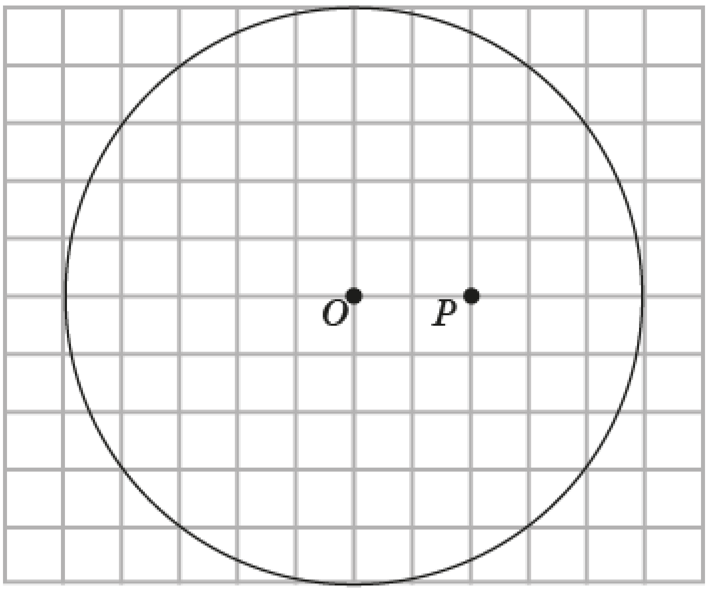

Рис. 2.12

13. Изобразите геометрическое место точек, расстояние от которых до данной точки F в 2 раза меньше расстояния до данной прямой d (рис. 2.13). Какой кривой оно является?

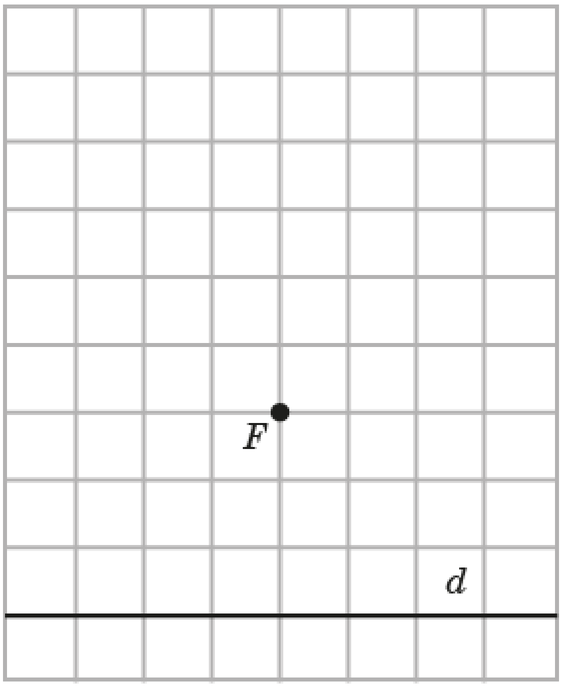

Рис. 2.13

14. Изобразите геометрическое место точек, расстояние от которых до данной точки F в 1,5 раза меньше расстояния до данной прямой d (рис. 2.14). Какой кривой оно является?

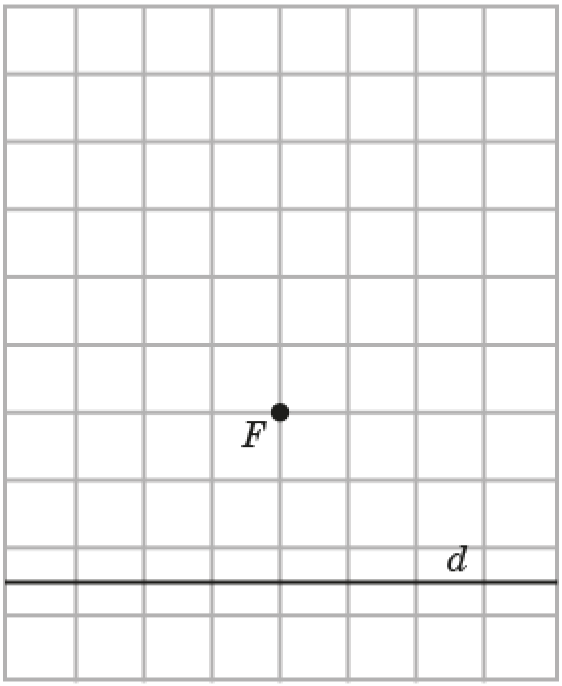

Рис. 2.14

15. Используя рисунок 2.15, докажите, что прямая, проходящая через точку A, принадлежащую эллипсу с фокусами F_1, F_2, и содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2, является касательной к эллипсу.

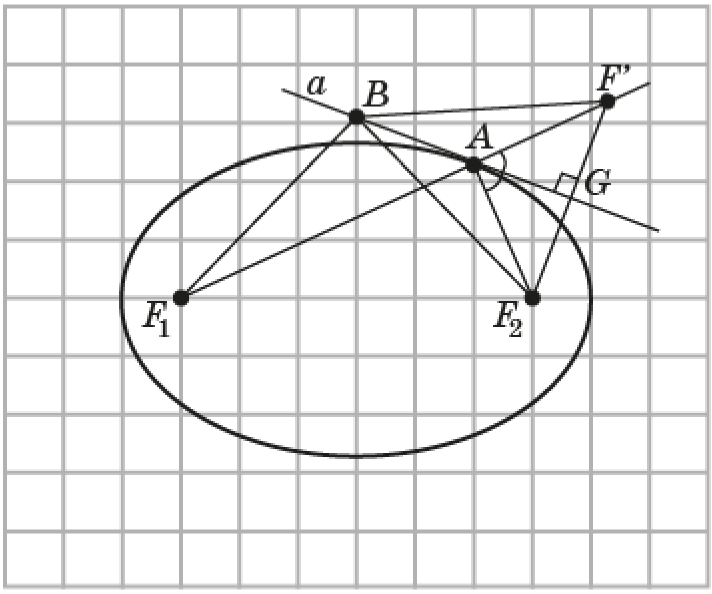

Рис. 2.15

16. Даны фокусы F_1, F_2 и константа c эллипса (рис. 2.16). Докажите, что для любой точки D окружности с центром F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр a к отрезку FD является касательной к эллипсу. Укажите точку касания.

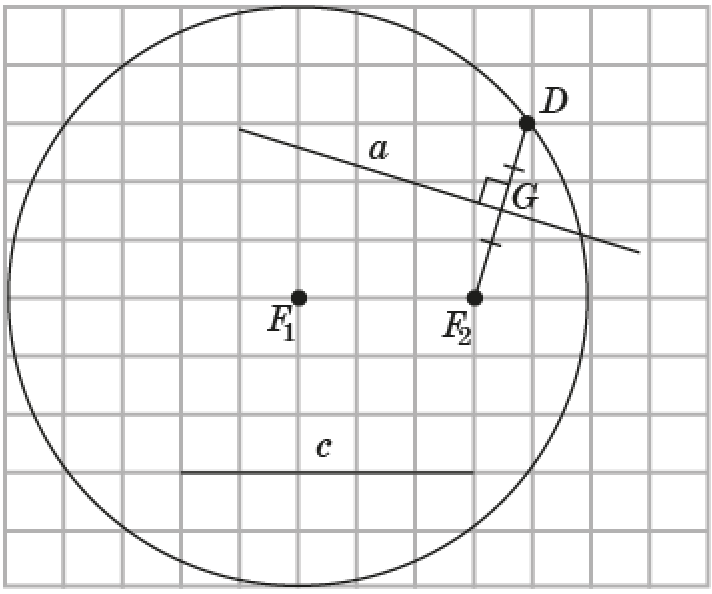

Рис. 2.16

17. Докажите, что если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, пройдут через другой его фокус (рис. 2.17).

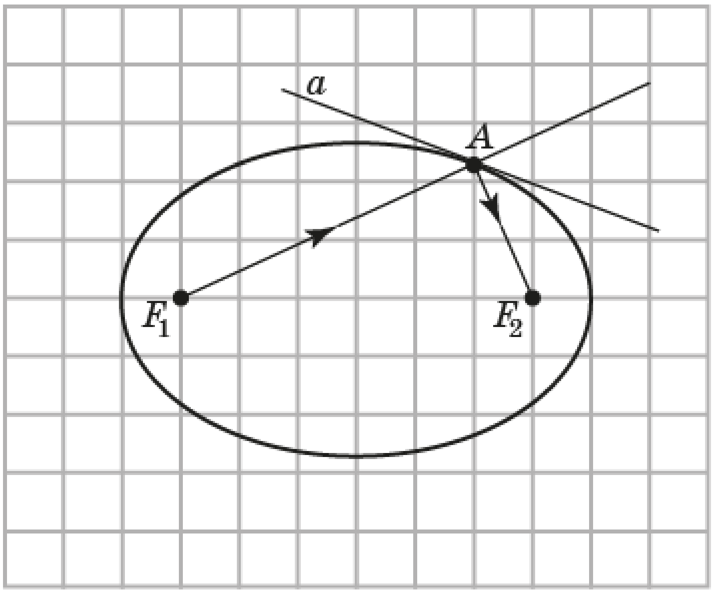

Рис. 2.17

___

___

___

18. Постройте касательную к эллипсу с данными фокусами F_1, F_2, проходящую через данную точку A, принадлежащую эллипсу (рис. 2.18).

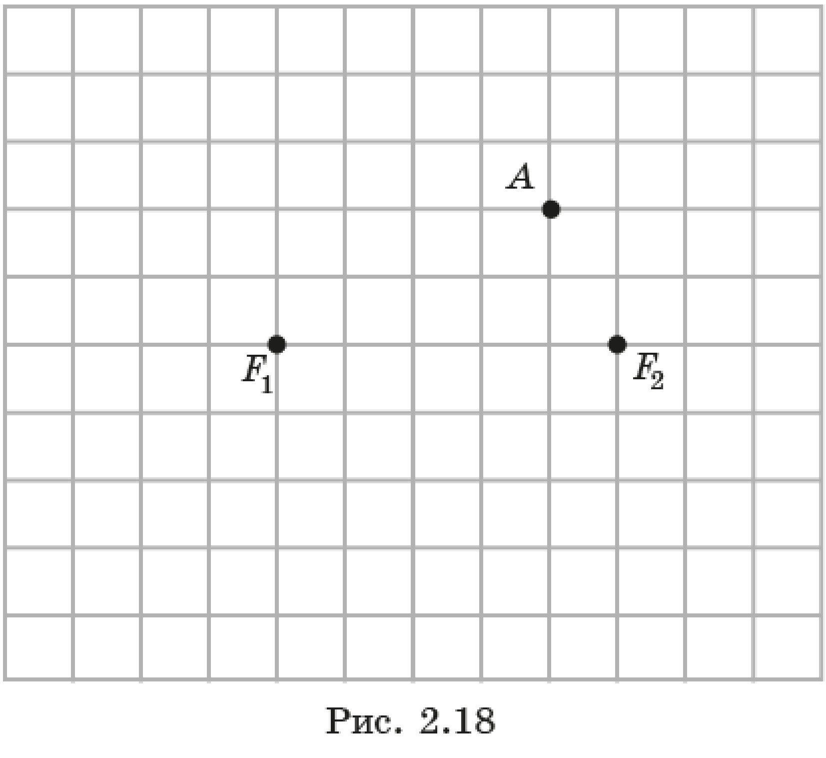

Рис. 2.18

19. Постройте касательные к эллипсу с данными фокусами F_1, F_2 и константой c, проходящие через данную точку A, не принадлежащую эллипсу (рис. 2.19). Укажите точки касания.

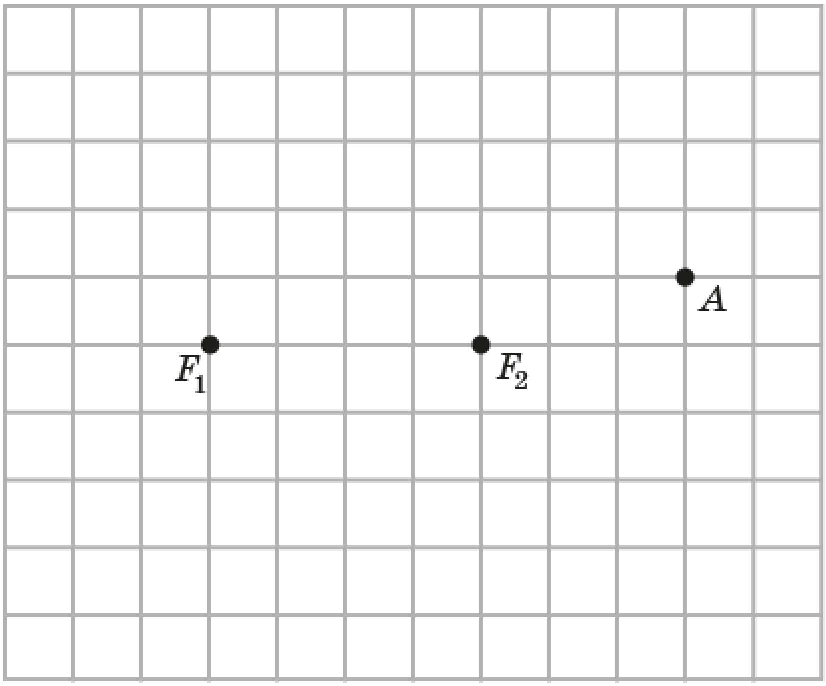

Рис. 2.19

20. Для данных фокусов F_1, F_2 и касательной a к эллипсу (рис. 2.20) укажите точку касания.

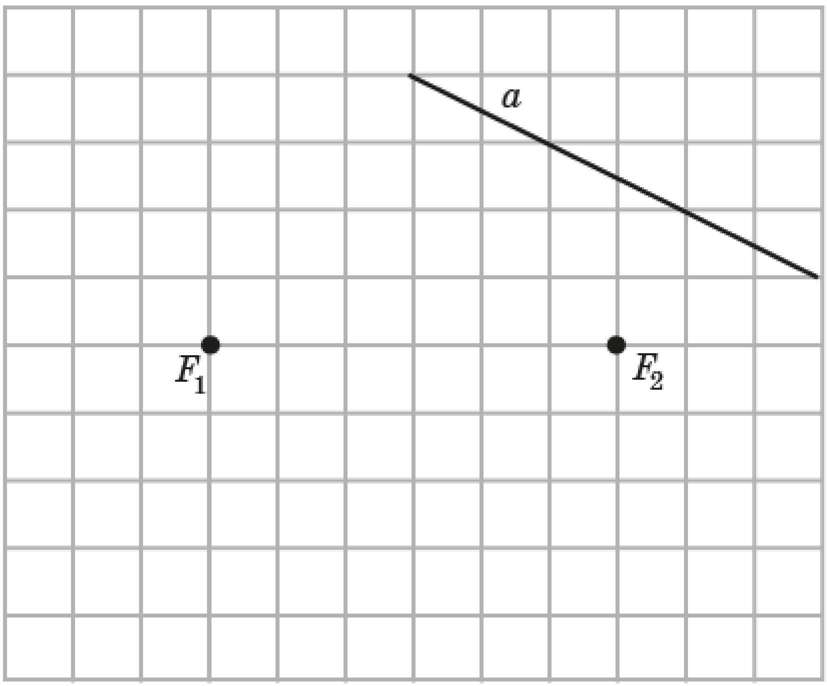

Рис. 2.20

21. Для точки A эллипса, константы $c = 8$ и одного из фокусов F_1, используя циркуль и линейку, постройте геометрическое место вторых фокусов (рис. 2.21).

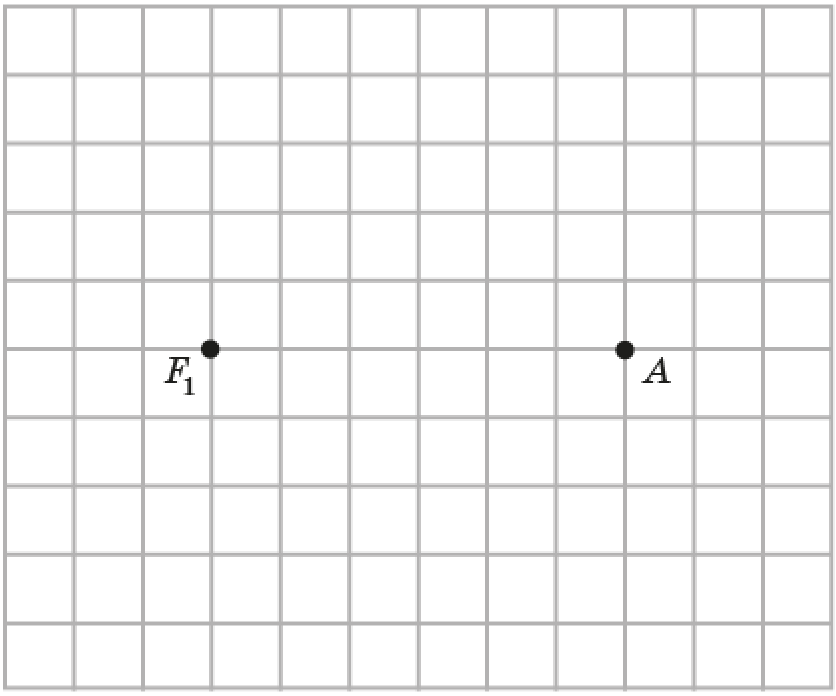

Рис. 2.21

22. Для точек A_1, A_2 эллипса, константы $c = 8$ и одного из фокусов F_1, используя циркуль и линейку, постройте второй фокус (рис. 2.22).

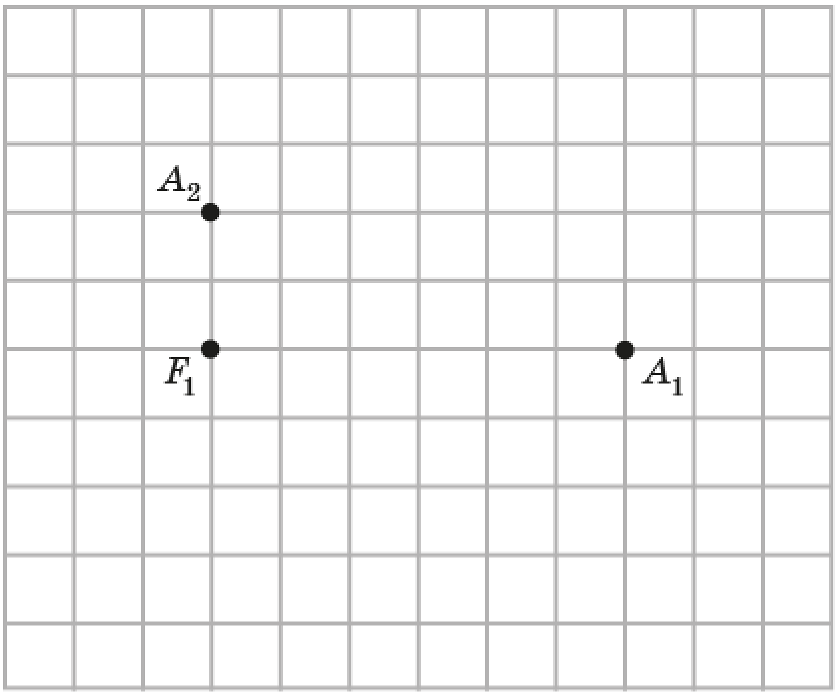

Рис. 2.22

23. Для данных фокусов F_1, F_2 и касательной a к эллипсу (рис. 2.23) постройте отрезок, длина которого равна константе c эллипса.

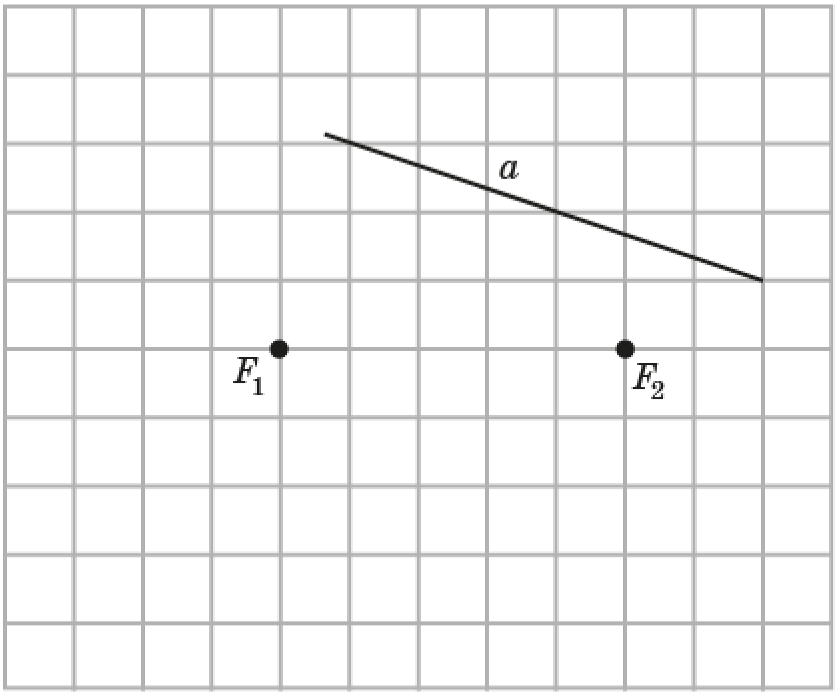

Рис. 2.23

24. Для данных фокуса F_1, касательной a, точки касания A и константы c эллипса (рис. 2.24) постройте второй фокус.

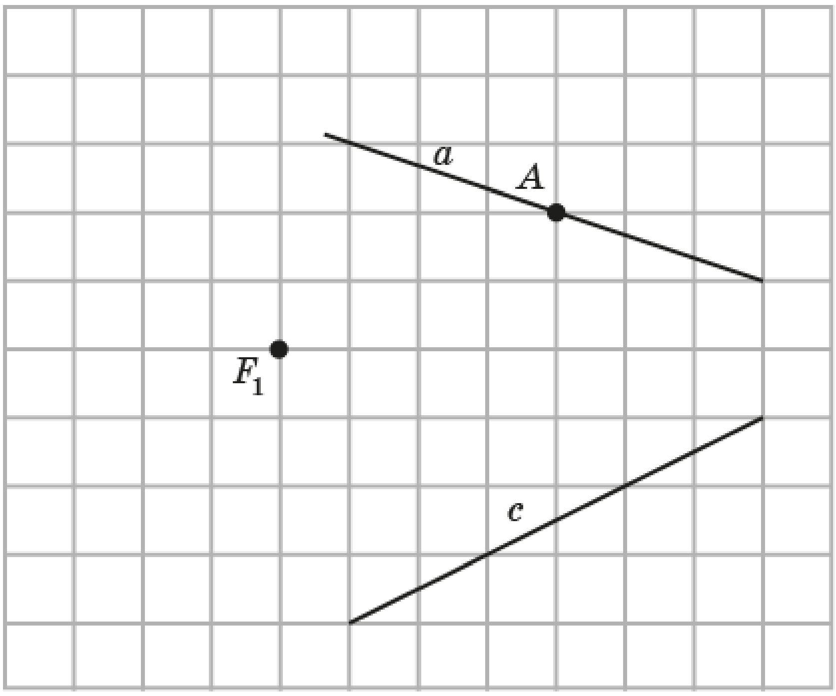

Рис. 2.24

25. Для данных фокуса F_1, касательной a, точки B эллипса и константы c (рис. 2.25) постройте второй фокус.

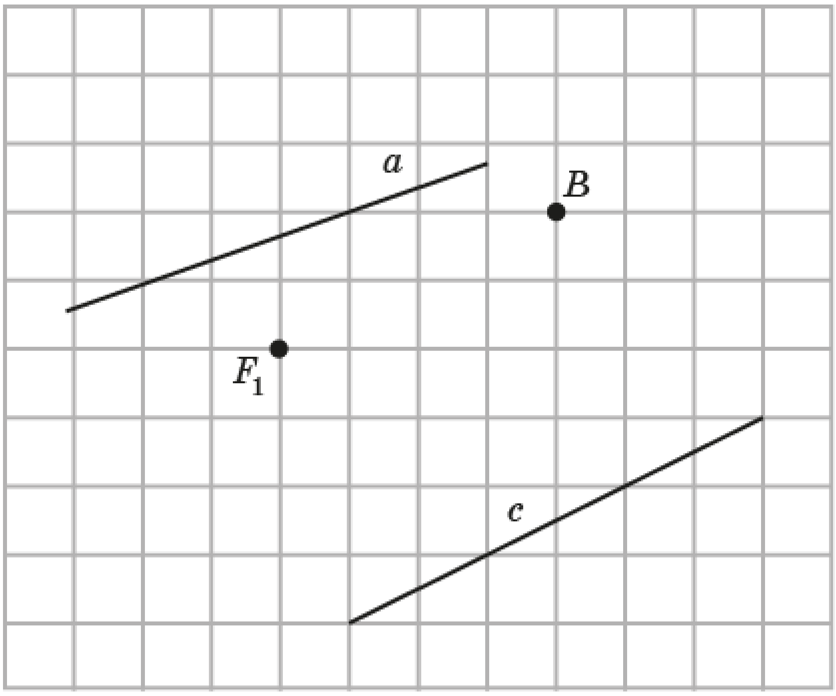

Рис. 2.25

26. Для двух касательных к эллипсу и константе $c = 8$ постройте второй фокус эллипса (рис. 2.26).

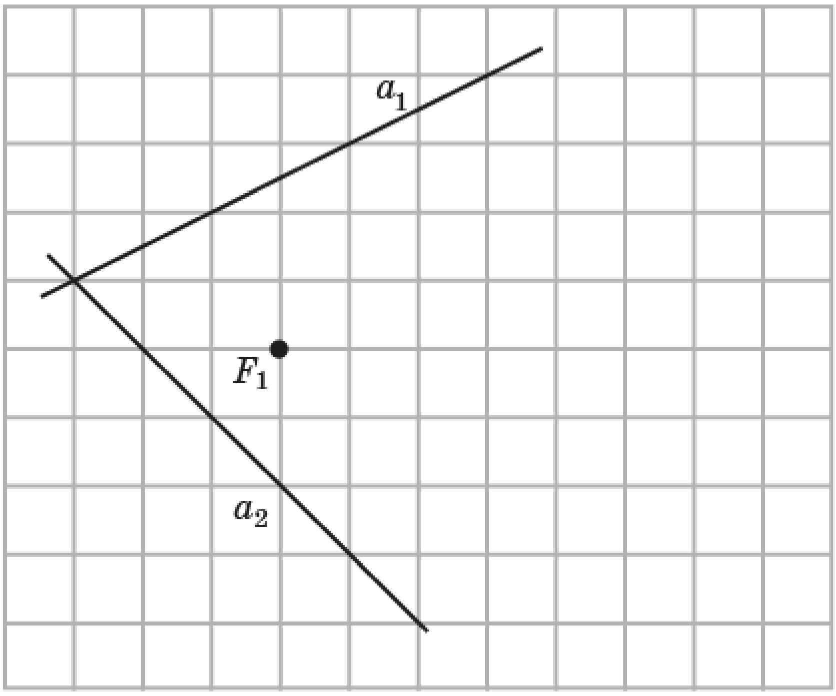

Рис. 2.26

27. Используя рисунок 2.27, докажите, что углы, под которыми из фокусов F_1, F_2 эллипса видны отрезки AA_1, AA_2 касательных, равны, т. е. равны углы AF_1A_1 и AF_1A_2, AF_2A_1 и AF_2A_2.

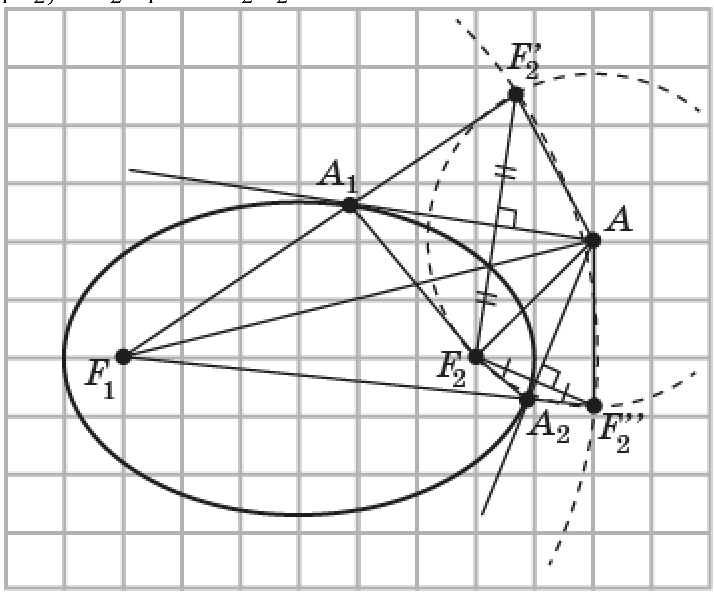

Рис. 2.27

28. Используя рисунок 2.28, докажите, что величина угла $B_1F_1B_2$, под которым из фокуса F_1 виден отрезок B_1B_2 касательной, проведённой через точку B, расположенной внутри угла A_1AA_2, не зависит от положения точки B.

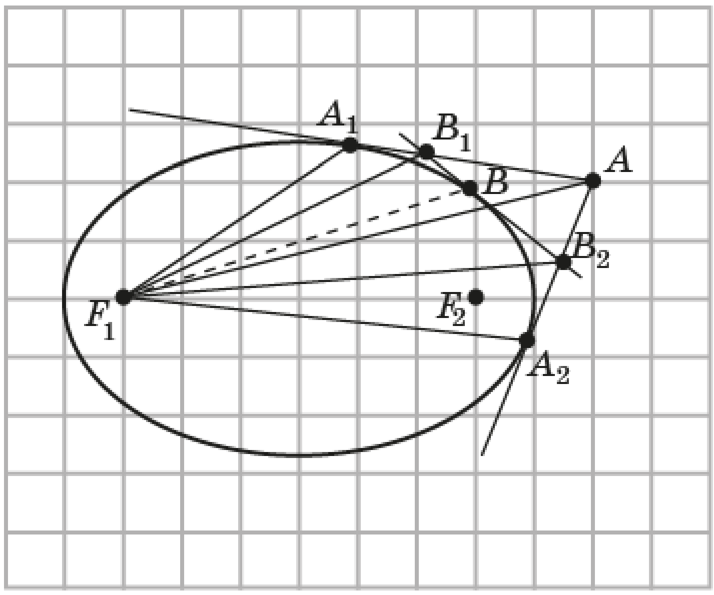

Рис. 2.28

3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек постоянен и равен положительному числу, меньшему расстояния между этими точками.

1. Изобразите несколько точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 равен 4 (рис. 3.1). Соедините их плавной кривой. Получите гиперболу.

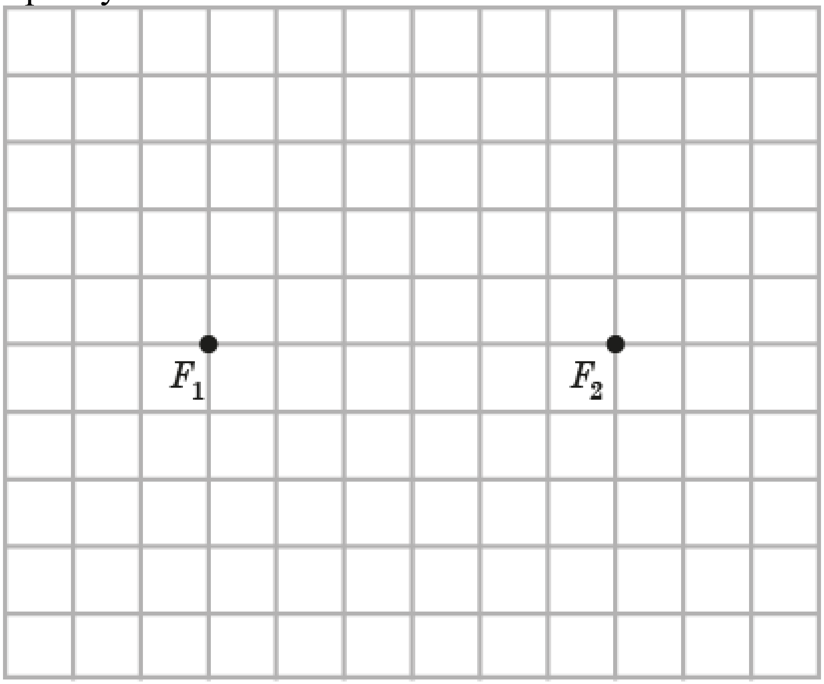

Рис. 3.1

2. Изобразите несколько точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 равен 2 (рис. 3.2). Соедините их плавной кривой. Получите гиперболу.

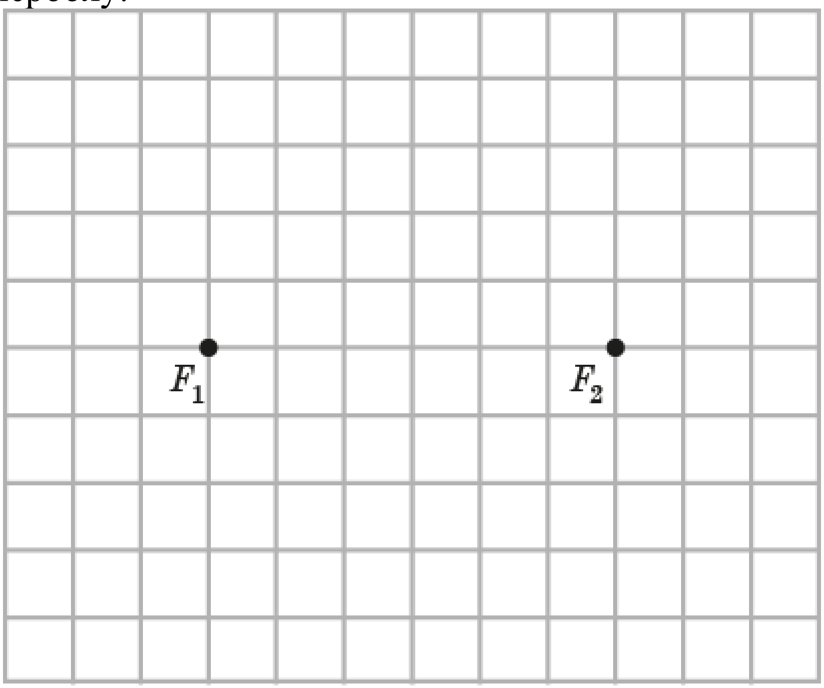

Рис. 3.2

3. Изобразите ГМТ, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 меньше 4 (рис. 3.3).

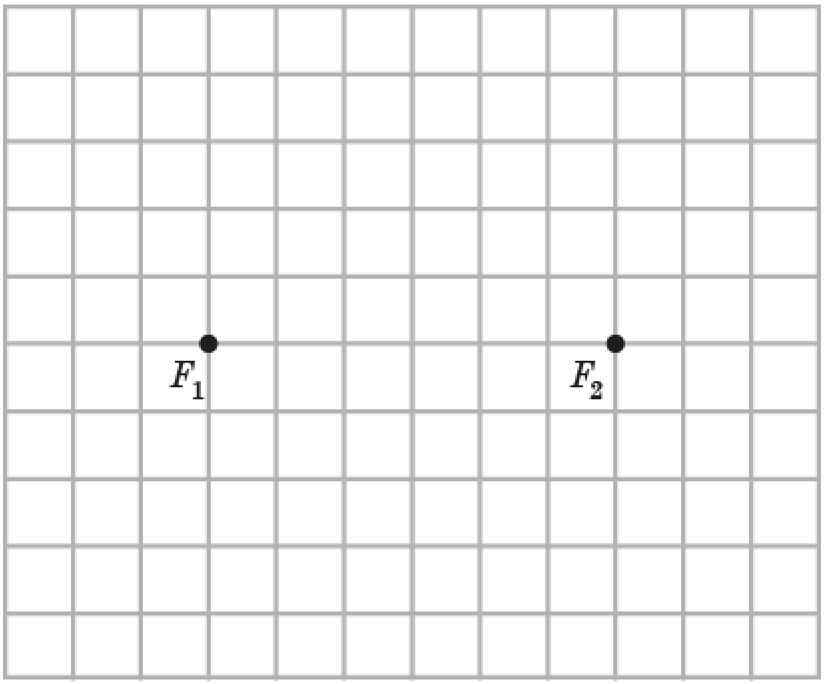

Рис. 3.3

4. Изобразите ГМТ, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 больше 2 (рис. 3.4).

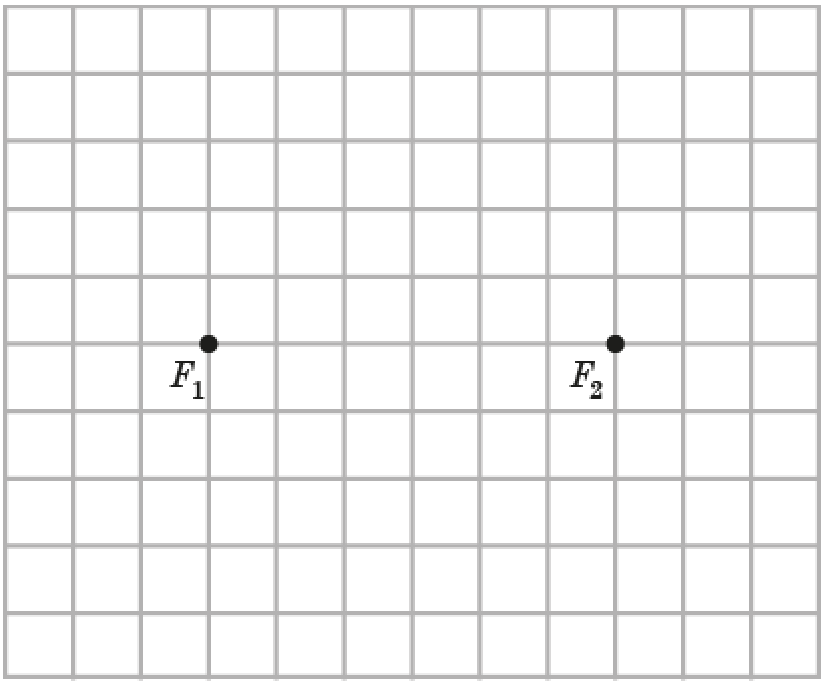

Рис. 3.4

5. Используя рисунок 3.5, докажите, что модуль разности расстояний от точек A', расположенных между ветвями гиперболы, до двух данных фокусов F_1, F_2 гиперболы меньше константы c гиперболы.

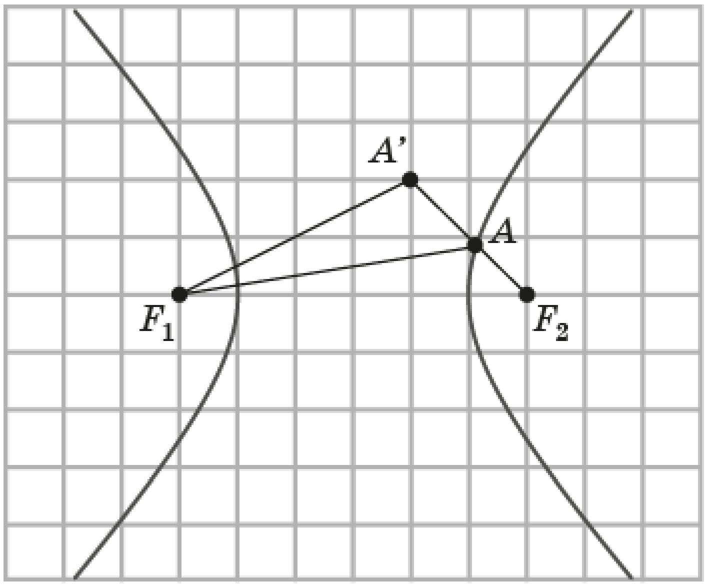

Рис. 3.5

6. Используя рисунок 3.6, докажите, что модуль разности расстояний от точек A'', расположенных внутри ветвей гиперболы, до двух данных фокусов F_1, F_2 гиперболы больше константы c гиперболы.

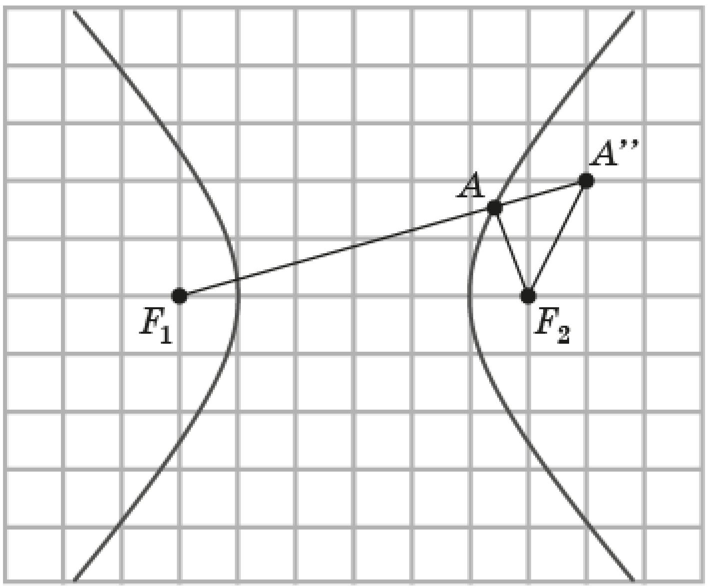

Рис. 3.6

7. Докажите, что геометрическим местом точек, равноудалённых от данной окружности и данной точки P, расположенной вне этой окружности (рис. 3.7), является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы.

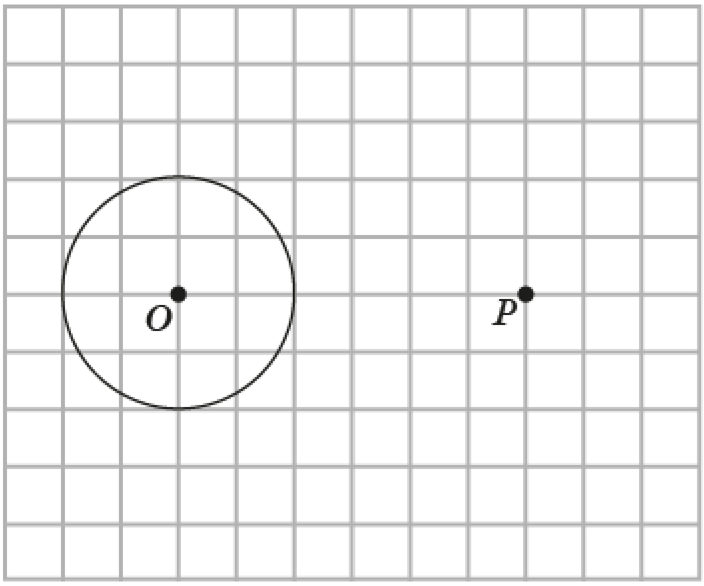

Рис. 3.7

8. Докажите, что геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до данной окружности и данной точки P постоянна и равна h, является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы для h = 1.

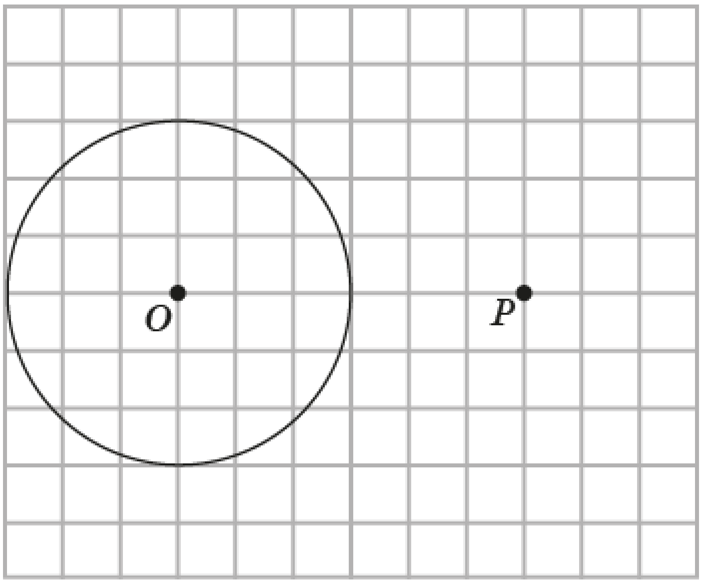

Рис. 3.8

9. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной окружности с центром O внешним образом и проходящих через данную точку P, расположенную вне этой окружности (рис. 3.9), является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы.

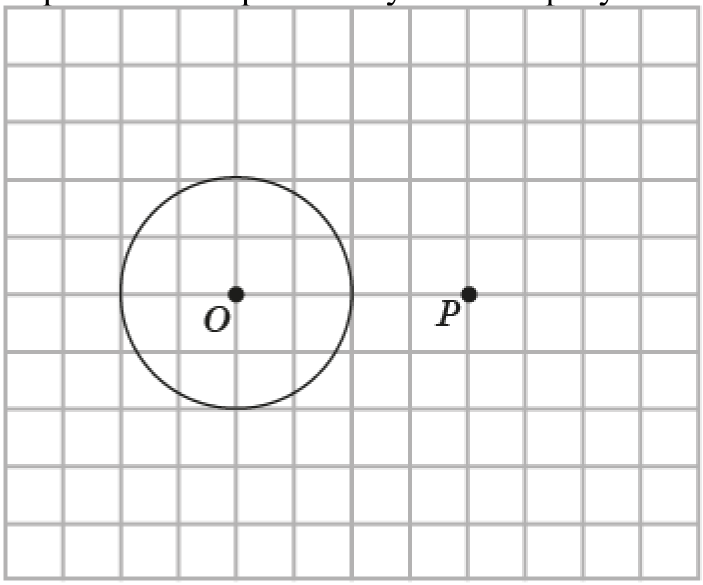

Рис. 3.9

10. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной окружности с центром O внутренним образом и проходящих через данную точку P, расположенную вне этой окружности (рис. 3.9), является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы.

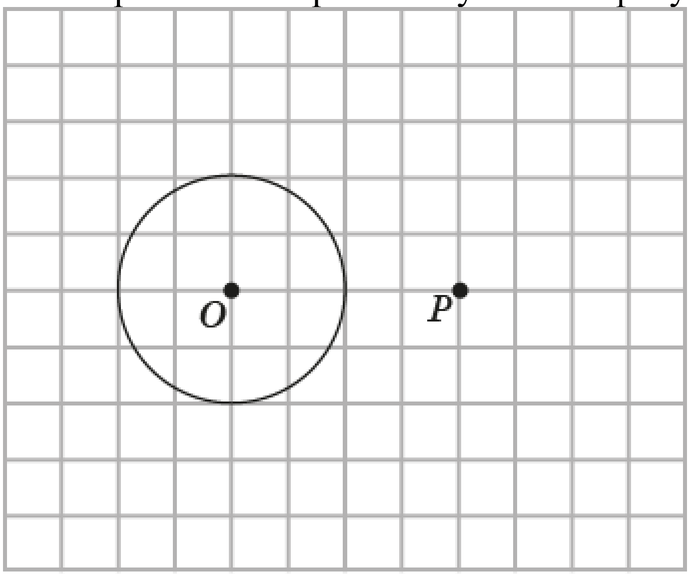

Рис. 3.10

11. Докажите, что геометрическим местом точек равноудалённых от двух данных окружностей (рис. 3.11), является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы.

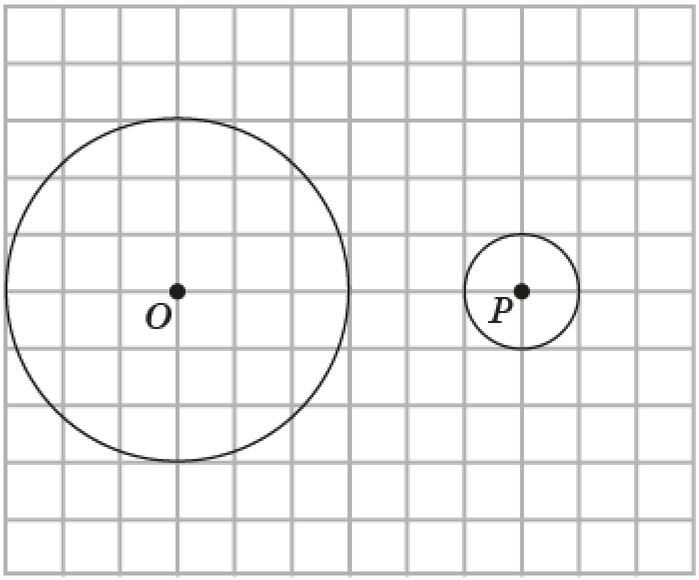

Рис. 3.11

12. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данных окружностей внешним образом (рис. 3.12), является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы.

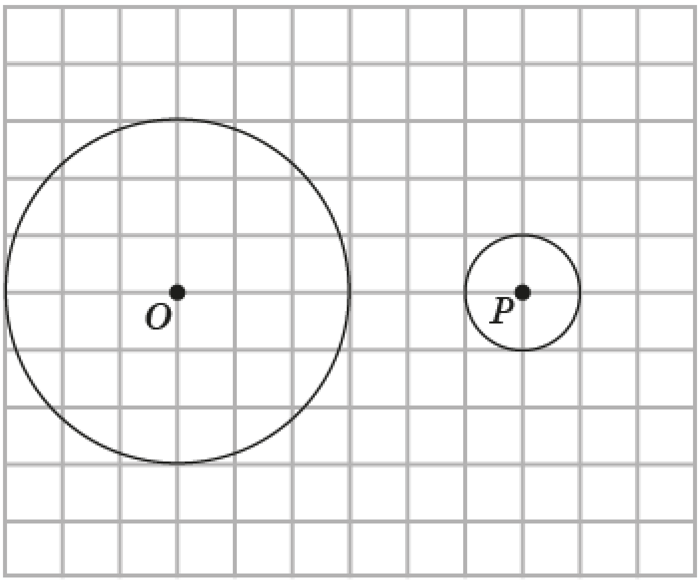

Рис. 3.12

13. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся данных окружностей внутренним образом (рис. 3.13), является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы.

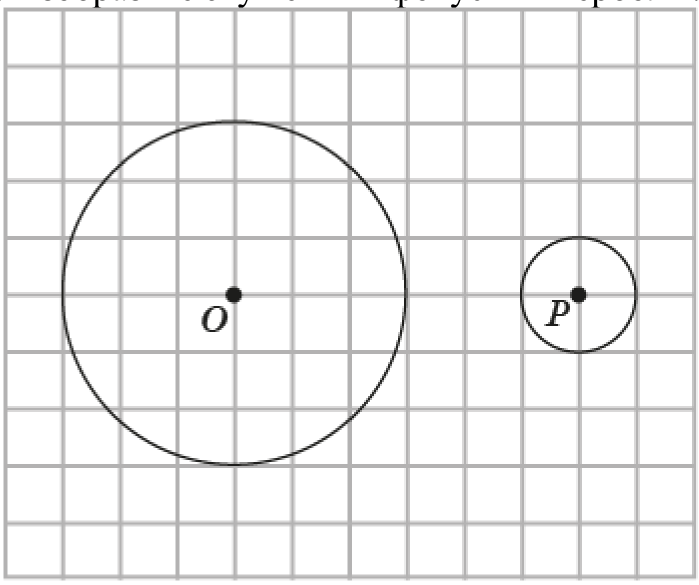

Рис. 3.13

____

____

____

14. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся окружности с центром P внутренним образом и окружности с центром O внешним образом (рис. 3.14), является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы.

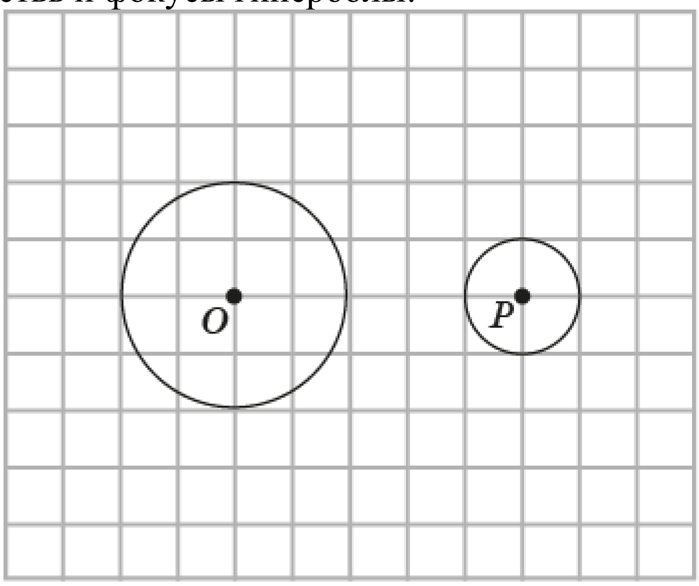

Рис. 3.14

____

____

____

15. Докажите, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся окружности с центром O внутренним образом и окружности с центром P внешним образом (рис. 3.15), является ветвь гиперболы. Изобразите эту ветвь и фокусы гиперболы.

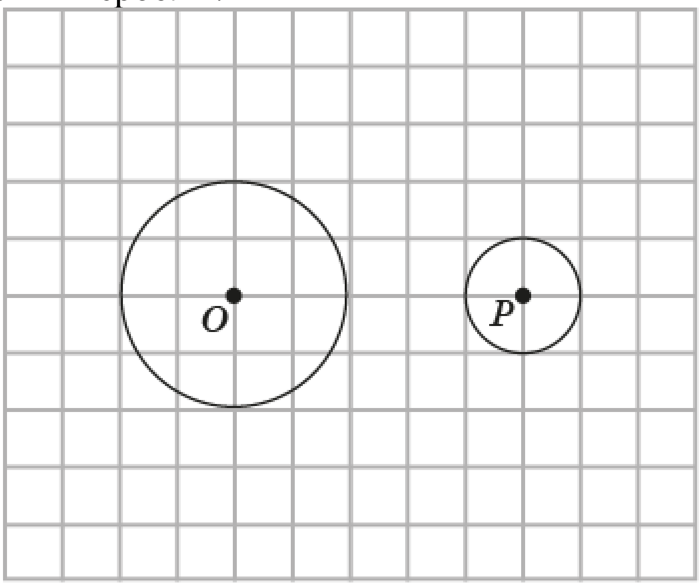

Рис. 3.15

---

16. Изобразите геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных окружностей (рис. 3.16).

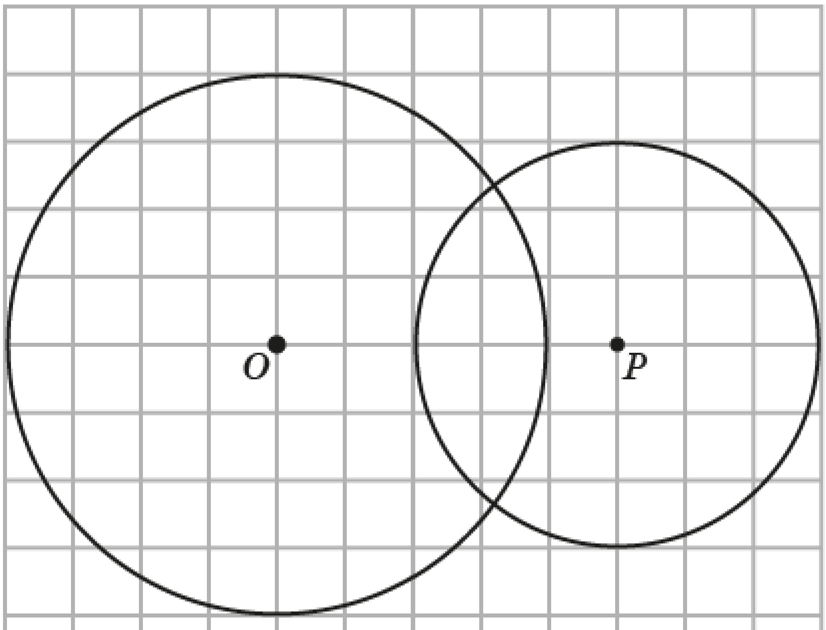

Рис. 3.16

17. Изобразите геометрическое место центров окружностей, касающихся окружностей с центрами O и P (рис. 3.17).

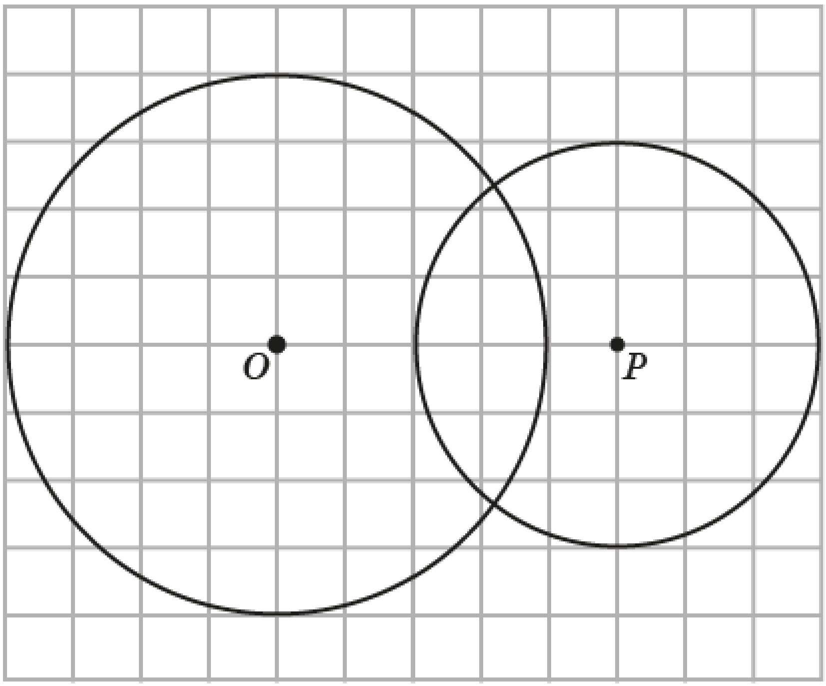

Рис. 3.17

18. Изобразите геометрическое место точек, расстоянит от которых до данной точки F в 2 раза больше расстояния до данной прямой d (рис. 3.18). Какой кривой оно является?

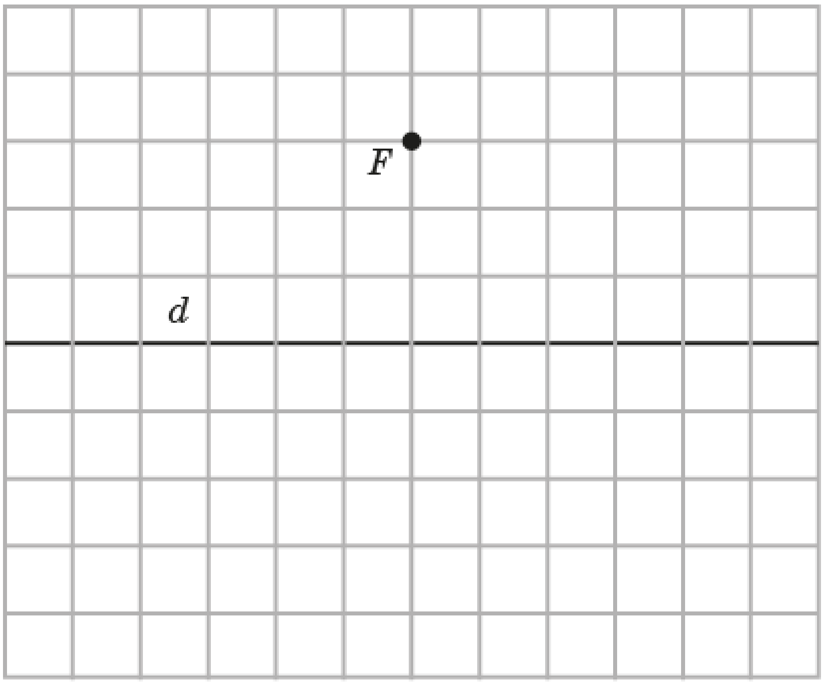

Рис. 3.18

19. Даны фокусы F_1, F_2 и константа c гиперболы (рис. 3.19). Докажите, что для любой точки D окружности с центром F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр a к отрезку FD является касательной к гиперболе. Укажите точку касания.

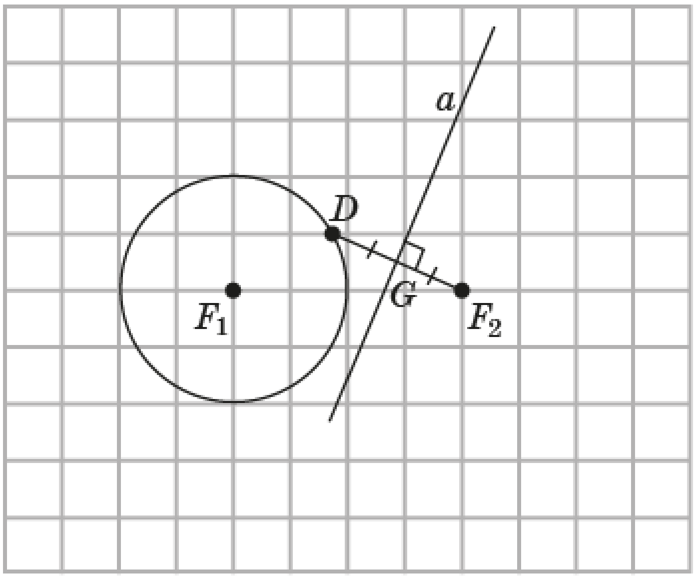

Рис. 3.19

---

20. Используя рисунок 3.20, докажите, что прямая, проходящая через точку A, принадлежащую гиперболе с фокусами F_1, F_2, и содержащая биссектрису угла F_1AF_2, является касательной к гиперболе.

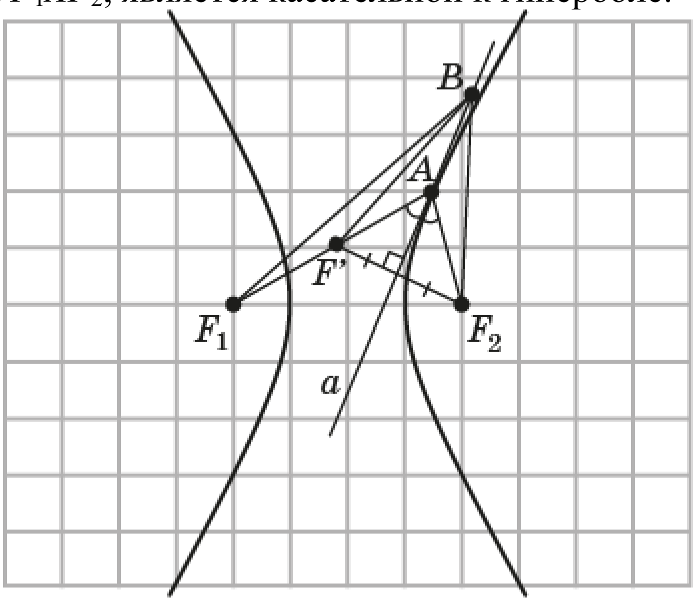

Рис. 3.20

---

21. Докажите, что если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от гиперболы, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса (рис. 3.21).

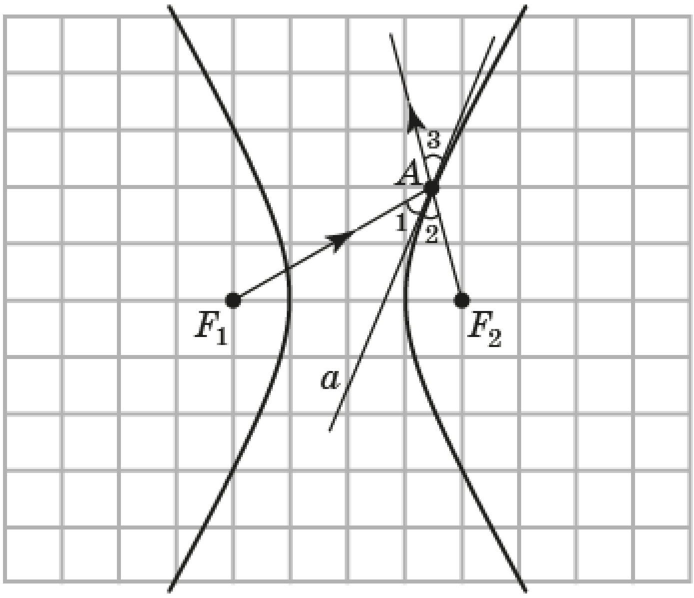

Рис. 3.21

____

____

____

22. Постройте касательную к гиперболе с фокусами F_1, F_2, проходящую через данную точку A, принадлежащую гиперболе (рис. 3.22).

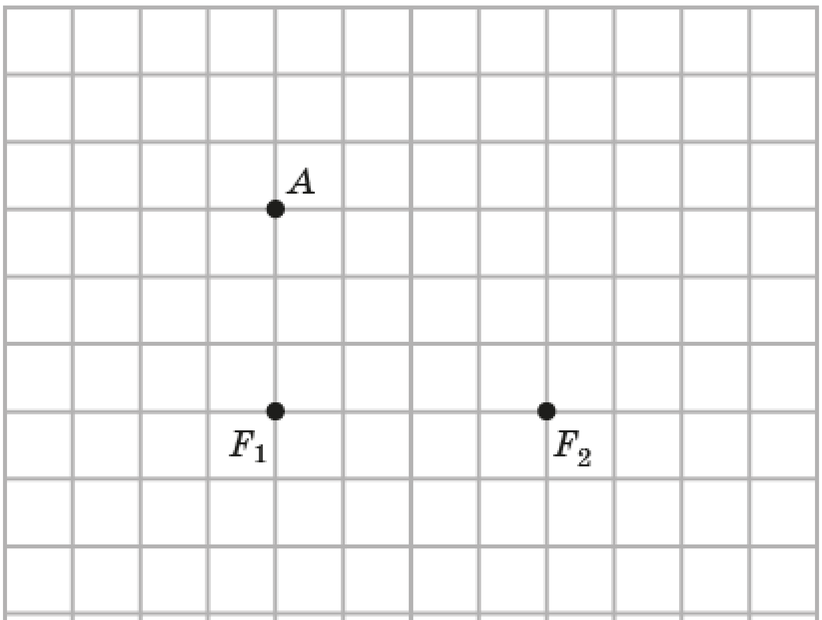

Рис. 3.22

23. Постройте касательные к гиперболе с фокусами F_1, F_2 и константой $c = 2$, проходящие через данную точку B, не принадлежащую гиперболе (рис. 3.23).

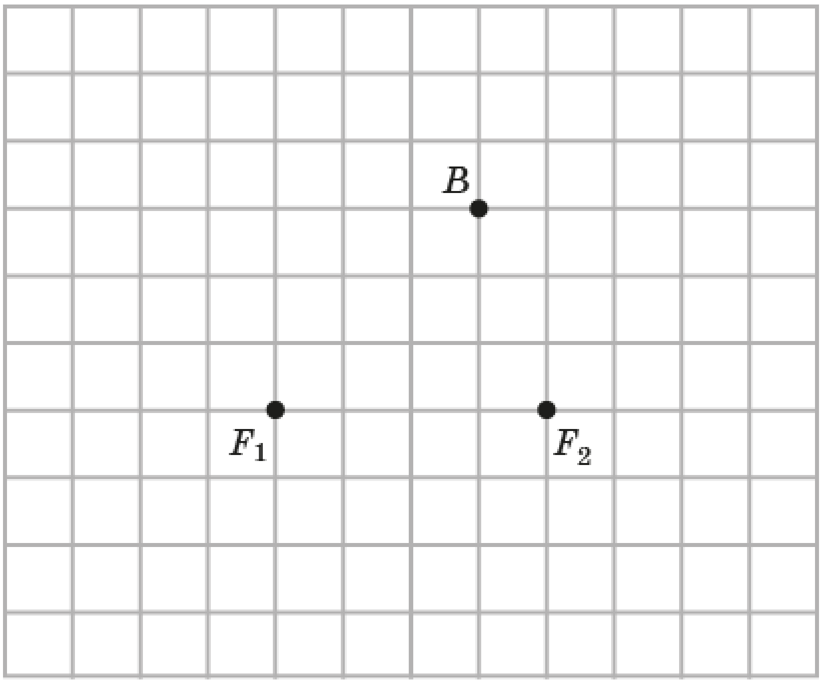

Рис. 3.23

24. Для данных фокусов F_1, F_2 и касательной a к гиперболе (рис. 3.24) укажите точку касания.

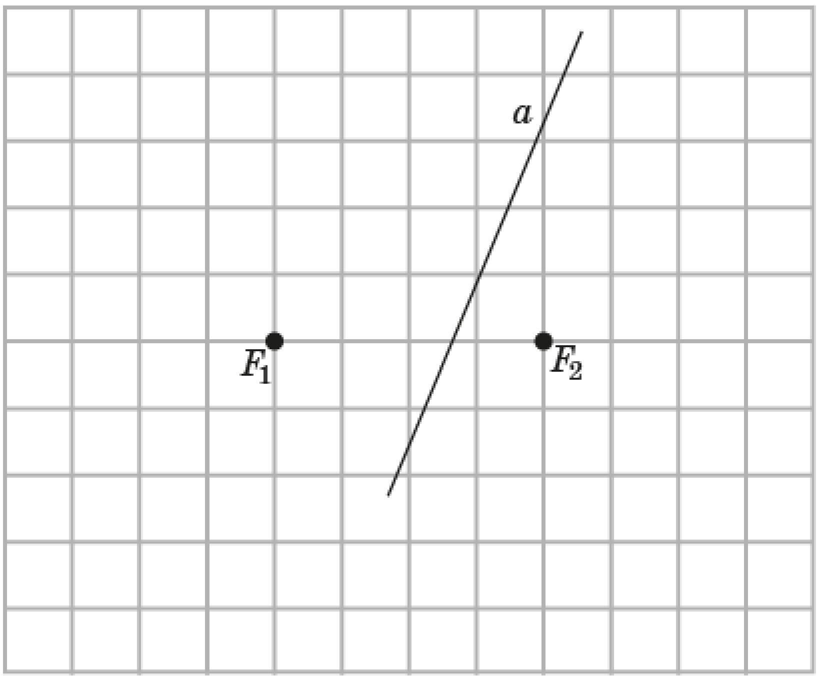

Рис. 3.24

25. Для точки A гиперболы, константы $c = 2$ и одного из фокусов F_1 иризобразите геометрическое место вторых фокусов (рис. 3.25).

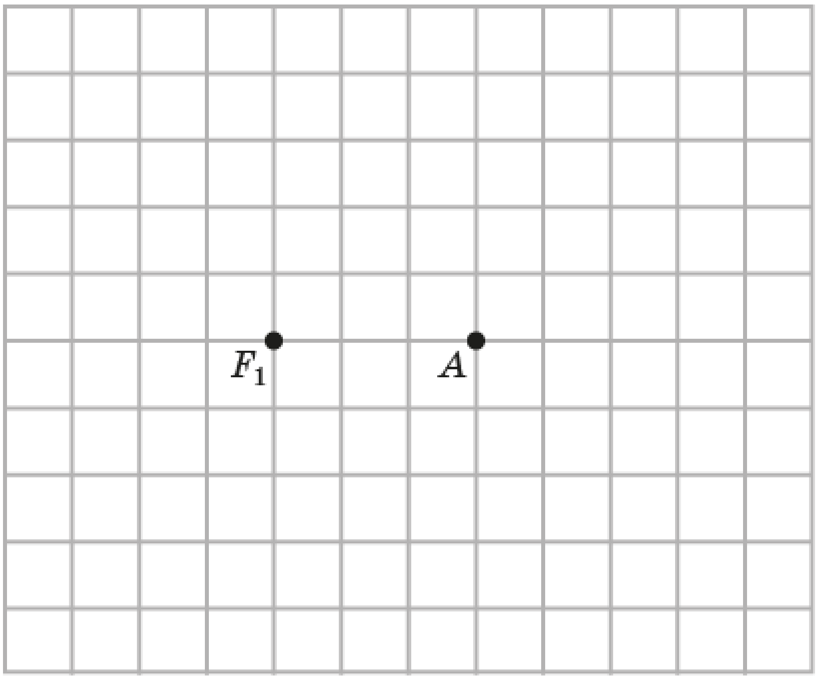

Рис. 3.25

26. Для данных фокусов F_1, F_2 и касательной a к гиперболе (рис. 3.26) постройте отрезок, длина которого равна константе c гиперболы.

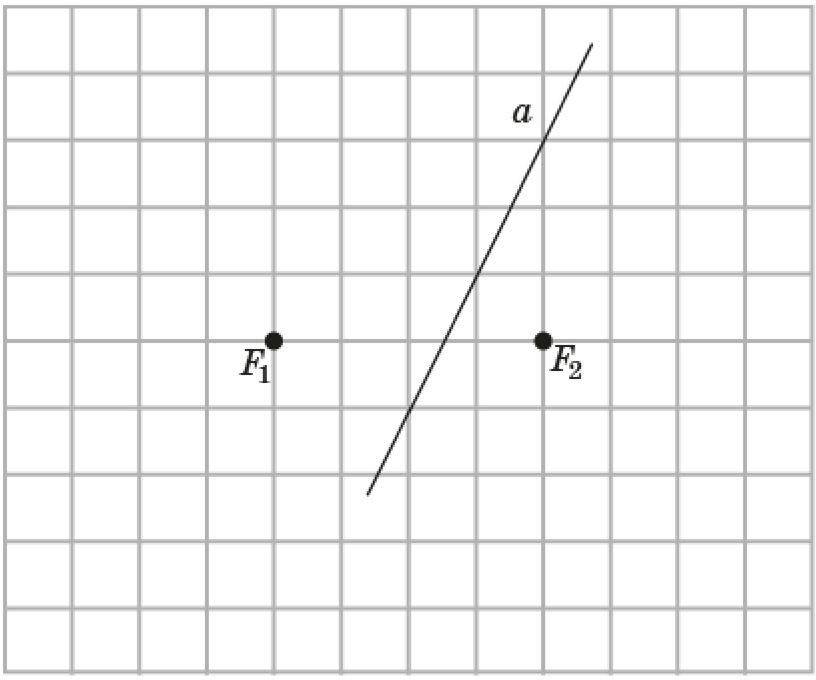

Рис. 3.26

27. Для данных фокуса F_1 гиперболы, касательной a, точки касания A и константы c гиперболы (рис. 3.27) постройте второй фокус.

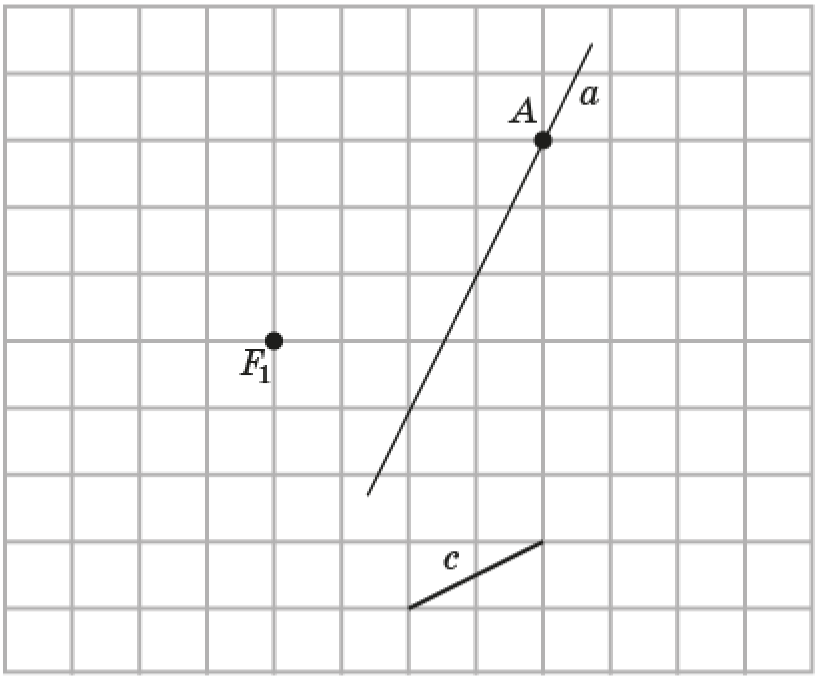

Рис. 3.27

28. Для данного фокуса F_1 гиперболы, двух касательных и константе c = 4 постройте второй фокус (рис. 3.28).

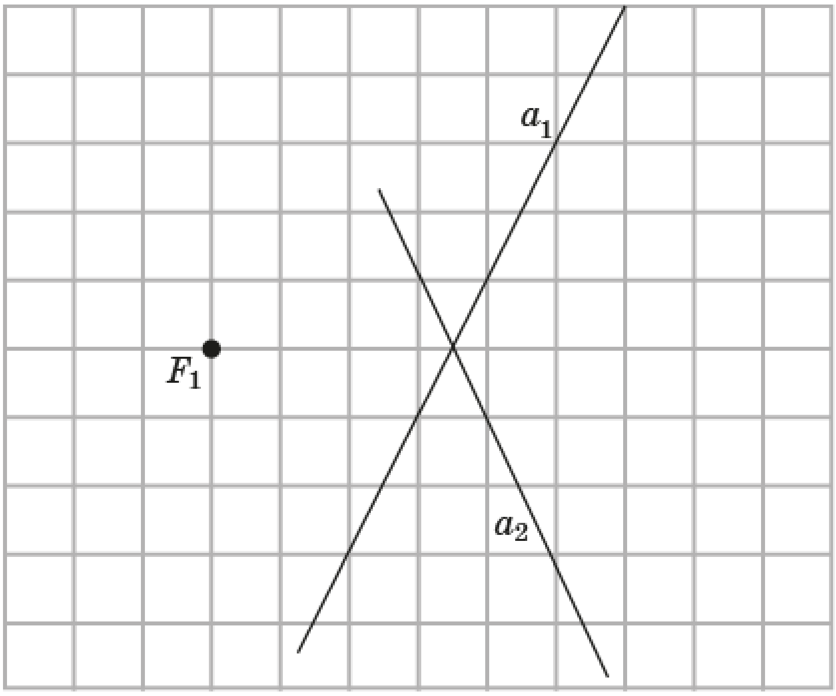

Рис. 3.28

29. Используя рисунок 3.29, докажите, что для касательных AA_1, AA_2, проведённых к гиперболе с фокусами F_1, F_2 из точки A, равны углы AF_1A_1 и AF_1A_2, AF_2A_1 и AF_2A_2,

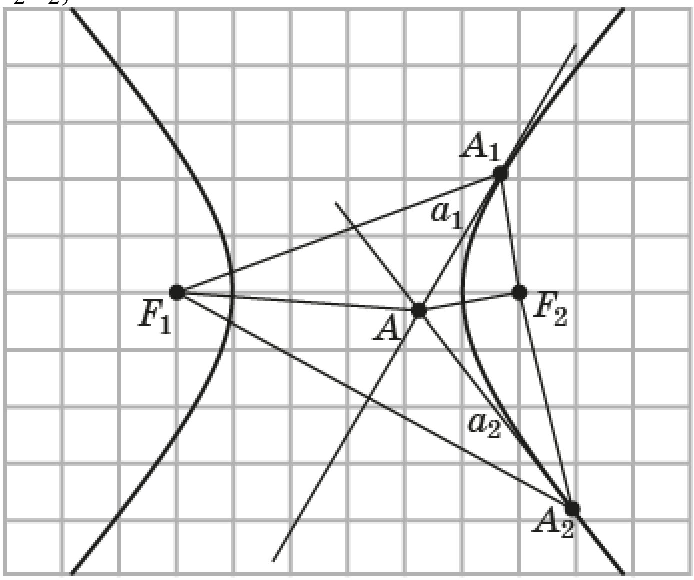

Рис. 3.29

30. Используя рисунок 3.30, докажите, что величины углов $B_1F_1B_2$, $B_1F_2B_2$ под которыми из фокусов F_1, F_2 виден отрезок B_1B_2 касательной к гиперболе, проведённой через точку B, расположенной внутри угла A_1AA_2, не зависит от положения точки B.

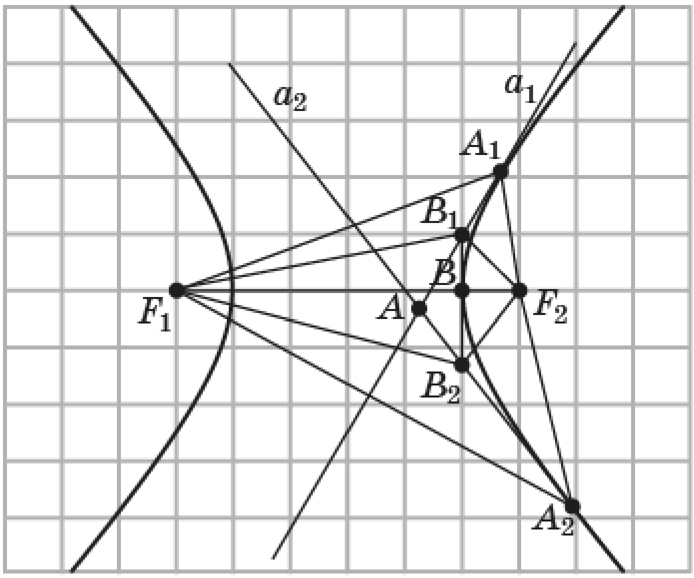

Рис. 3.30

4. Именные кривые

1. Даны прямая c и точка P, расположенная на расстоянии $d = 3$ от этой прямой. Отметьте несколько точек C на прямой c. Через точку P и отмеченные точки C проведите прямые (рис. 4.1). Отложите на них от точек C отрезки $AC = BC = 2$. Соедините полученные точки A и точки B плавной кривой. Получите конхоиду Никомеда.

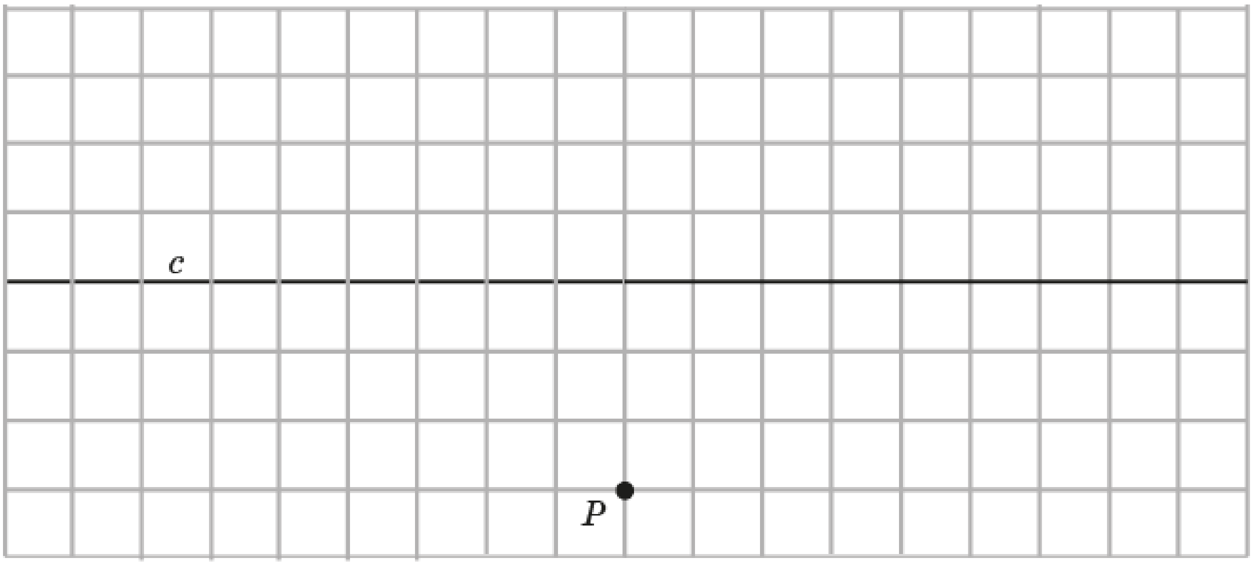

Рис. 4.1

2. Даны прямая c и точка P, расположенная на расстоянии $d = 2$ от этой прямой. Отметьте несколько точек C на прямой c. Через точку P и отмеченные точки C проведите прямые (рис. 4.2). Отложите на них от точек C отрезки $AC = BC = 2$. Соедините полученные точки A и точки B плавной кривой. Получите конхоиду Никомеда.

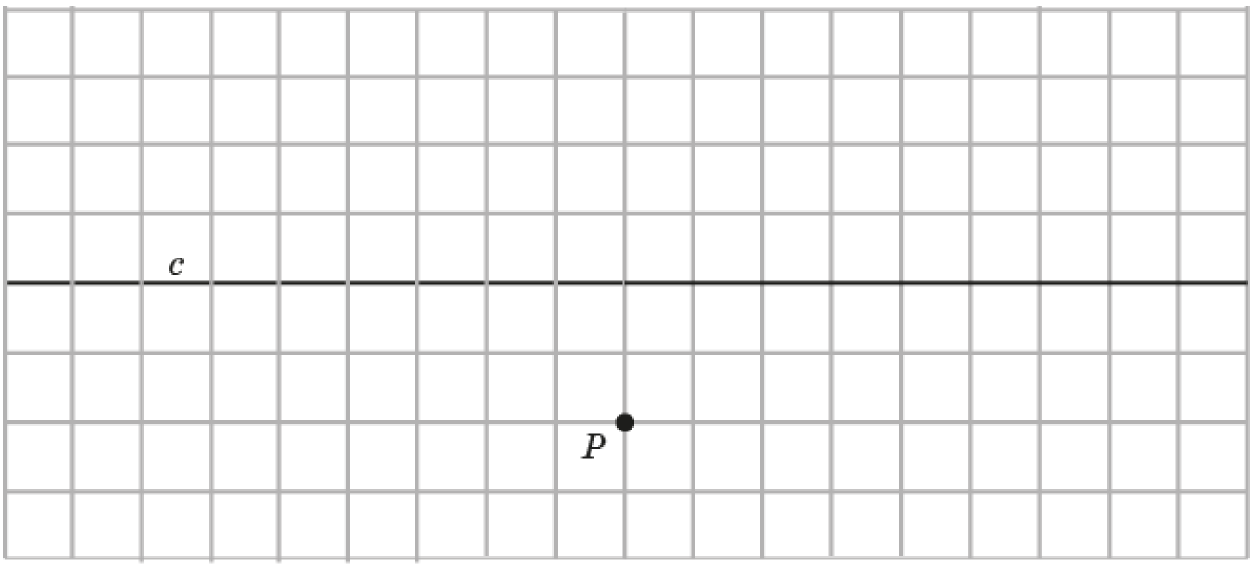

Рис. 4.2

3. Даны прямая c и точка P, расположенная на расстоянии $d = 1$ от этой прямой. Отметьте несколько точек C на прямой c. Через точку P и отмеченные точки C проведите прямые (рис. 4.3). Отложите на них от точек C отрезки $AC = BC = 3$. Соедините полученные точки A и точки B плавной кривой. Получите конхоиду Никомеда.

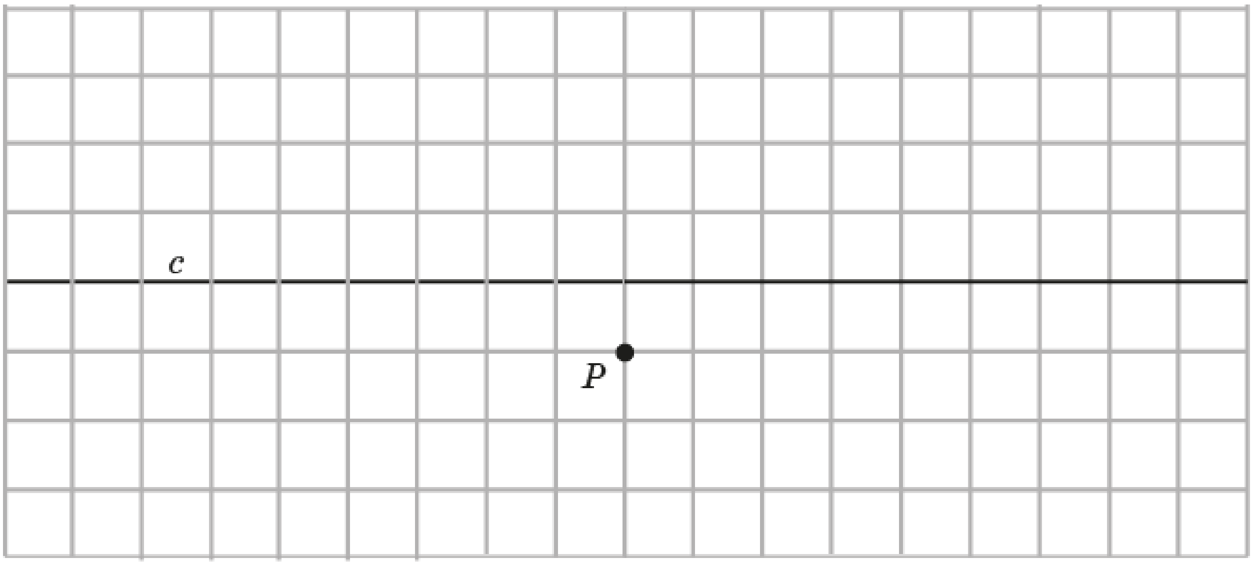

Рис. 4.3

4. Даны окружность c, радиусом 2 и точка P, расположенная на этой окружности. Отметьте несколько точек C на окружности c. Через точку P и отмеченные точки C проведите прямые (рис. 4.4). Отложите на них от точек C отрезки $AC = BC = 2$. Соедините полученные точки A и точки B плавной кривой. Получите улитку Паскаля.

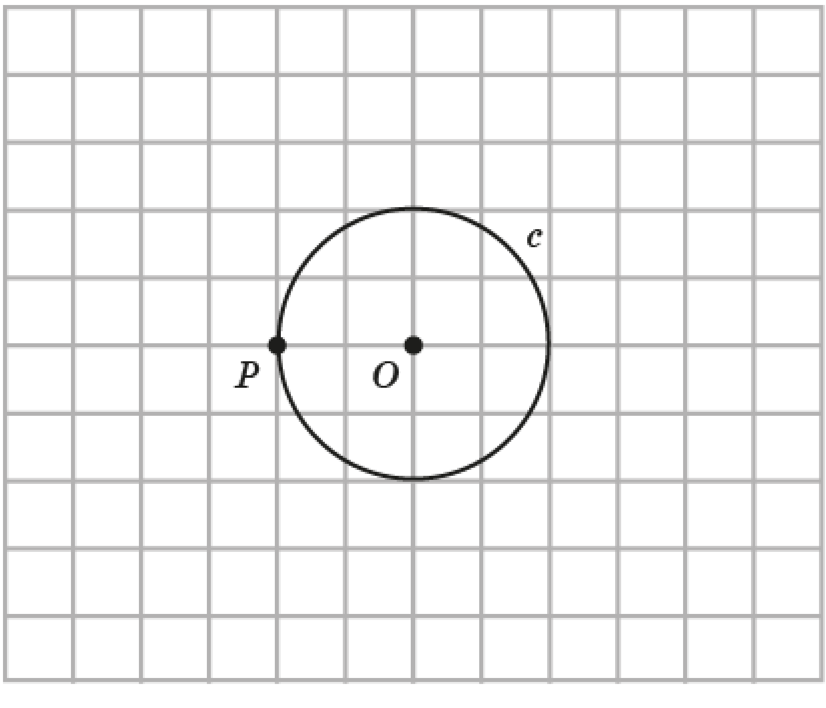

Рис. 4.4

5. Даны окружность c, радиусом 1,5 и точка P, расположенная на этой окружности. Отметьте несколько точек C на окружности c. Через точку P и отмеченные точки C проведите прямые (рис. 4.5). Отложите на них от точек C отрезки $AC = BC = 3$. Соедините полученные точки A и точки B плавной кривой. Получите улитку Паскаля.

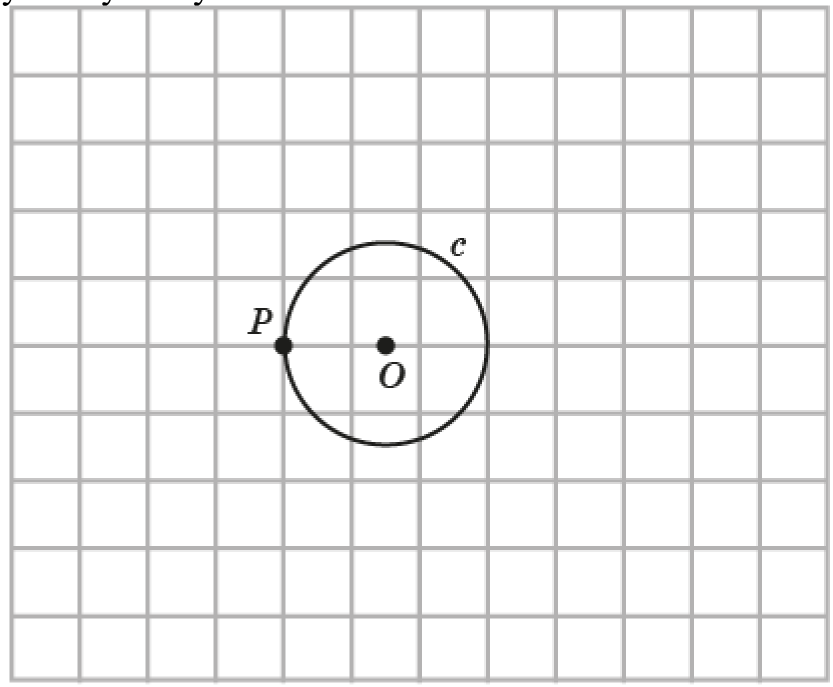

Рис. 4.5

6. Даны окружность c, радиусом 1 и точка P, расположенная на этой окружности. Отметьте несколько точек C окружности c. Через точку P и отмеченные точки C проведите прямые. (рис. 4.6). Отложите на них от точек C отрезки $AC = BC = 3$. Соедините полученные точки A и точки B плавной кривой. Получите улитку Паскаля.

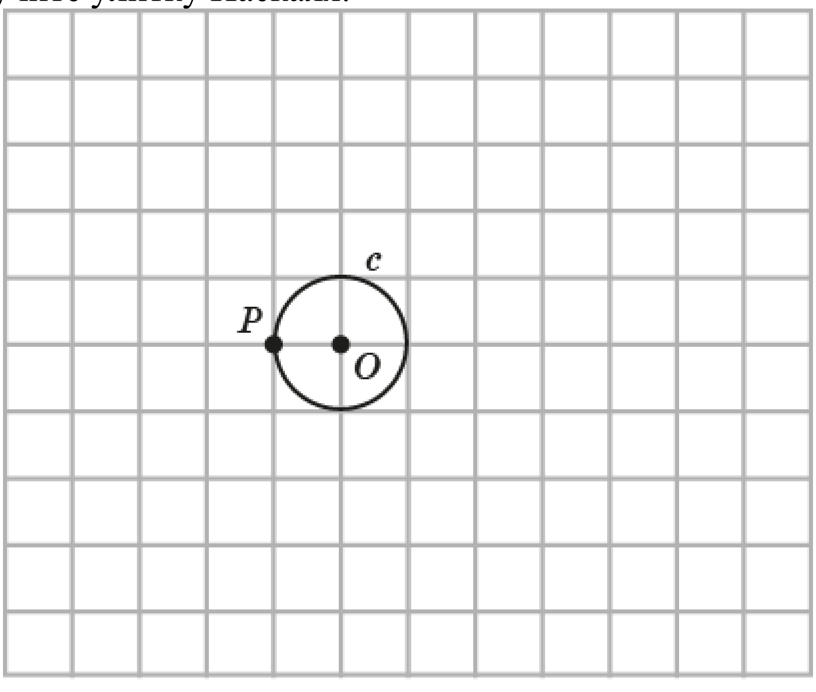

Рис. 4.6

7. Даны прямая c и точка P, расположенная на расстоянии PQ = 3 от этой прямой. Отметьте несколько точек C на прямой c. Через точку P и точки C проведите прямые (рис. 4.7). Отложите на них от точек C отрезки $AC = BC = CQ$. Соедините полученные точки A и точки B плавной кривой. Получите строфоиду.

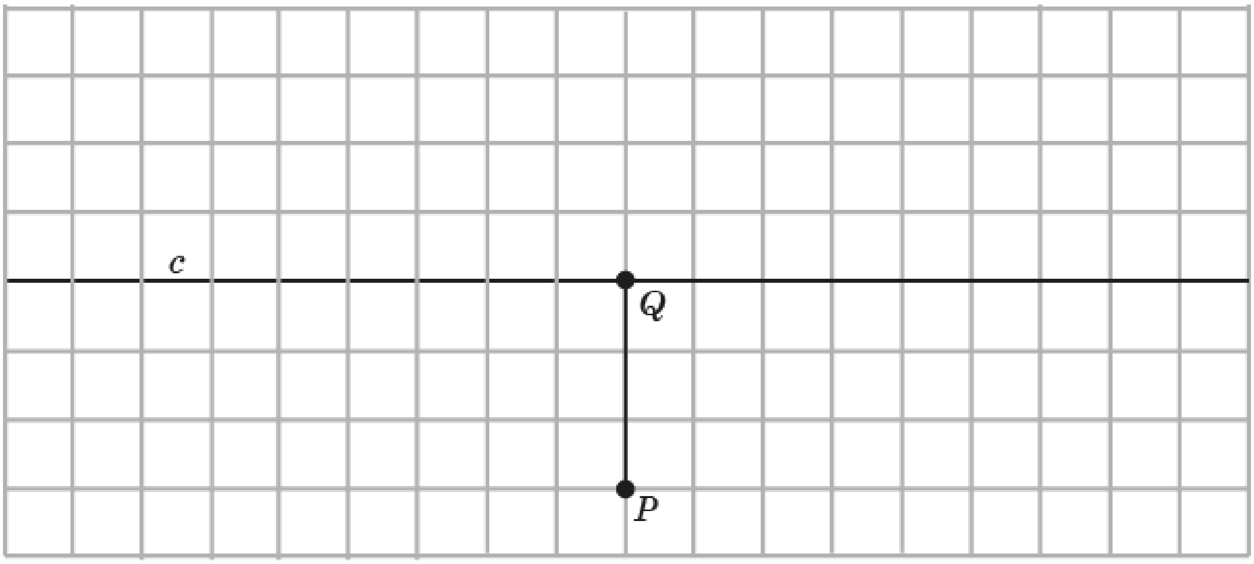

Рис. 4.7

8. Даны прямая c, точка P, расположенная на расстоянии PQ = 4 от этой прямой, и окружность b с диаметром PQ. Отметьте несколько точек C на прямой c. Через точку P и точки C проведите прямые (рис. 4.8). Отложите на них от точек P отрезки $AP = BC$, где B – точка пересечения прямой PC и окружности b. Соедините полученные точки A плавной кривой. Получите циссоиду Диоклеса.

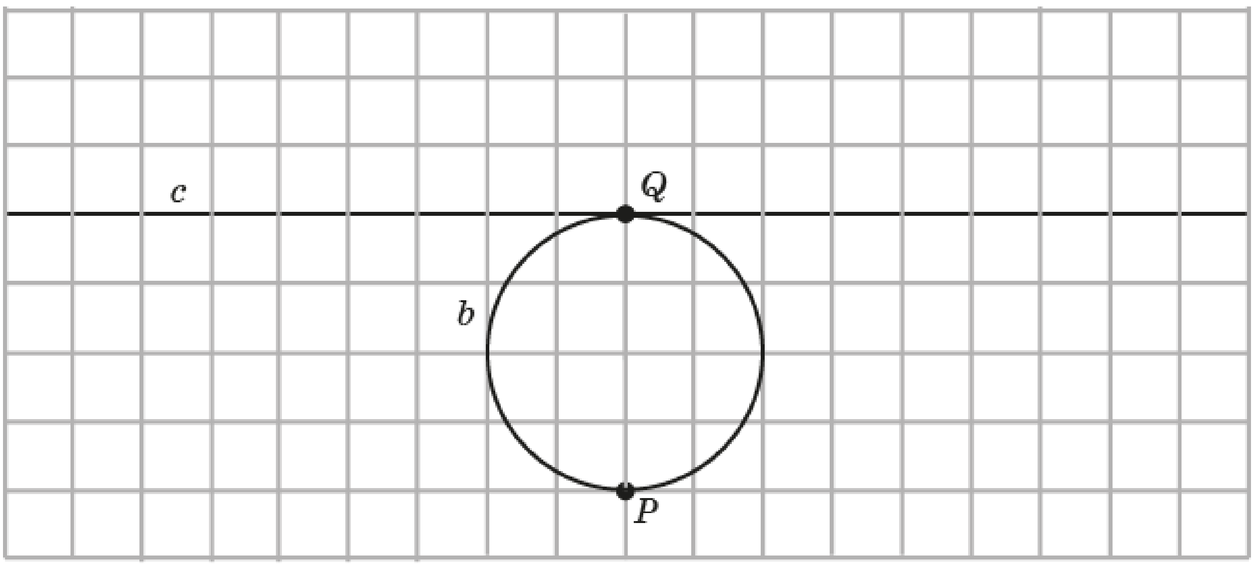

Рис. 4.8

9. Дана окружность с диаметром AB и точка C, расположенная на этом диаметре. Отметьте несколько точек D на этой окружности. Через точку A и отмеченные точки D проведите прямые (рис. 4.9). Через точку C проведите прямые c, параллельные прямым AD. Через точки D проведите прямые d, перпендикулярные прямой AB. Получите точки E пересечения прямых c и d. Соедините эти точки плавной кривой. Получите кривую Крамера.

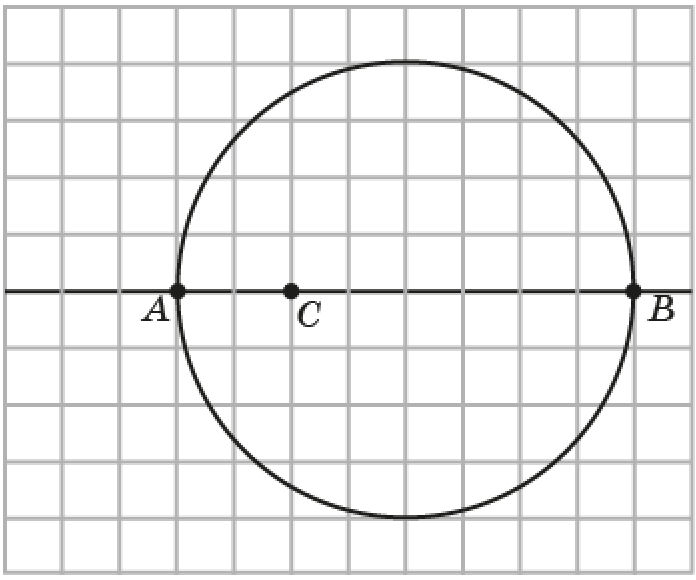

Рис. 4.9

10. Дана прямая c и две точки B, C, ей принадлежащие (рис. 4.10). Поверните прямую c вокруг точки B на некоторый угол φ против часовой стрелки. Поверните прямую c вокруг точки C на угол $\frac{\varphi}{3}$ против часовой стрелки. Отметьте точку E пересечения этих прямых. Изобразите трисектрису Маклорена – геометрическое место таких точек E, соответствующих всевозможным углам поворота φ. Убедитесь в том, что она является кривой Крамера для случая, когда $AC = \frac{1}{4}AB$.

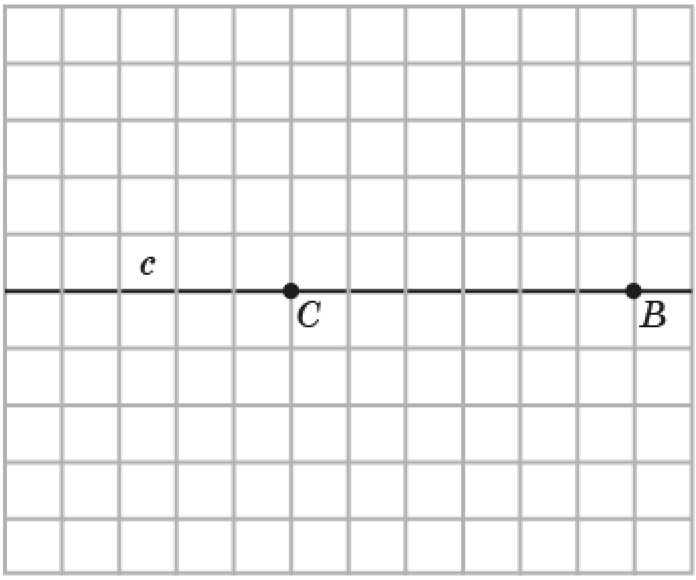

Рис. 4.10

11. Даны точки A и B. Изобразите геометрическое место точек C, для которых отношение расстояний CA и CB равно 2 (рис. 4.11).

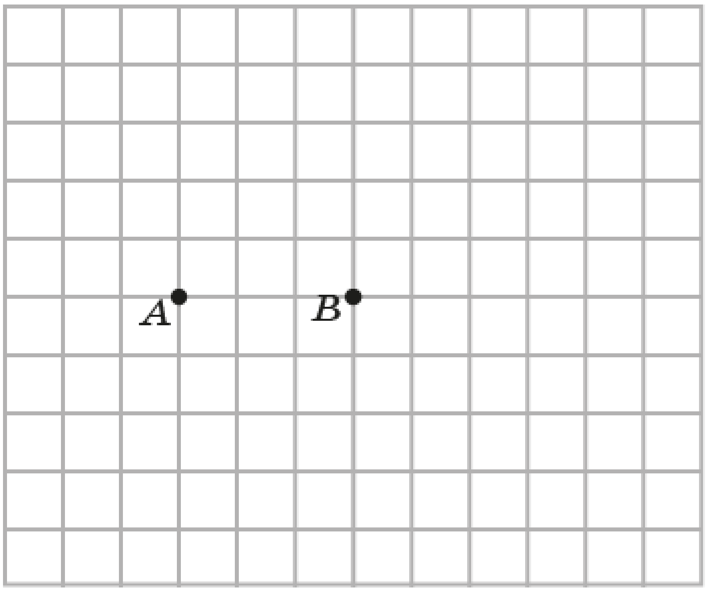

Рис. 4.11

12. Разделите стороны данного треугольника на три равные части. На средних частях постройте треугольники подобные данному (рис. 4.12). Повторяйте это построение на сторонах получающихся многоугольников. Получите приближения звезды (снежинки) Коха.

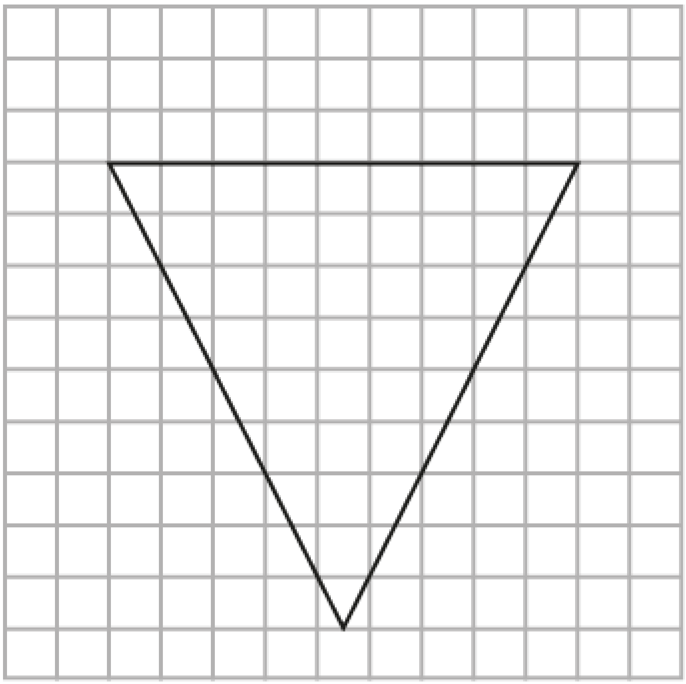

Рис. 4.12

13. Разделите данный квадрат (рис. 4.13) на девять равных квадратов. Выделите средний квадрат. Повторите это построение для оставшихся квадратов и т. д. Постройте приближения ковра Серпинского.

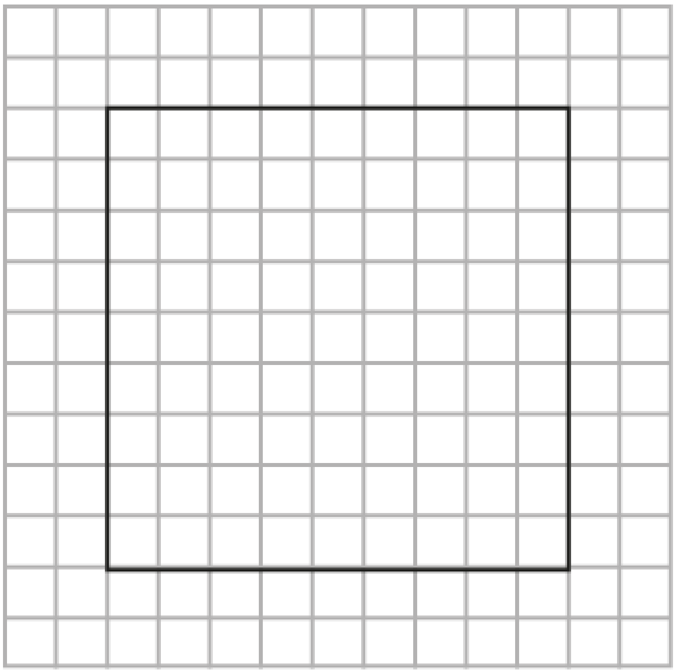

Рис. 4.13

14. Разделите данный треугольник (рис. 4.14) на четыре равных треугольника. Выделите средний треугольник. Повторите это построение для оставшихся треугольников и т. д. Постройте приближения салфетки Серпинского.

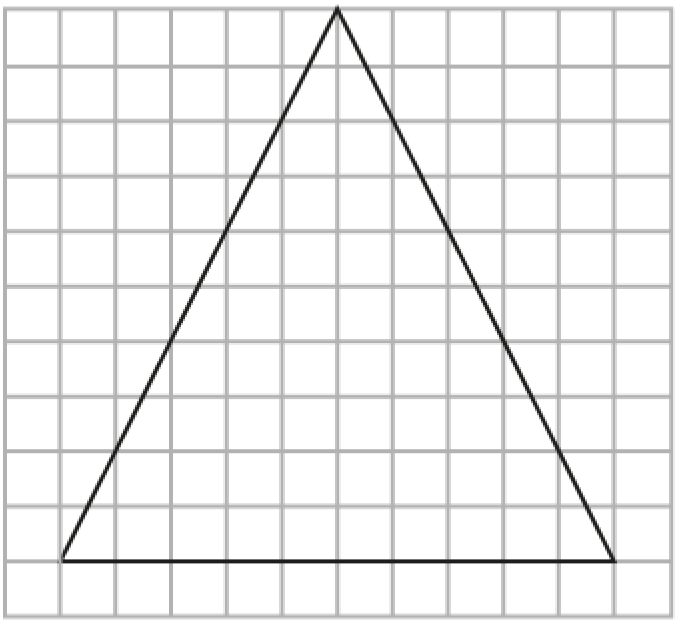

Рис. 4.14

5. Подэры кривых

Подэрой кривой называется геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на касательные к этой кривой.

1. Изобразите подэру окружности c с центром O относительно точки A, расположенной во внешней области этой окружности (рис. 5.1). Какой кривой является эта подэра?

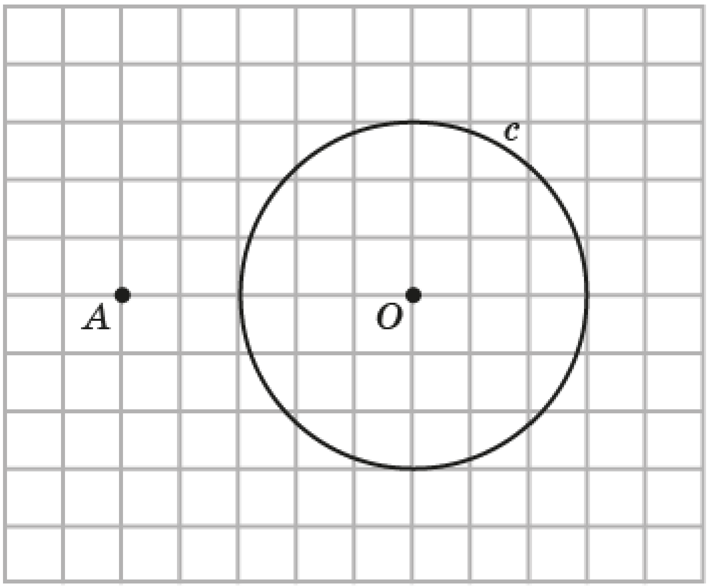

Рис. 5.1

2. Изобразите подэру окружности c с центром O относительно точки A, расположенной на этой окружности (рис. 5.2). Какой кривой является эта подэра?

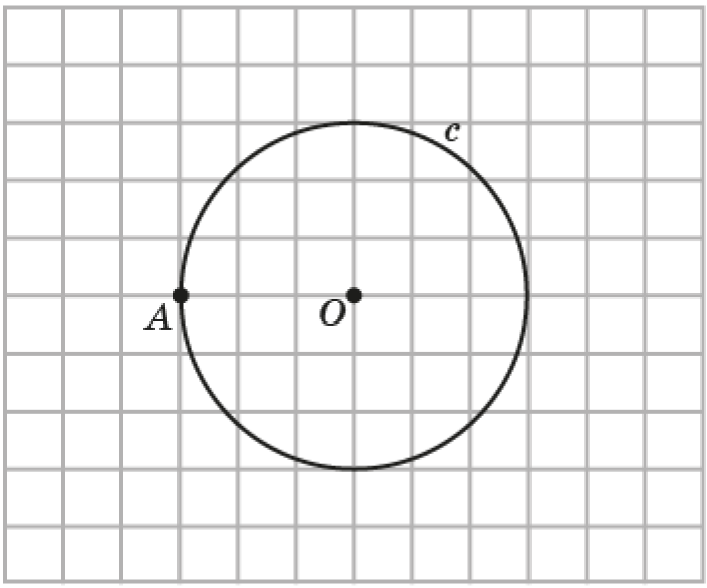

Рис. 5.2

3. Изобразите подэру окружности *c* с центром *O* относительно точки *A*, расположенной во внутренней области этой окружности (рис. 5.3). Какой кривой является эта подэра?

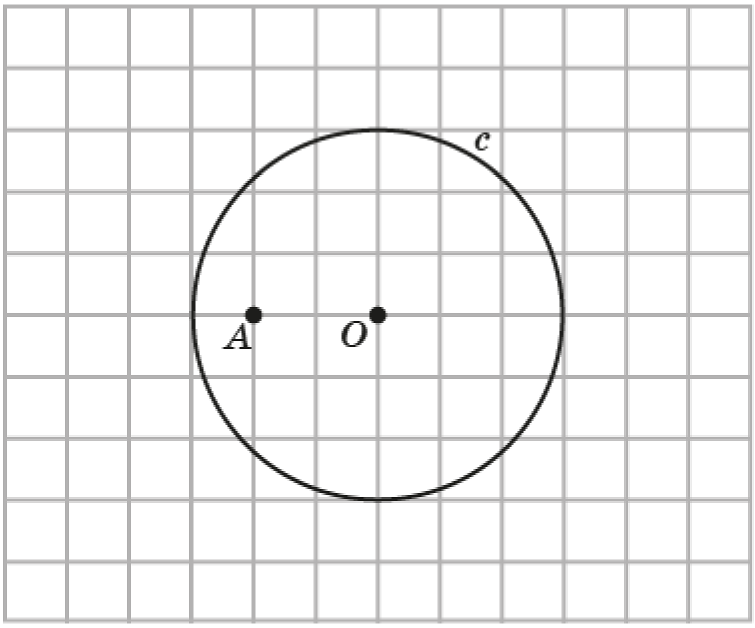

Рис. 5.3

4. Изобразите подэру параболы с фокусом *F* и директрисой *d* относительно данной точки *A*, принадлежащей директрисе (рис. 5.4). Какой кривой является эта подэра?

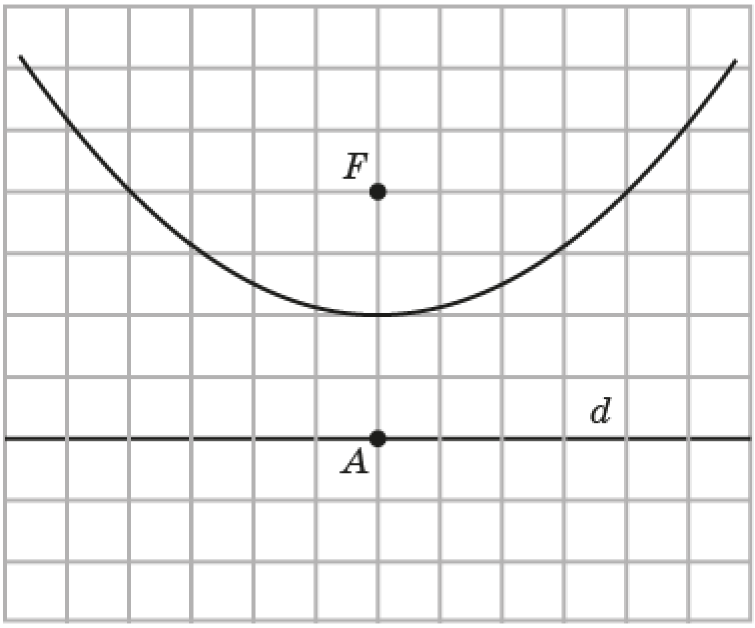

Рис. 5.4

5. Изобразите подэру параболы с фокусом F и директрисой d относительно данной точки A, расположенной в вершине параболы (рис. 5.5). Какой кривой является эта подэра?

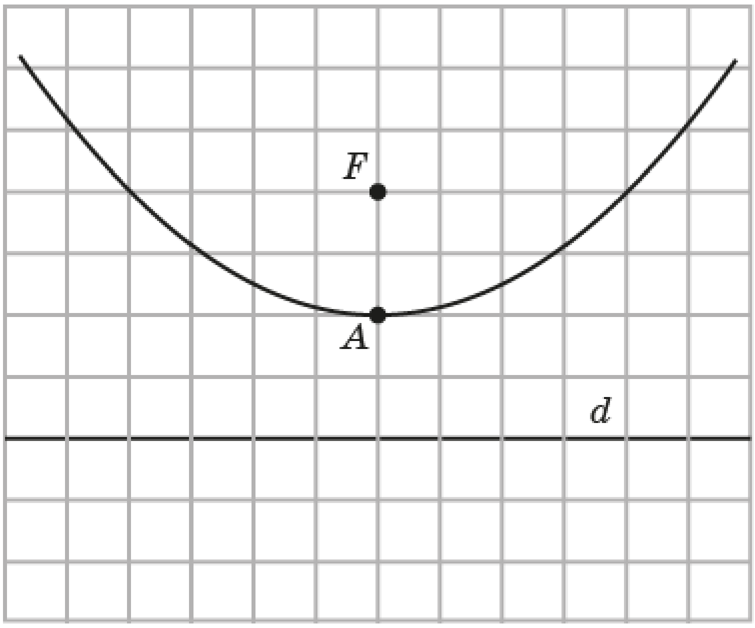

Рис. 5.5

6. Изобразите подэру параболы с фокусом F и директрисой d относительно точки A, совпадающей с фокусом F (рис. 5.6). Какой кривой является эта подэра?

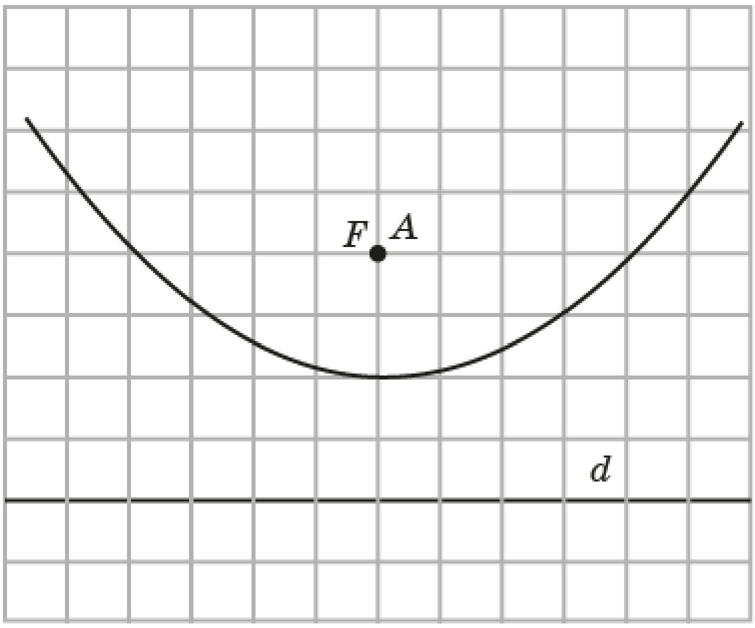

Рис. 5.6

7. Изобразите подэру гиперболы относительно фокуса F_1 (рис. 5.7). Какой кривой является эта подэра?

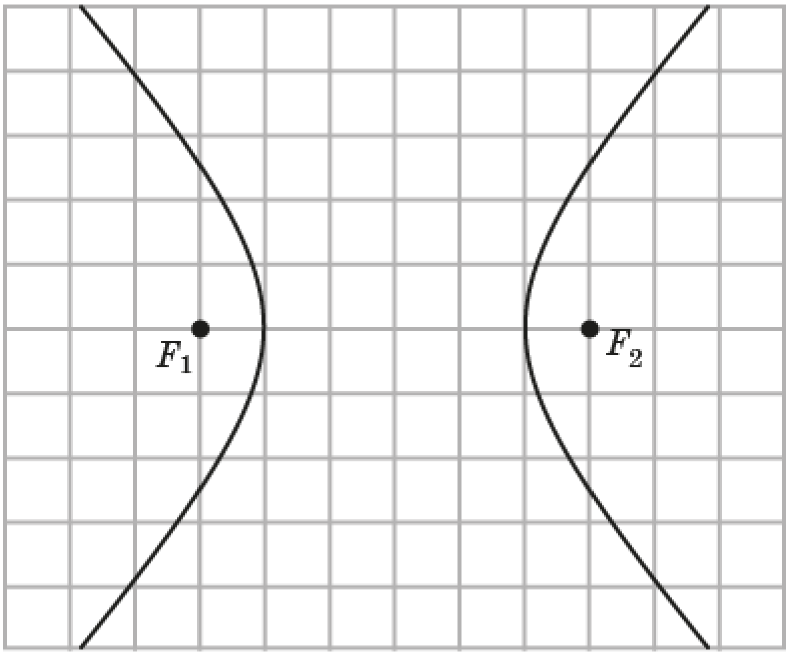

Рис. 5.7

8. Изобразите подэру гиперболы с фокусами F_1, F_2 относительно середины A отрезка F_1F_2 (рис. 5.8).

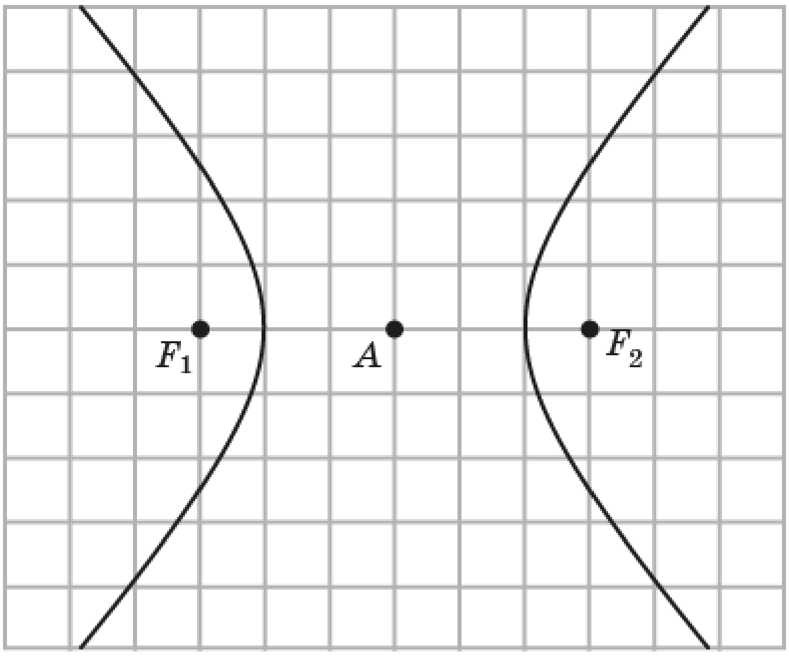

Рис. 5.8

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Парабола

1. Рисунок О1.1. **2.** Рисунок О1.2.

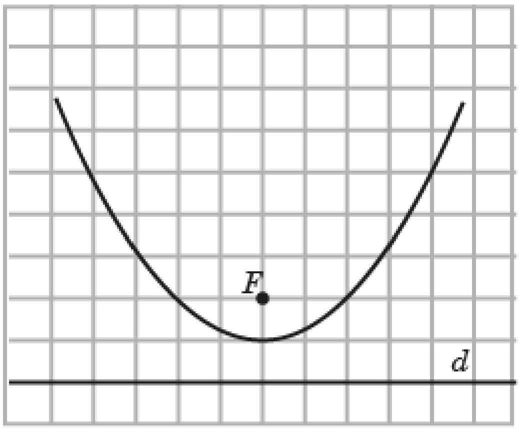

Рис. О1.1

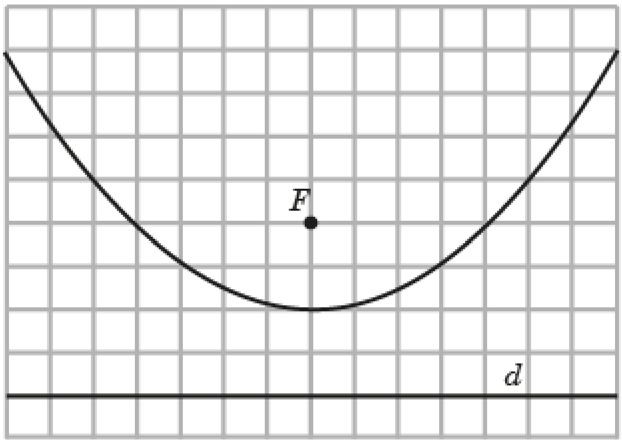

Рис. О1.2

3. Рисунок О1.3. **4.** Рисунок О1.4.

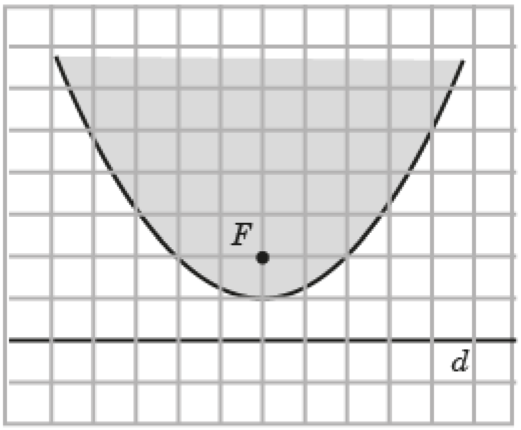

Рис. О1.3

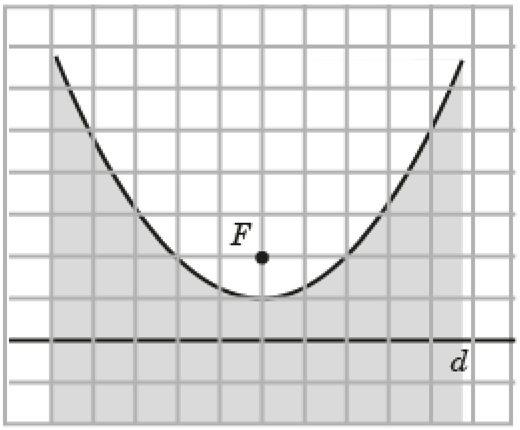

Рис. О1.4

5. $A'F < A'A + AF = A'F + AD = A'D$ (рис. О1.5). **6.** $A''F > AF - AA'' = AD - AA'' = A''D$ (рис. О1.6).

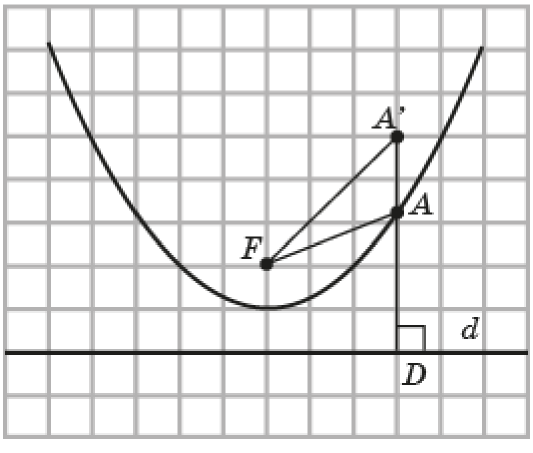

Рис. О1.5

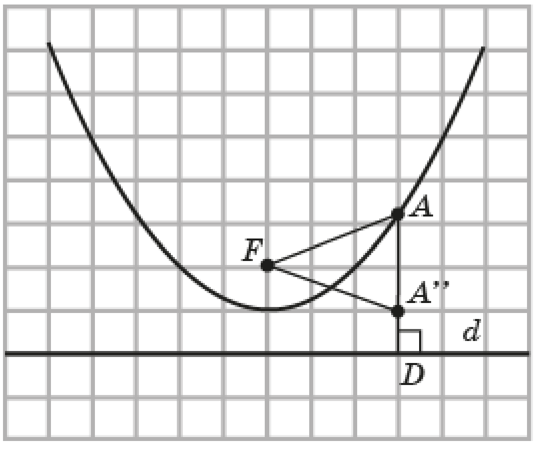

Рис. О1.6

7. Рисунок О1.7. **8.** Парабола с фокусом *O* и директрисой *d* (рис. О1.8).

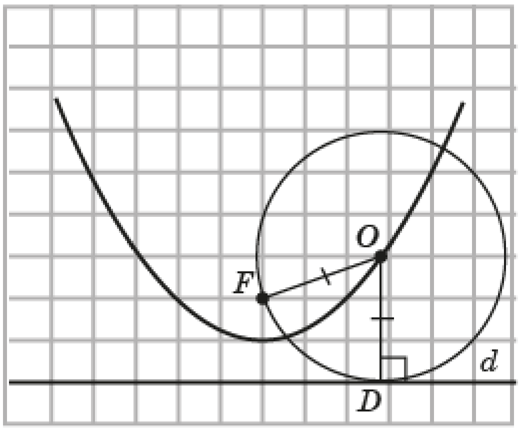

Рис. О1.7

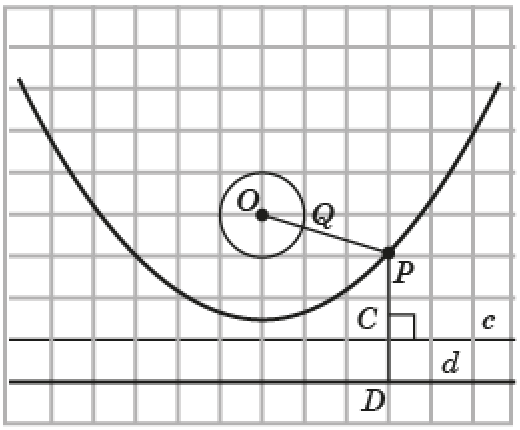

Рис. О1.8

9. Парабола с фокусом *O* и директрисой *d* (рис. О1.9). **10.** Парабола с фокусом *O* и директрисой *d* (рис. О1.10).

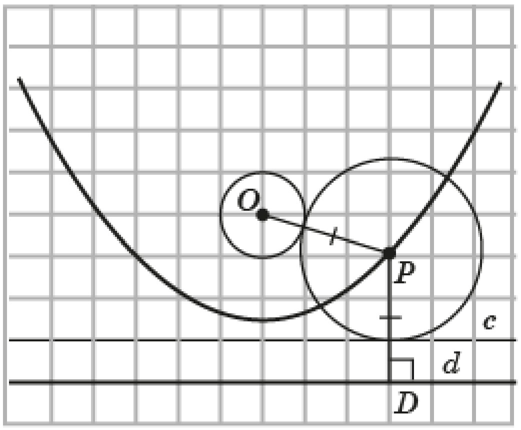

Рис. О1.9

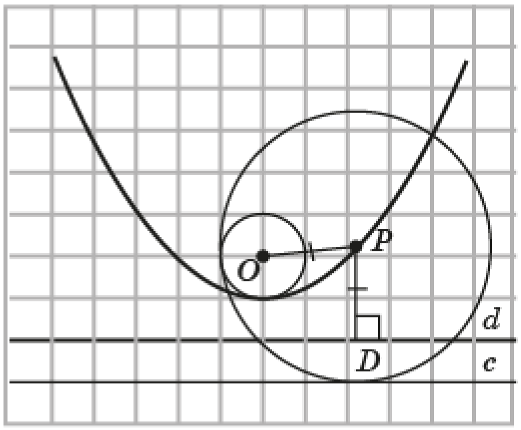

Рис. О1.10

11. Точки, расположенные во внешней области параболы (рис. О1.11). **12.** Парабола с фокусом *A* и директрисой *d* (рис. О1.12).

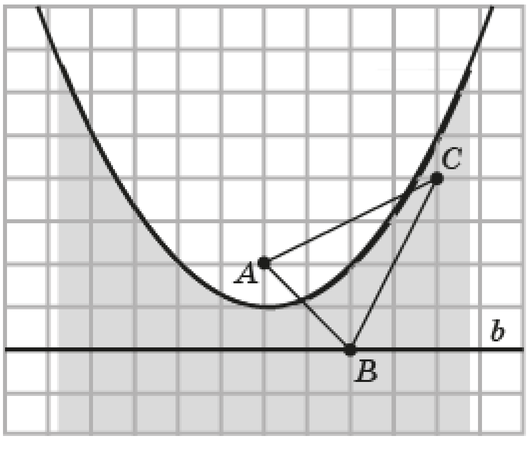

Рис. О1.11

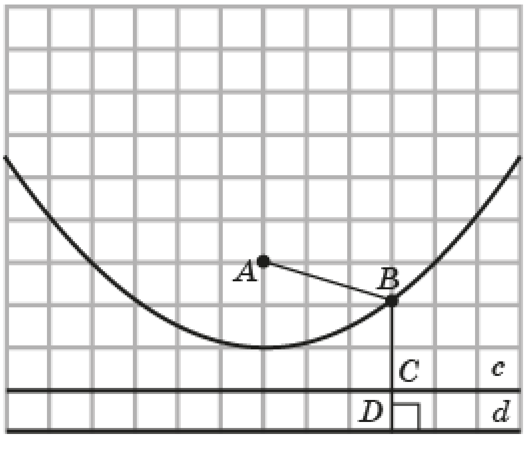

Рис. О1.12

13. Две параболы (рис. О1.13). **14.** Две параболы без их точек пересечения (рис. О1.14).

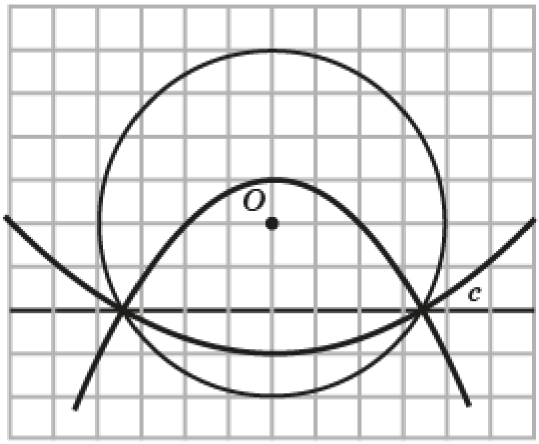

Рис. О1.13

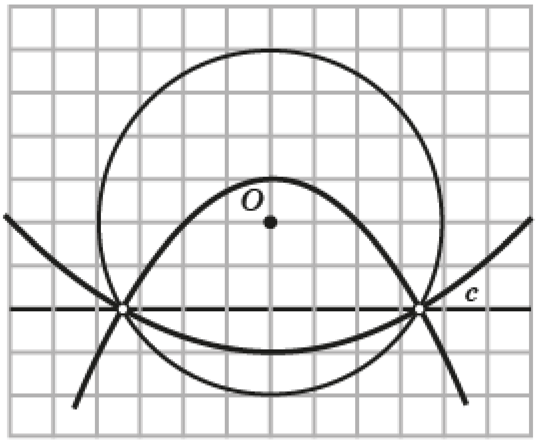

Рис. О1.14

15. *AF* = *AD*, *a* – серединный перпендикуляр к отрезку *FD*, *BF* = *BD* > *BE*. Следовательно, точка *B* не принадлежит параболе и расположена во внешней области (рис. О1.15). **16.** *a* – серединный перпендикуляр к отрезку *FD*, *BF* = *BD*. Следовательно, прямая *a* содержит биссектрису угла *FBD* (рис. О1.16).

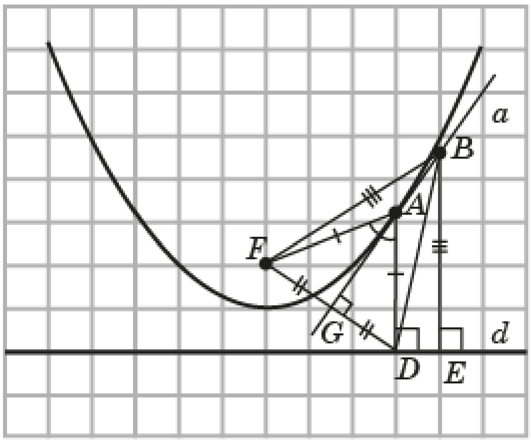

Рис. О1.15

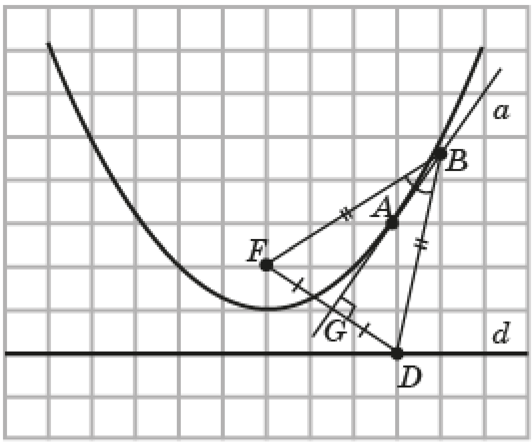

Рис. О1.16

17. *A* – точка касания (рис. О1.17). **18.** ∠1 = ∠2 = ∠3. Следовательно, луч *b* перпендикулярен директрисе *d* (рис. О1.18).

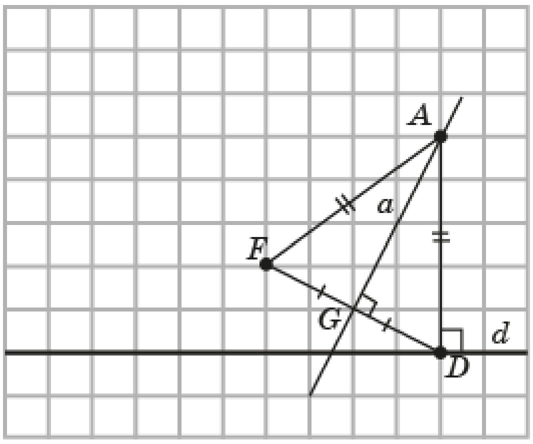

Рис. О1.17

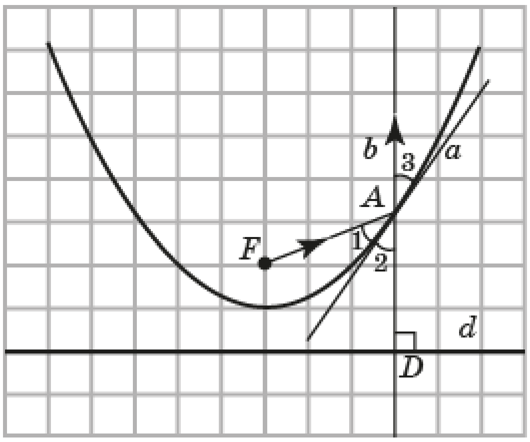

Рис. 1.18

19. Касательной к параболе является серединный перпендикуляр к отрезку *FD* (рис. O1.19). **20.** Рисунок O1.20.

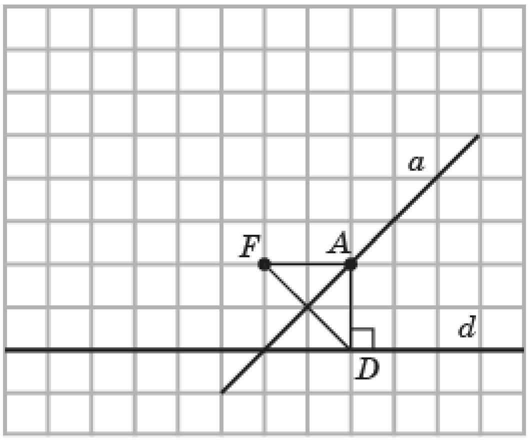

Рис. O1.19

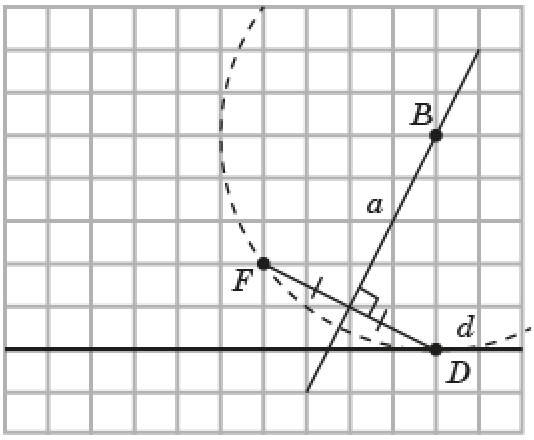

Рис. O1.20

21. Рисунок O1.21. **22.** *A* – точка касания (рис. O1.22).

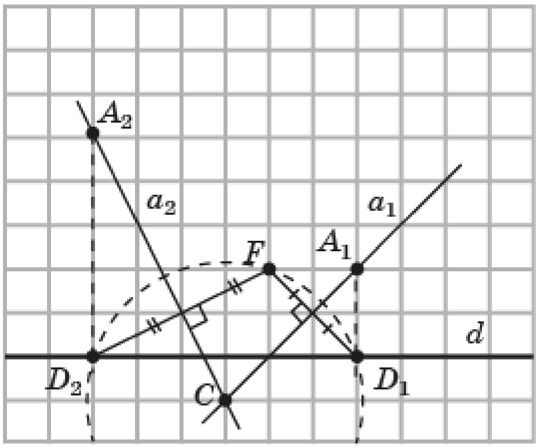

Рис. O1.21

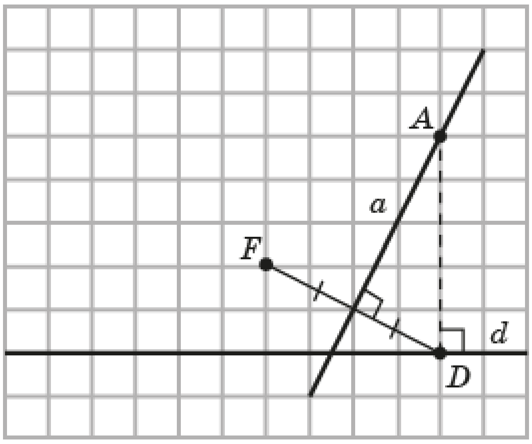

Рис. O1.22

23. Два решения (рис. O1.23). **24.** Два решения (рис. O1.24).

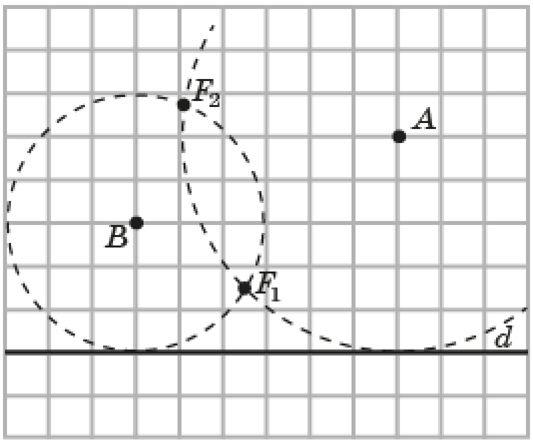

Рис. O1.23

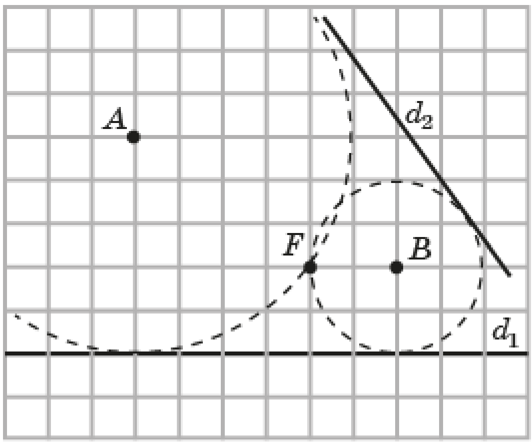

Рис. O1.24

25. Два решения (рис. О1.25). **26.** Рисунок О1.26.

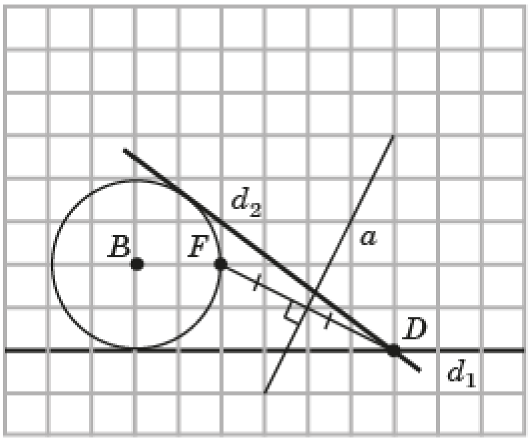

Рис. О1.25

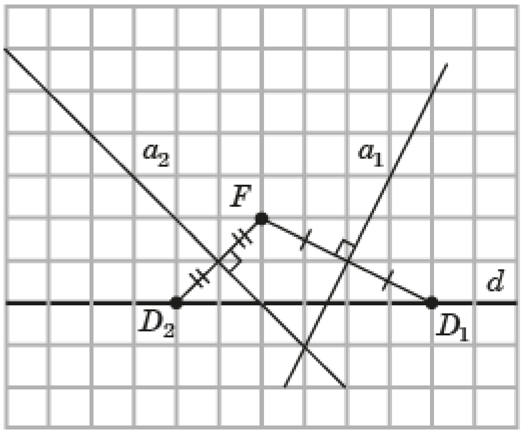

Рис. О1.26

27. Прямая f без точки D (рис. О1.27). **28.** $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (рис. О1.28). Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 90^o$.

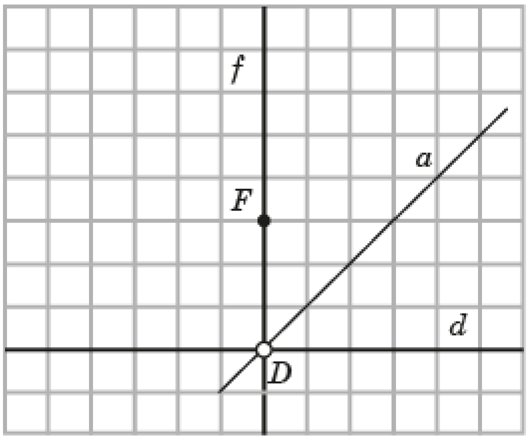

Рис. О1.27

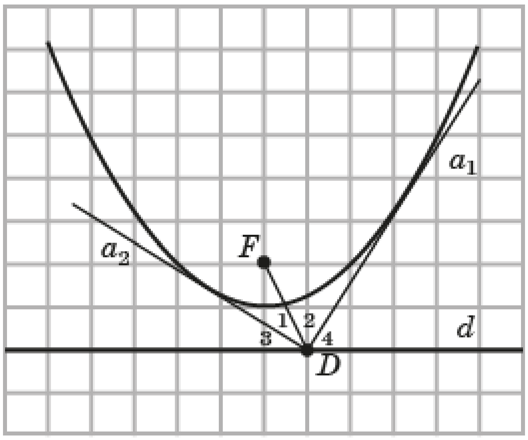

Рис. О1.28

29. $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (рис. О1.29). Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 > 90^o$. **30.** $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (рис. О1.30). Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 < 90^o$.

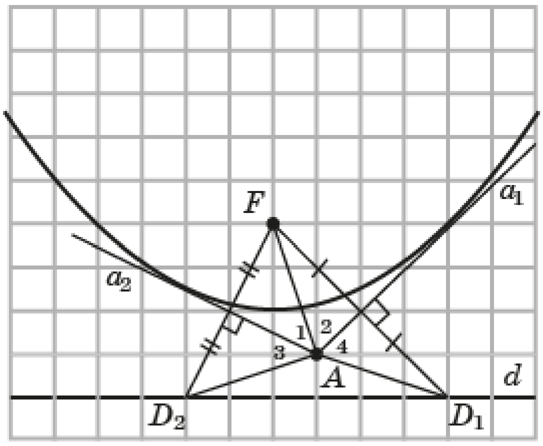

Рис. О1.29

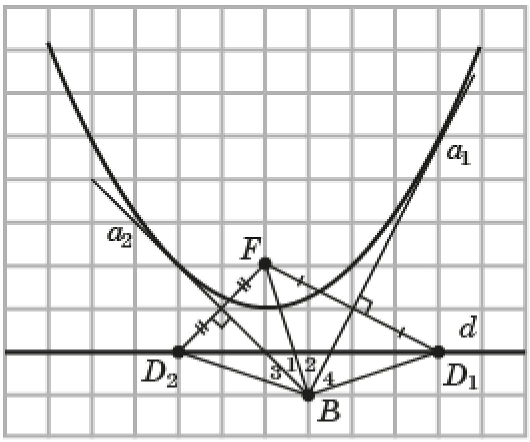

Рис. О1.30

31. Треугольники AFA_1 и AD_1A_1, AFA_2 и AD_2A_2 равны. Следовательно, равны углы AFA_1 и AD_1A_1, AFA_2 и AD_2A_2. Из равенства отрезков AD_1, AF и AD_2 следует равенство углов AD_1D_2 и AD_2D_1. Значит, равны углы AFA_1 и AFA_2 (рис. О1.31). **32.** Из задачи 31 следует, что $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. О1.32). Значит, $\angle 1 + \angle 3 = \frac{1}{2}\angle A_1FA_2$. Следовательно, величина угла B_1FB_2 не зависит от положения точки B.

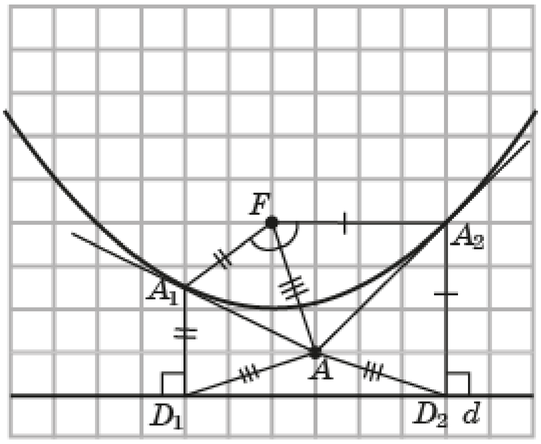

Рис. О1.31

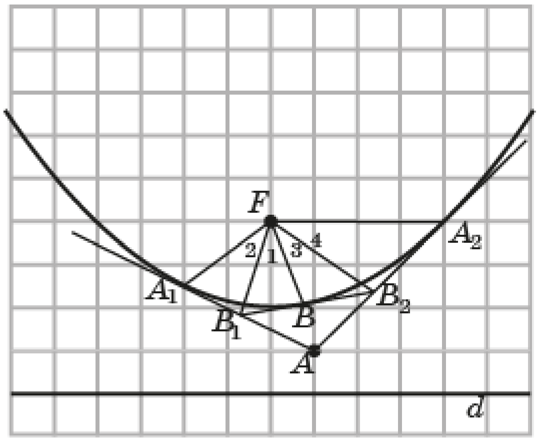

Рис. О1.32

2. Эллипс

1. Рисунок О2.1. **2.** Рисунок О2.2.

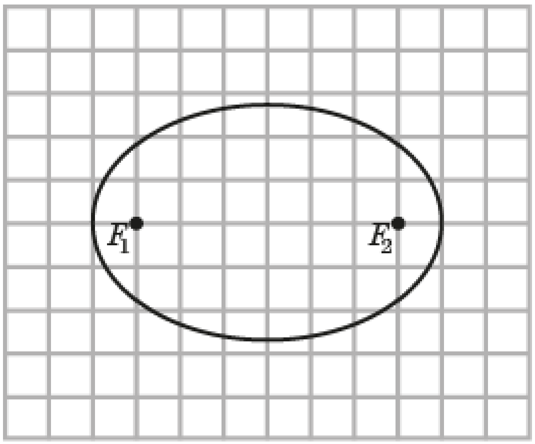

Рис. О2.1

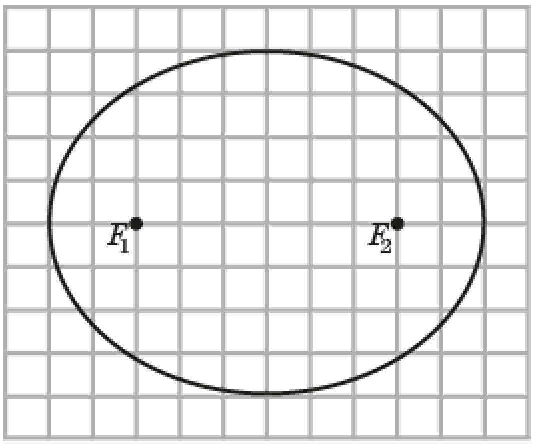

Рис. О2.2

3. Рисунок О2.3. **4.** Рисунок О2.4.

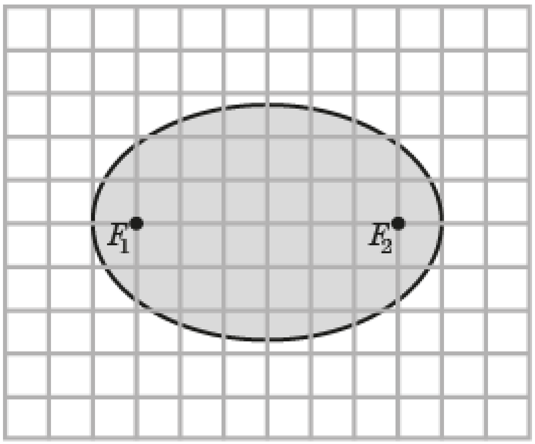

Рис. О2.3

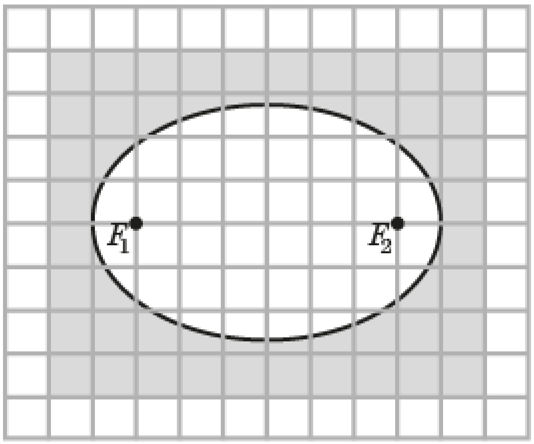

Рис. О2.4

5. $c = AF_1 + AF_2 = AF_1 + AA' + A'F_2 > A'F_1 + A'F_2$ (рис. О2.5). **6.** $A''F_1 + A''F_2 = A''F_1 + A''A + AF_2 > AF_1 + A'F_2 = c$ (рис. О2.6).

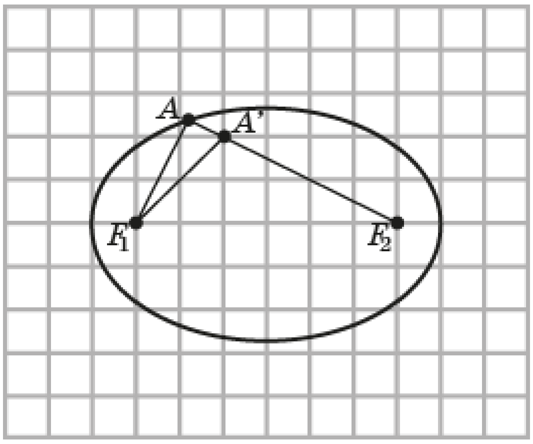

Рис. О2.5

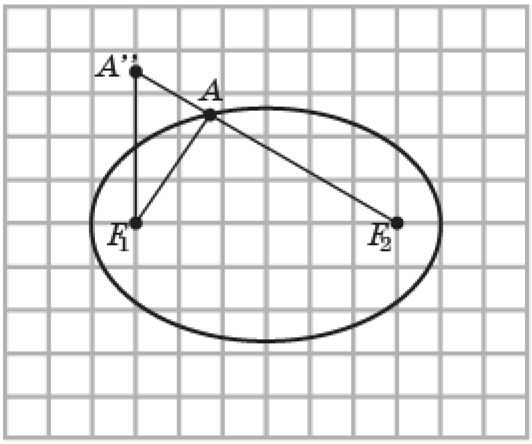

Рис. О2.6

7. Эллипс без двух точек (рис. О2.7). **8.** Эллипс с фокусами O и P (рис. О2.8).

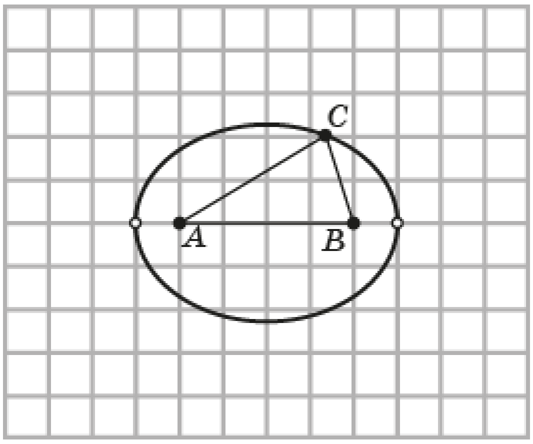

Рис. О2.7

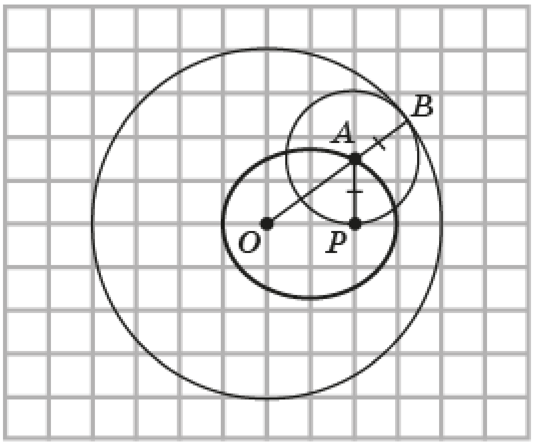

Рис. О2.8

9. Эллипс с фокусами O и P (рис. О2.9). **10.** Эллипс с фокусами O и P (рис. О2.10).

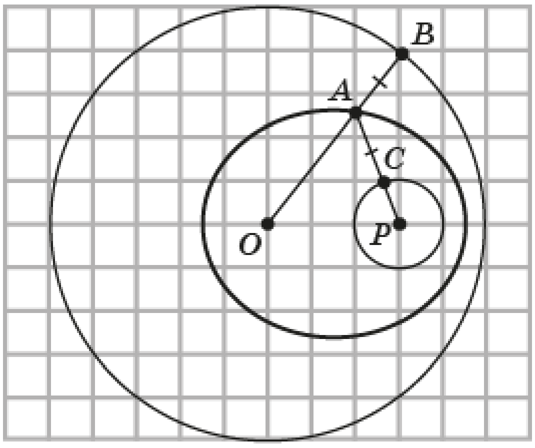

Рис. О2.9

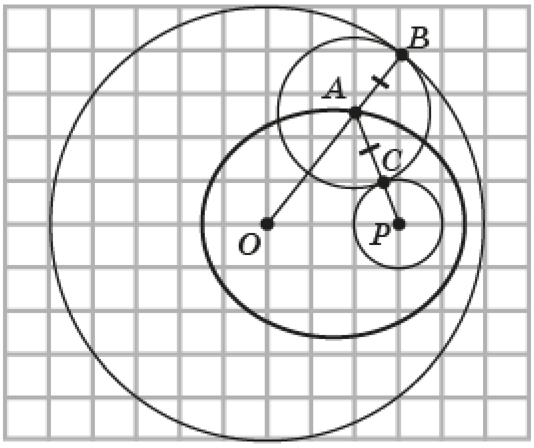

Рис. О2.10

11. Эллипс с фокусами O и P (рис. О2.11). **12.** Эллипс с фокусами O и P (рис. О2.12).

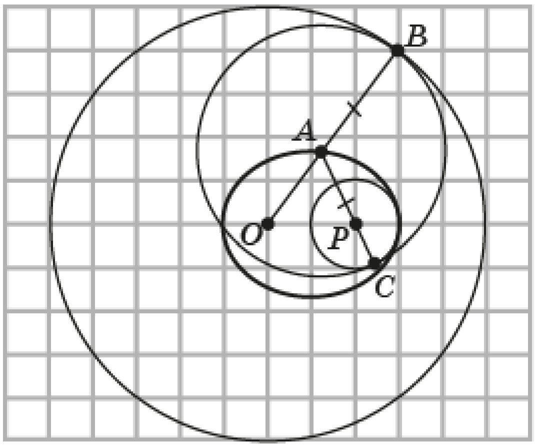

Рис. О2.11

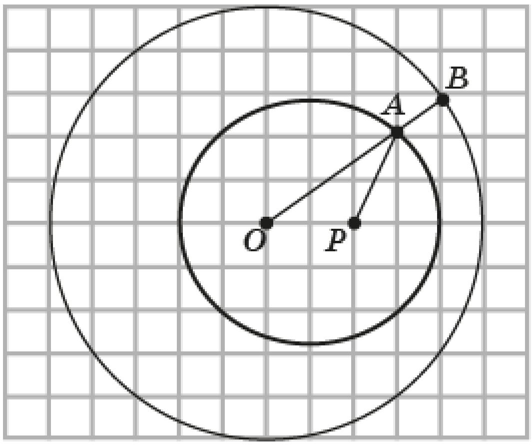

Рис. О2.12

13. Эллипс с фокусами F и G (рис. О2.13). **14.** Эллипс с фокусами F и G (рис. О2.14).

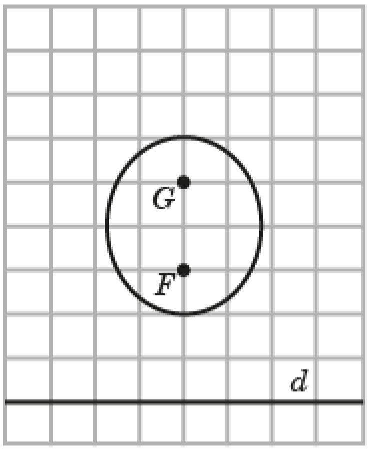

Рис. О2.13

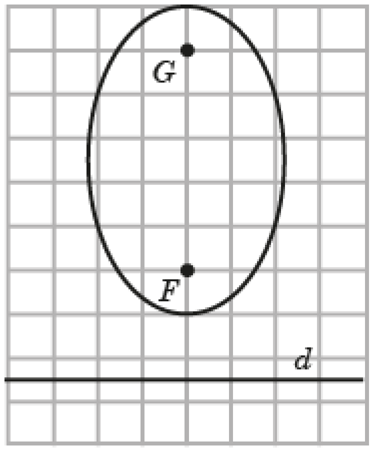

Рис. О2.14

15. $AF_2 = AF'$, a – серединный перпендикуляр к отрезку F_2F', $BF_2 = BF'$, $BF_1 + BF_2 = BF_1 + BF' > F_1F' = c$. Следовательно, точка B не принадлежит эллипсу и расположена во внешней области (рис. О2.15). **16.** A – точка касания (рис. О2.16).

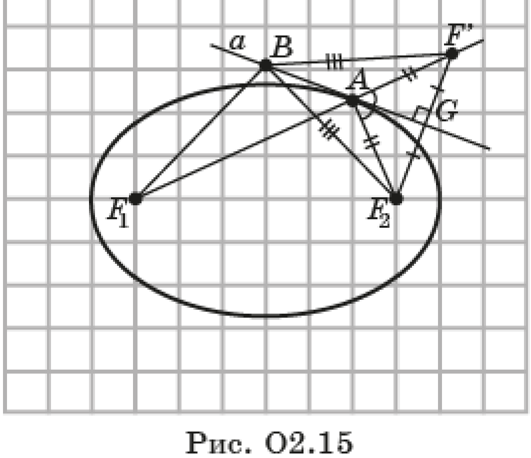

Рис. О2.15

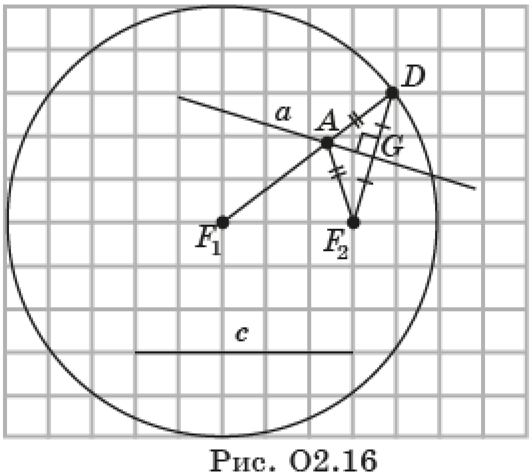

Рис. О2.16

17. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Следовательно, луч света, отразившись от эллипса, пройдёт через фокус F_2 (рис. О2.17). **18.** Рисунок О2.18.

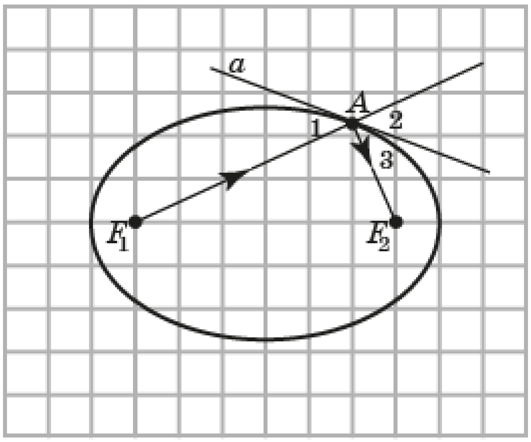

Рис. О2.17

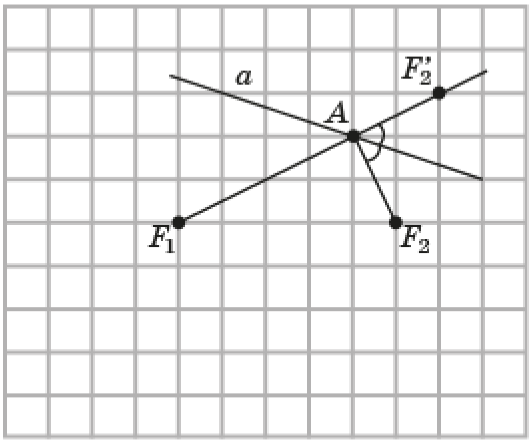

Рис. О2.18

19. Рисунок О2.19. **20.** Рисунок О2.20.

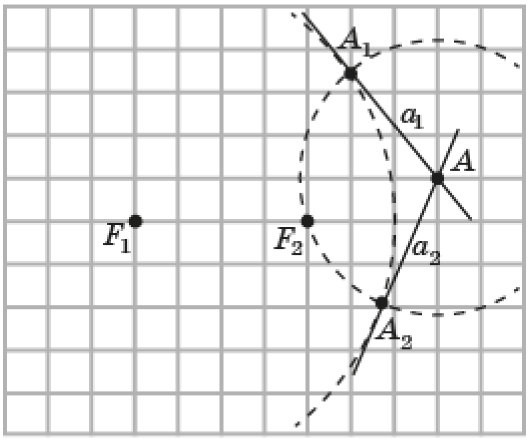

Рис. О2.19

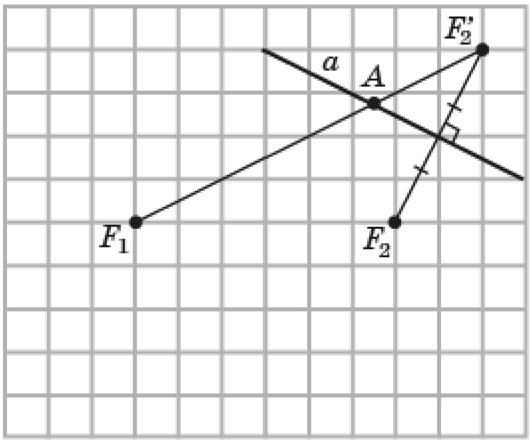

Рис. О2.20

21. Окружность без одной точки (рис. О2.21). **22.** Два решения (рис. О2.22).

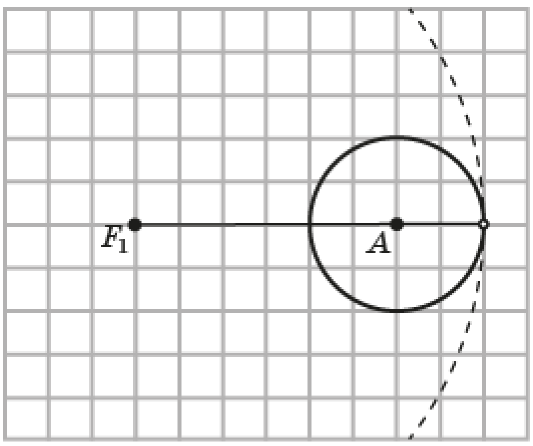

Рис. О2.21

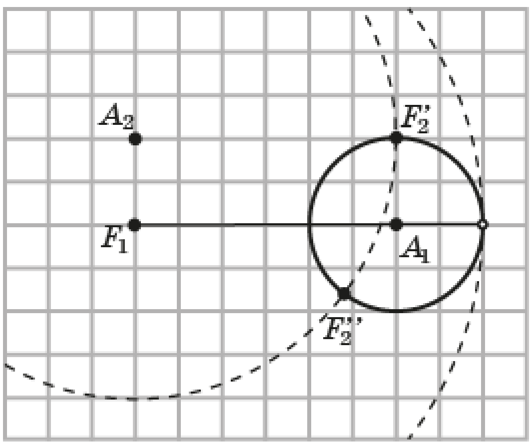

Рис. О2.22

23. F_1F_2' – искомый отрезок (рис. O2.23). **24.** Рисунок O2.24.

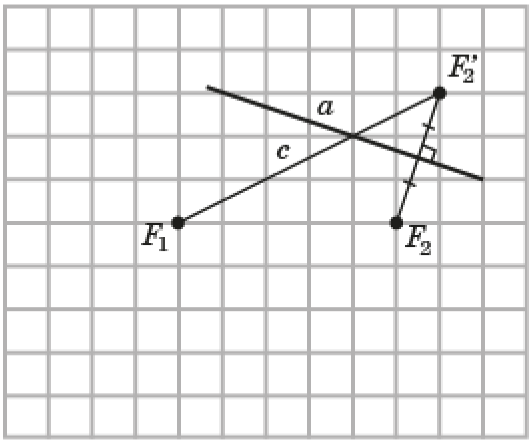

Рис. O2.23

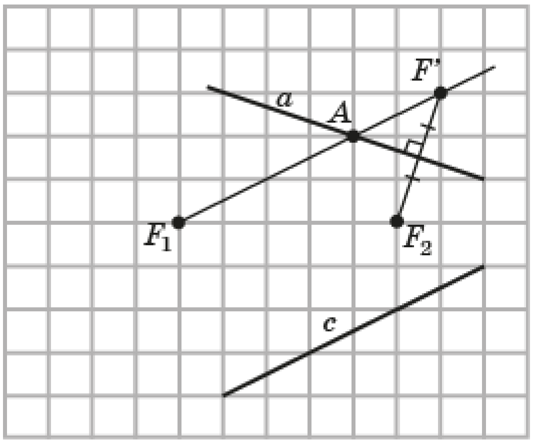

Рис. O2.24

25. Рисунок O2.25. **26.** Рисунок O2.26.

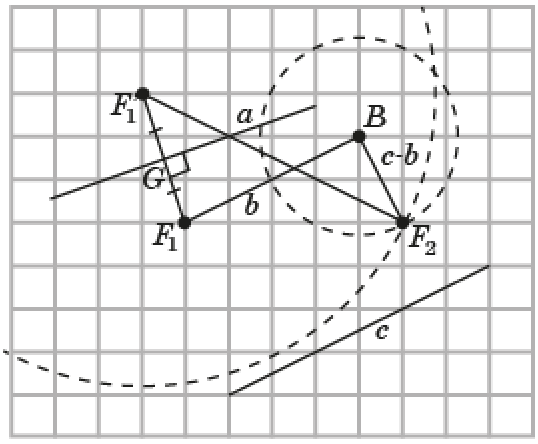

Рис. O2.25

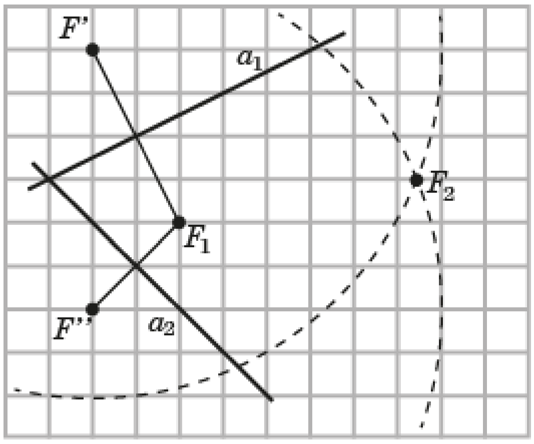

Рис. O2.26

27. Треугольники AF_1F_2' и AF_1F_2'' равны по трём сторонам (рис. O2.27). Значит, равны углы AF_1A_1 и AF_1A_2.**28.** Из задачи 27 следует, что $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. O2.28). Значит, $\angle 1 + \angle 3 = \frac{1}{2}\angle A_1F_1A_2$. Следовательно, величина угла $B_1F_1B_2$ не зависит от положения точки B.

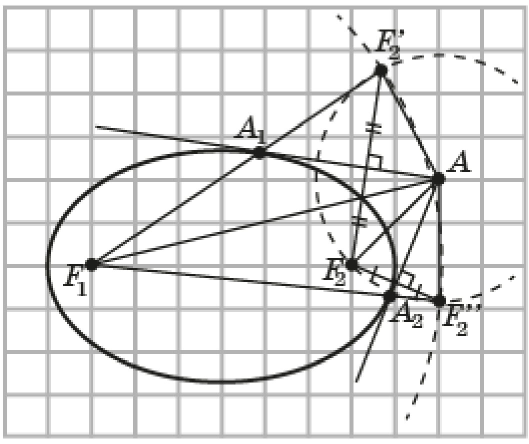

Рис. O2.27

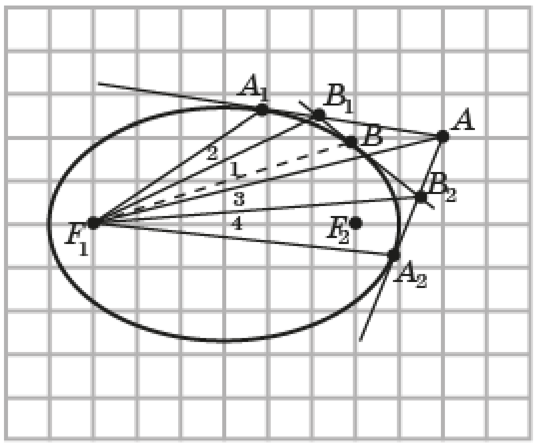

Рис. O2.28

3. Гипербола

1. Рисунок О3.1. **2.** Рисунок О3.2.

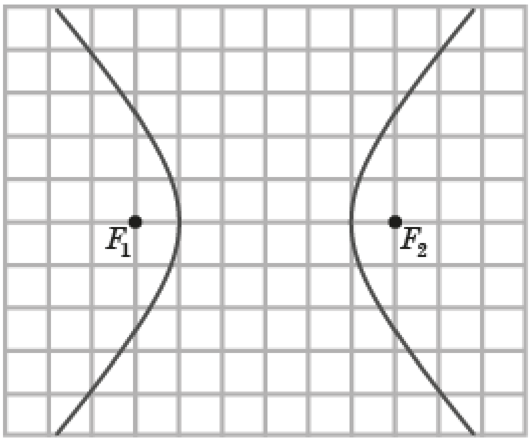

Рис. О3.1

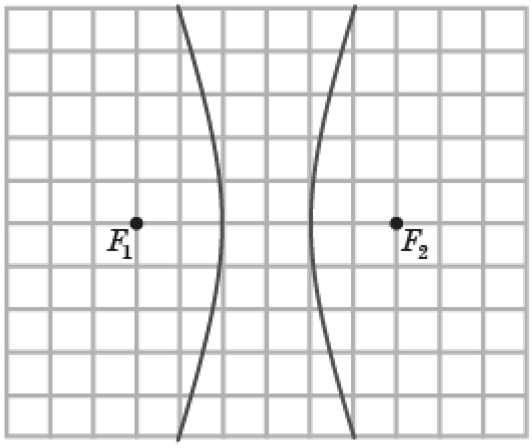

Рис. О3.2

3. Рисунок О3.3. **4.** Рисунок О3.4

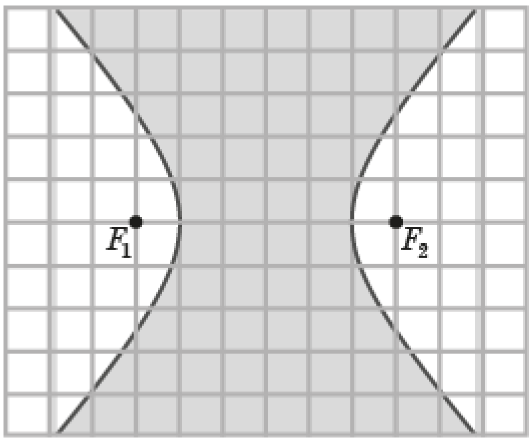

Рис. О3.3

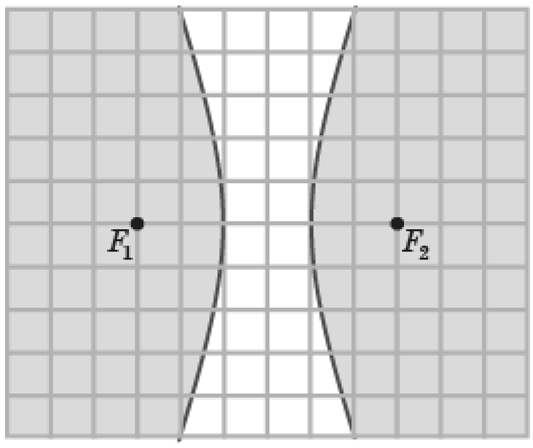

Рис. О3.4

5. $A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - (A'A + AF_2) < AF_1 - AF_2 = c$ (рис. О3.5). **6.** $A''F_1 - A''F_2 = A''A + AF_1 - A''F_2 > AF_1 - AF_2 = c$ (рис. О3.6).

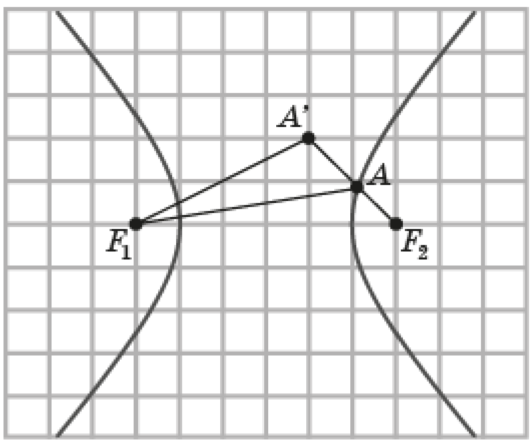

Рис. О3.5

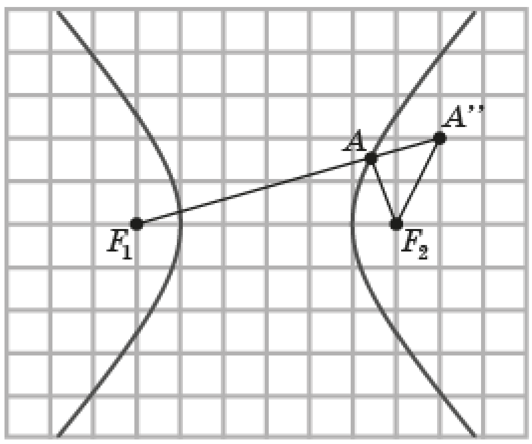

Рис. О3.6

7. Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.7). **8.** Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.8).

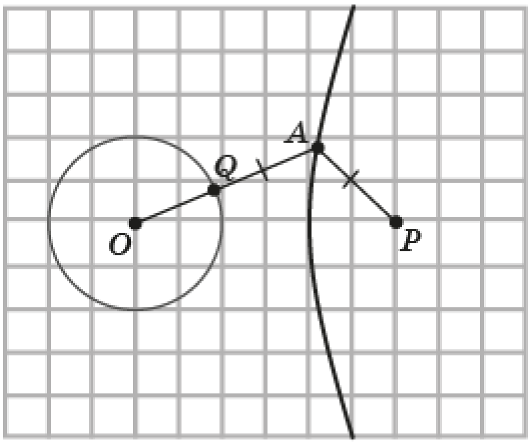

Рис. О3.7

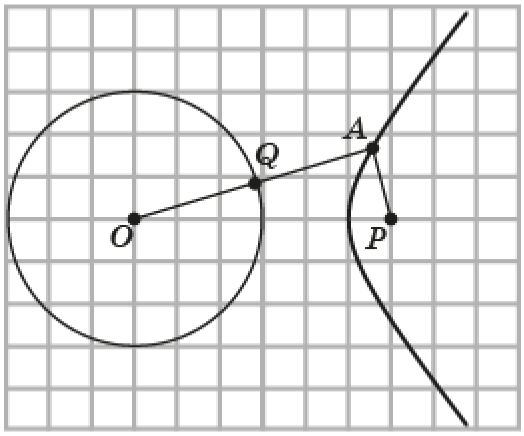

Рис. О3.8

9. Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.9). **10.** Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.10).

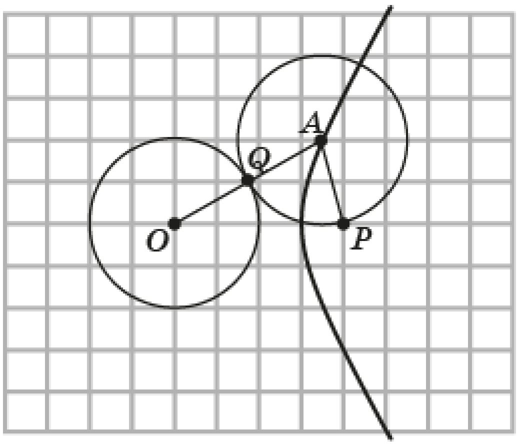

Рис. О3.9

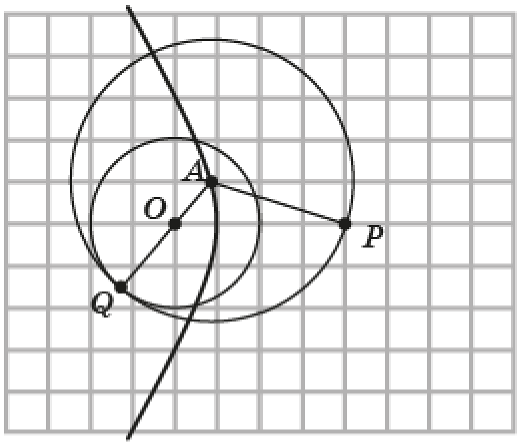

Рис. О3.10

11. Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.11). **12.** Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.12).

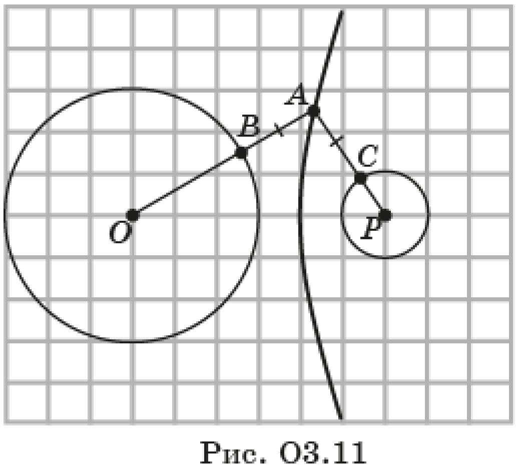

Рис. О3.11

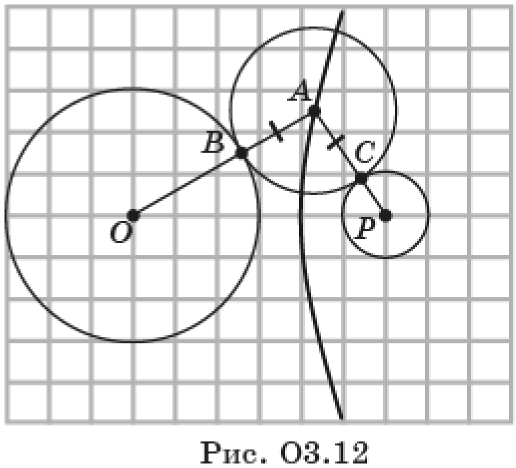

Рис. О3.12

13. Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.13). **14.** Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.14).

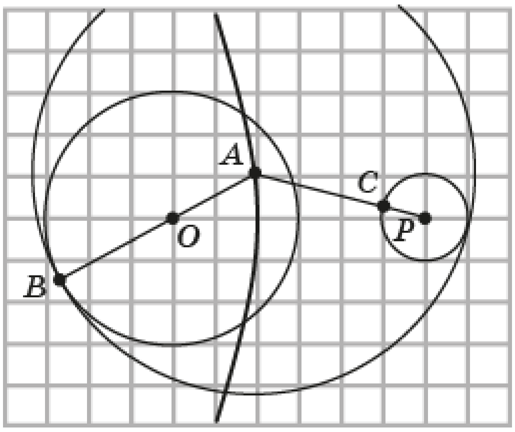

Рис. О3.13

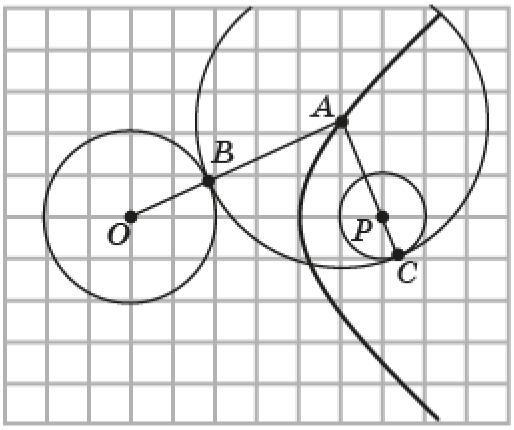

Рис. О3.14

15. Ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.15). **16.** Эллипс и ветвь гиперболы с фокусами O и P (рис. О3.16).

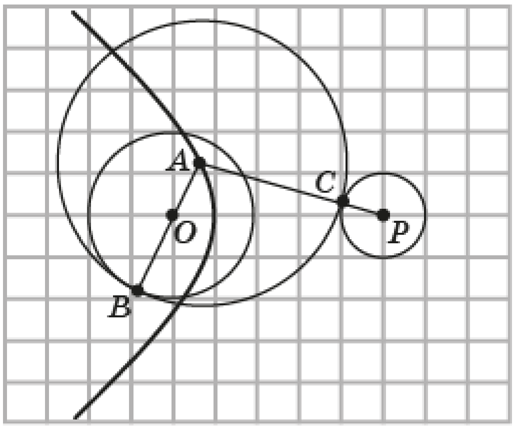

Рис. О3.15

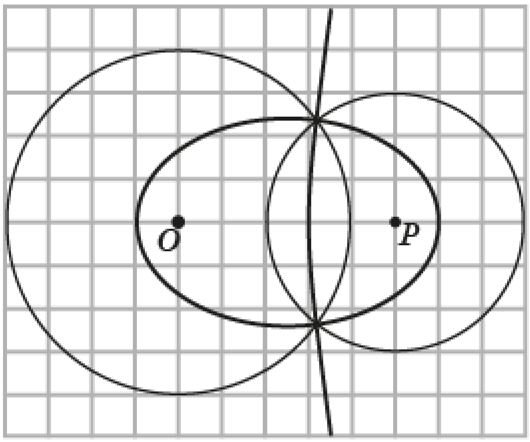

Рис. О3.16

17. Эллипс и гипербола без двух точек (рис. О3.17). **18.** Гипербола с фокусами F и G (рис. О3.18).

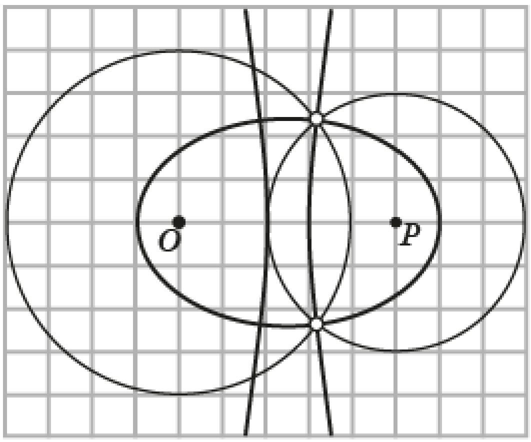

Рис. О3.17

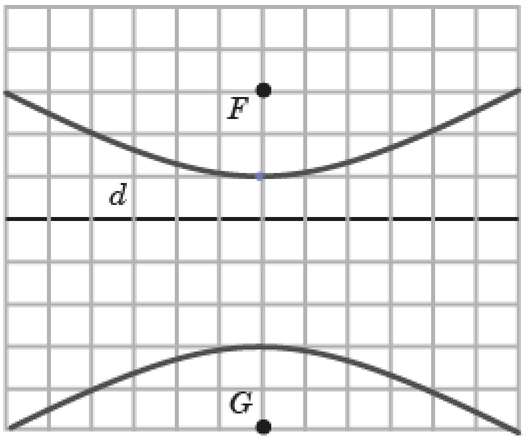

Рис. О3.18

19. A – точка касания (рис. О3.19). **20.** $AF_2 = AF'$, a – серединный перпендикуляр к отрезку F_2F', $BF_2 = BF'$, $BF_1 - BF_2 = BF_1 - BF' < F_1F' = c$. Следовательно, точка B не принадлежит гиперболы и расположена во внешней области (рис. О3.20).

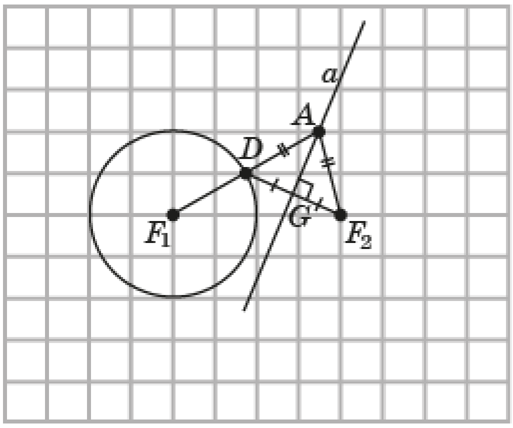

Рис. О3.19

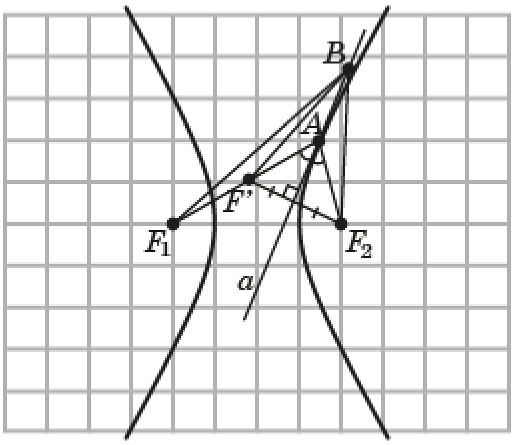

Рис. О3.20

21. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Следовательно, луч света, отразившись от гиперболы, пойдёт так, как будто бы он исходит из другого фокуса (рис. О3.21). **22.** Рисунок О3.22.

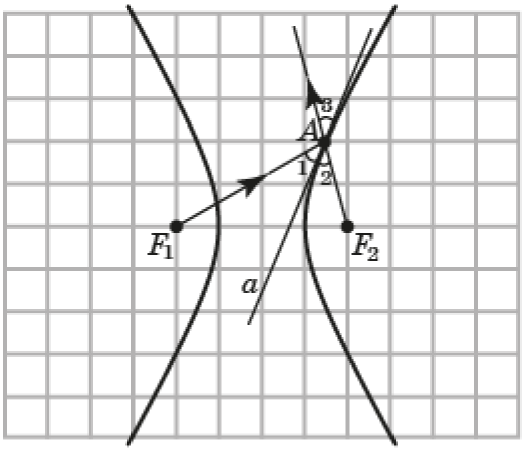

Рис. О3.21

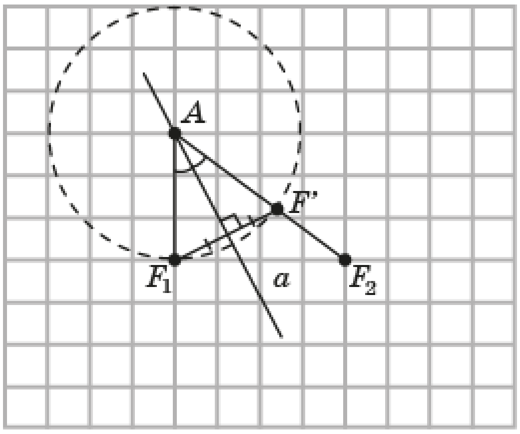

Рис. О3.22

23. Рисунок О3.23. **24.** Рисунок О3.24.

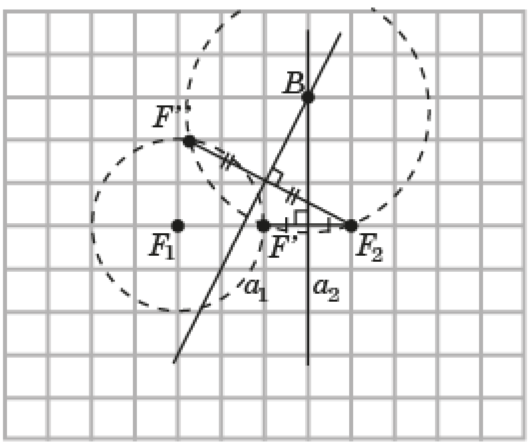

Рис. О3.23

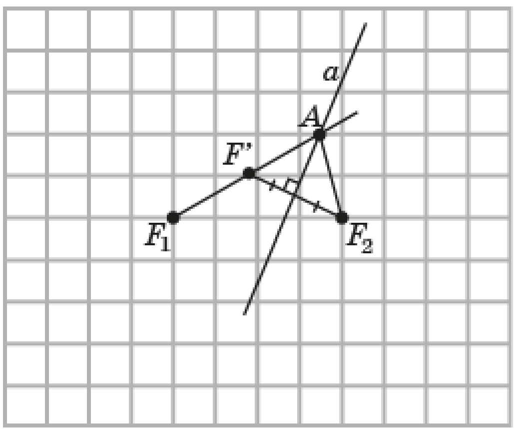

Рис. О3.24

25. Окружность без одной точки (рис. О3.25). **26.** Рисунок О3.26.

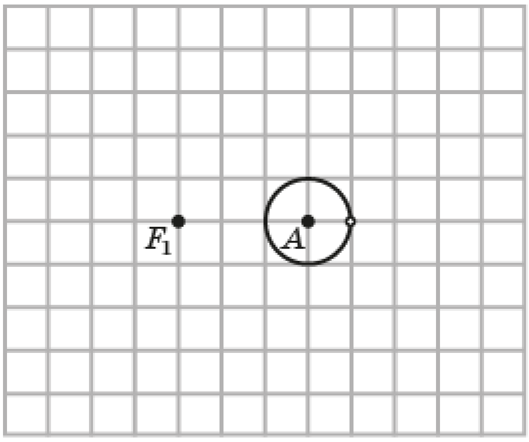

Рис. О3.25

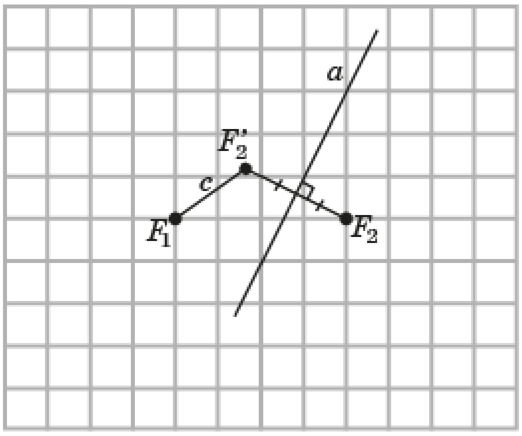

Рис. О3.26

27. Рисунок О3.27. **28.** Рисунок О3.28.

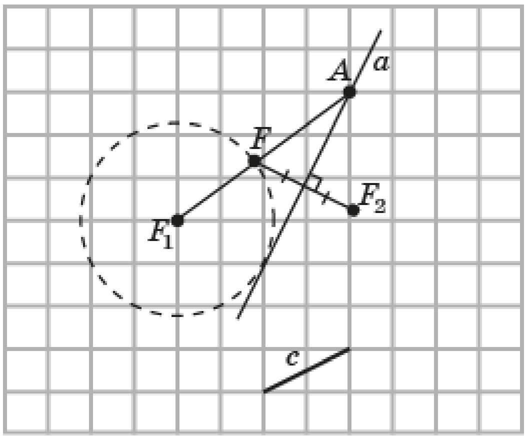

Рис. О3.27

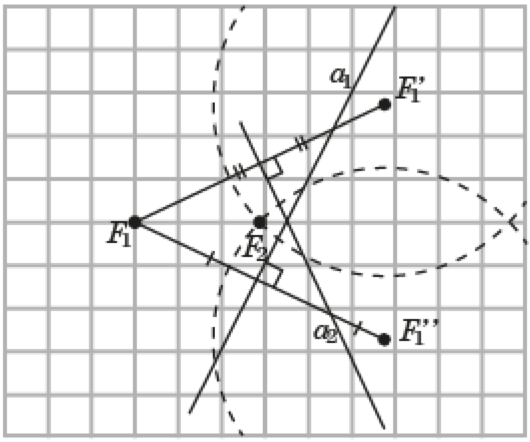

Рис. О3.28

29. Треугольники AF_1F_2' и AF_1F_2'' равны по трём сторонам. Следовательно, равны углы AF_1F_2' и AF_1F_2'' (рис. О3.29). **30.** Из задачи 29 следует, что $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. О3.30). Значит, $\angle 1 + \angle 3 = \frac{1}{2}\angle A_1F_1A_2$. Следовательно, величина угла $B_1F_1B_2$ не зависит от положения точки B.

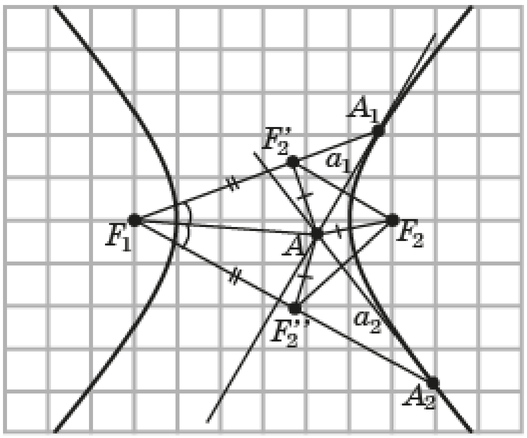

Рис. О3.29

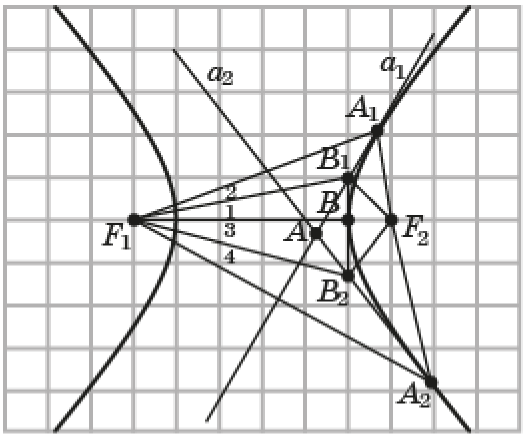

Рис. О3.30

4. Именный кривые

1. Конхоида Никомеда (рис. О4.1).

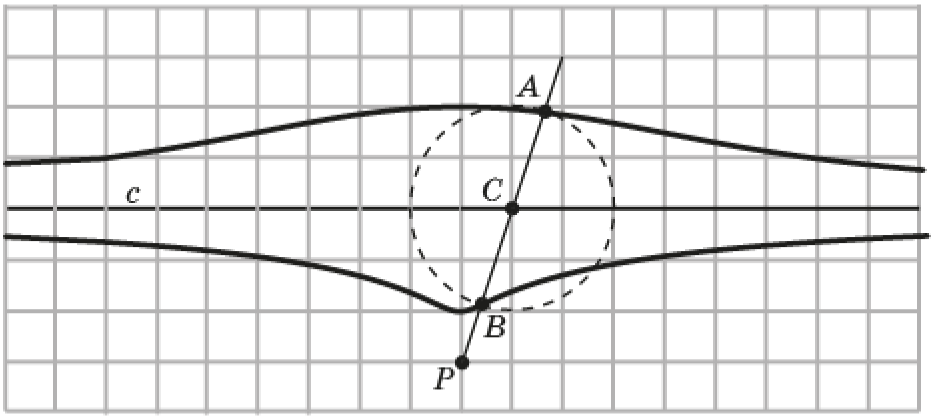

Рис. О4.1

2. Конхоида Никомеда (рис. О4.2).

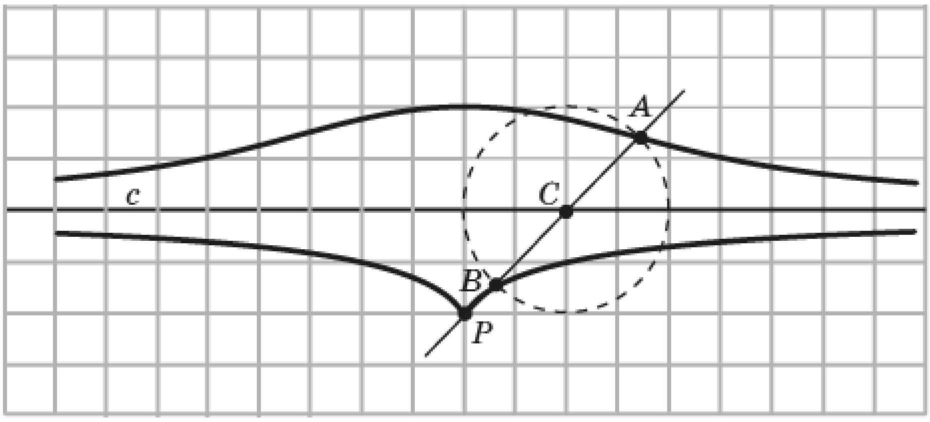

Рис. О4.2

3. Конхоида Никомеда (рис. О4.3).

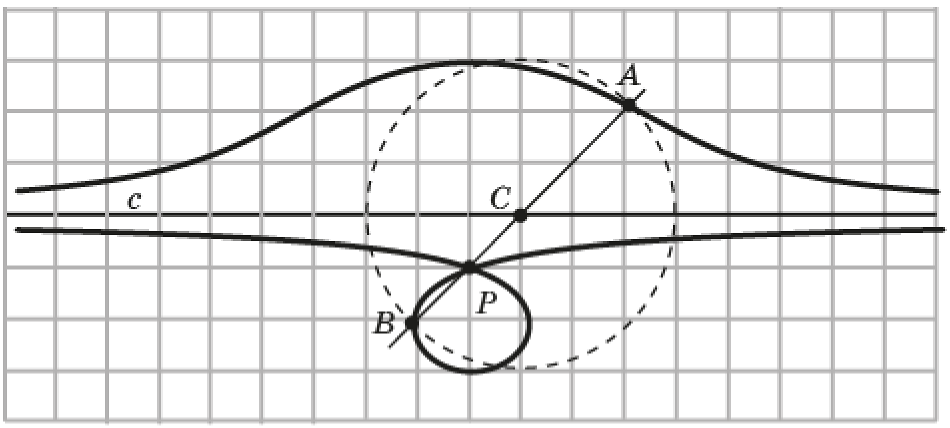

Рис. О4.3

4. Улитка Паскаля (рис. О4.4).

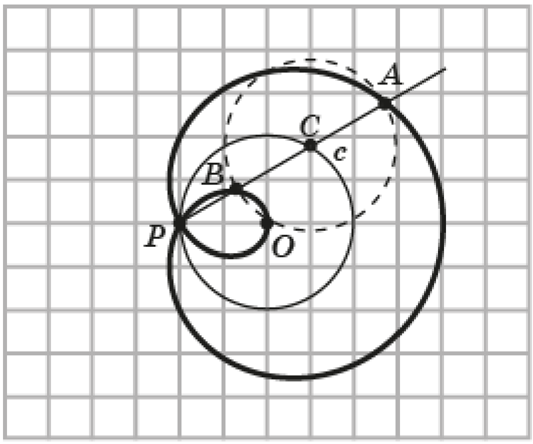

Рис. О4.4

5. Улитка Паскаля (рис. О4.5).

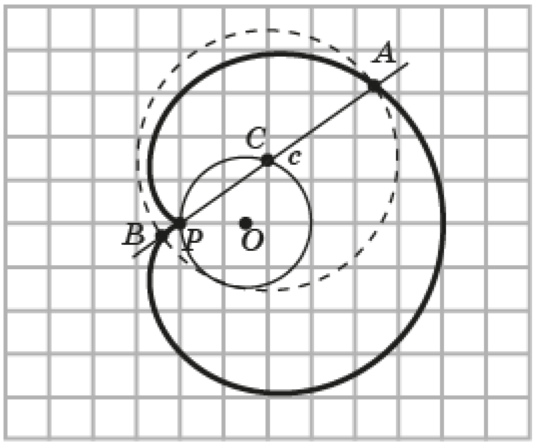

Рис. О4.5

6. Улитка Паскаля (рис. О4.6).

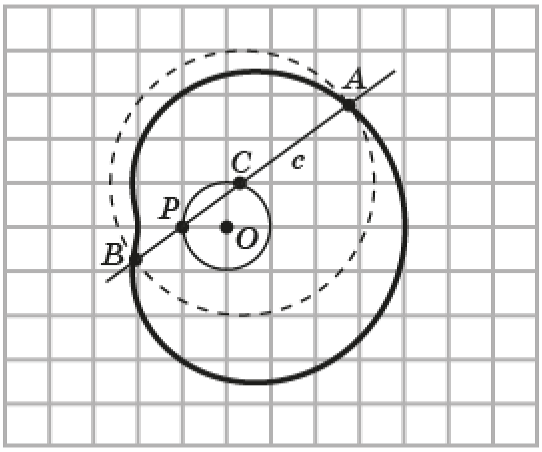

Рис. О4.6

7. Строфоида (рис. О4.7).

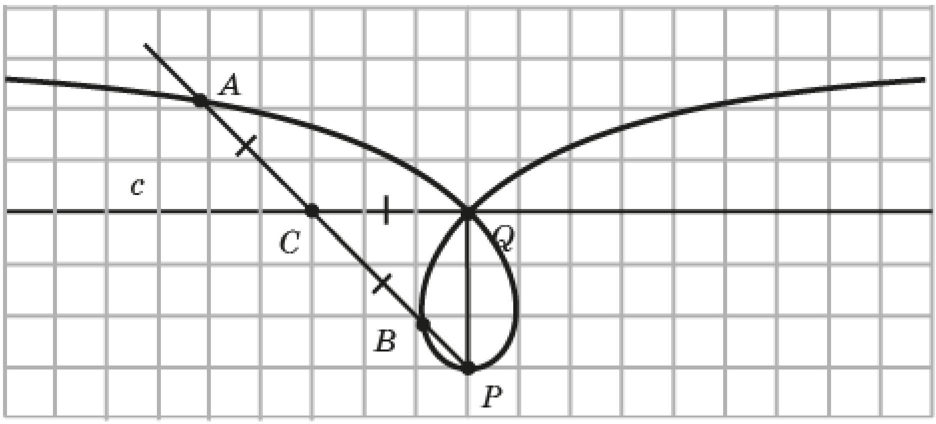

Рис. О4.7

8. Циссоида Диоклеса (рис. О4.8).

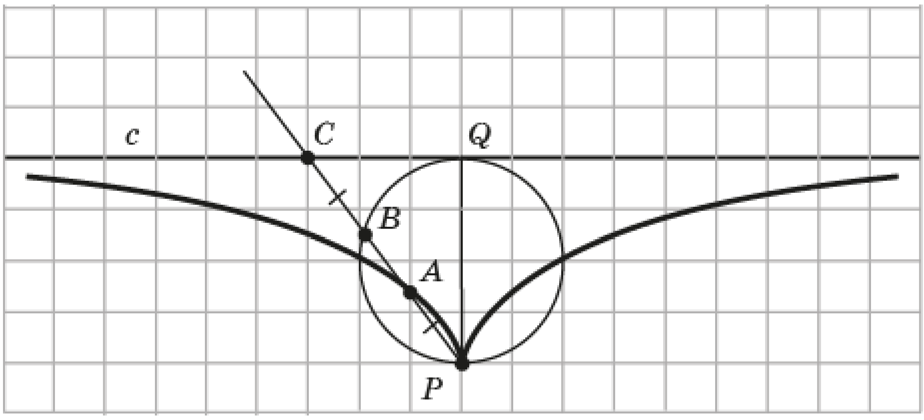

Рис. О4.8

9. Кривая Крамера (рис. О4.9). **10.** Трисектриса Маклорена (рис. О4.10).

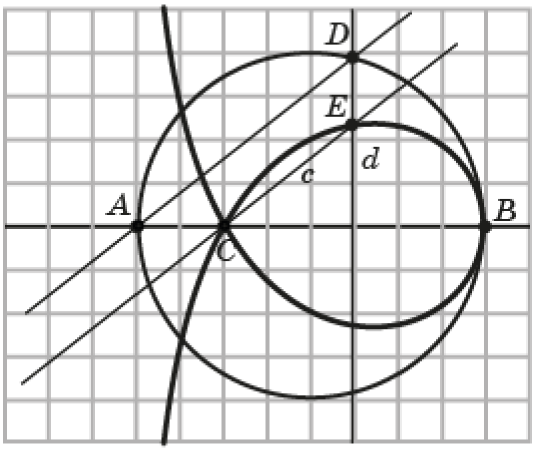

Рис. О4.9

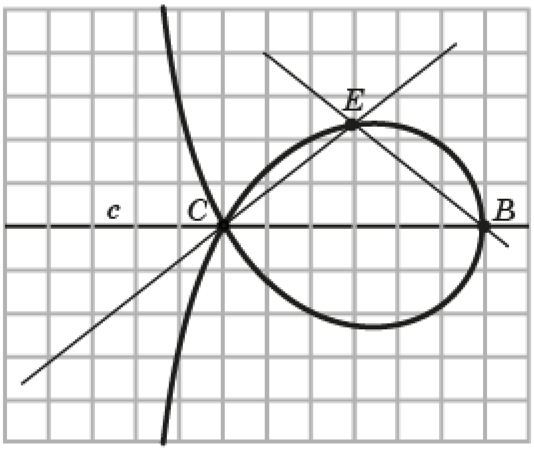

Рис. О4.10

11. Окружность. Она называется окружностью Аполлония (рис. О4.11). **12.** Рисунок О4.12.

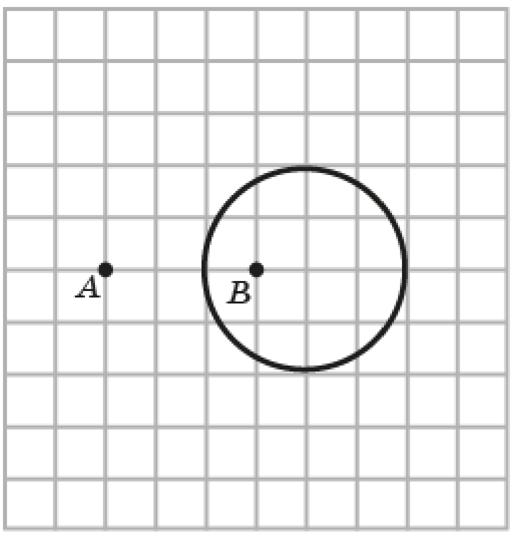

Рис. О4.11

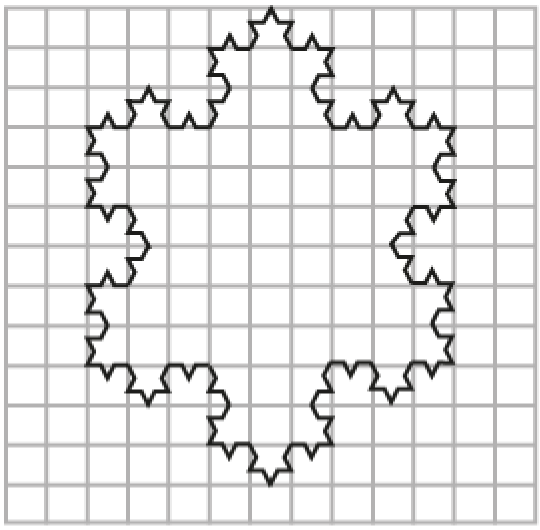

Рис. О4.12

13. Рисунок О4.13. **14.** Рисунок О4.14.

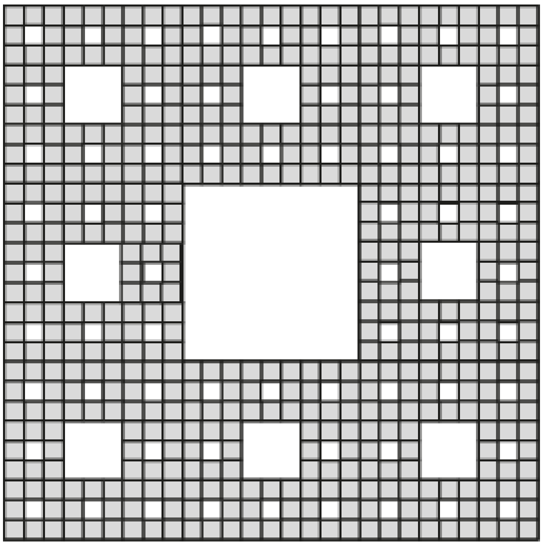

Рис. О4.13

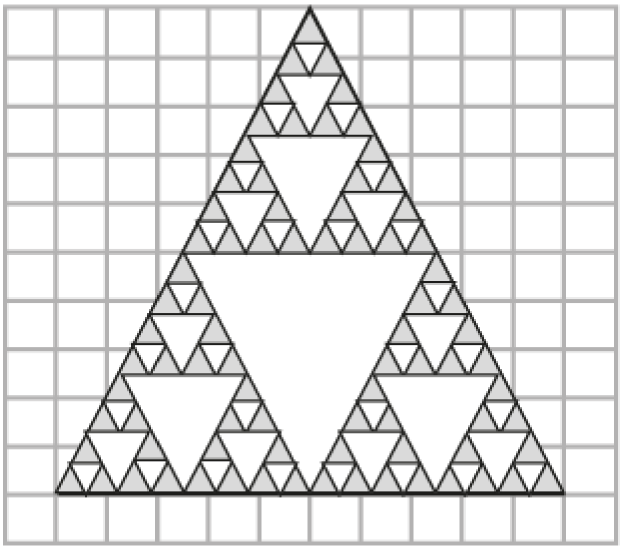

Рис. О4.14

5. Подэры

1. Улитка Паскаля (рис. О5.1). **2.** Улитка Паскаля (рис. О5.2).

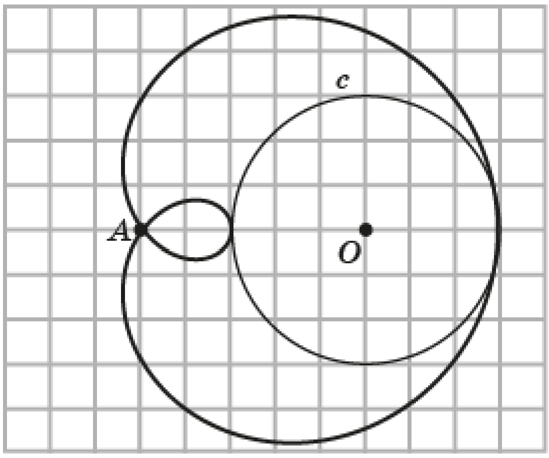

Рис. О5.1

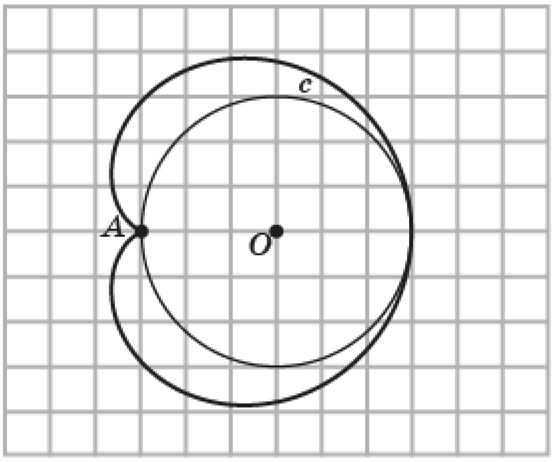

Рис. О5.2

3. Улитка Паскаля (рис. О5.3). **4.** Строфоида (рис. О5.4).

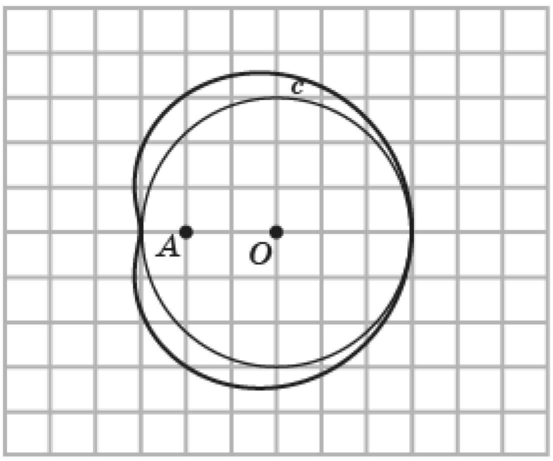

Рис. О5.3

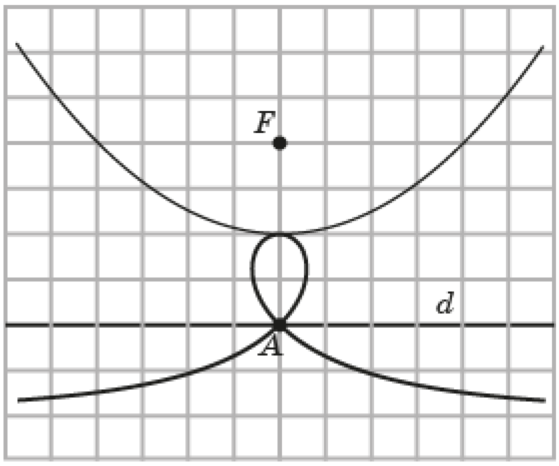

Рис. О5.4

5. Циссоида Диоклеса (рис. О5.5). **6**. Прямая (рис. О5.6).

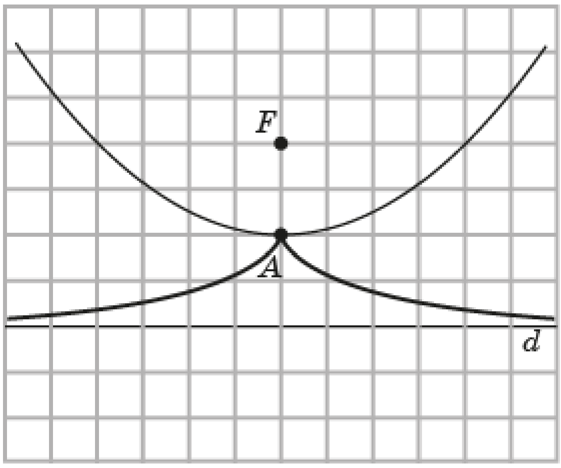

Рис. О5.5

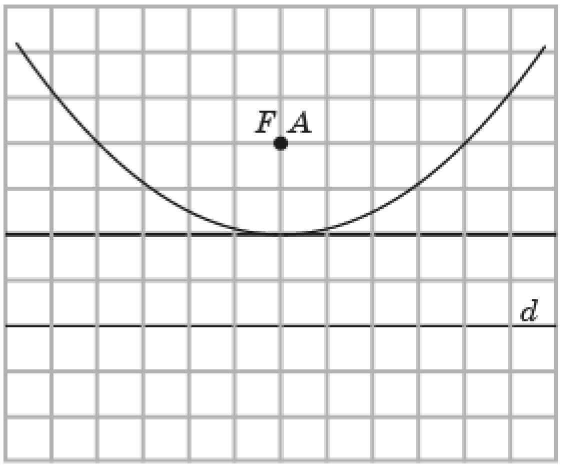

Рис. О5.6

7. Окружность (рис. О5.7). **8.** Рисунок О5.8.

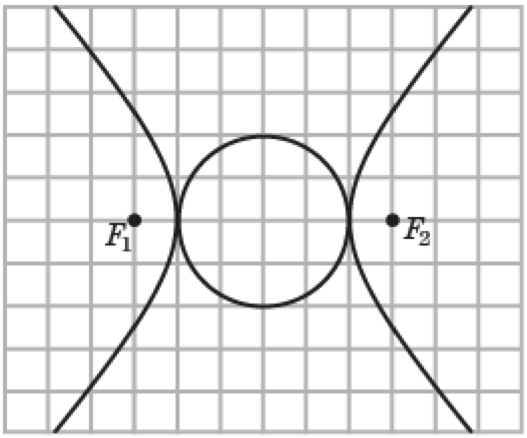

Рис. О5.7

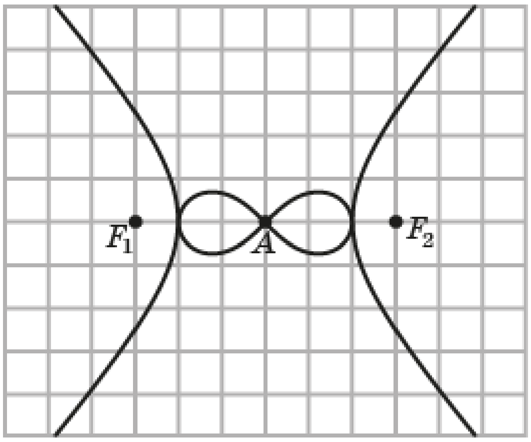

Рис. О5.8

Литература

1. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2000.

2. Маркушевич А. И. Замечательные кривые. 3-е изд. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1978.

3. Савелов А. А. Плоские кривые. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960.

4. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Кривые. Курс по выбору: учебн. пособие для общеобразоват. учреждений. М.: Мнемозина, 2007.

5. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Моя математика. Курс по выбору. Геометрия. 7-9 классы: учебное пособие. – М.: Просвещение, 2025.

6. http://vasmirnov.ru,

СОДЕРЖАНИЕ