

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова

Курс по выбору
Моя математика. Геометрия
7-9 классы

Рабочая тетрадь № 2

КРИВЫЕ КАК ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК

Москва
«Просвещение»
2026

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова

Моя математика. Курс по выбору. Геометрия: 7-9 классы. Рабочая тетрадь № 2. Кривые как траектории движения точек.

Тетрадь входит в учебно-методический комплект по математике «Лаборатория А. Г. Мордковича». Она содержит задачи на распознавание и изображение кривых как траекторий движения точек, проведение различных построений циркулем и линейкой, установление и доказательство свойств кривых и др.

Задачи имеют различный уровень трудности, не требуют знания специальных формул и теорем и направлены на развитие геометрических представлений и конструктивных умений учащихся 7-9 классов.

К каждой задаче прилагается рисунок на клетчатой бумаге. Стороны клеток предполагаются равными единице.

В конце пособия приведены ответы и указания ко всем задачам, а также список дополнительной литературы.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие кривой является одним из основных понятий геометрии. С древних времён кривые привлекали к себе внимание учёных и использовались ими для описания различных природных явлений от траектории брошенного камня до орбит космических тел.

Предлагаемая рабочая тетрадь посвящена кривым как траекториям движения точек и предназначена для учащихся 7-9 классов, интересующихся математикой, и призвана способствовать повышению эффективности обучения геометрии, подготовке к изучению высшей геометрии и математического анализа в вузе.

Она входит в учебно-методический комплект по математике «Лаборатория А. Г. Мордковича» и служит дополнением к курсу по выбору:

Смирнов В. А., Смирнова И. М. Моя математика. Курс по выбору. Геометрия. 7-9 классы: учебное пособие. – М.: Просвещение, 2025.

В тетради рассмотрены различные замечательные кривые, среди которых: циклоида, эпициклоиды и гипоциклоиды, кардиоида, астроида, кривая Штейнера, огибающие, кривые постоянной ширины и др.

Она содержит задачи на распознавание и изображение кривых, проведение построений циркулем и линейкой, установление взаимосвязи между различными кривыми, доказательство свойств кривых и др.

Предлагаемые задачи имеют различный уровень трудности. Они не требуют знания специальных формул и теорем и направлены на развитие геометрических представлений и конструктивных умений учащихся 7-9 классов.

К каждой задаче прилагается рисунок на клетчатой бумаге, стороны клеток которой предполагаются равными единице.

В конце тетради приведены ответы и указания ко всем задачам, а также список дополнительной литературы.

1. Циклоида

Приведём задачу из книги Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2000.

1. Лестница, стоящая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз (рис. 1.1). По какой траектории будет двигаться котёнок, сидящий на середине лестницы? Изобразите эту траекторию.

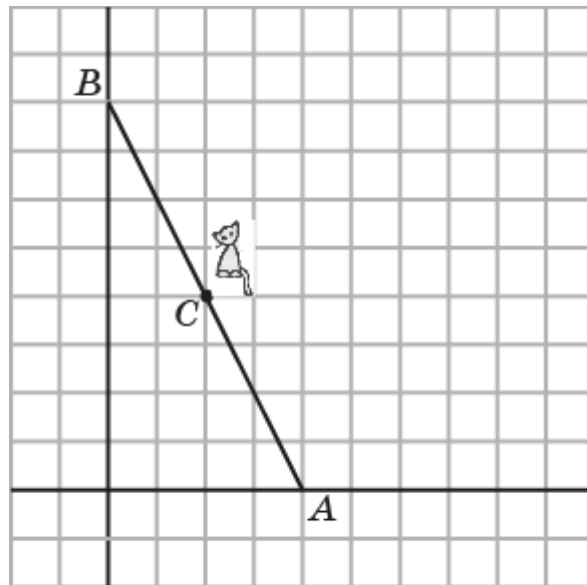


Рис. 1.1

2. По какой траектории будет двигаться котёнок, сидящий на соскальзывающей вниз лестнице не в её середине (рис. 1.2)? Изобразите эту траекторию.

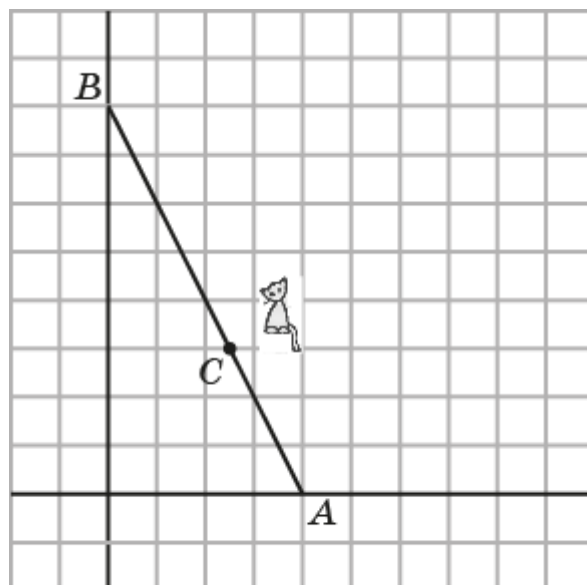


Рис. 1.2

3. По какой траектории будет двигаться середина C отрезка AB , концы которого перемещаются по дуге окружности (рис. 1.3)? Изобразите эту траекторию.

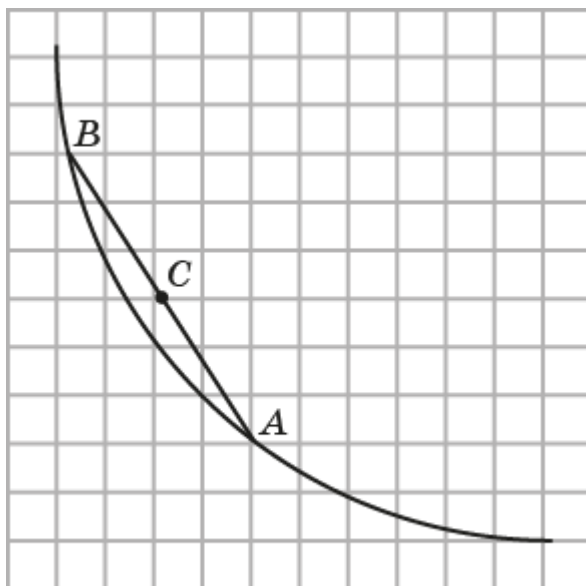


Рис. 1.3

4. По какой траектории будет двигаться точка C отрезка AB , не совпадающая с его серединой, когда концы этого отрезка перемещаются по дуге окружности (рис. 1.4)? Изобразите эту траекторию.

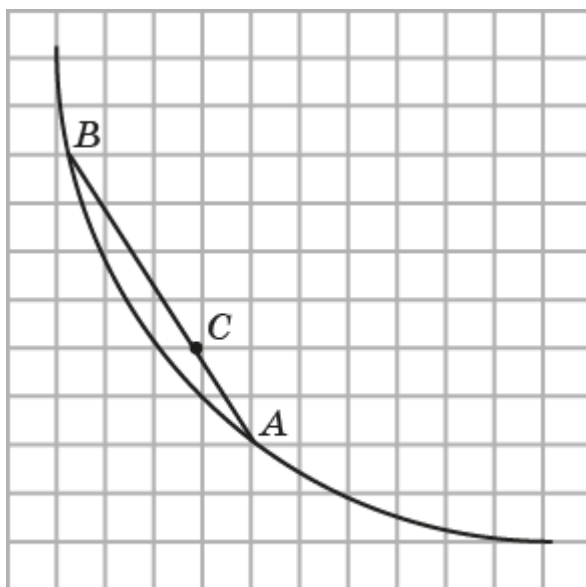


Рис. 1.4

5. Даны окружность и точка A , расположенная внутри этой окружности (рис. 1.5). Точка B движется по окружности. Изобразите траекторию движения середины C отрезка AB .

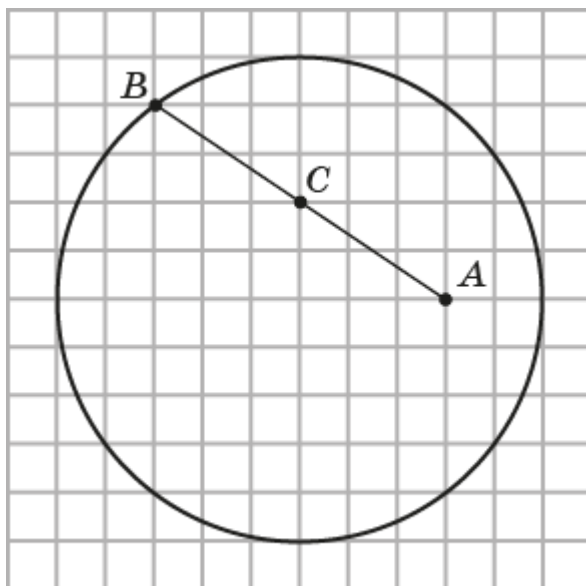


Рис. 1.5

6. Даны окружность и точка A , расположенная на этой окружности (рис. 1.6). Точка B движется по окружности. Изобразите траекторию движения середины C отрезка AB .

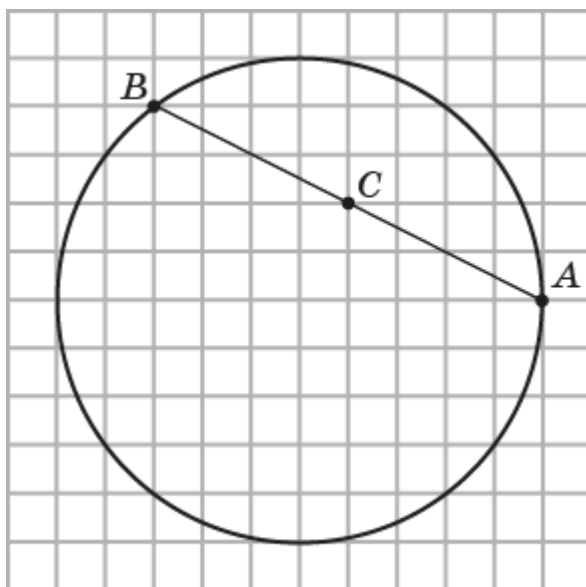


Рис. 1.6

7. Даны окружность и точка A , расположенная вне этой окружности (рис. 1.7). Точка B движется по окружности. Изобразите траекторию движения середины C отрезка AB .

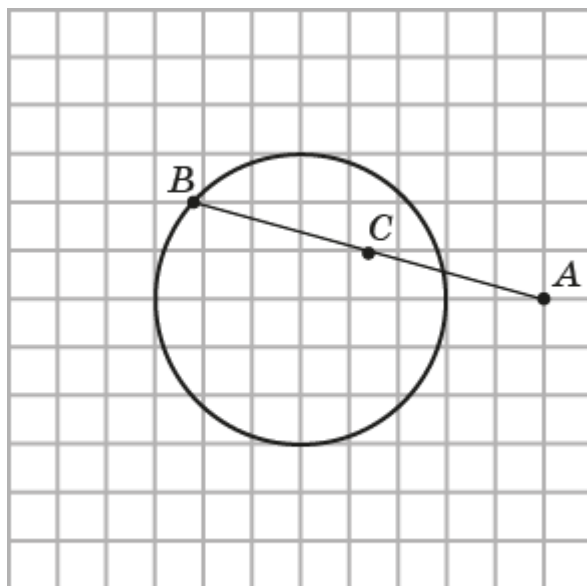


Рис. 1.7

Циклоидой называется траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по прямой.

8. Окружность радиусом 2 катится по прямой. Точка A закреплена на окружности. Будем считать длину отрезка AB приблизительно равной длине окружности. Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 (рис. 1.8). Соедините их плавной кривой. Получите циклоиду.

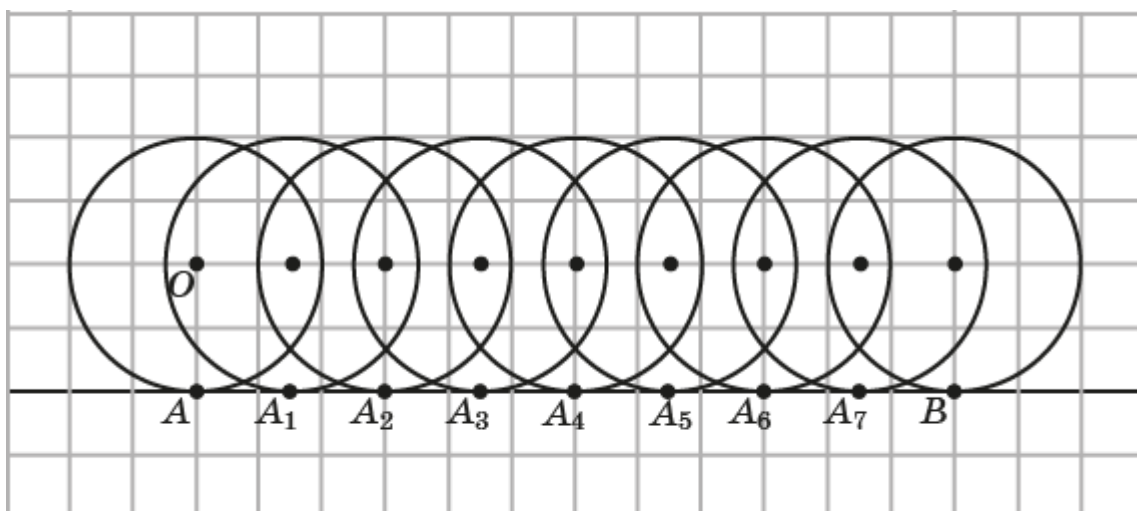


Рис. 1.8

Удлиненной циклоидой называется траектория движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой.

9. Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , закреплённая на продолжении радиуса катящейся окружности, когда эта окружность, достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 (рис. 1.9). Соедините их плавной кривой. Получите удлиненную циклоиду.

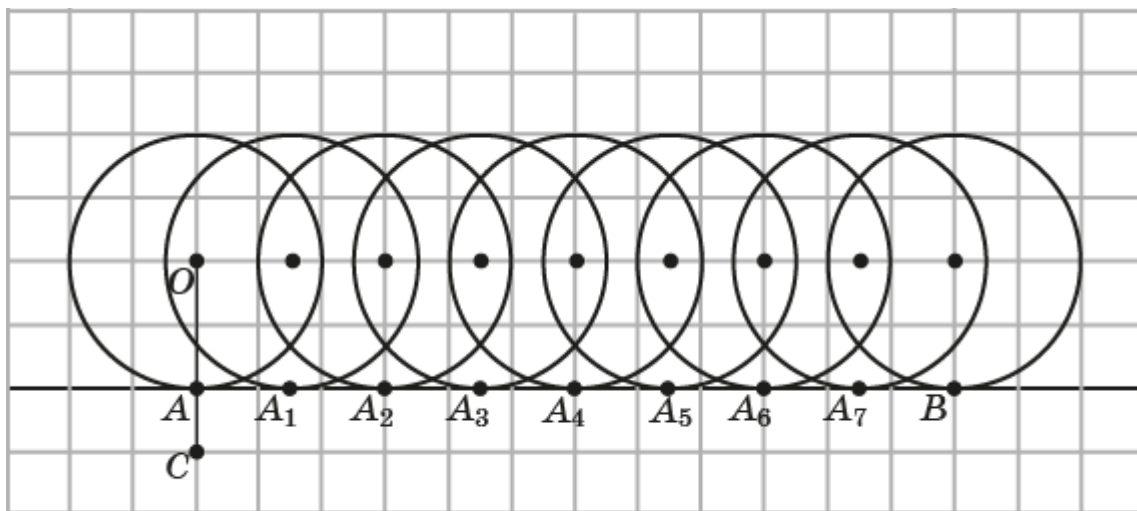


Рис. 1.9

Укороченной циклоидой называется траектория движения точки, закреплённой на радиусе окружности, катящейся по прямой.

10. Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , закреплённая на радиусе катящейся окружности, когда эта окружность, достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 (рис. 1.10). Соедините их плавной кривой. Получите укороченную циклоиду.

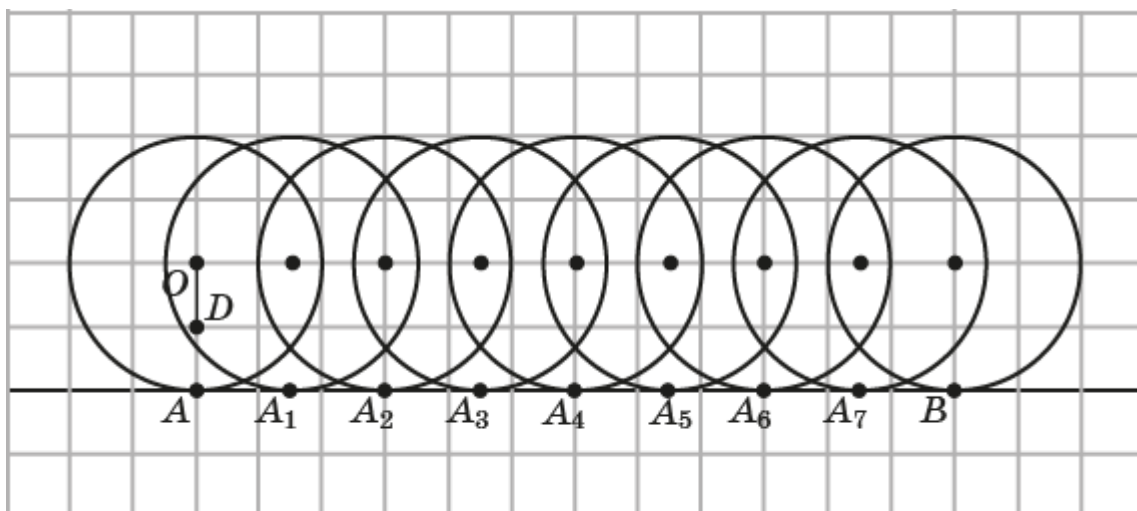


Рис. 1.10

11. Правильный треугольник катится по прямой AB . Точка закреплена в вершине A этого треугольника (рис. 1.11). Изобразите траекторию движения этой точки.

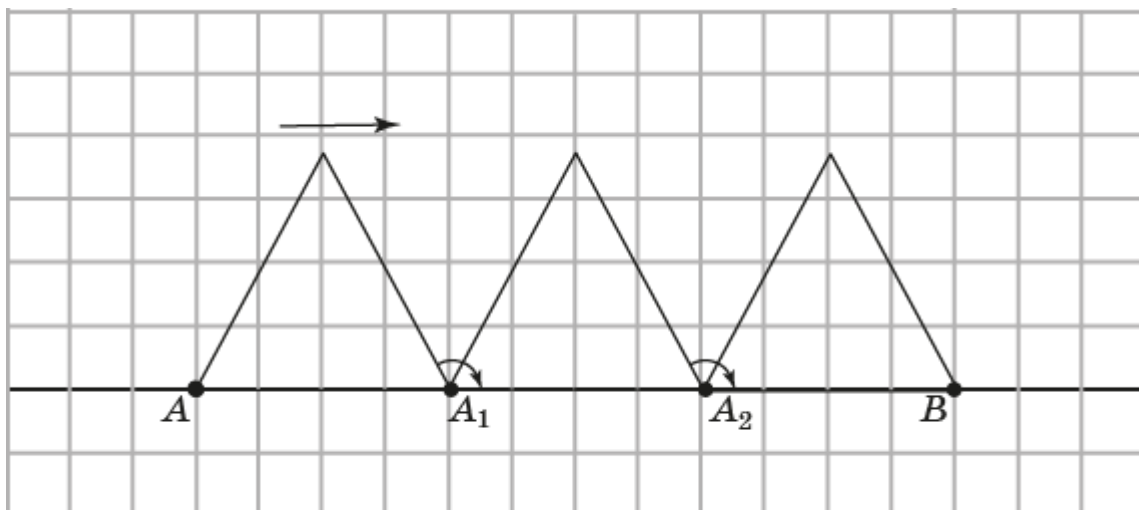


Рис. 1.11

12. Правильный треугольник катится по прямой AB (рис. 1.12). Изобразите траекторию движения центра O этого треугольника.

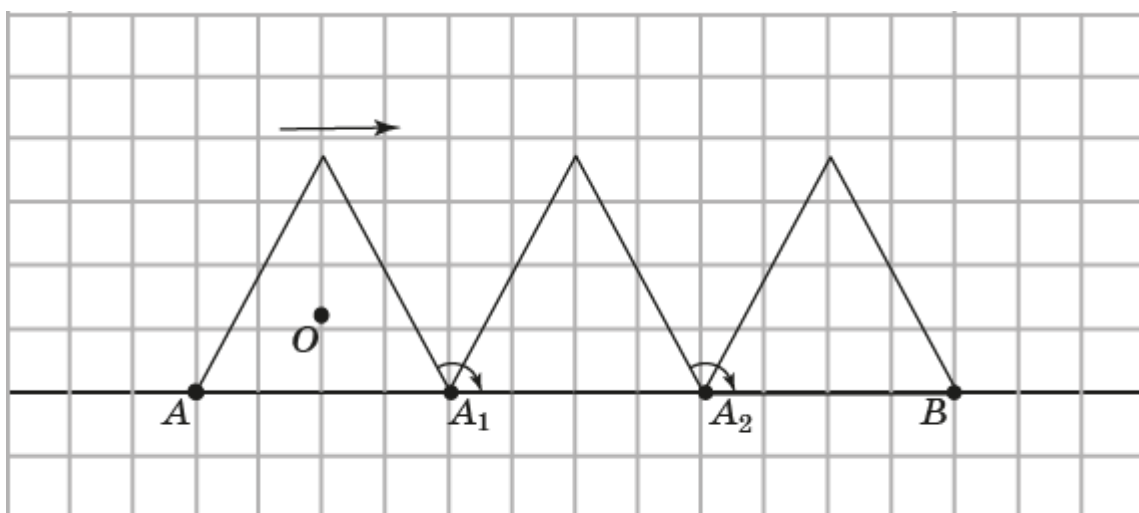


Рис. 1.12

13. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = 3$, $AC = BC = 4$) катится по прямой AB . Точка закреплена в вершине A этого треугольника (рис. 1.13). Изобразите траекторию движения этой точки.

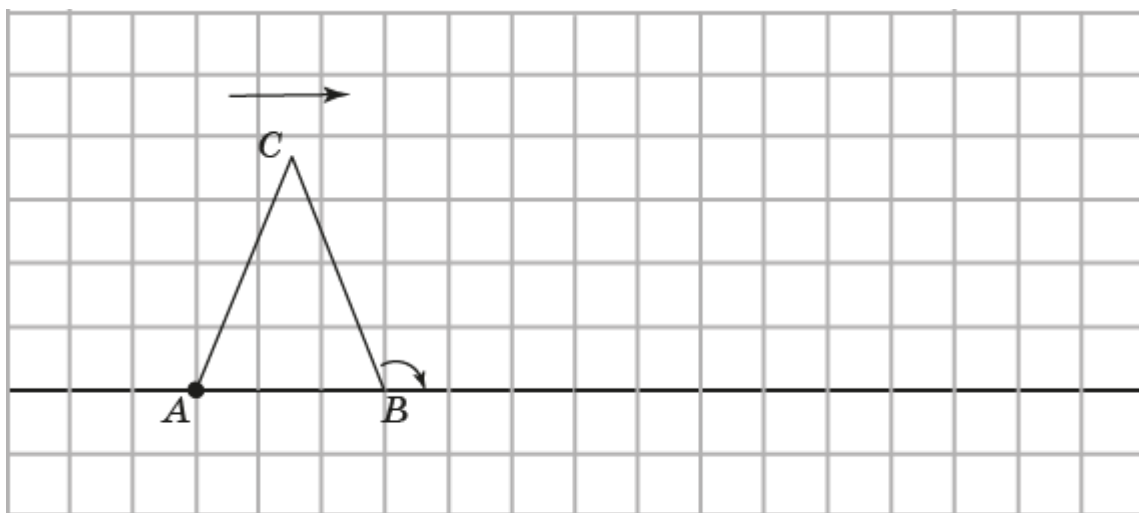


Рис. 1.13

14. Квадрат катится по прямой AB . Точка закреплена в вершине A этого квадрата (рис. 1.14). Изобразите траекторию движения этой точки.

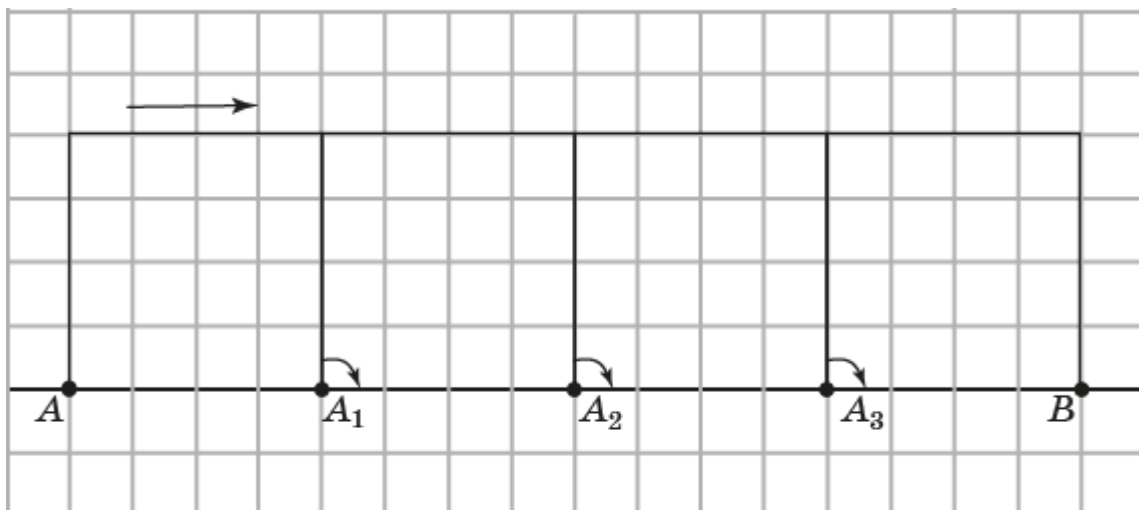


Рис. 1.14

15. Квадрат катится по прямой AB (рис. 1.15). Изобразите траекторию движения его центра O .

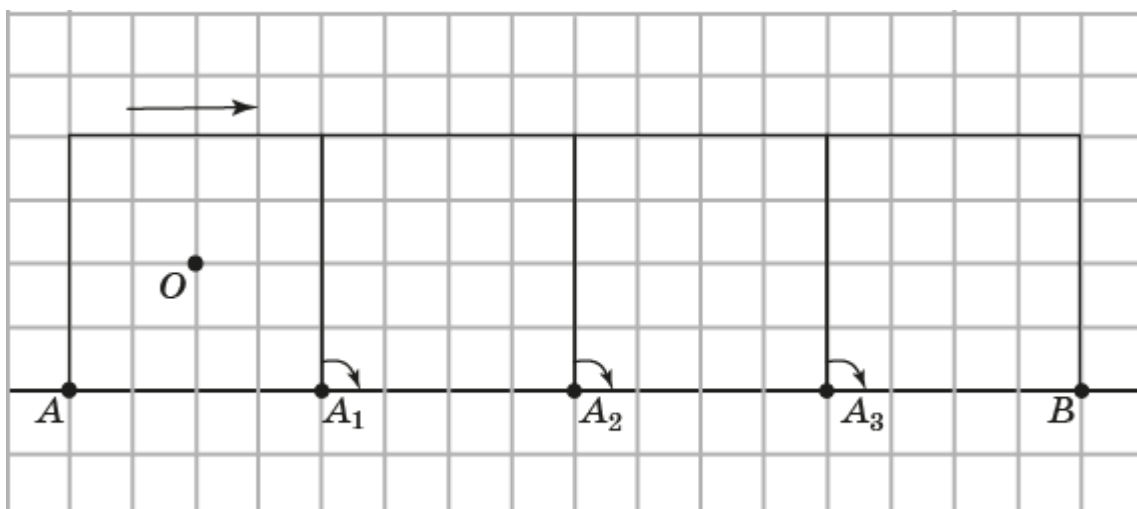


Рис. 1.15

16. Прямоугольник катится по прямой AB . Точка закреплена в вершине A этого прямоугольника (рис. 1.16). Изобразите траекторию движения этой точки.

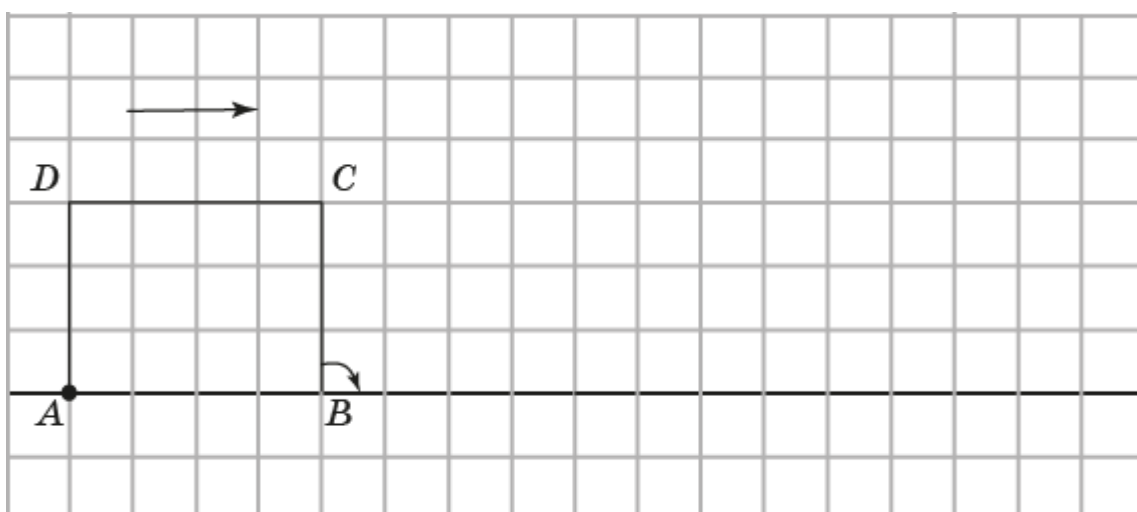


Рис. 1.16

17. Правильный шестиугольник катится по прямой AB . Точка закреплена в вершине A этого шестиугольника (рис. 1.17). Изобразите траекторию движения этой точки.

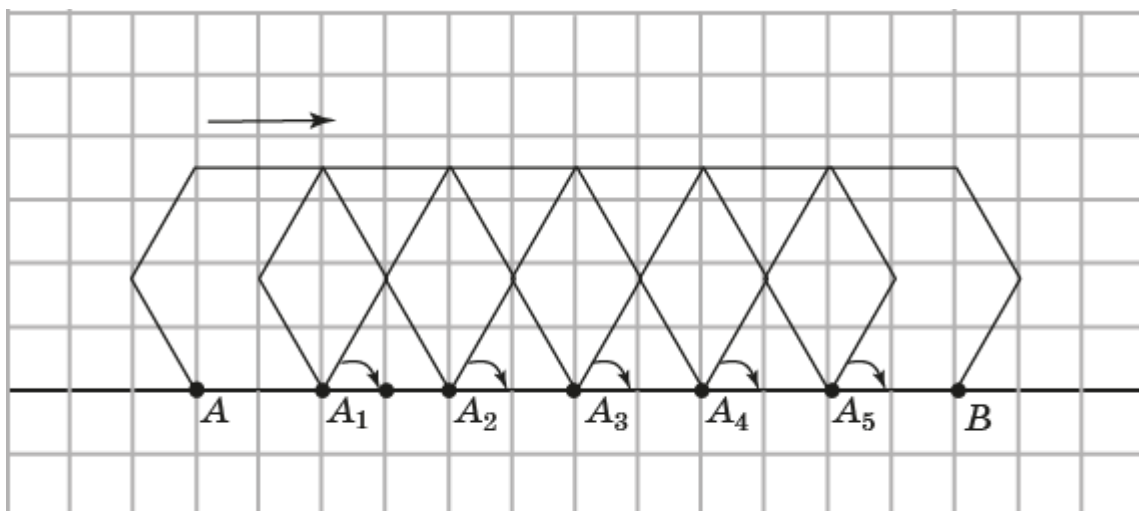


Рис. 1.17

18. Правильный шестиугольник катится по прямой AB (рис. 1.18). Изобразите траекторию движения его центра O .

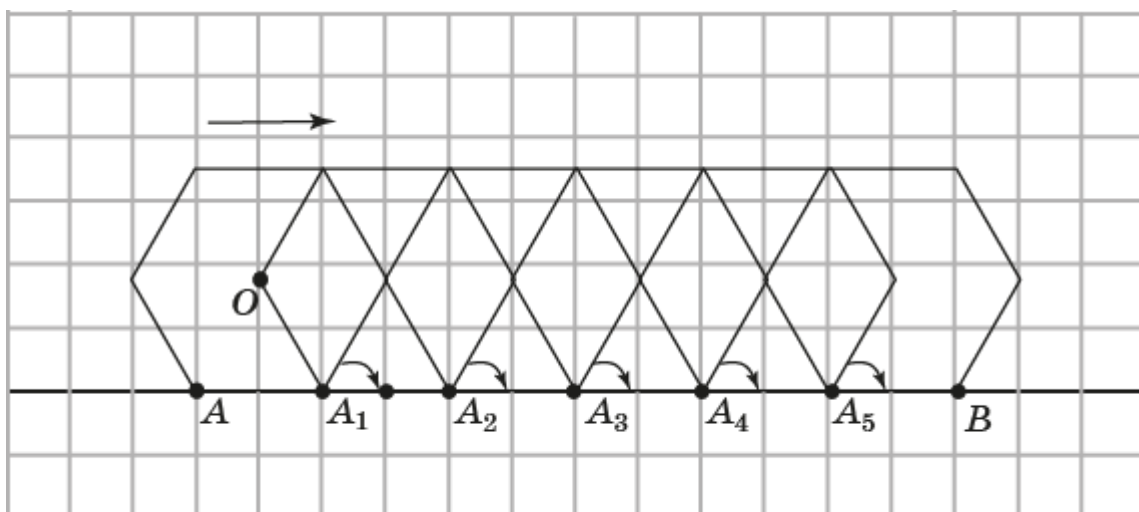


Рис. 1.18

19. Правильный восьмиугольник катится по прямой AB . Точка закреплена в вершине A этого восьмиугольника (рис. 1.19). Изобразите траекторию движения этой точки.

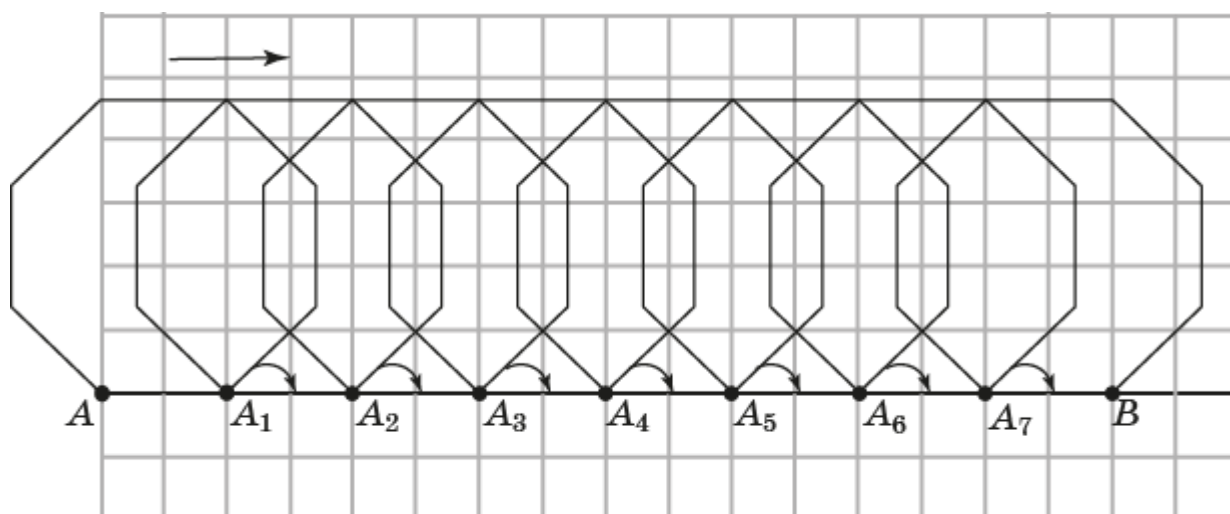


Рис. 1.19

20. Правильный восьмиугольник катится по прямой AB (рис. 1.20). Изобразите траекторию движения его центра O .

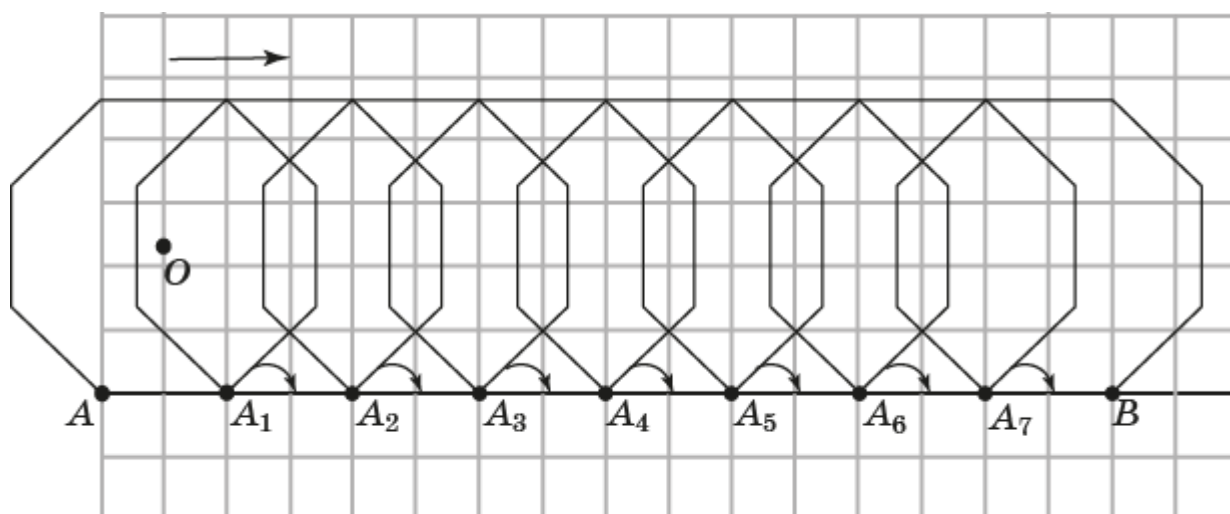


Рис. 1.20

2. Эпициклоиды

Эпициклоидой называется траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности.

1. Окружность катится по другой окружности такого же радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 2.1). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 . Соедините их плавной кривой. Получите эпициклоиду. Она называется **кардиоидой**.

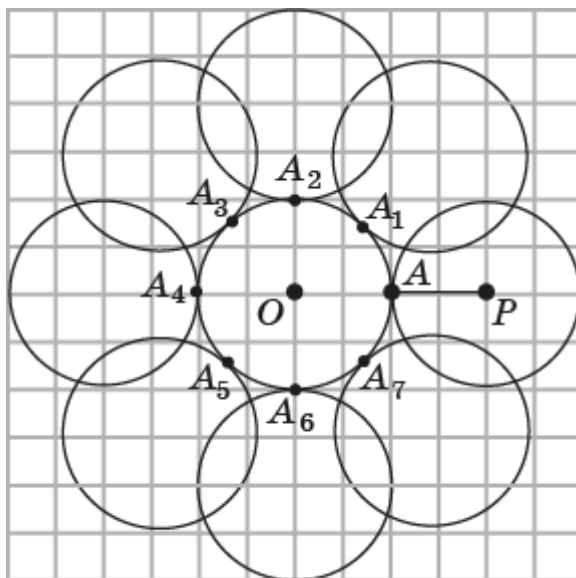


Рис. 2.1

Удлинённой эпициклоидой называется траектория движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности.

2. Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , закреплённая на продолжении радиуса окружности, катящейся по другой окружности такого же радиуса, когда катящаяся окружность, достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 (рис. 2.2). Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую кардиоиду.

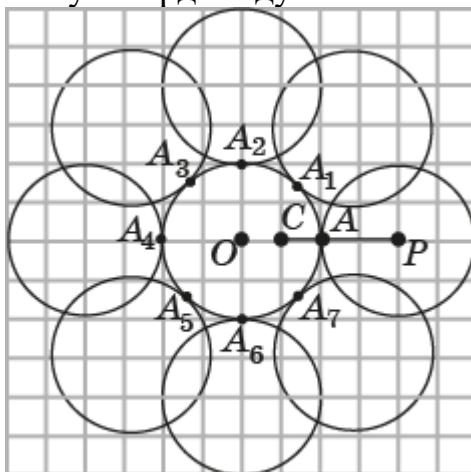


Рис. 2.2

Укороченной эпициклоидой называется траектория движения точки, закреплённой на радиусе окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности.

3. Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , закреплённая на радиусе окружности, катящейся по другой окружности такого же радиуса, когда катящаяся окружность, достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 (рис. 2.3). Соедините их плавной кривой. Получите укороченную кардиоиду.

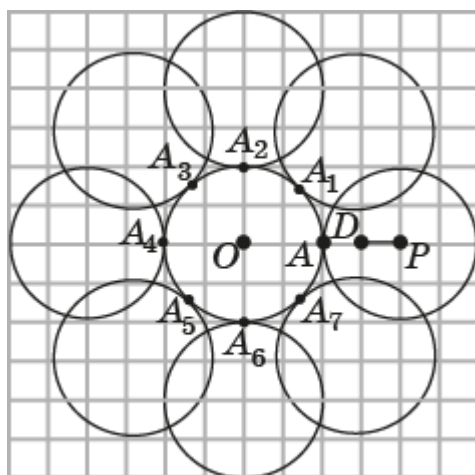


Рис. 2.3

4. Окружность катится по другой окружности в 2 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 2.4). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите эпициклоиду.

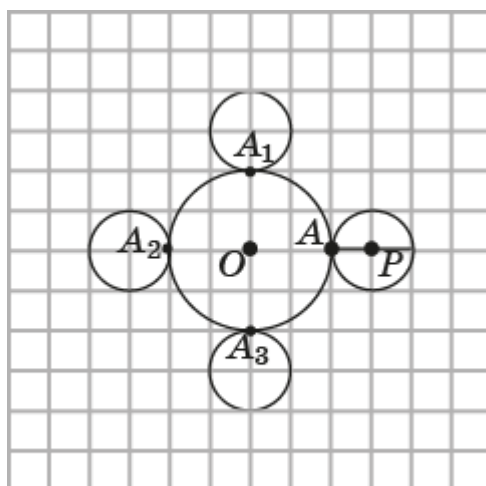


Рис. 2.4

5. Окружность катится по другой окружности в 2 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 2.5). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую эпициклоиду.

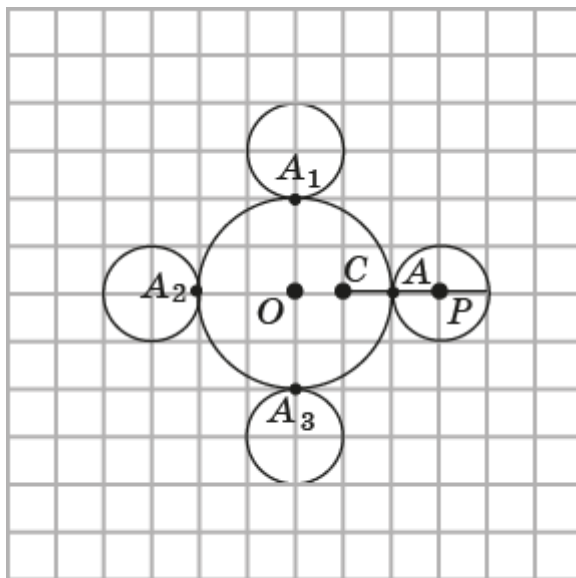


Рис. 2.5

6. Окружность катится по другой окружности в 2 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе окружности (рис. 2.6). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную эпициклоиду.

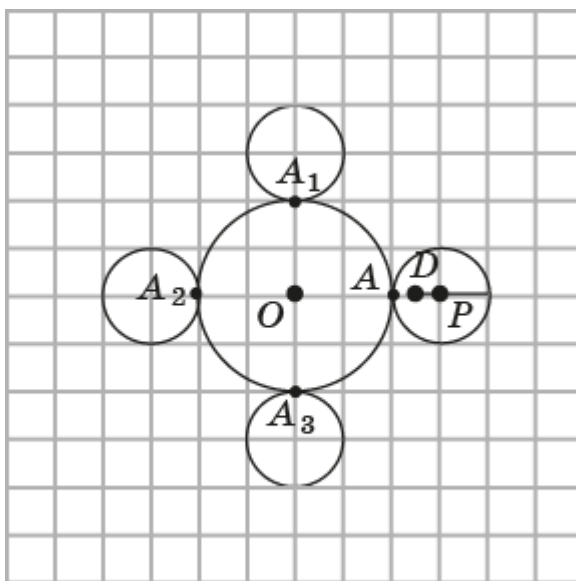


Рис. 2.6

7. Окружность катится по другой окружности в 3 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 2.7). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите эпициклоиду.

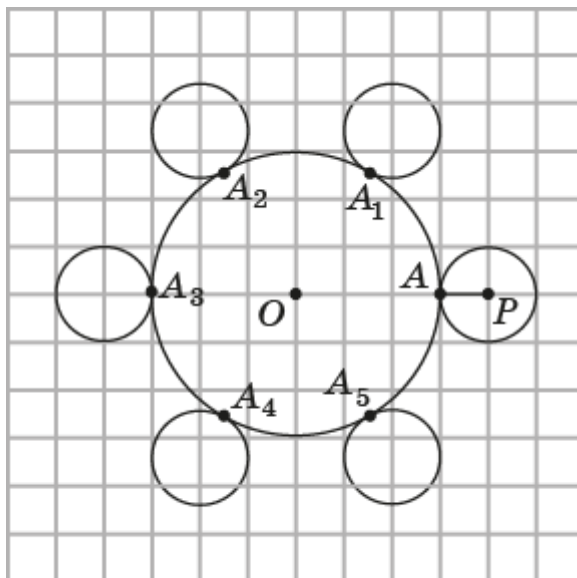


Рис. 2.7

8. Окружность катится по другой окружности в 3 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 2.8). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую эпициклоиду.

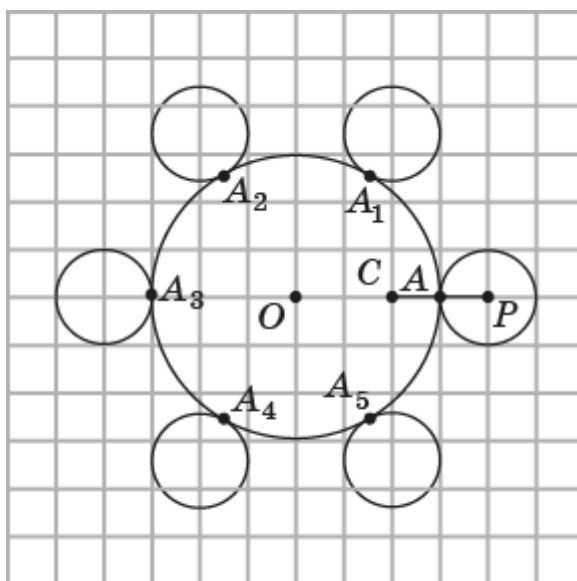


Рис. 2.8

9. Окружность катится по другой окружности в 3 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 2.9). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную эпициклоиду.

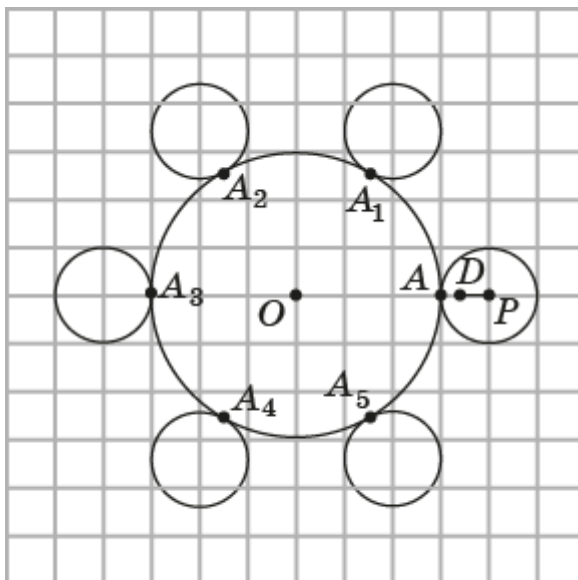


Рис. 2.9

10. Окружность катится по другой окружности в 4 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 2.10). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 . Соедините их плавной кривой. Получите эпициклоиду.

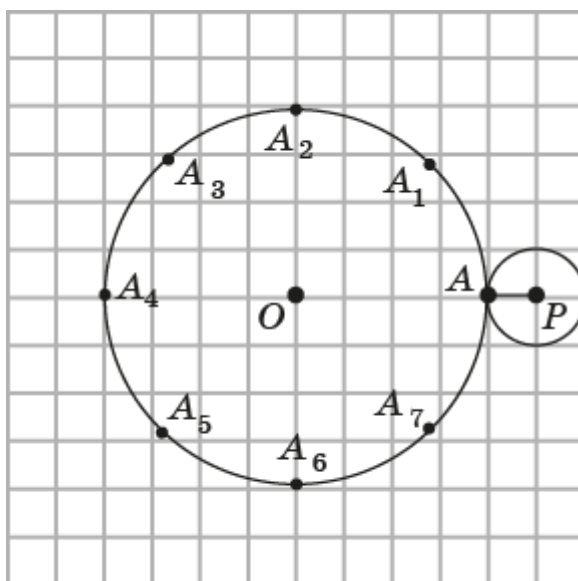


Рис. 2.10

11. Окружность катится по другой окружности в 4 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 2.11). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую эпициклоиду.

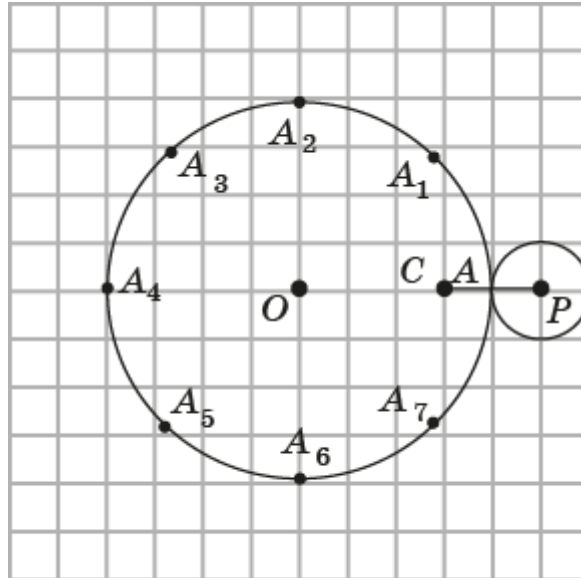


Рис. 2.11

12. Окружность катится по другой окружности в 4 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 2.12). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную эпициклоиду.

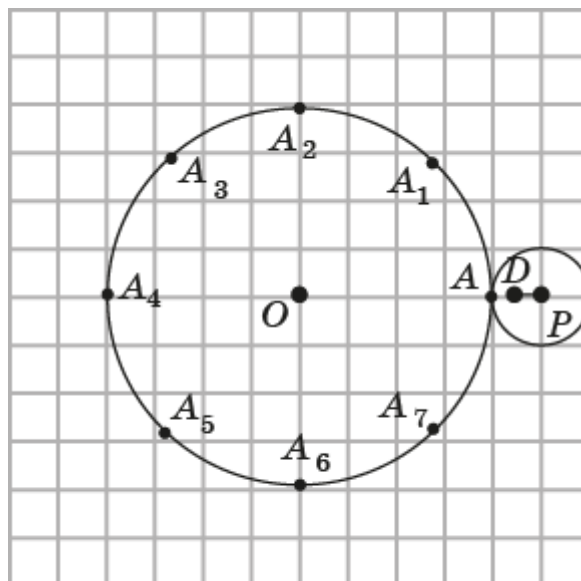


Рис. 2.12

13. Окружность катится по другой окружности в 5 раз большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 2.13). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 ; з) A_8 ; и) A_9 . Соедините их плавной кривой. Получите эпициклоиду.

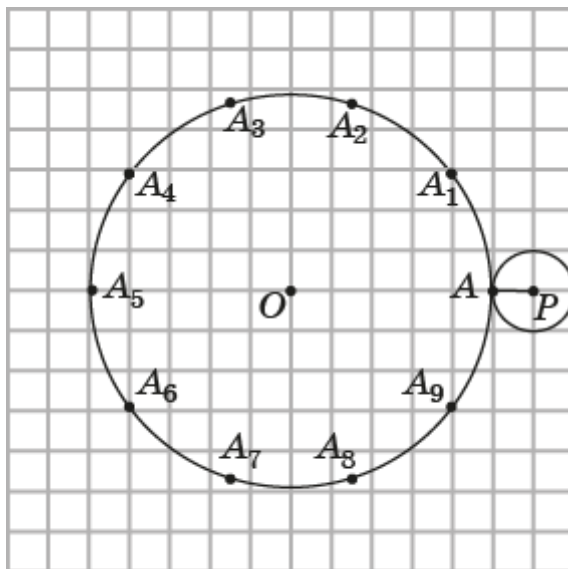


Рис. 2.13

14. Окружность катится по другой окружности в 5 раз большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 2.14). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 ; з) A_8 ; и) A_9 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую эпициклоиду.

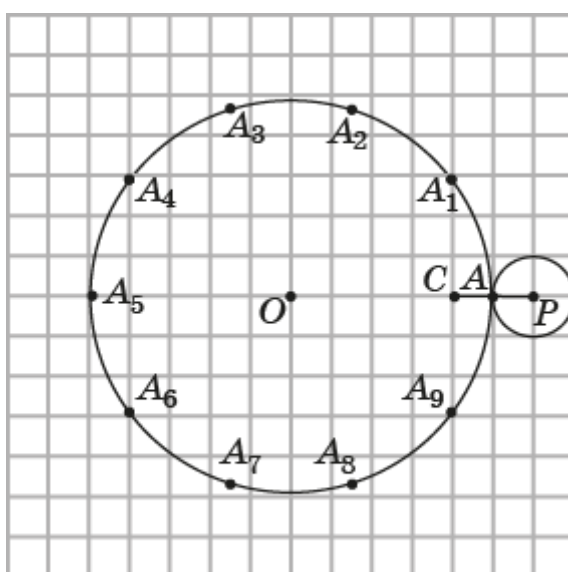


Рис. 2.14

15. Окружность катится по другой окружности в 5 раз большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 2.15). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 ; з) A_8 ; и) A_9 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную эпициклоиду.

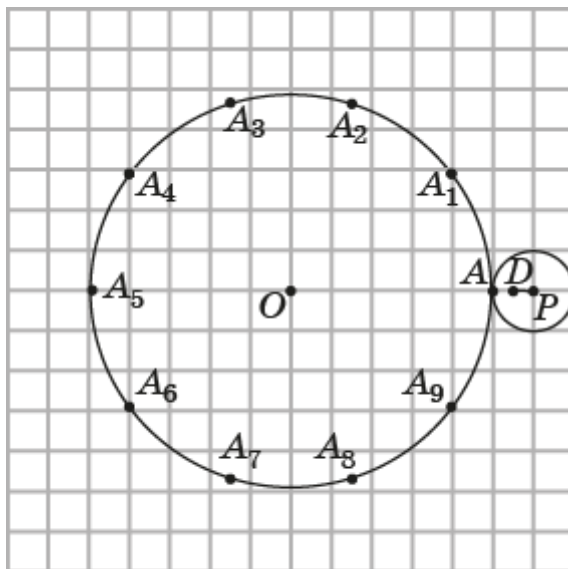


Рис. 2.15

16. Окружность катится по другой окружности в 1,5 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 2.16). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите эпициклоиду.

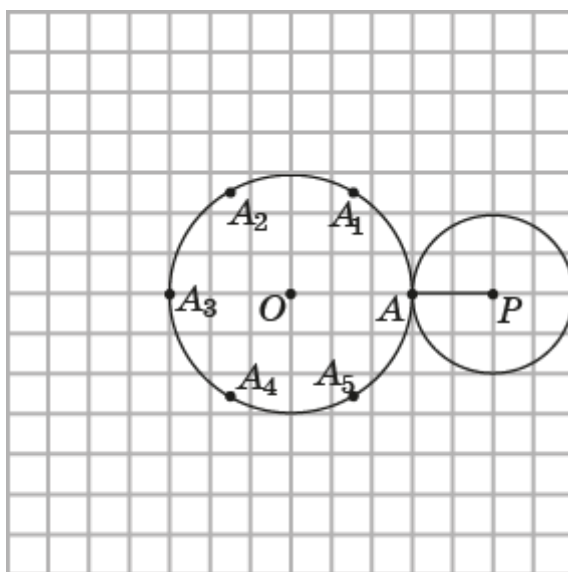


Рис. 2.16

17. Окружность катится по другой окружности в 1,5 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 2.17). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую эпициклоиду.

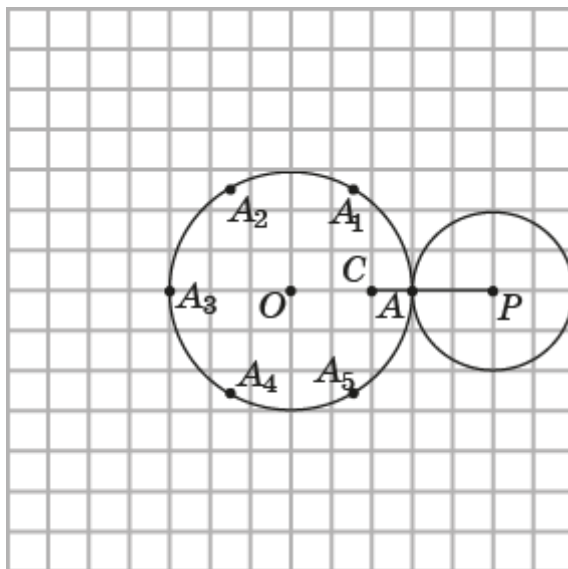


Рис. 2.17

18. Окружность катится по другой окружности в 1,5 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 2.18). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную эпициклоиду.

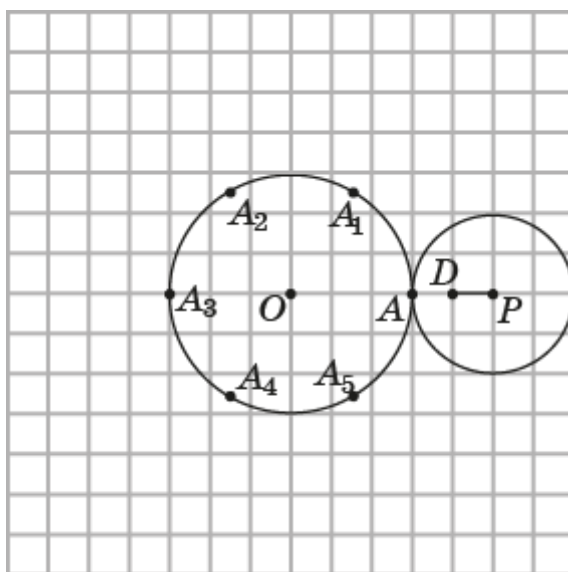


Рис. 2.18

19. Окружность катится по другой окружности в 2.5 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 2.19). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 . Соедините их плавной кривой. Получите эпициклоиду.

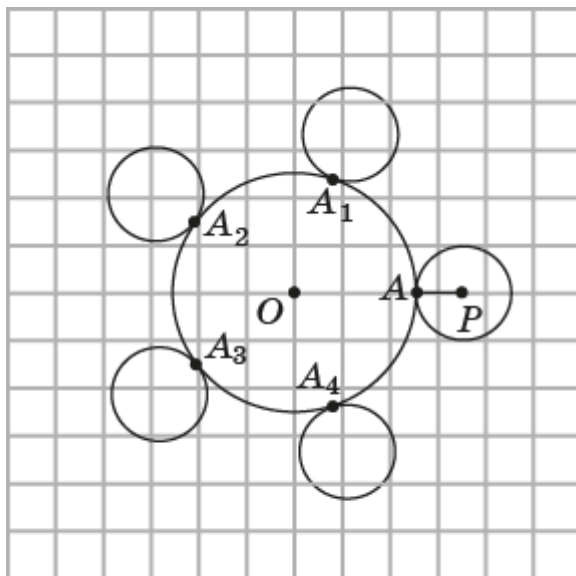


Рис. 2.19

20. Окружность катится по другой окружности в 2.5 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 2.20). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую эпициклоиду.

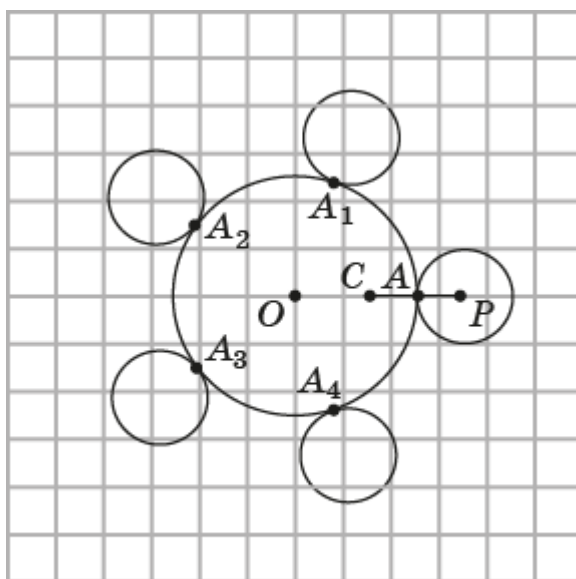


Рис. 2.20

21. Окружность катится по другой окружности в 2.5 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 2.21). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную эпициклоиду.

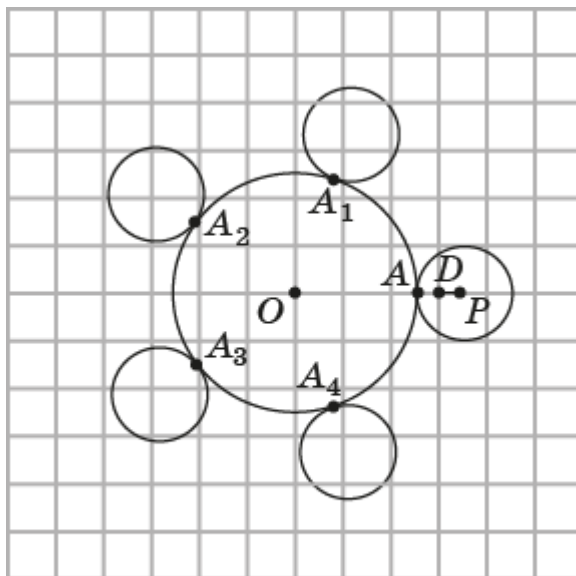


Рис. 2.21

22. Окружность катится по другой окружности в 2 раза меньшего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 2.22). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите эпициклоиду.

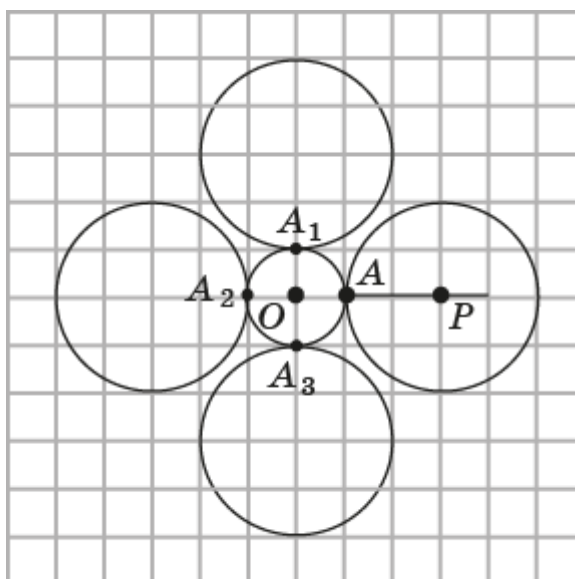


Рис. 2.22

23. Окружность катится по другой окружности в 2 раза меньшего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 2.23). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую эпициклоиду.

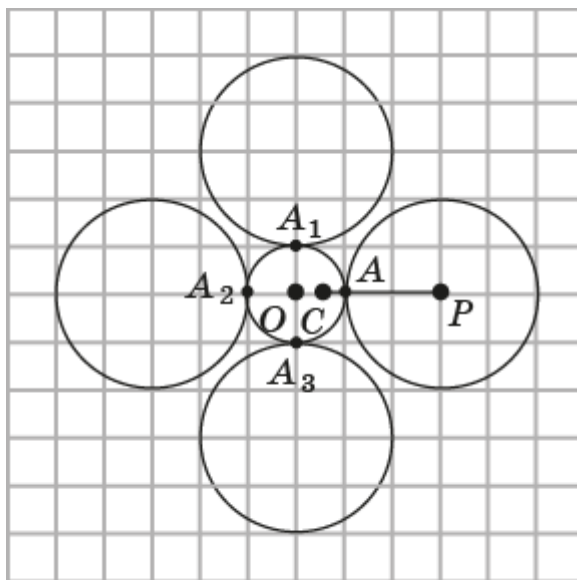


Рис. 2.23

24. Окружность катится по другой окружности в 2 раза меньшего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 2.24). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную эпициклоиду.

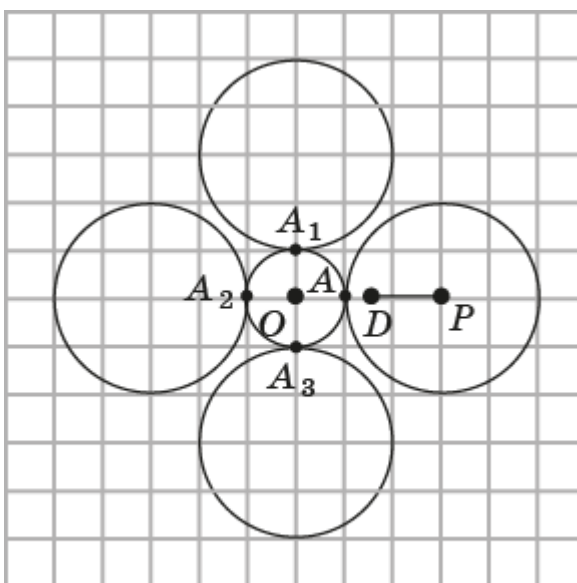


Рис. 2.24

25. Используя рисунок 2.25, докажите, что кардиоида является улиткой Паскаля.

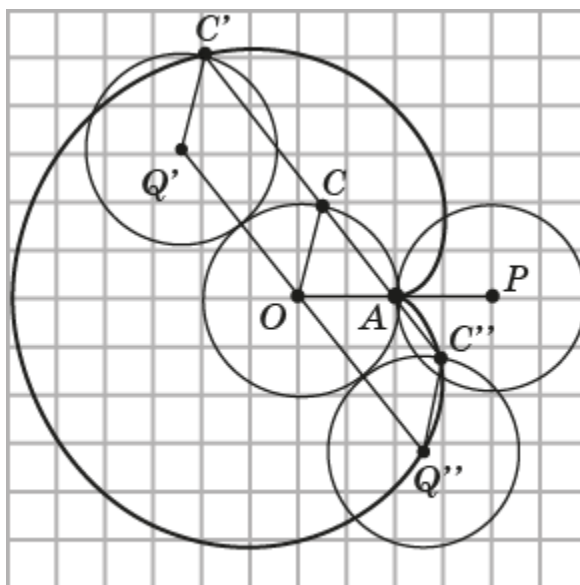


Рис. 2.25

26. Правильный треугольник катится по другому правильному треугольнику (рис. 2.26). Точка закреплена в вершине A катящегося треугольника. Изобразите траекторию движения этой точки.

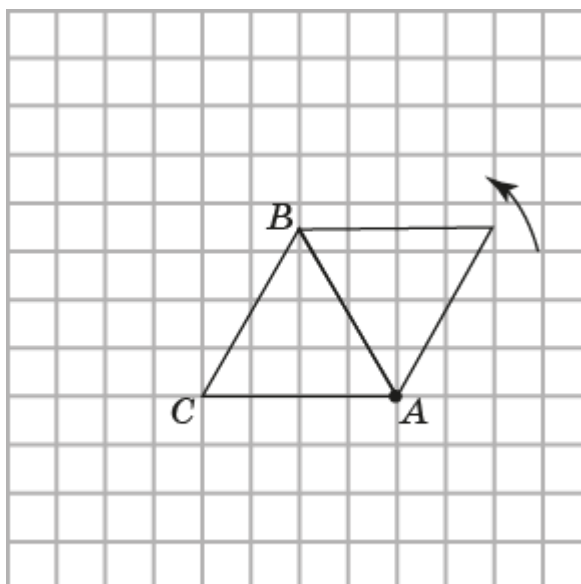


Рис. 2.26

27. Квадрат катится по другому квадрату (рис. 2.27). Точка закреплена в вершине A катящегося квадрата. Изобразите траекторию движения этой точки.

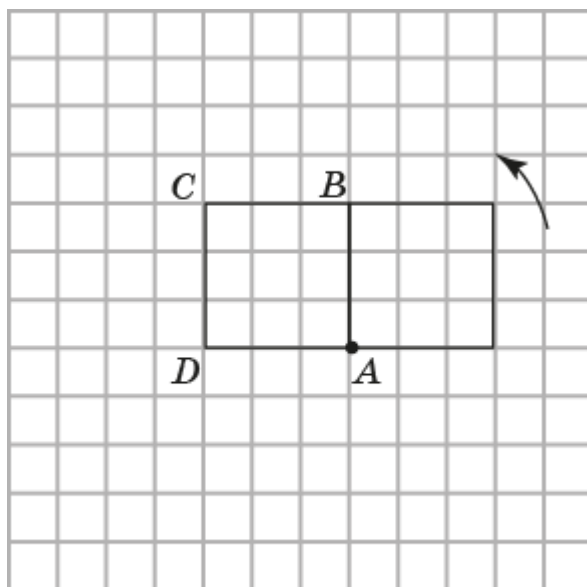


Рис. 2.27

28. Правильный шестиугольник катится по другому правильному шестиугольнику (рис. 2.28). Точка закреплена в вершине A катящегося шестиугольника. Изобразите траекторию движения этой точки.

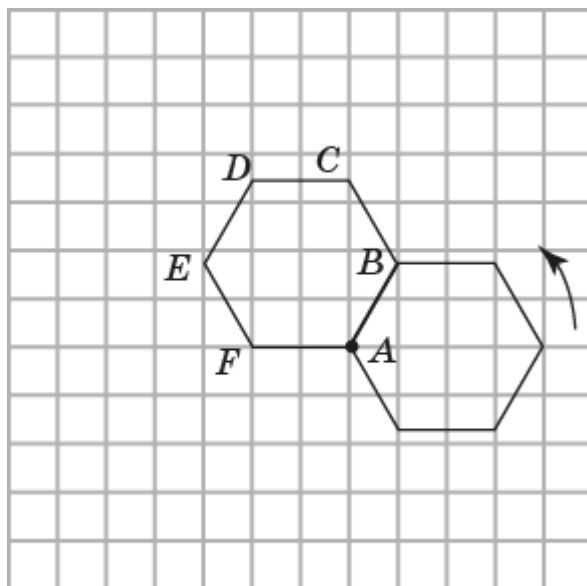


Рис. 2.28

29. Правильный треугольник катится по квадрату (рис. 2.29). Точка закреплена в вершине A треугольника. Изобразите траекторию движения этой точки.

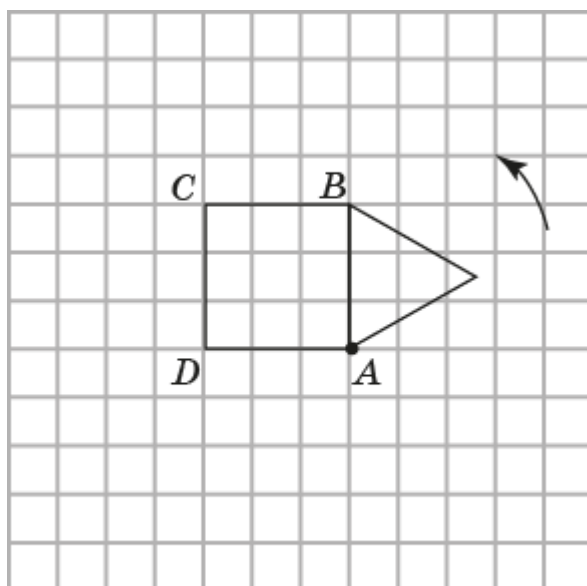


Рис. 2.29

30. Правильный треугольник катится по правильному шестиугольнику (рис. 2.30). Точка закреплена в вершине A треугольника. Изобразите траекторию движения этой точки.

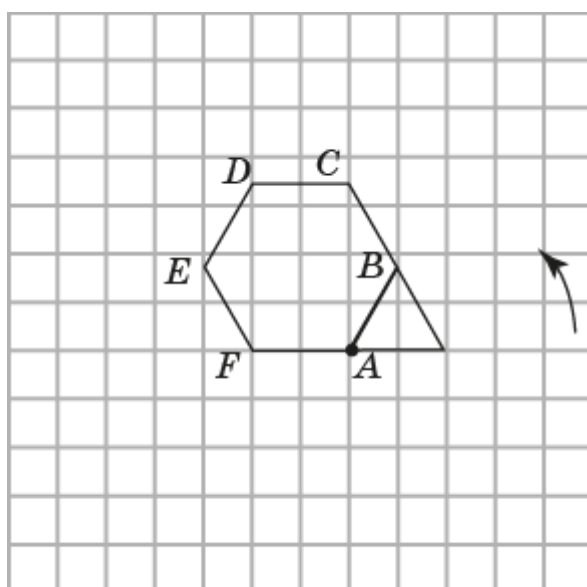


Рис. 2.30

31. Квадрат катится по правильному шестиугольнику (рис. 2.31). Точка закреплена в вершине A квадрата. Изобразите траекторию движения этой точки.

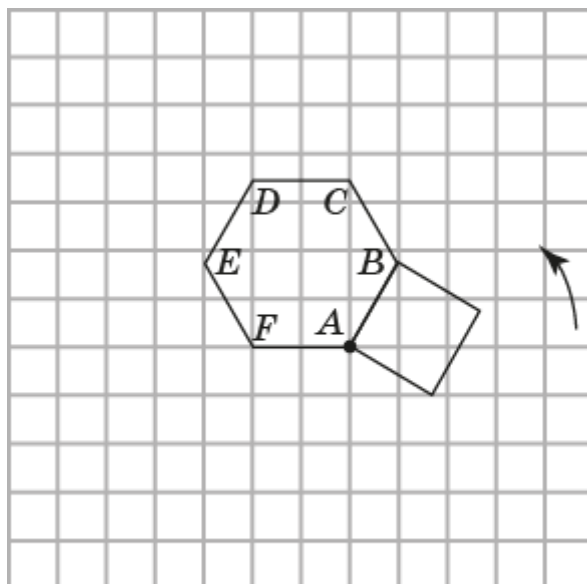


Рис. 2.31

3. Гипоциклоиды

Гипоциклоидой называется траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся с внутренней стороны по другой окружности.

1. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 4 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.1). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 . Соедините их плавной кривой. Получите гипоциклоиду. Она называется **астроидой**.

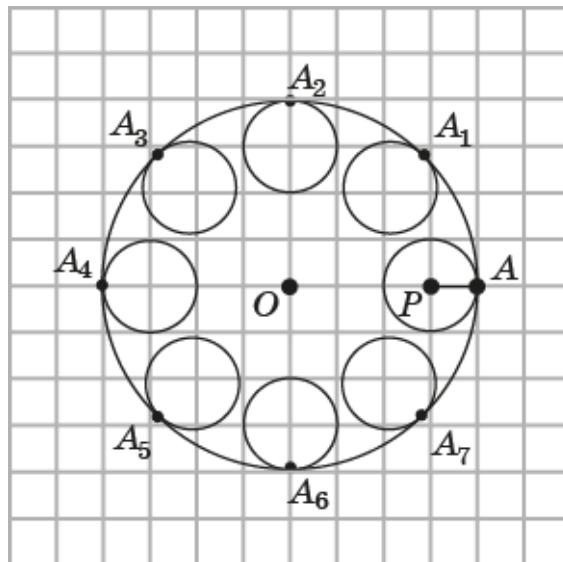


Рис. 3.1

2. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 4 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.2). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую астроиду.

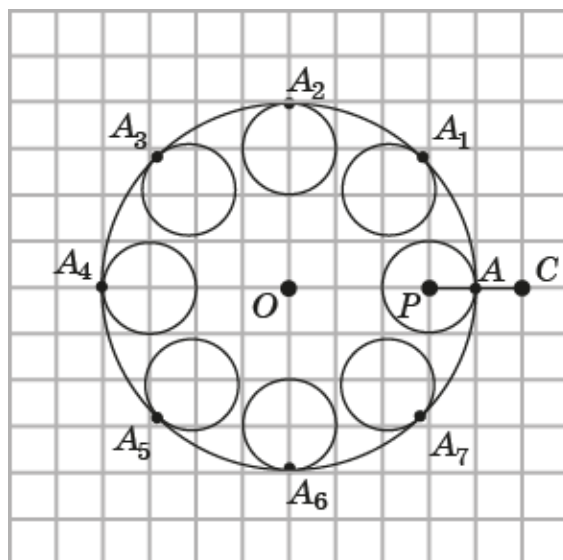


Рис. 3.2

3. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 4 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.3). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную астроииду.

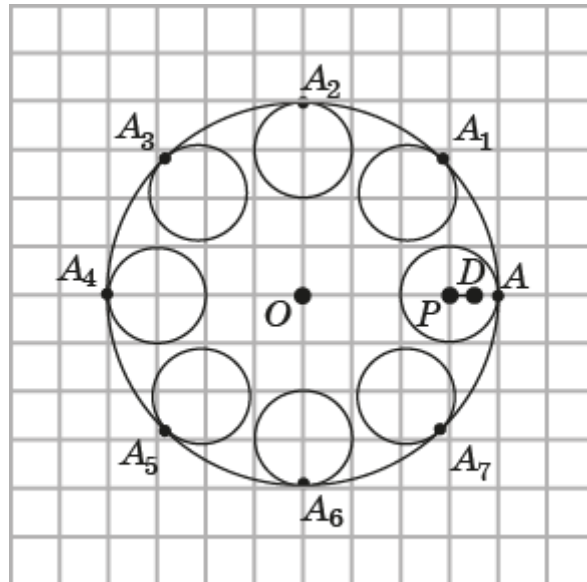


Рис. 3.3

4. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 3 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.4). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите гипоциклоиду. Она называется *кривой Штейнера*.

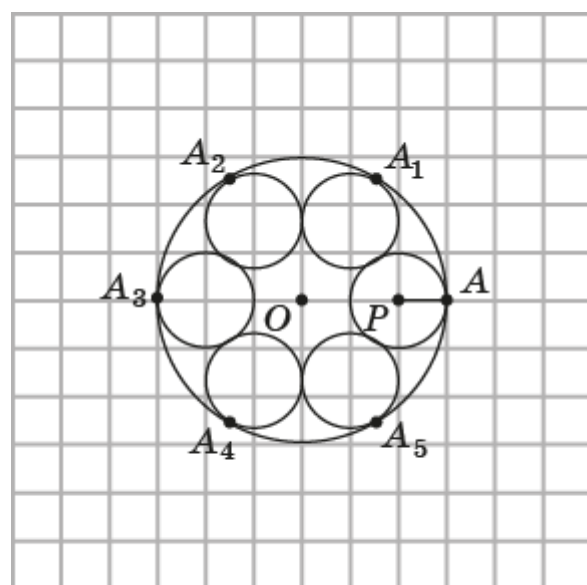


Рис. 3.4

5. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 3 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.5). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую кривую Штейнера.

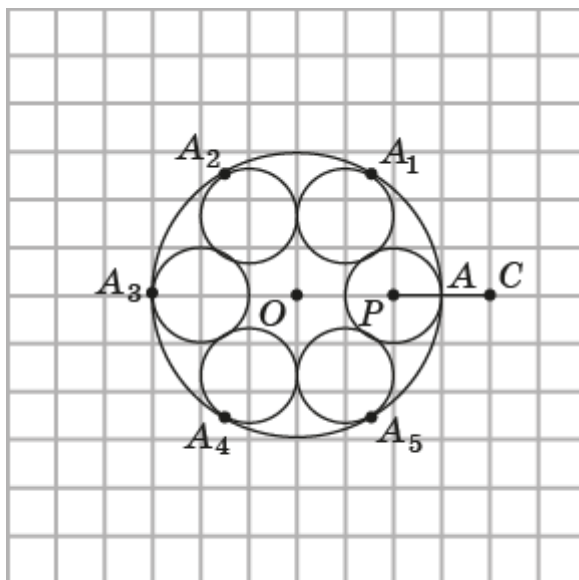


Рис. 3.5

6. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 3 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.6). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную кривую Штейнера.

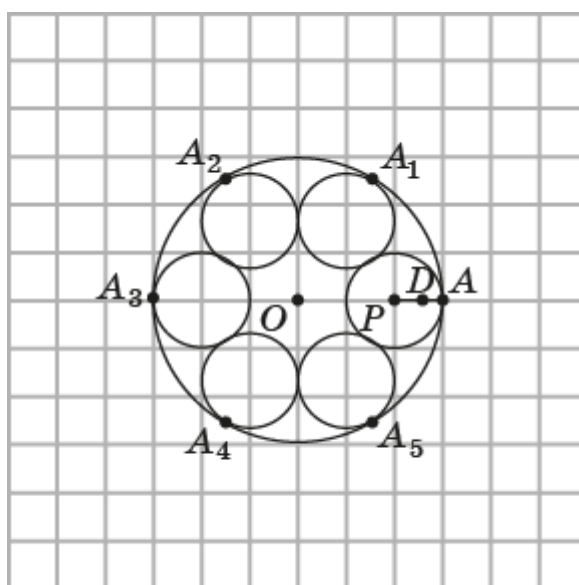


Рис. 3.6

7. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 5 раз большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.7). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 ; з) A_8 ; и) A_9 . Соедините их плавной кривой. Получите гипоциклоиду.

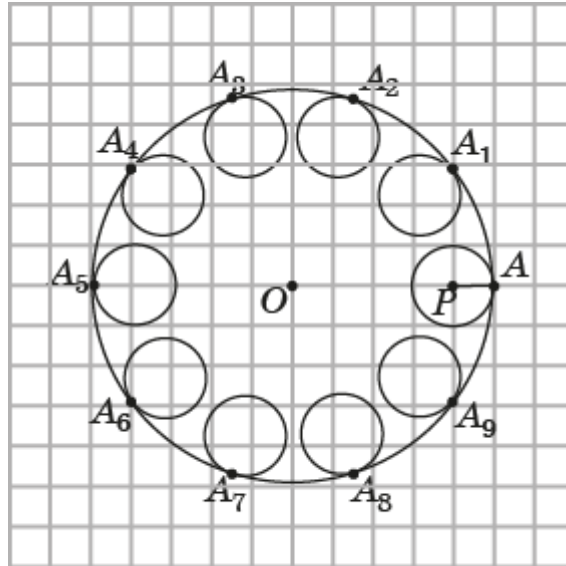


Рис. 3.7

8. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 5 раз большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.8). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 ; з) A_8 ; и) A_9 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую гипоциклоиду.

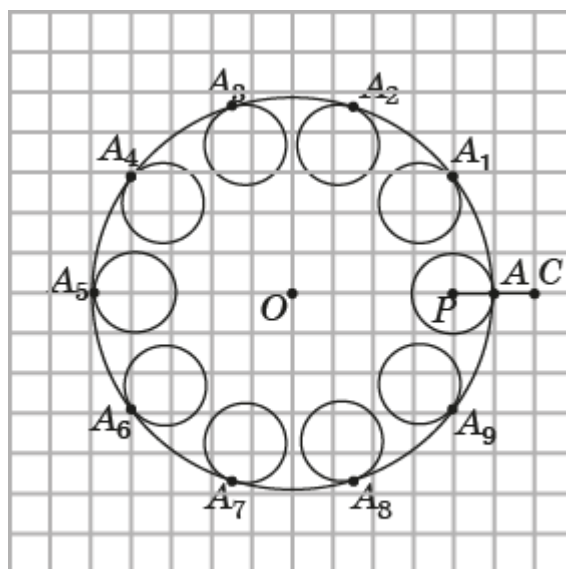


Рис. 3.8

9. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 5 раз большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.9). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 ; е) A_6 ; ж) A_7 ; з) A_8 ; и) A_9 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную гипоциклоиду.

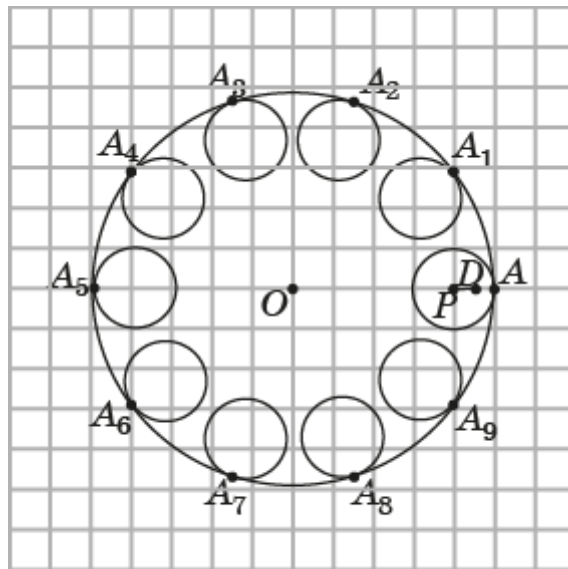


Рис. 3.9

10. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.10). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Какой кривой она является?

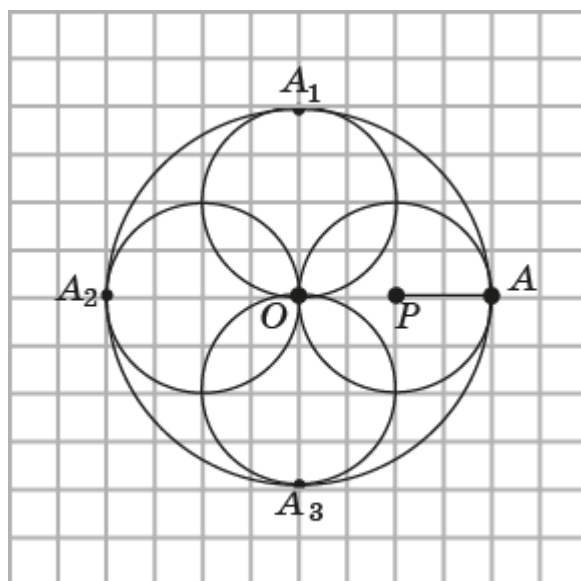


Рис. 3.10

11. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.11). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Какой кривой она является?

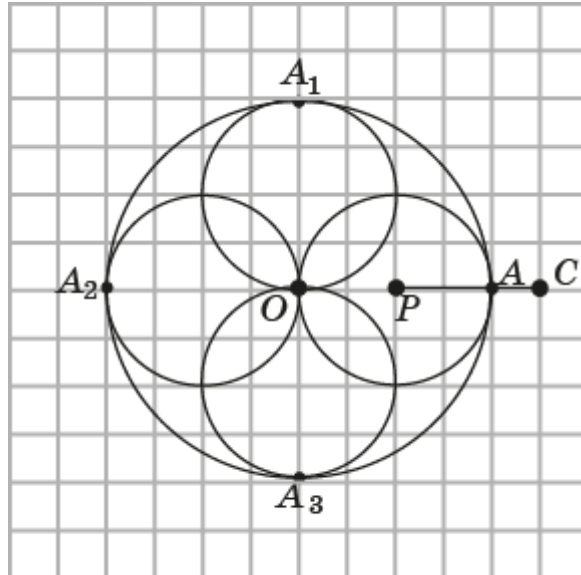


Рис. 3.11

12. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.12). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Какой кривой она является?

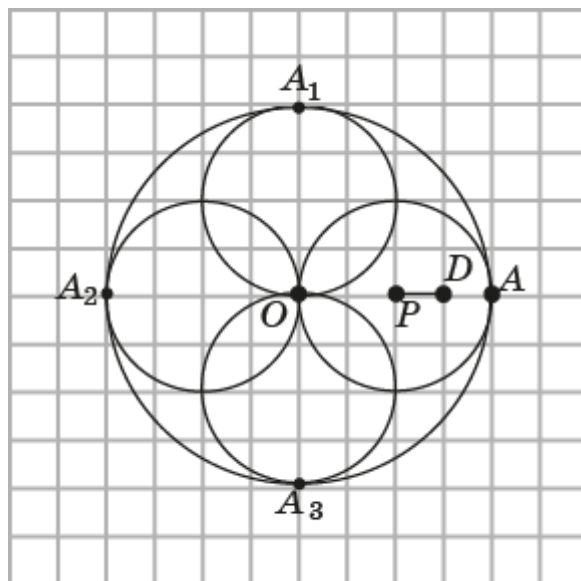


Рис. 3.12

13. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 1,5 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.13). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите гипоциклоиду. Какой кривой она является?

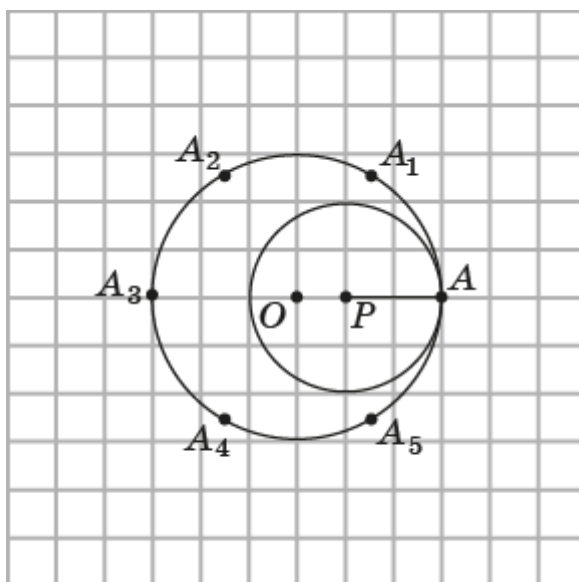


Рис. 3.13

14. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 1,5 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.14). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую гипоциклоиду.

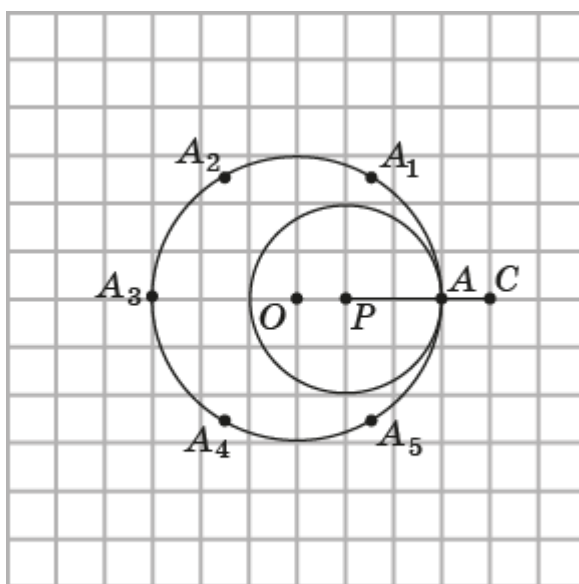


Рис. 3.14

15. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 1,5 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.15). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 ; д) A_5 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную гипоциклоиду.

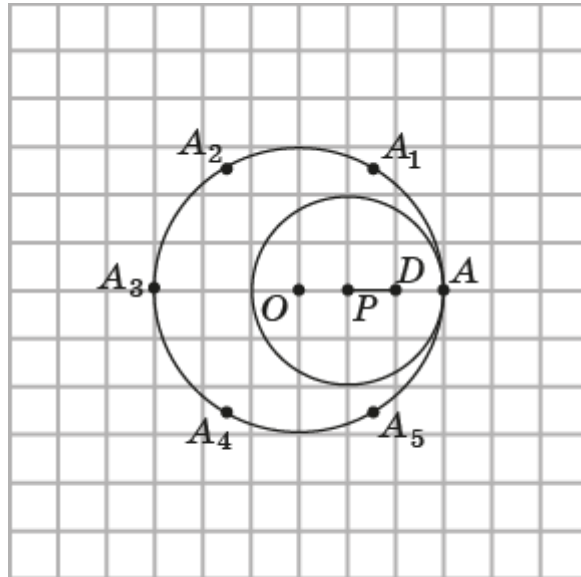


Рис. 3.15

16. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2,5 раза большего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.16). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 . Соедините их плавной кривой. Получите гипоциклоиду.

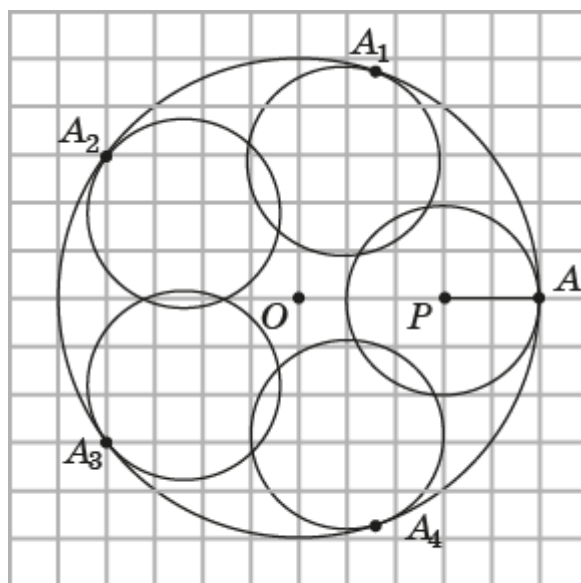


Рис. 3.16

17. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2,5 раза большего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.17). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую гипоциклоиду.

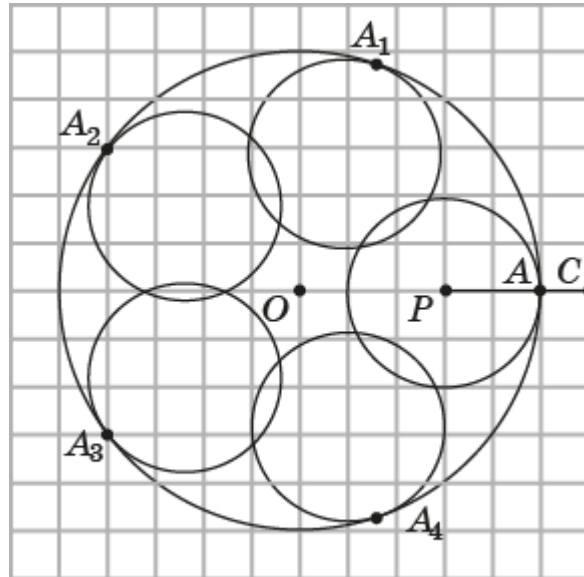


Рис. 3.17

18. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2,5 раза большего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.18). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 ; г) A_4 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную гипоциклоиду.

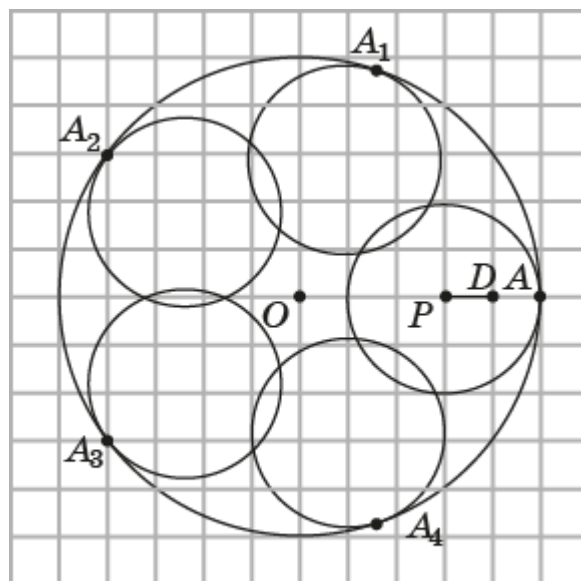


Рис. 3.18

19. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 1,5 раза меньшего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.19). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите гипоциклоиду.

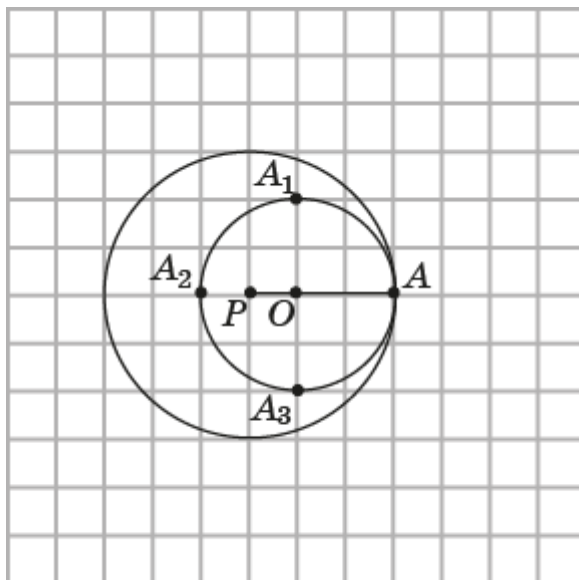


Рис. 3.19

20. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 1,5 раза меньшего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.20). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую гипоциклоиду.

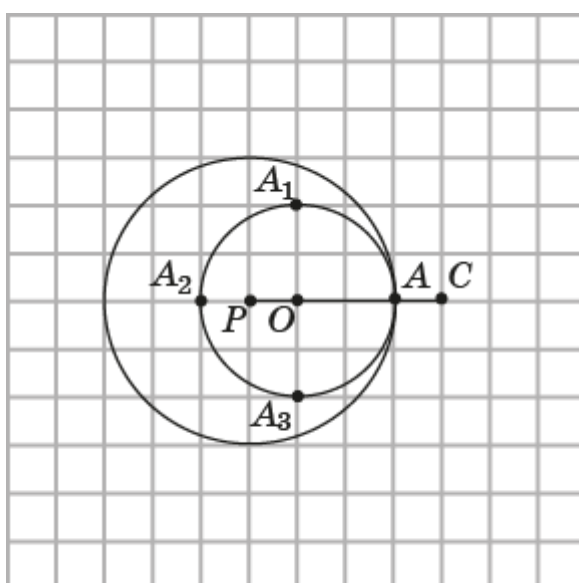


Рис. 3.20

21. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 1,5 раза меньшего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.21). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную гипоциклоиду.

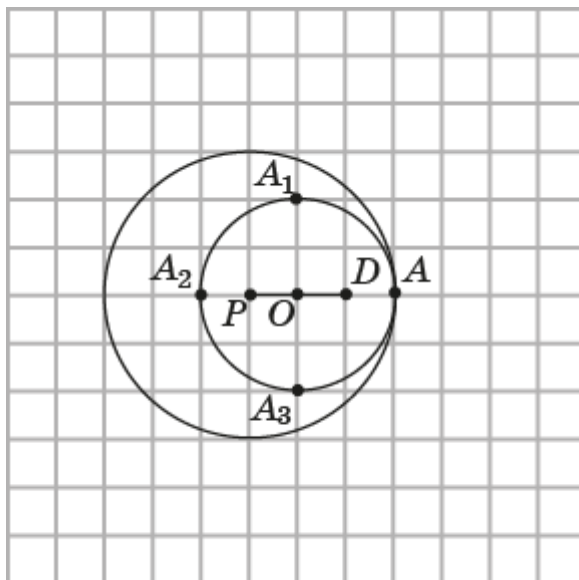


Рис. 3.21

22. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2 раза меньшего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.22). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите гипоциклоиду.

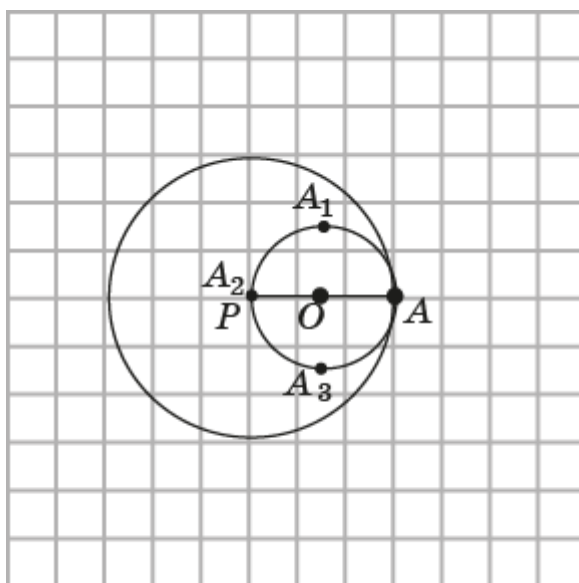


Рис. 3.22

23. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2 раза меньшего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.23). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка C , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_1 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите удлинённую гипоциклоиду.

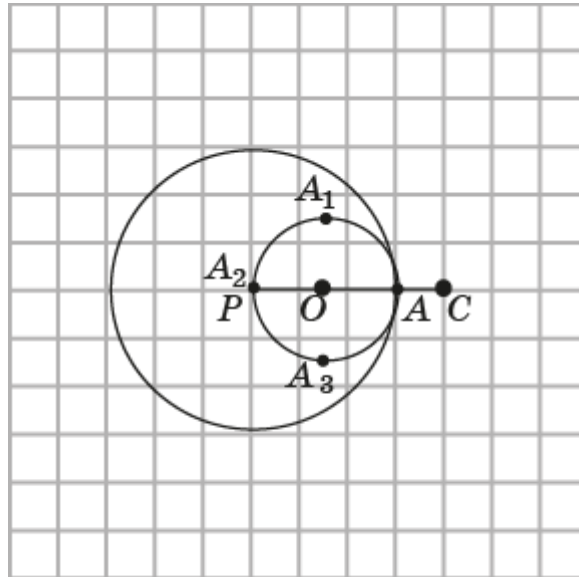


Рис. 3.23

24. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 2 раза меньшего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.24). Отметьте точки, в которых будет находиться отмеченная точка D , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_3 . Соедините их плавной кривой. Получите укороченную гипоциклоиду.

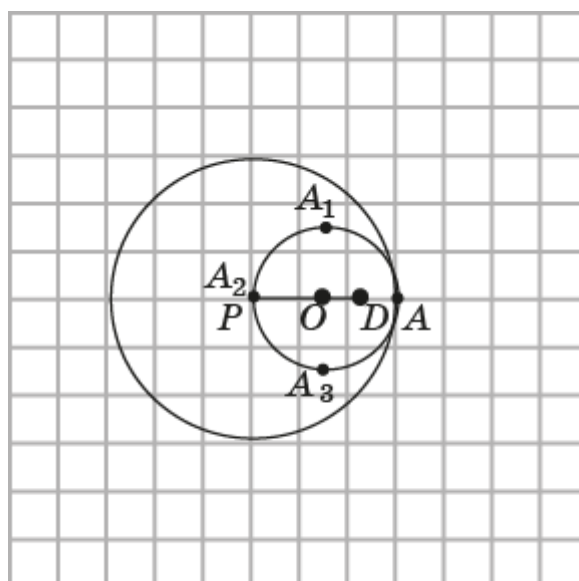


Рис. 3.24

25. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 3 раза меньшего радиуса. Точка A закреплена на катящейся окружности (рис. 3.25). Изобразите траекторию движения точки A .

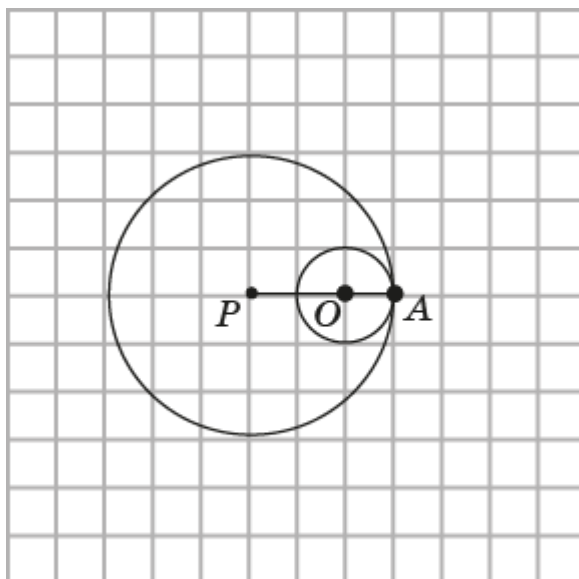


Рис. 3.25

26. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 3 раза меньшего радиуса. Точка C закреплена на продолжении радиуса катящейся окружности (рис. 3.26). Изобразите траекторию движения точки C .

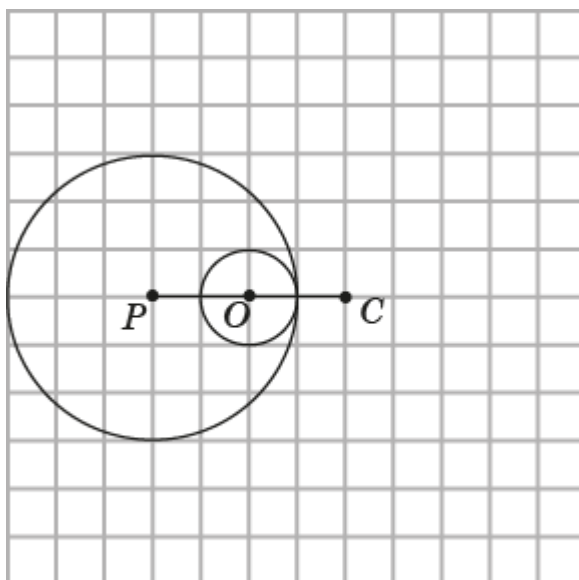


Рис. 3.26

27. Окружность катится внутренним образом по другой окружности в 3 раза меньшего радиуса. Точка D закреплена на радиусе катящейся окружности (рис. 3.27). Изобразите траекторию движения точки D .

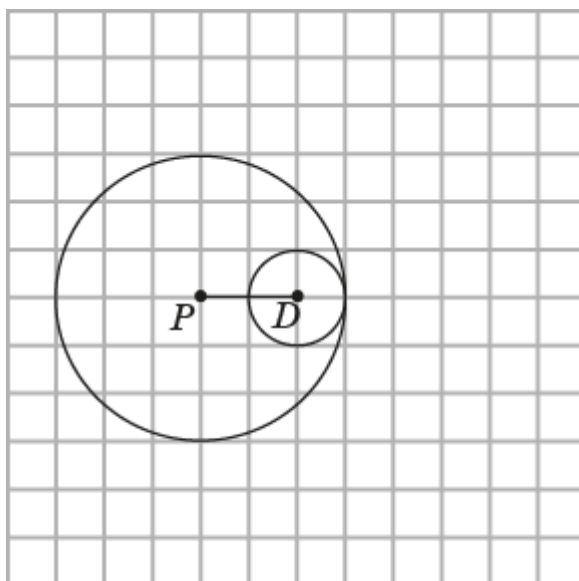


Рис. 3.27

28. Правильный треугольник катится внутренним образом по квадрату (рис. 3.28). Точка закреплена в вершине A правильного треугольника. Изобразите траекторию движения этой точки.

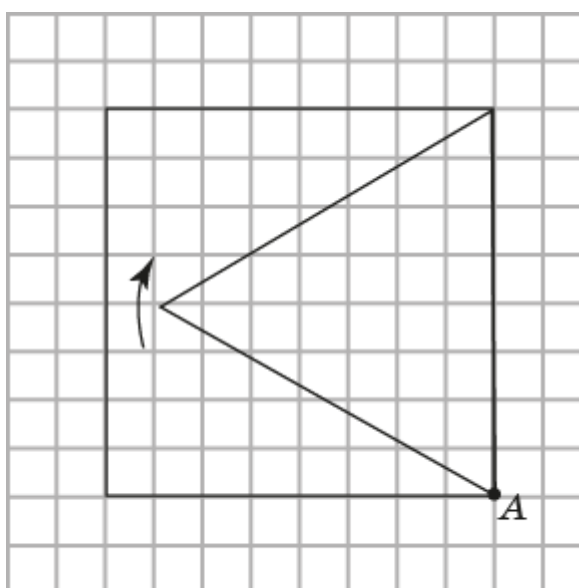


Рис. 3.28

29. Правильный треугольник катится внутренним образом по правильному шестиугольнику (рис. 3.29). Точка закреплена в вершине A правильного треугольника. Изобразите траекторию движения этой точки.

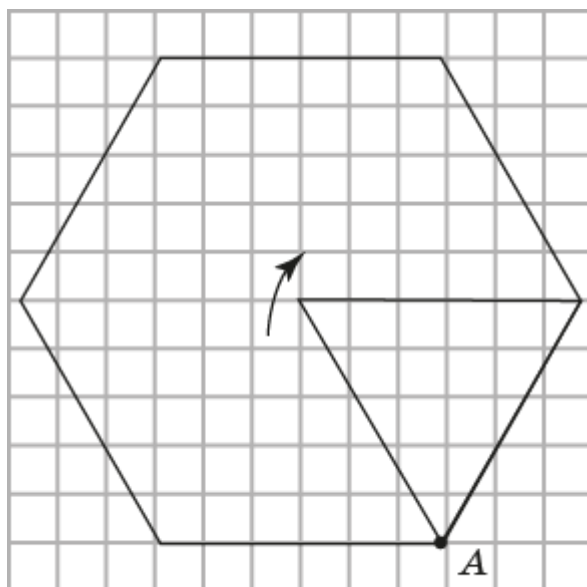


Рис. 3.29

30. Квадрат катится внутренним образом по правильному шестиугольнику (рис. 3.30). Точка закреплена в вершине A квадрата. Изобразите траекторию движения этой точки.

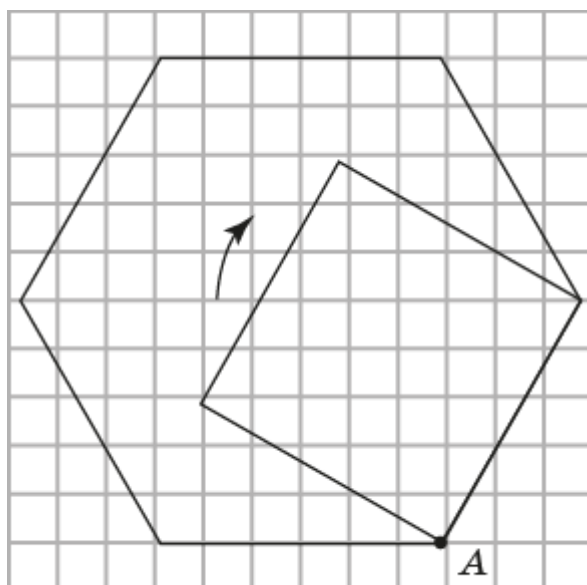


Рис. 3.30

31. Квадрат катится внутренним образом по правильному треугольнику (рис. 3.31). Точка закреплена в вершине A квадрата. Изобразите траекторию движения этой точки.

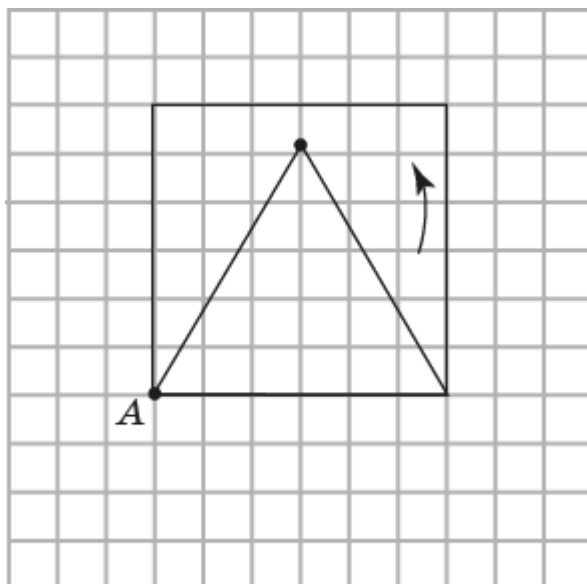


Рис. 3.31

32. Правильный шестиугольник катится внутренним образом по правильному треугольнику (рис. 3.32). Точка закреплена в вершине A правильного шестиугольника. Изобразите траекторию движения этой точки.

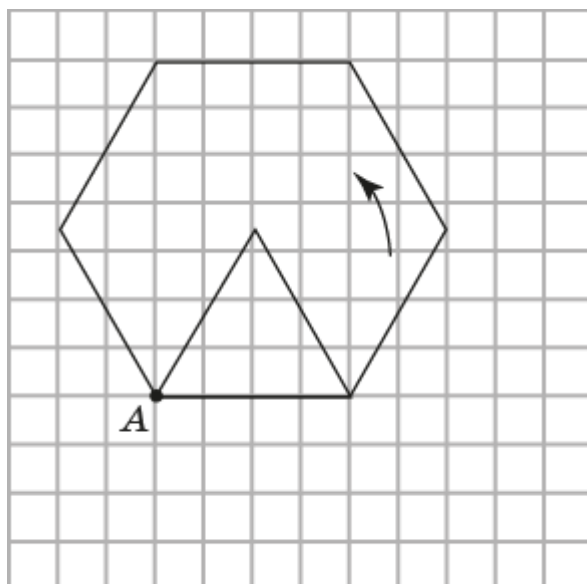


Рис. 3.32

33. Правильный шестиугольник катится внутренним образом по квадрату (рис. 3.33). Точка закреплена в вершине A правильного шестиугольника. Изобразите траекторию движения этой точки.

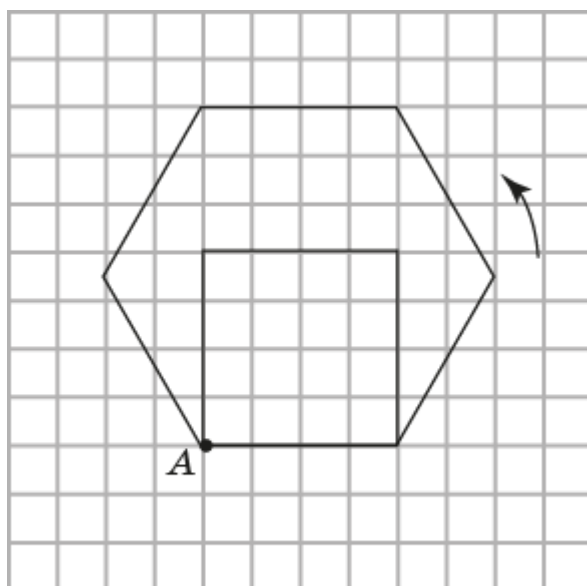


Рис. 3.33

4. Огибающие

Огибающей семейства прямых называется кривая, каждая точка которой является точкой касания одной из прямых данного семейства, и каждая прямая данного семейства является касательной к этой кривой.

1. Для данной прямой a и точки B , не принадлежащей этой прямой, проведите серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим отмеченные точки прямой a с точкой B (рис. 4.1). Изобразите огибающую таких серединных перпендикуляров. Какой кривой она является?

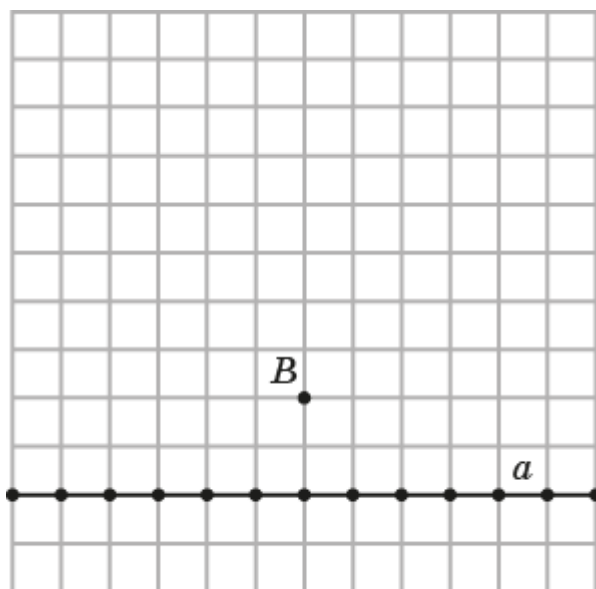


Рис. 4.1

2. Для данной прямой a и точки B , не принадлежащей этой прямой, проведите прямые, проходящие через отмеченные точки прямой a и перпендикулярные этим прямым (рис. 4.2). Изобразите огибающую таких прямых. Какой кривой она является?

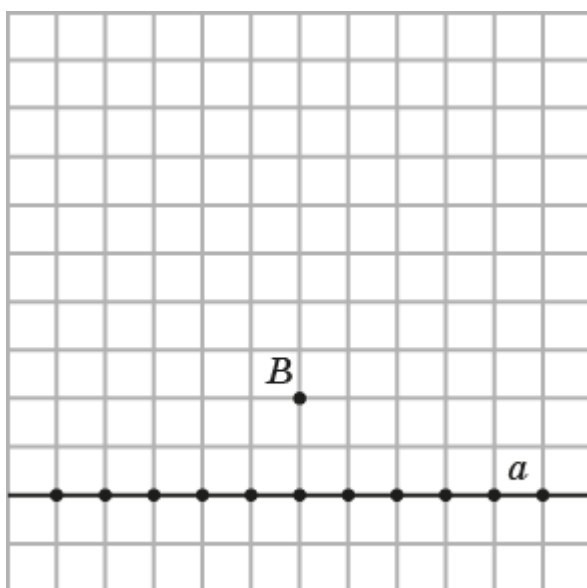


Рис. 4.2

3. Для данной окружности и точки B , расположенной внутри этой окружности, проведите серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим отмеченные точки окружности с точкой B (рис. 4.3). Изобразите огибающую таких серединных перпендикуляров. Какой кривой она является?

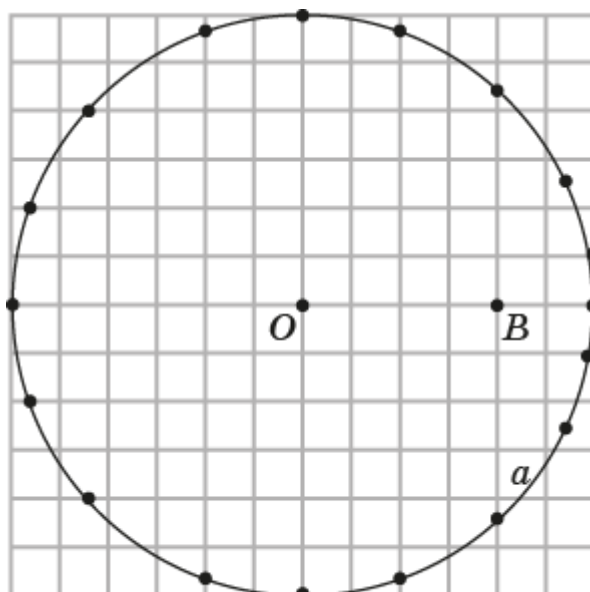


Рис. 4.3

4. Для данной окружности и точки B , расположенной внутри этой окружности, проведите прямые, проходящие через отмеченные точки окружности и перпендикулярные этим прямым (рис. 4.4). Изобразите огибающую таких прямых. Какой кривой она является?

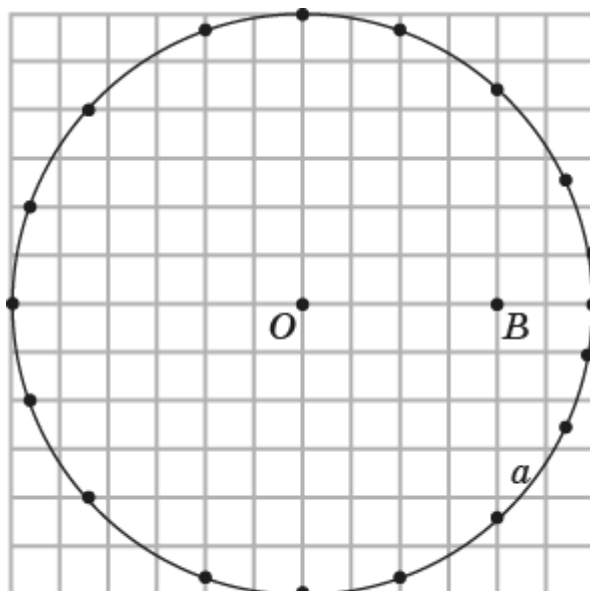


Рис. 4.4

5. Для данной окружности и точки B , расположенной вне этой окружности, проведите серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим отмеченные точки окружности с точкой B (рис. 4.5). Изобразите огибающую таких серединных перпендикуляров. Какой кривой она является?

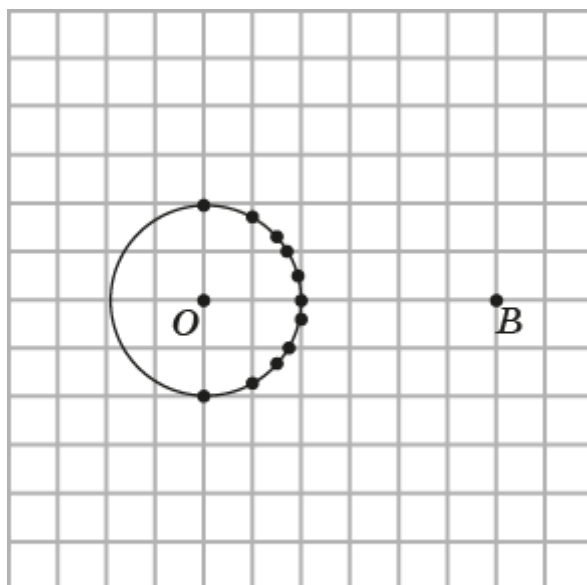


Рис. 4.5

6. Для данной окружности и точки B , расположенной вне этой окружности, проведите прямые, проходящие через отмеченные точки окружности и перпендикулярные этим прямым (рис. 4.6). Изобразите огибающую таких прямых. Какой кривой она является?

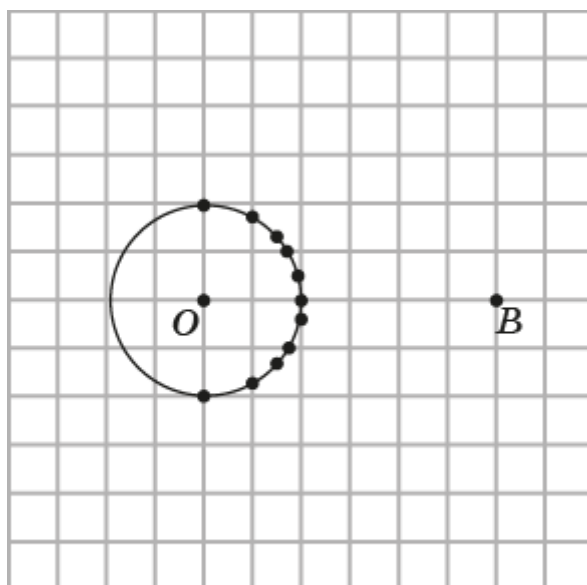


Рис. 4.6

7. Для данной окружности изобразите огибающую семейства всех хорд AB , длина которых постоянна и равна 4 (рис. 4.7). Какой кривой она является?

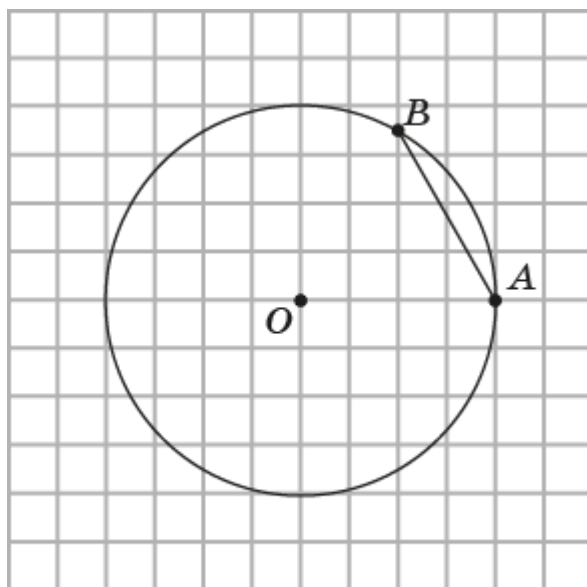


Рис. 4.7

8. Для данных перпендикулярных прямых a и b проведите отрезки, соединяющие соответствующие точки этих прямых, длина которых постоянна и равна 10. (рис. 4.8). Изобразите огибающую таких отрезков. Какой кривой она является?

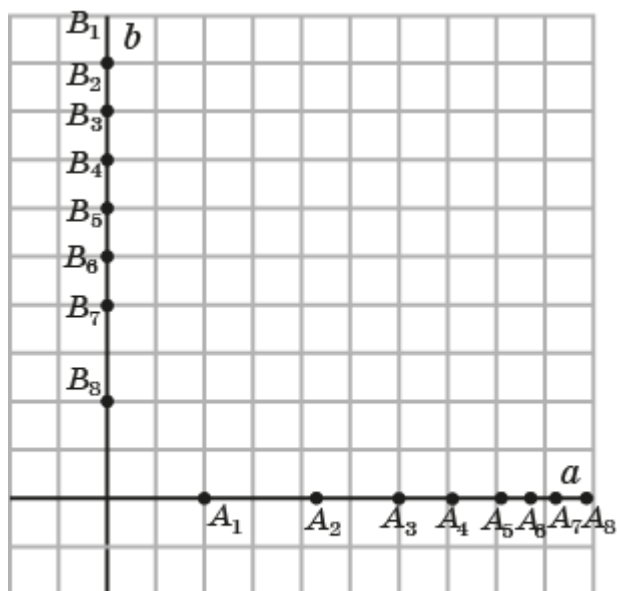


Рис. 4.8

9. Дана окружность с центром O и точка A этой окружности (рис. 4.9). Изобразите огибающую семейства окружностей, проходящих через точку A , центры P которых принадлежат данной окружности. Какой кривой она является?

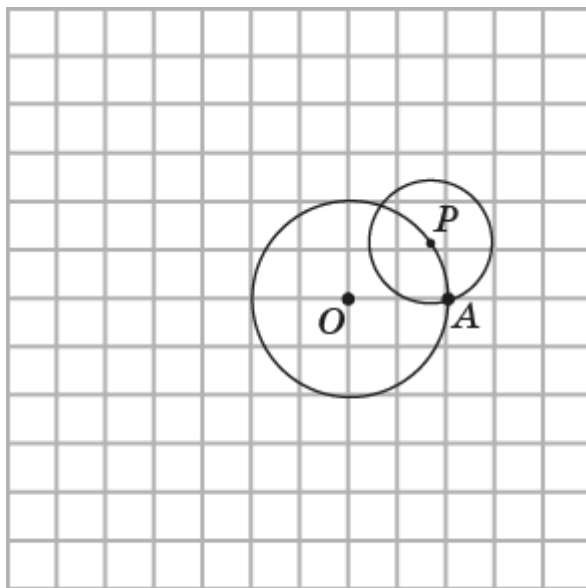


Рис. 4.9

10. Дана окружность с центром O и точка A вне этой окружности (рис. 4.10). Изобразите огибающую семейства окружностей, проходящих через точку A , центры P которых принадлежат данной окружности. Какой кривой она является?

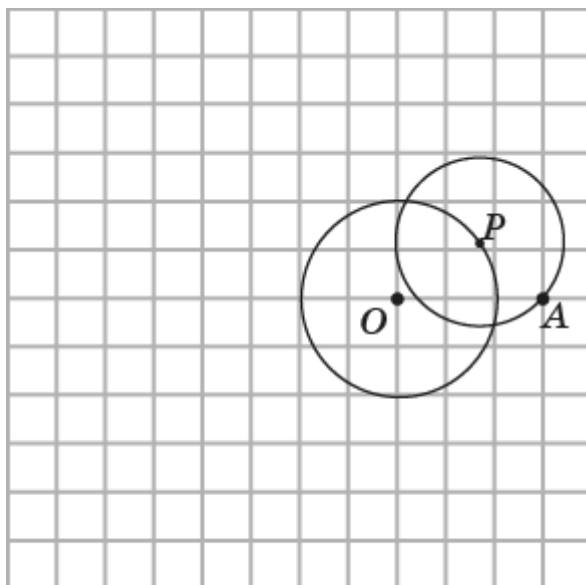


Рис. 4.10

11. Дана окружность с центром O и точка A этой окружности (рис. 4.11). Изобразите огибающую семейства окружностей, диаметрами которых являются отрезки AB , где B – произвольная точка данной окружности. Какой кривой она является?

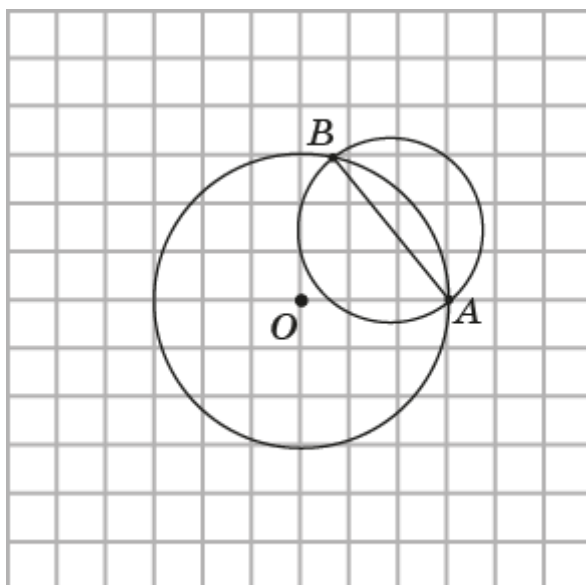


Рис. 4.11

12. Дана окружность с центром O и точка A вне этой окружности (рис. 4.12). Изобразите огибающую семейства окружностей, диаметрами которых являются отрезки AB , где B – произвольная точка данной окружности. Какой кривой она является?

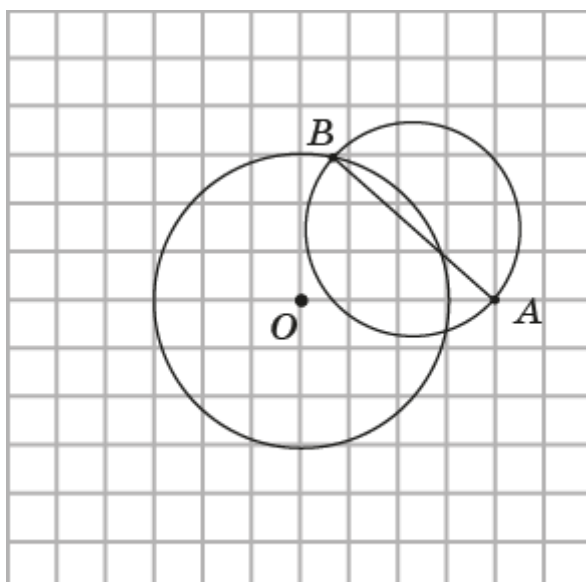


Рис. 4.12

5. Кривые постоянной ширины

1. Для данного правильного треугольника ABC (рис. 5.1) постройте правильный треугольник Рело.

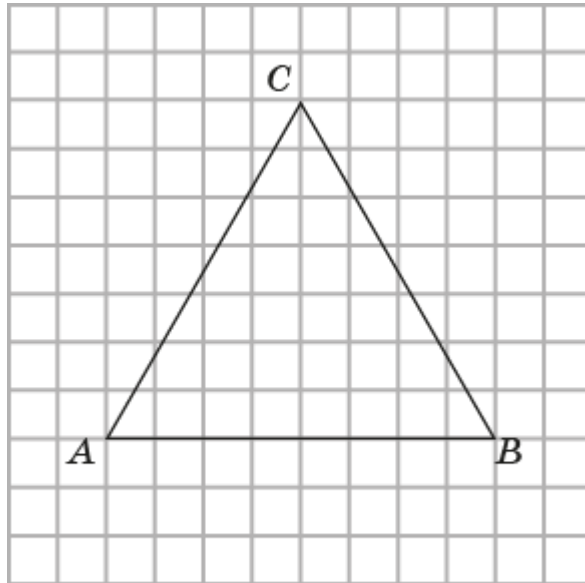


Рис. 5.1

2. Изобразите правильный треугольник Рело, вписанный в квадрат, одна вершина которого находится в отмеченной точке E (рис. 5.2).

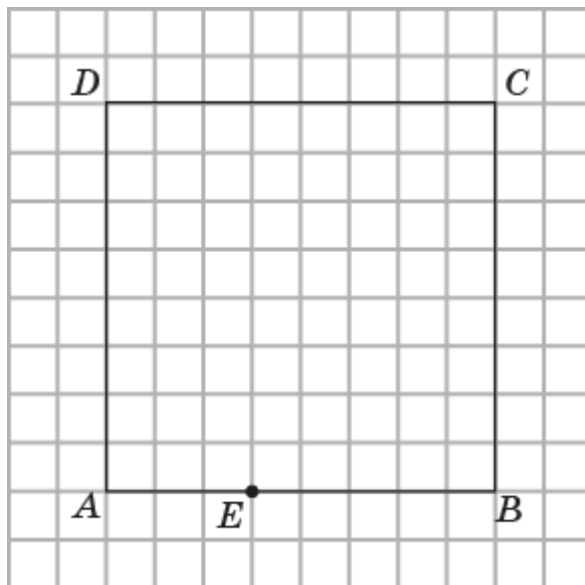


Рис. 5.2

3. Для правильного треугольника ABC (рис. 5.3) продолжите построение круглого треугольника Рело.

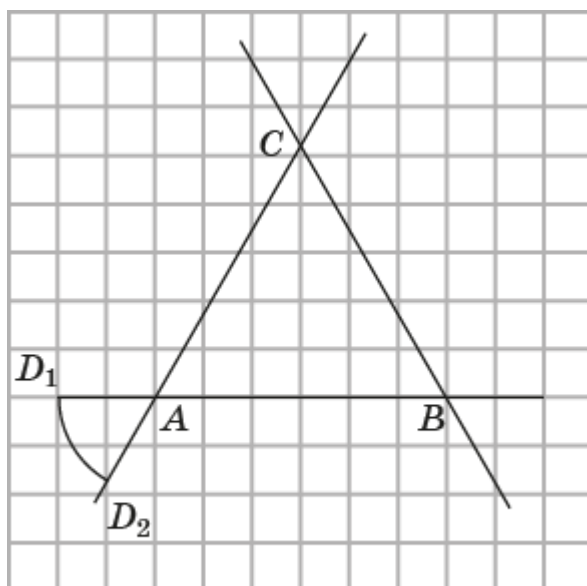


Рис. 5.3

4. Для треугольника ABC (рис. 5.4) продолжите построение круглого треугольника Рело.

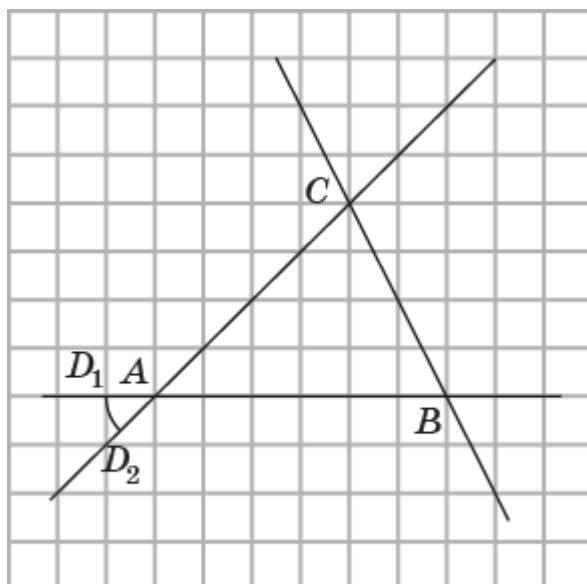


Рис. 5.4

5. Для прямых, изображённых на рисунке 5.5, продолжите построение кривой постоянной ширины. Какой кривой она является?

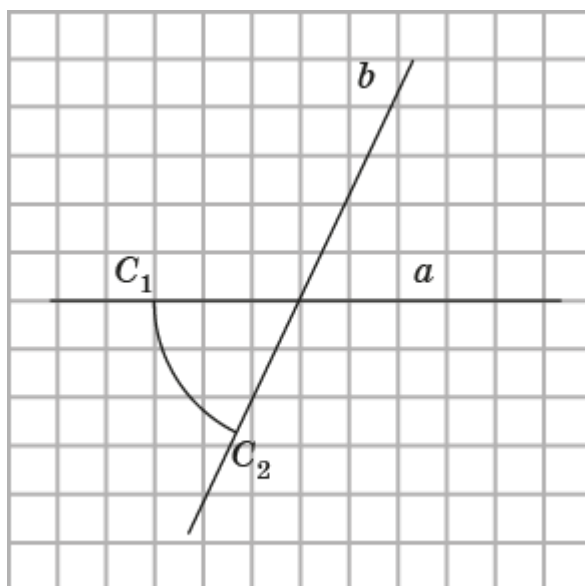


Рис. 5.5

6. Для прямых, изображённых на рисунке 5.6, продолжите построение кривой постоянной ширины.

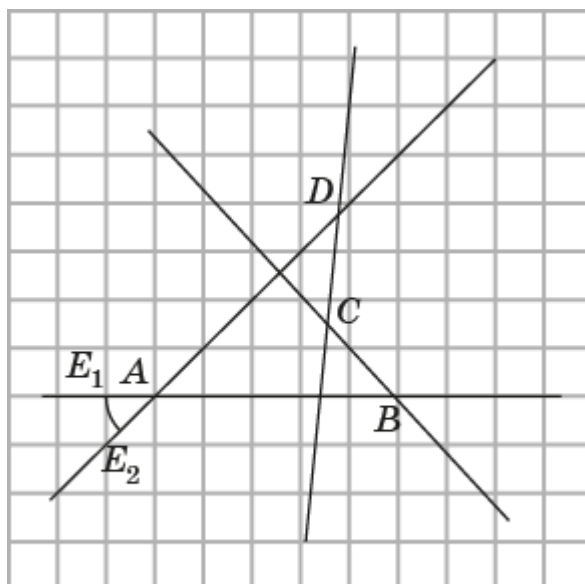


Рис. 5.6

7. Для данного правильного пятиугольника $ABCDE$ (рис. 5.7) постройте правильный пятиугольник Рело.

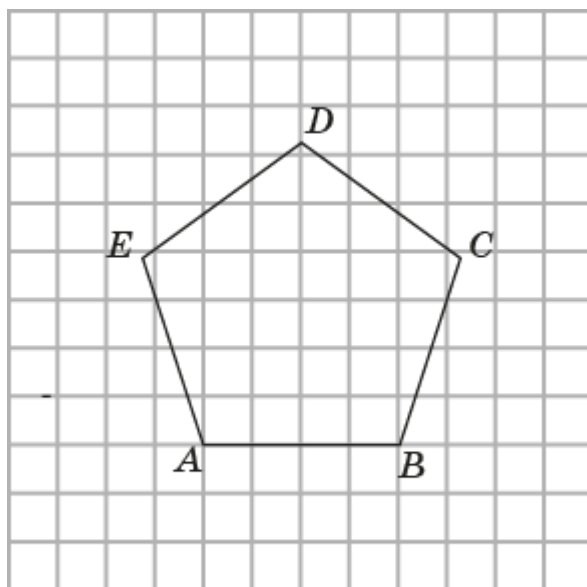


Рис. 5.7

8. Для данного правильного пятиугольника $ABCDE$ (рис. 5.8) продолжите построение круглого пятиугольника Рело.

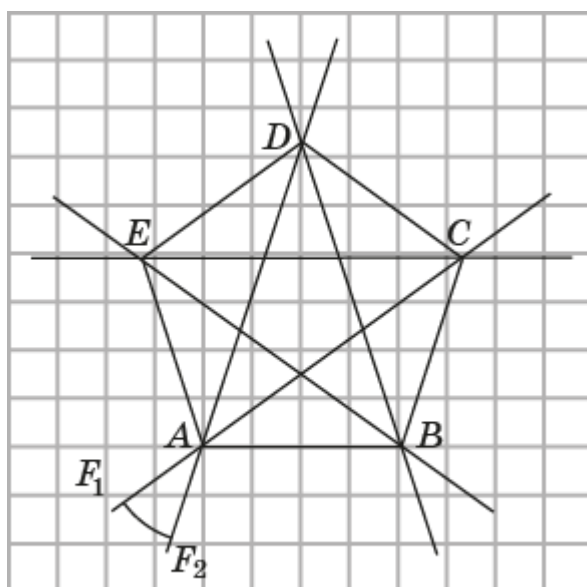


Рис. 5.8

9. Для данного правильного семиугольника $ABCDEFG$ (рис. 5.9) постройте правильный семиугольник Рело.

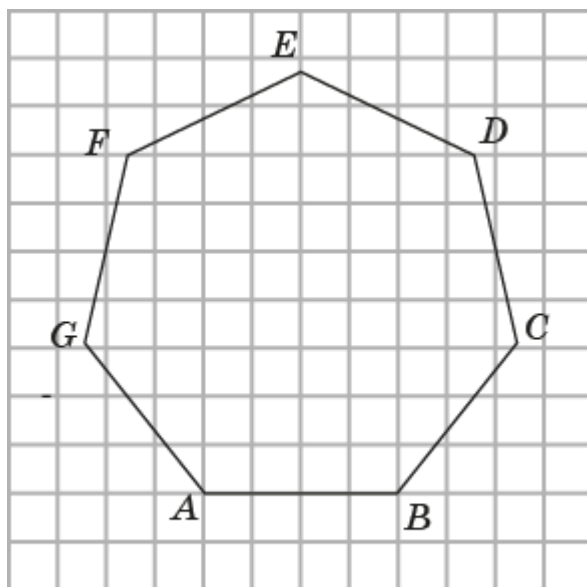


Рис. 5.9

10. Треугольник Рело катится по прямой. Изобразите траекторию движения его центра O (рис. 5.10).

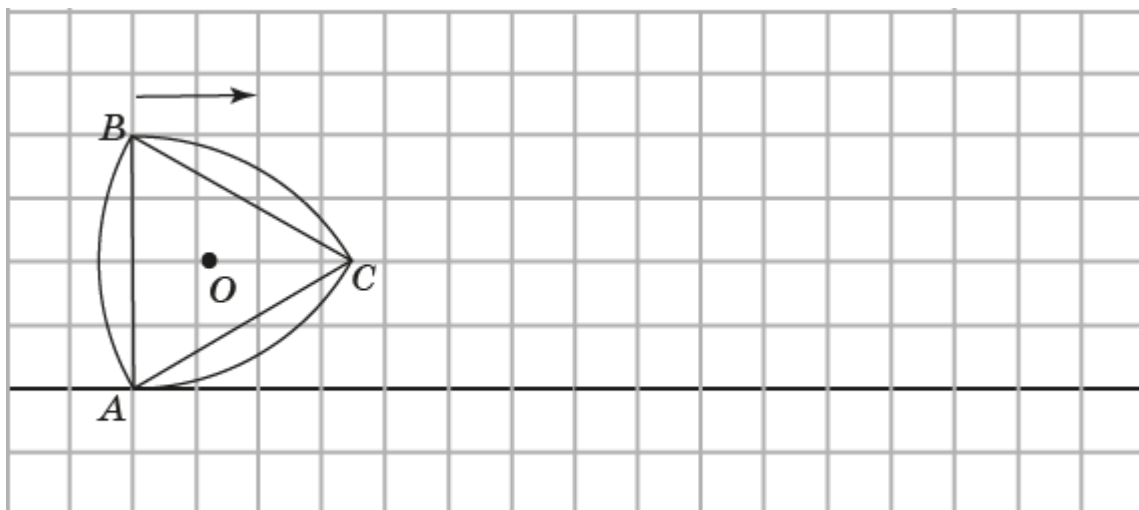


Рис. 5.10

11. Найдите ширину и периметр правильного круглого треугольника Рело, считая стороны клеток равными 1 (рис. 5.11).

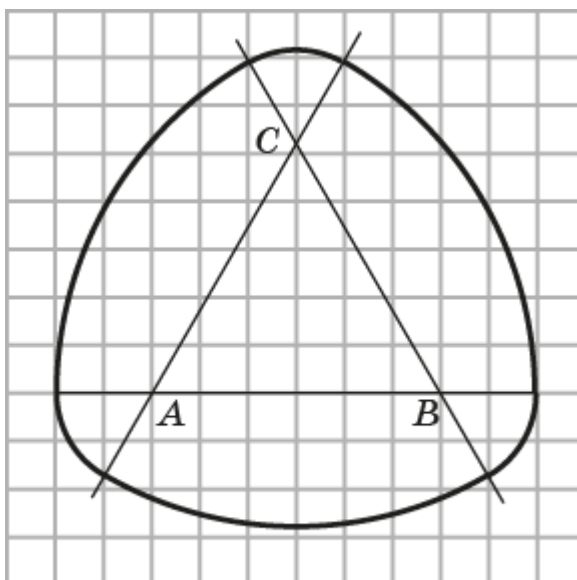


Рис. 5.11

12. Найдите ширину и периметр правильного круглого треугольника Рело, считая стороны клеток равными 1 (рис. 5.12).

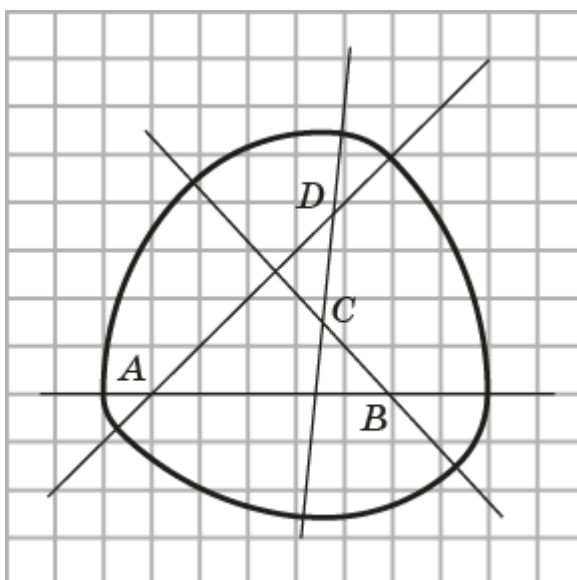


Рис. 05.12

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Циклоида

1. Дуга окружности (рис. О1.1). 2. Дуга эллипса (рис. О1.2).

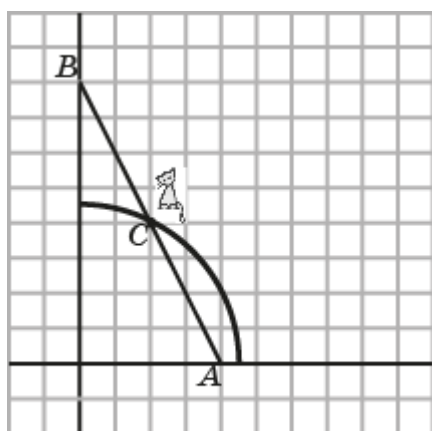


Рис. О1.1

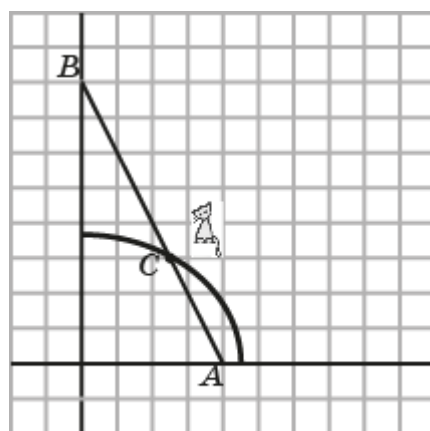


Рис. О1.2

3. Дуга окружности (рис. О1.3). 4. Дуга окружности (рис. О1.4).

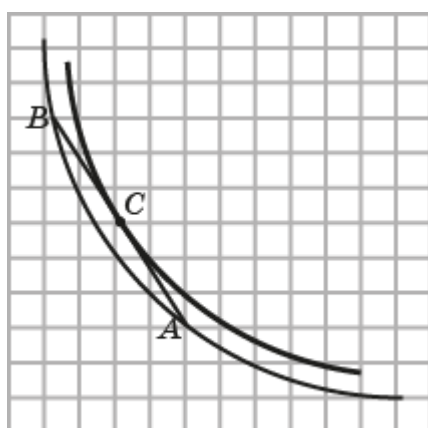


Рис. О1.3

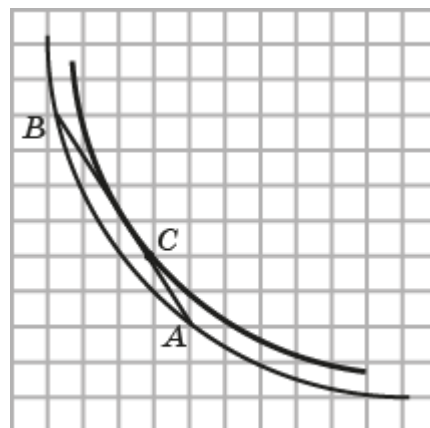


Рис. О1.4

5. Окружность (рис. О1.5). 6. Окружность (рис. О1.6).

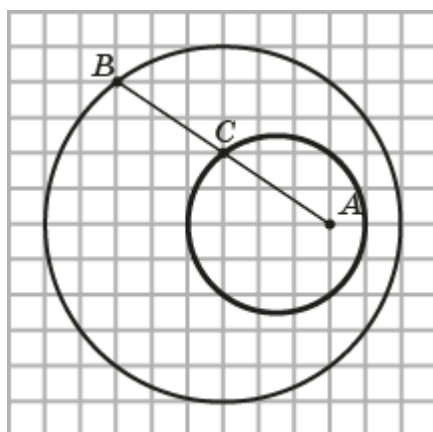


Рис. О1.5

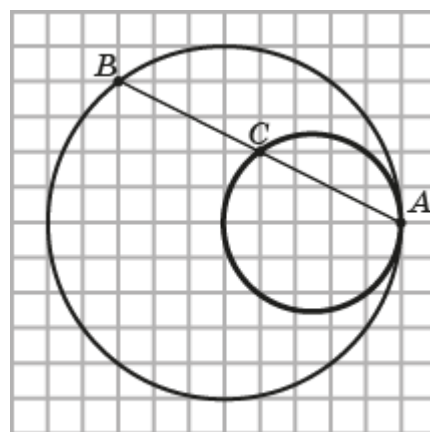


Рис. О1.6

7. Окружность (рис. О1.7).

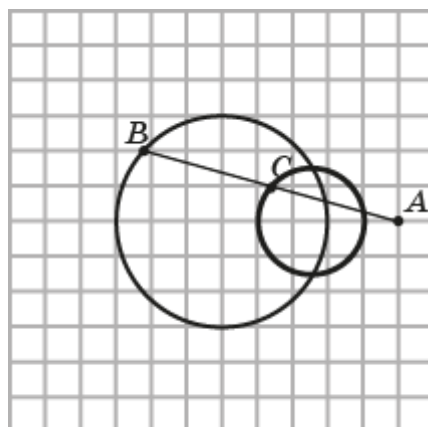


Рис. О1.7

8. Рисунок О1.8.

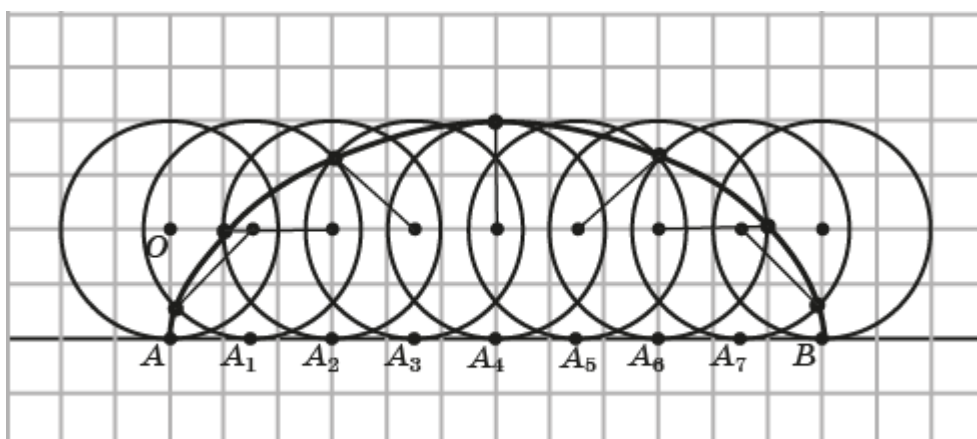


Рис. О1.8

9. Рисунок О1.9.

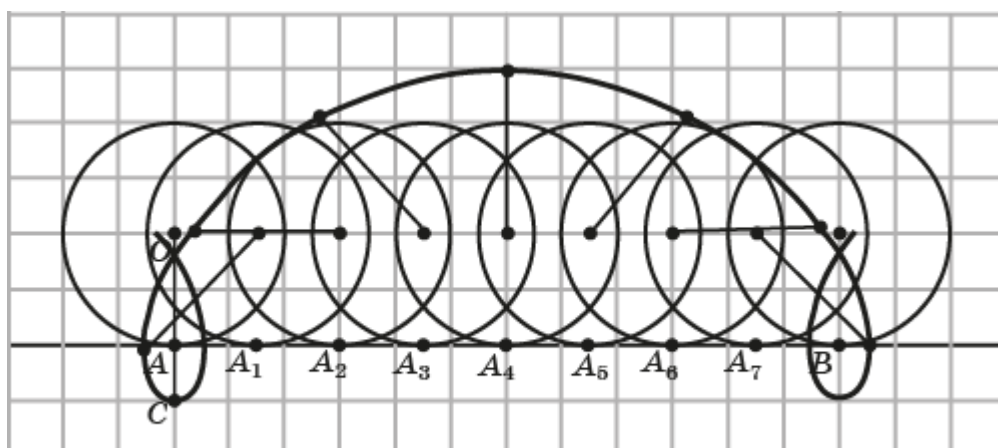


Рис. О1.9

10. Рисунок О1.10.

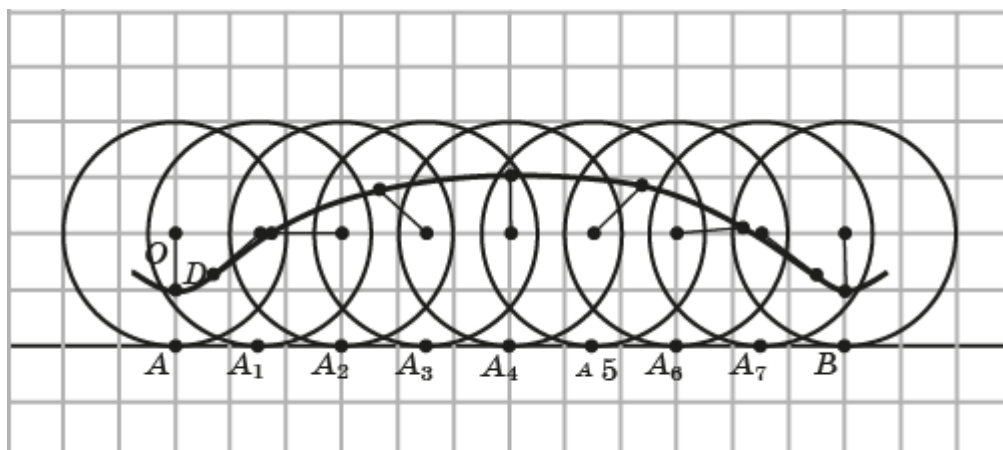


Рис. О1.10

11. Рисунок О1.11.

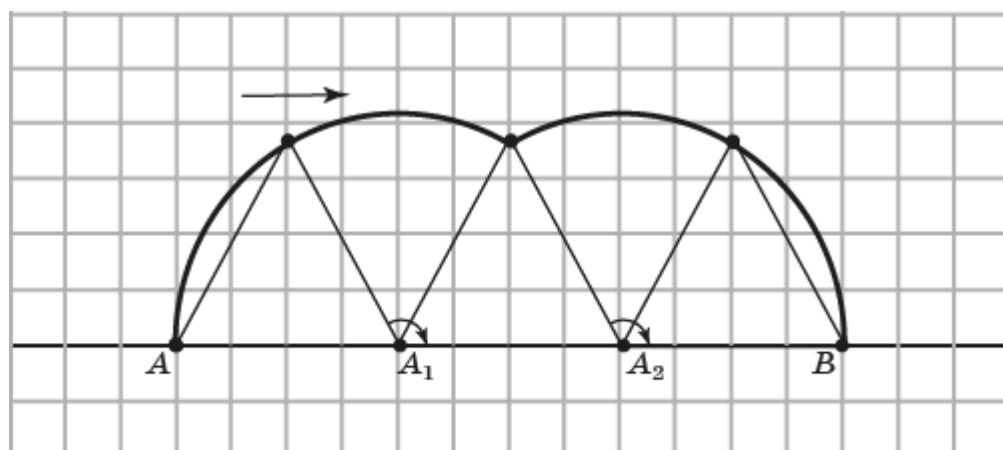


Рис. О1.11

12. Рисунок О1.12.

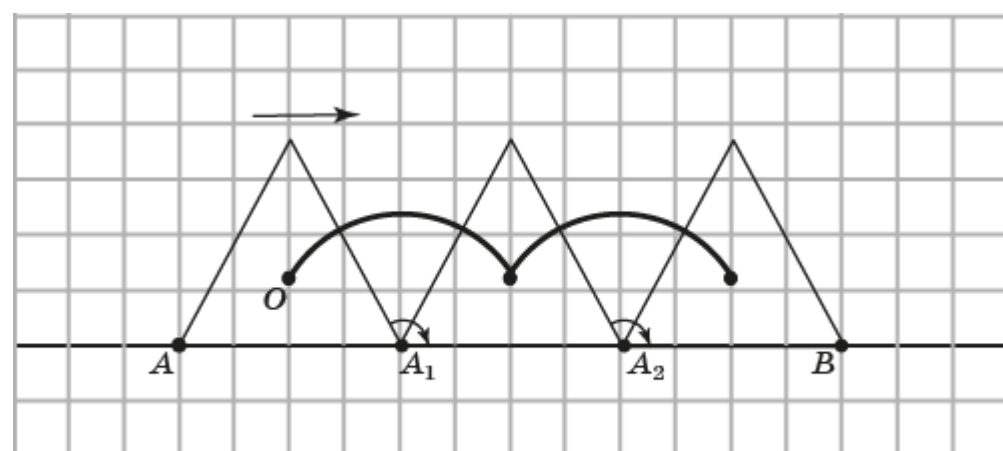


Рис. О1.12

13. Рисунок О1.13.

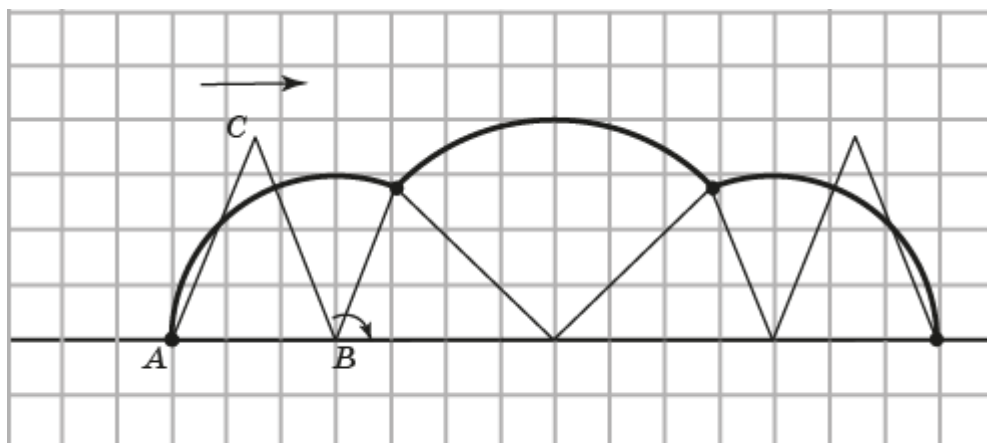


Рис. О1.13

14. Рисунок О1.14.

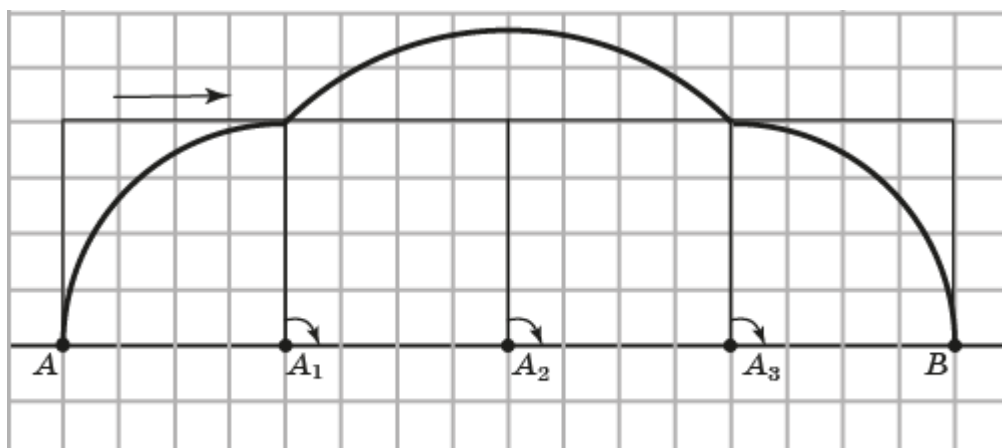


Рис. О1.14

15. Рисунок О1.15.

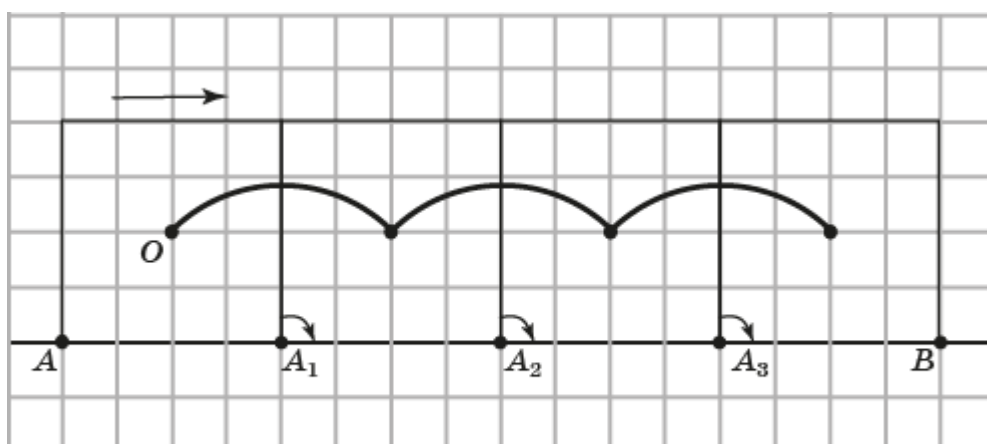


Рис. О1.15

16. Рисунок О1.16.

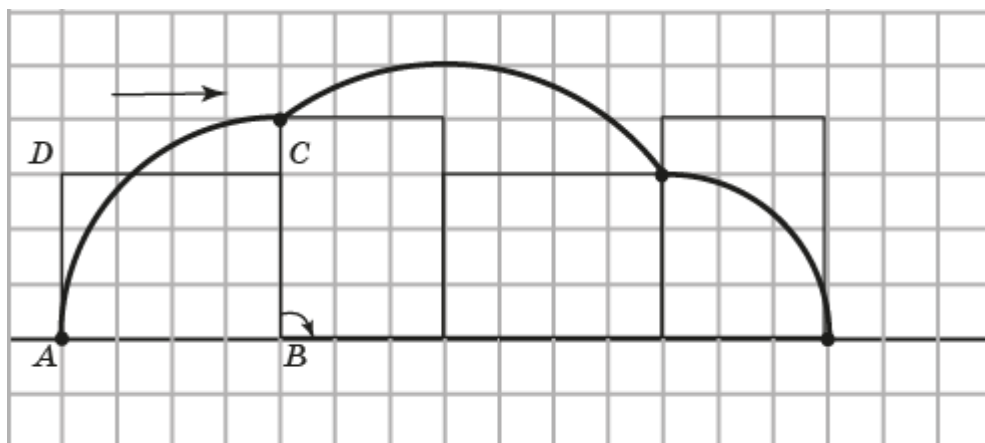


Рис. О1.16

17. Рисунок О1.17.

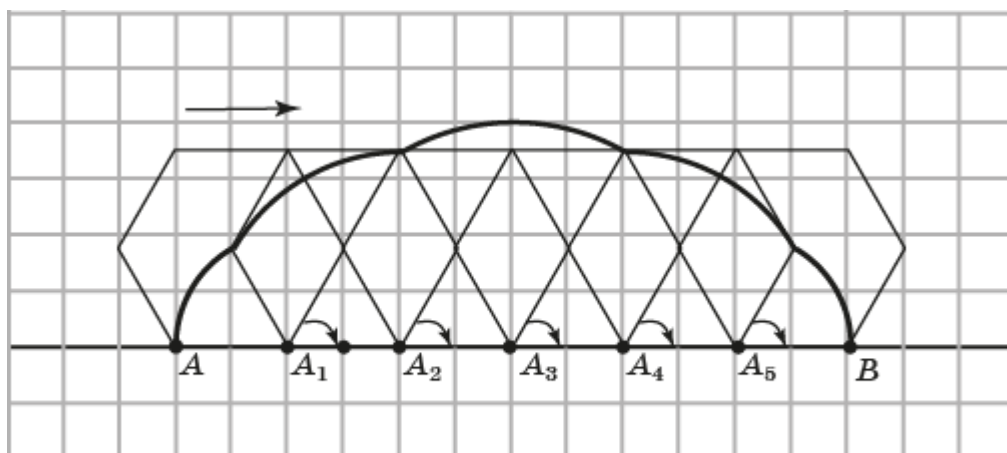


Рис. О1.17

18. Рисунок О1.18.

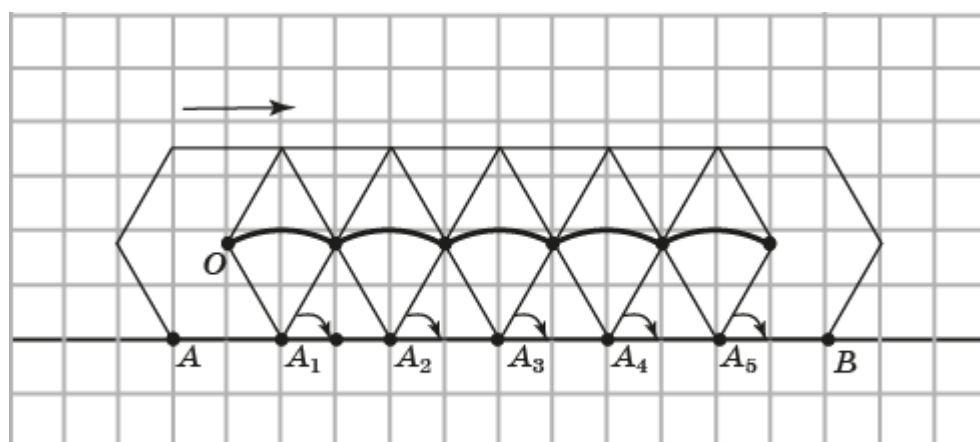


Рис. О1.18

19. Рисунок О1.19.

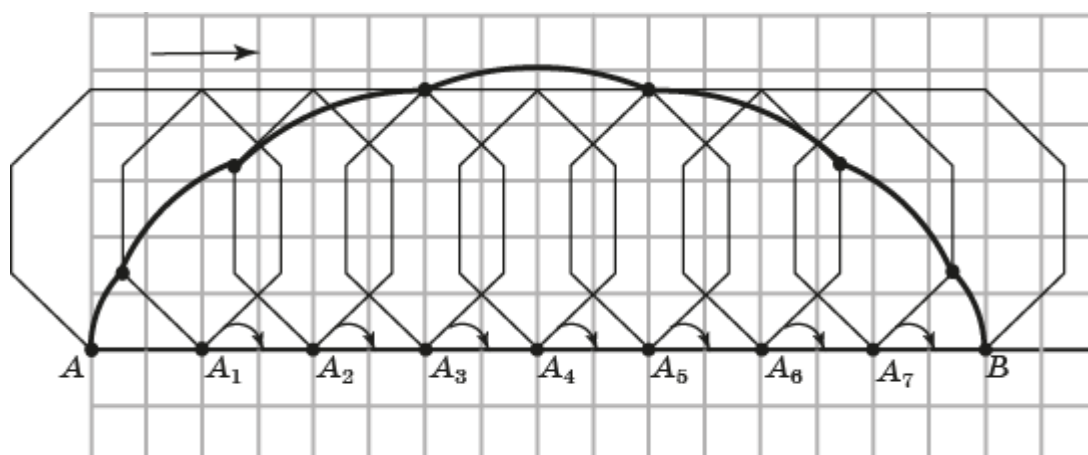


Рис. О1.19

20. Рисунок О1.20.

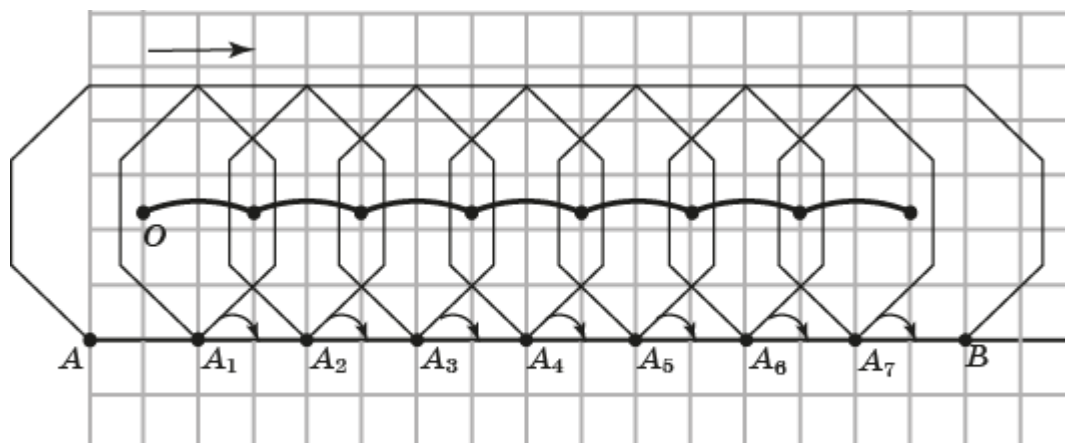


Рис. О1.20

2. Эпициклоиды

1. Рисунок О2.1. 2. Рисунок О2.2.

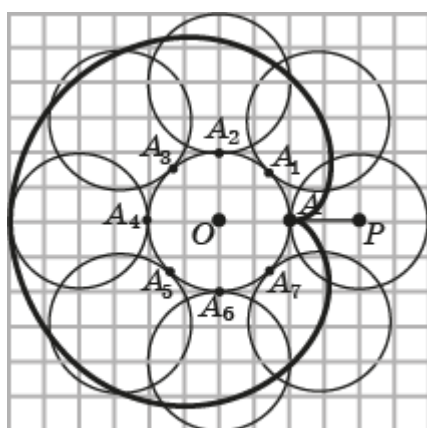


Рис. О2.1

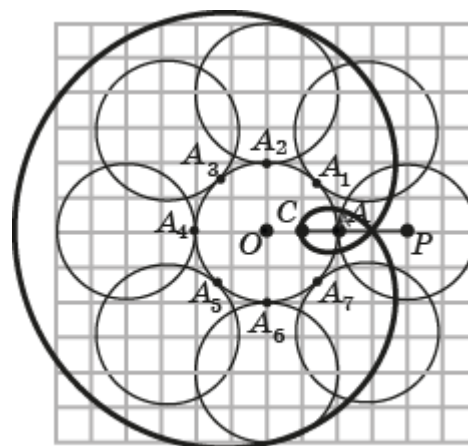


Рис. О2.2

3. Рисунок O2.3. 4. Рисунок O2.4.

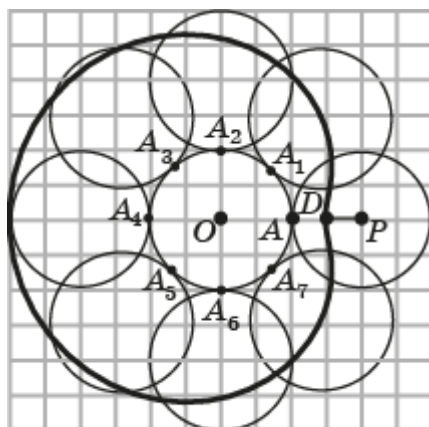


Рис. O2.3

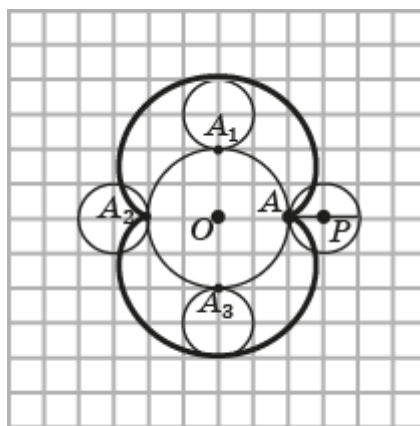


Рис. O2.4

5. Рисунок O2.5. 6. Рисунок O2.6.

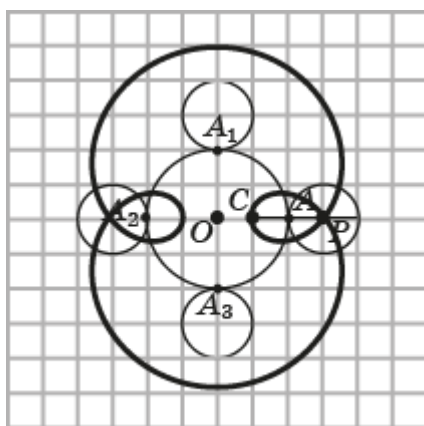


Рис. O2.5

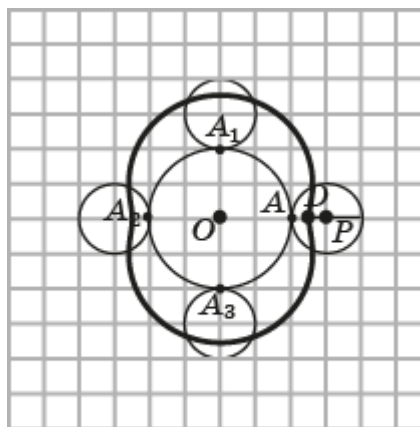


Рис. O2.6

7. Рисунок O2.7. 8. Рисунок O2.8.

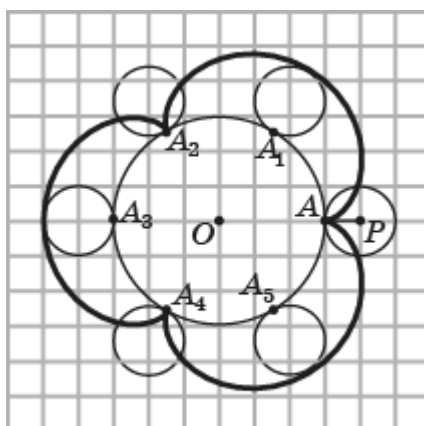


Рис. O2.7

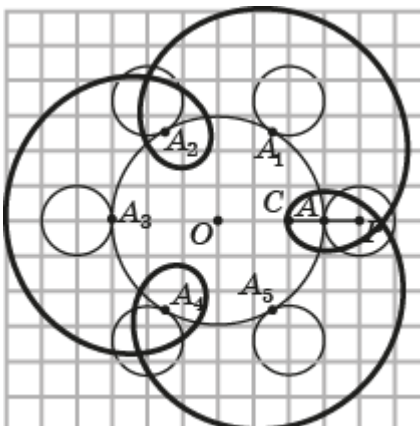


Рис. O2.8

9. Рисунок О2.9. 10. Рисунок О2.10.

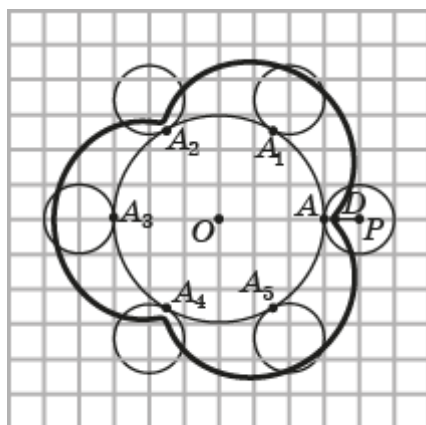


Рис. О2.9

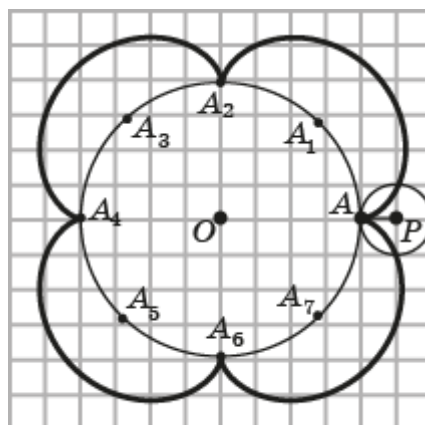


Рис. О2.10

11. Рисунок О2.11. 12. Рисунок О2.12.

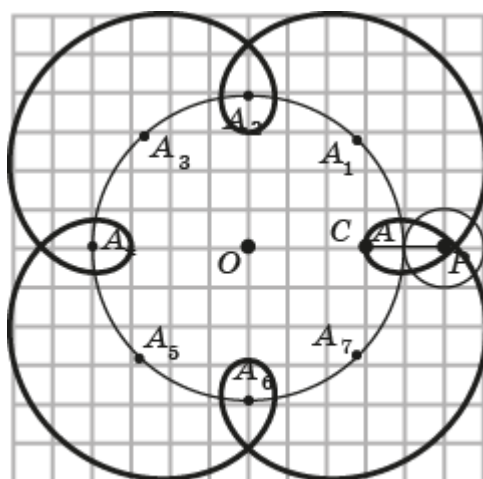


Рис. О2.11

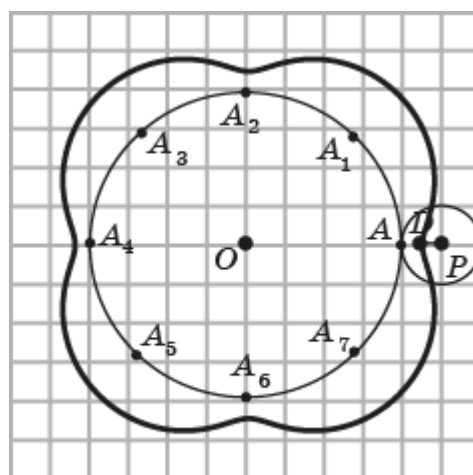


Рис. О2.12

13. Рисунок О2.13. 14. Рисунок О2.14.

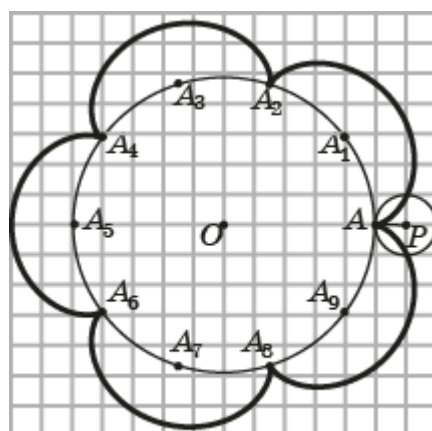


Рис. О2.13

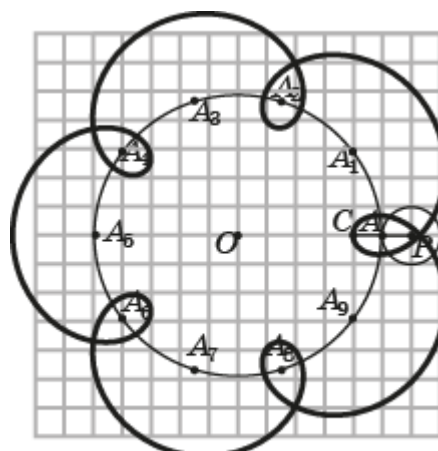


Рис. О2.14

15. Рисунок O2.15. 16. Рисунок O2.16.

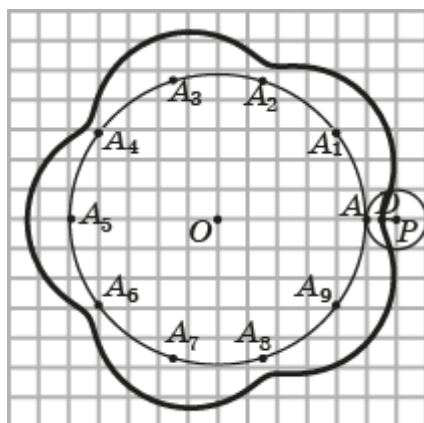


Рис. O2.15

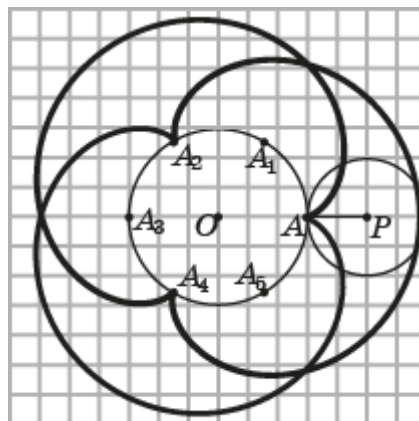


Рис. O2.16

17. Рисунок O2.17. 18. Рисунок O2.18.

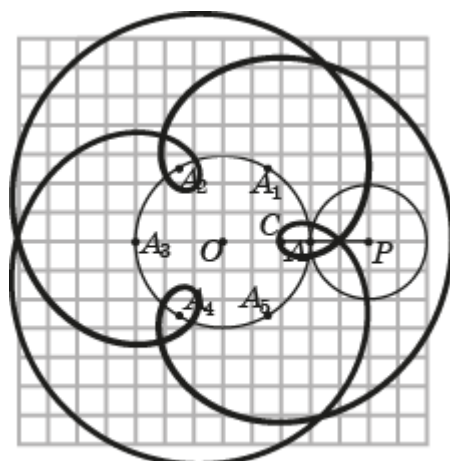


Рис. O2.17

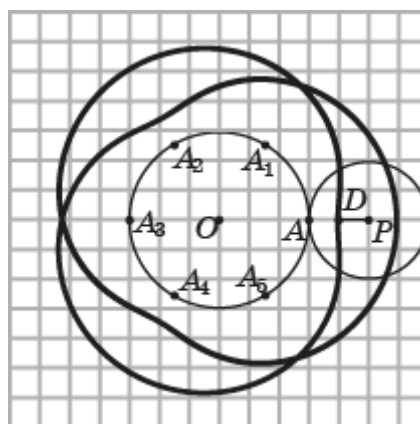


Рис. O2.18

19. Рисунок O2.19. 20. Рисунок O2.20.

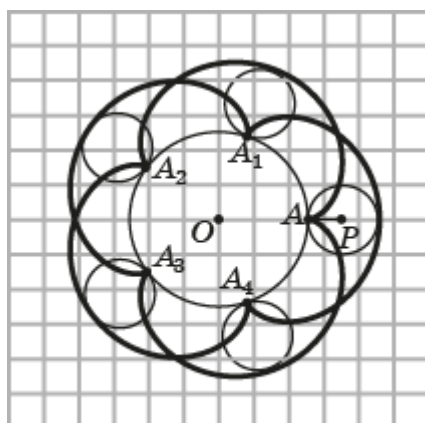


Рис. O2.19

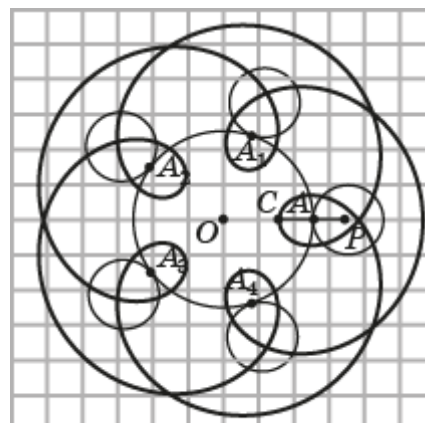


Рис. O2.20

21. Рисунок О2.21. 22. Рисунок О2.22.

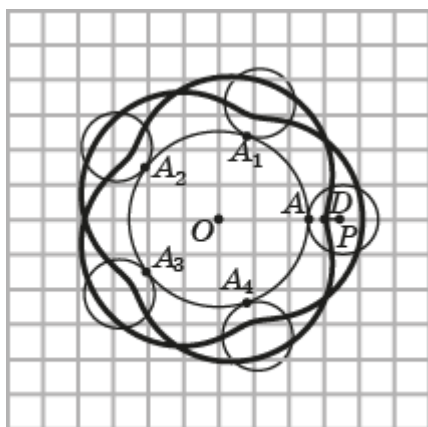


Рис. О2.21

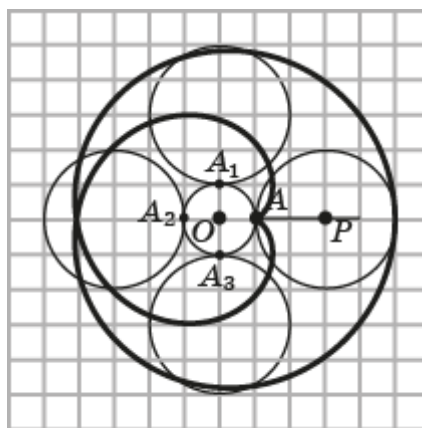


Рис. О2.22

23. Рисунок О2.23. 24. Рисунок О2.24.

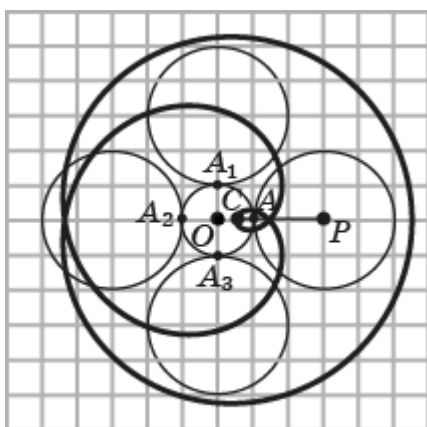


Рис. О2.23

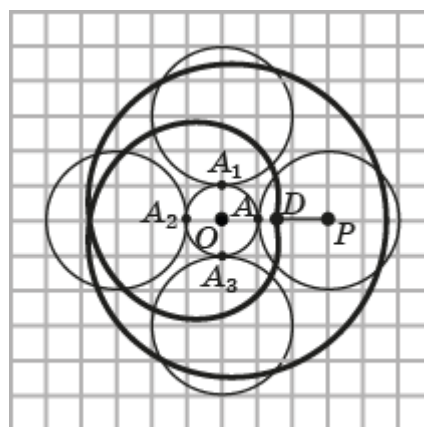


Рис. О2.24

25. Четырёхугольник $AOQ'C'$ – равнобедренная трапеция (рис. О2.25). Треугольник AOC равнобедренный. Следовательно, четырёхугольник $OQ'C'C$ – параллелограмм. Значит, $CC' = OQ' = 2R$. Аналогично, $CC'' = 2R$. Следовательно, данная кривая является улиткой Паскаля. 26. Рисунок О2.26.

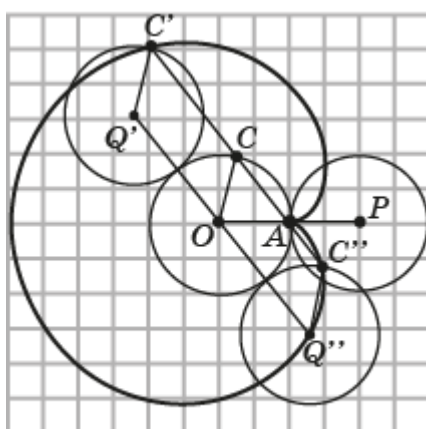


Рис. О2.25

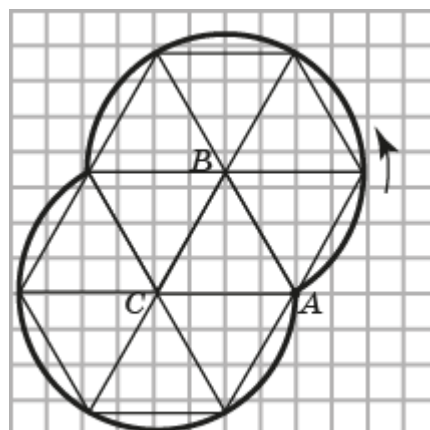


Рис. О2.26

27. Рисунок О2.27. 28. Рисунок О2.28.

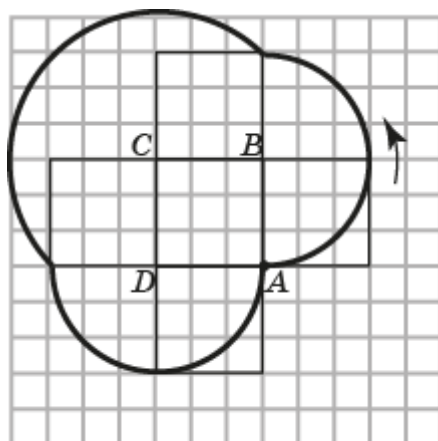


Рис. О2.27

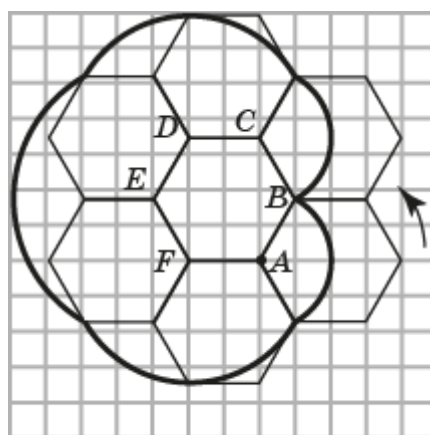


Рис. О2.28

29. Рисунок О2.29. 30. Рисунок О2.30.

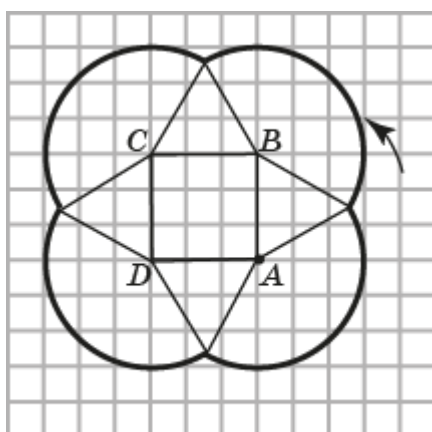


Рис. О2.29

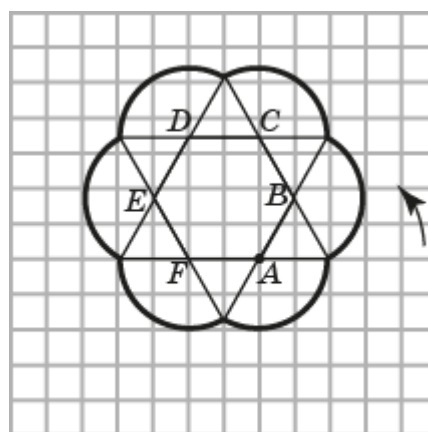


Рис. О2.30

31. Рисунок О2.31.

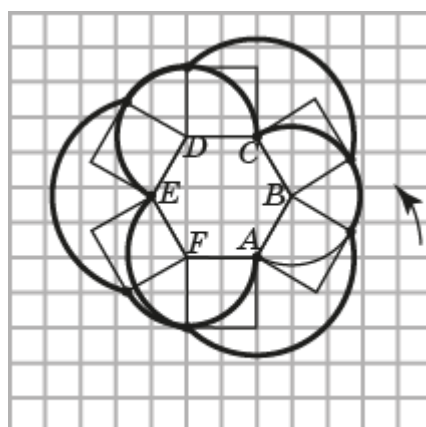


Рис. О2.31

3. Гипоциклоиды

1. Рисунок ОЗ.1. 2. Рисунок ОЗ.2.

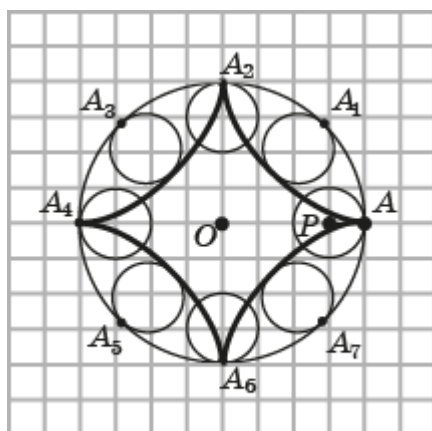


Рис. ОЗ.1

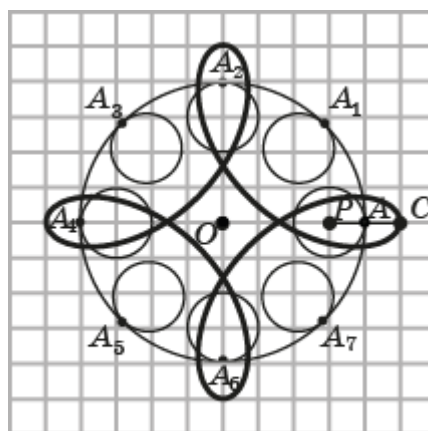


Рис. ОЗ.2

3. Рисунок ОЗ.3. 4. Рисунок ОЗ.4.

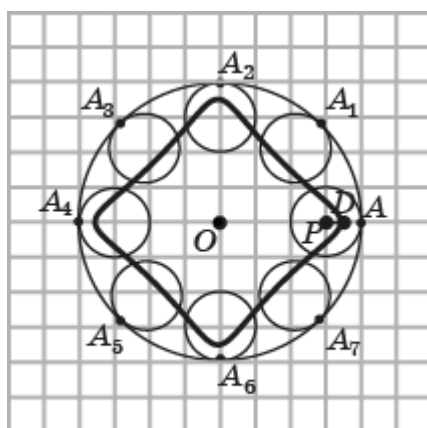


Рис. ОЗ.3

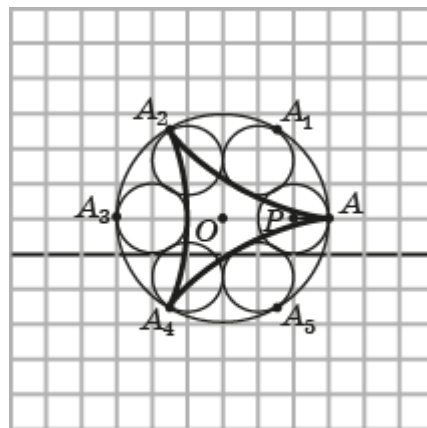


Рис. ОЗ.4

5. Рисунок ОЗ.5. 6. Рисунок ОЗ.6.

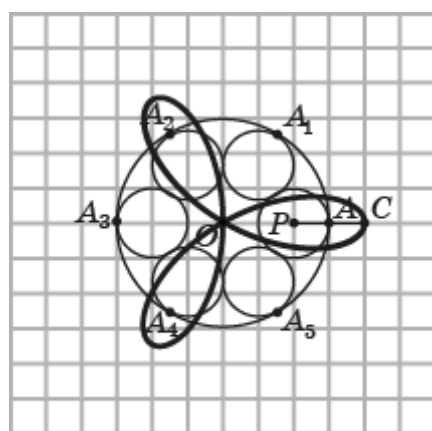


Рис. ОЗ.5

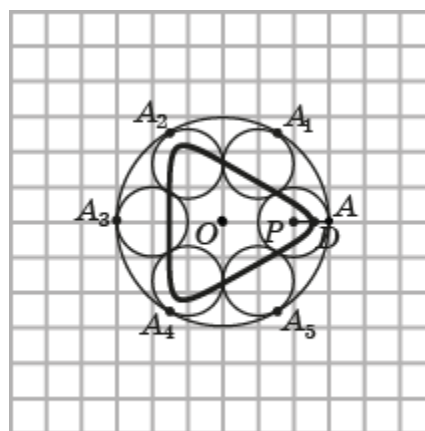


Рис. ОЗ.6

7. Рисунок ОЗ.7. 8. Рисунок ОЗ.8.

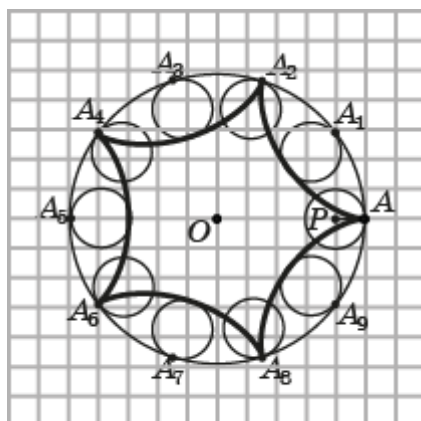


Рис. ОЗ.7

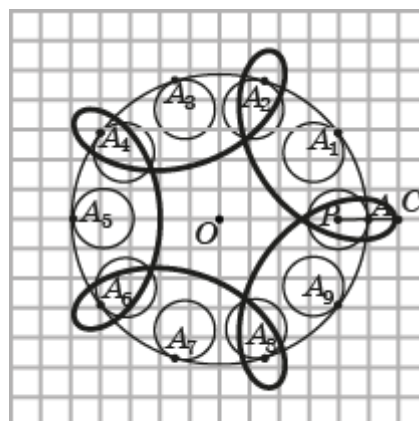


Рис. 3.8

9. Рисунок ОЗ.9. 10. Отрезок AA_2 (рис. ОЗ.10).

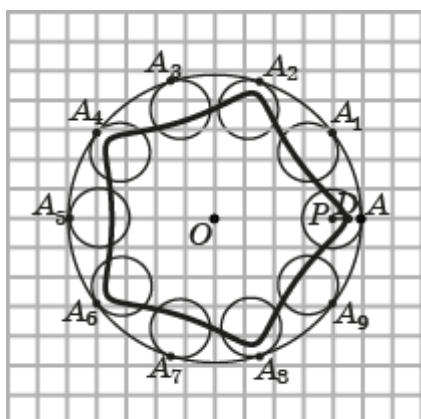


Рис. 3.9

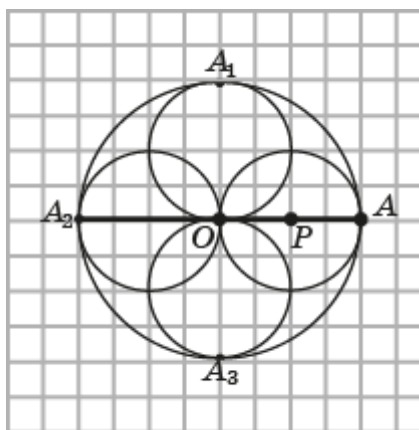


Рис. ОЗ.10

11. Эллипс (рис. ОЗ.11). 12. Эллипс (рис. ОЗ.12).

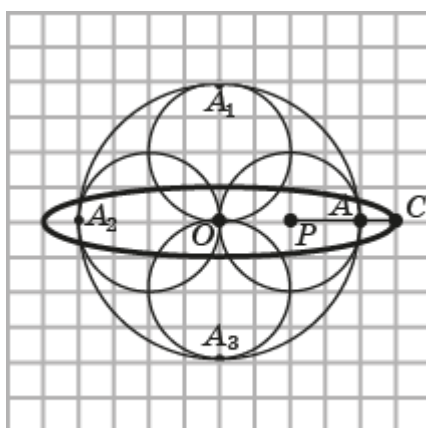


Рис. 3.11

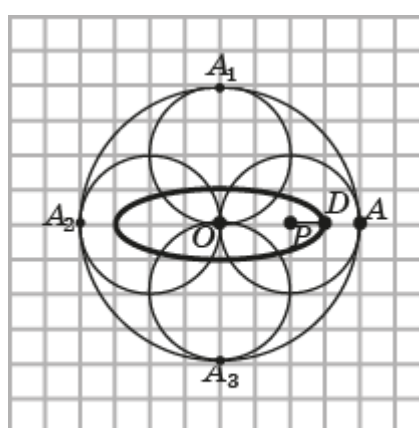


Рис. ОЗ.12

13. Рисунок ОЗ.13. 14. Рисунок ОЗ.14.

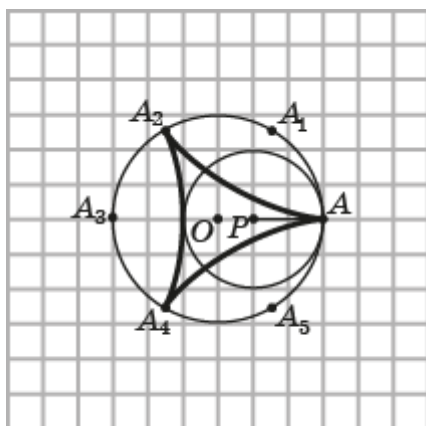


Рис. ОЗ.13

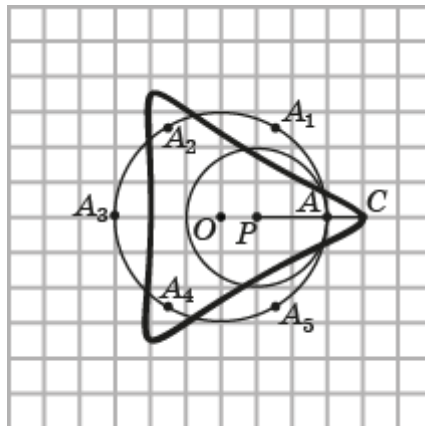


Рис. ОЗ.14

15. Рисунок ОЗ.15. 16. Рисунок ОЗ.16.

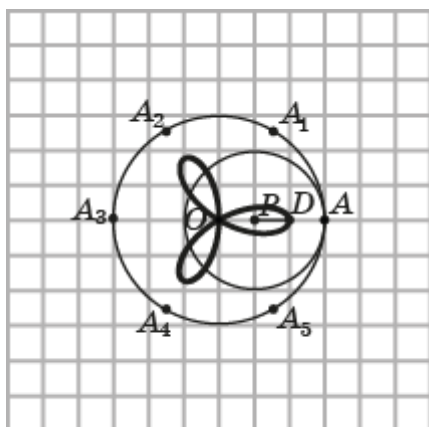


Рис. ОЗ.15

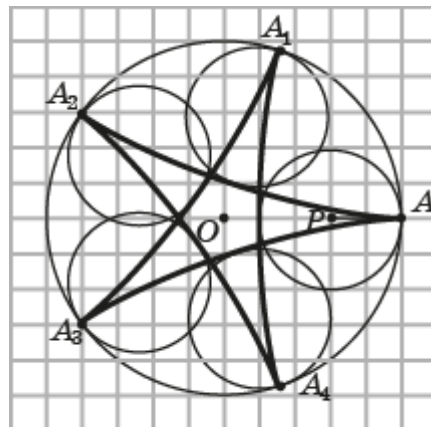


Рис. ОЗ.16

17. Рисунок ОЗ.17. 18. Рисунок ОЗ.18.

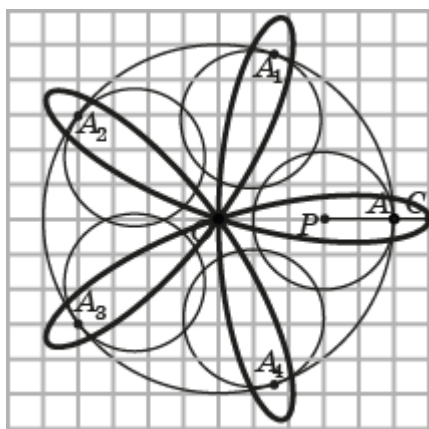


Рис. ОЗ.17

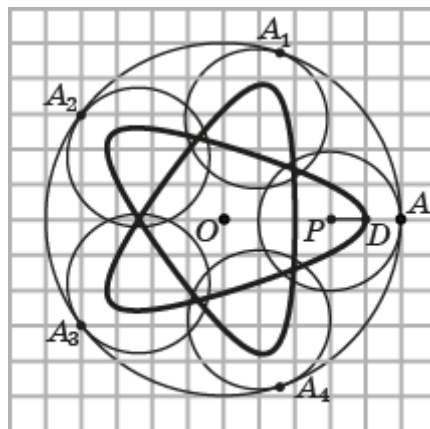


Рис. ОЗ.18

19. Рисунок ОЗ.19. 20. Рисунок ОЗ.20.

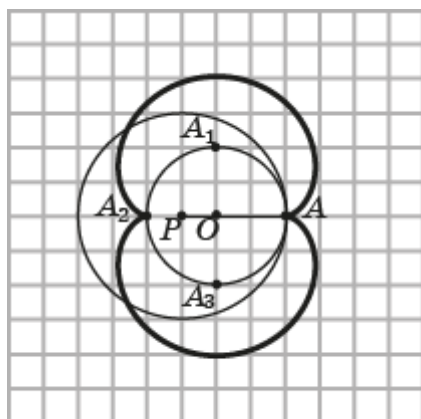


Рис. ОЗ.19

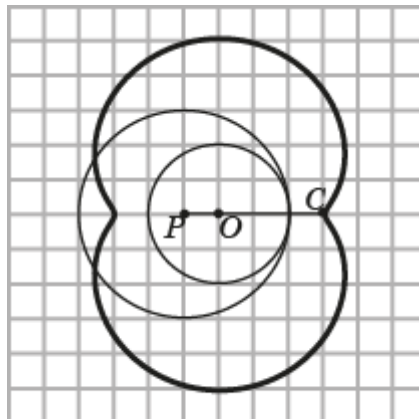


Рис. ОЗ.20

21. Рисунок ОЗ.21. 22. Кардиоида (рис. ОЗ.22).

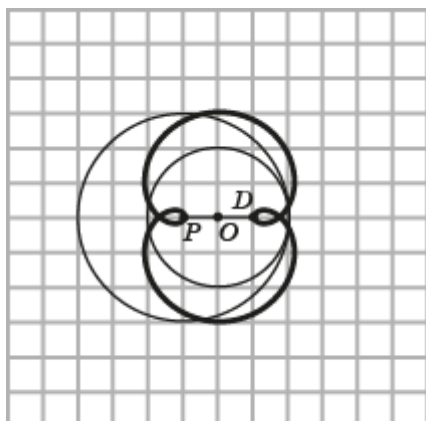


Рис. ОЗ.21

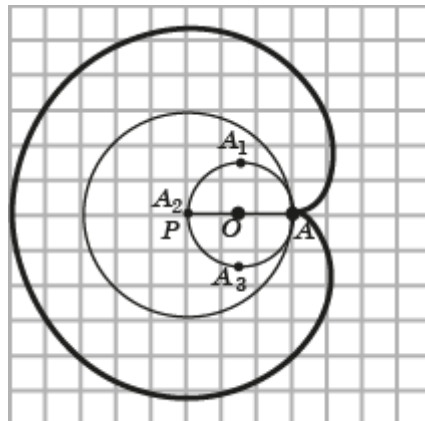


Рис. ОЗ.22

23. Рисунок ОЗ.23. 24. Рисунок ОЗ.24.

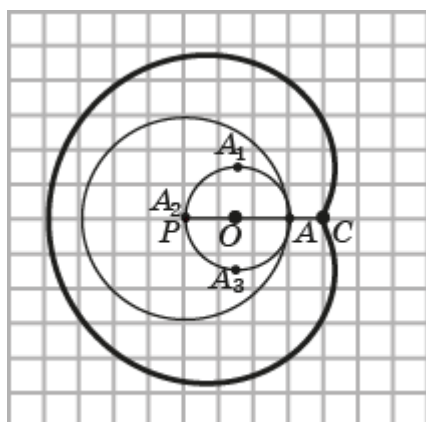


Рис. ОЗ.23

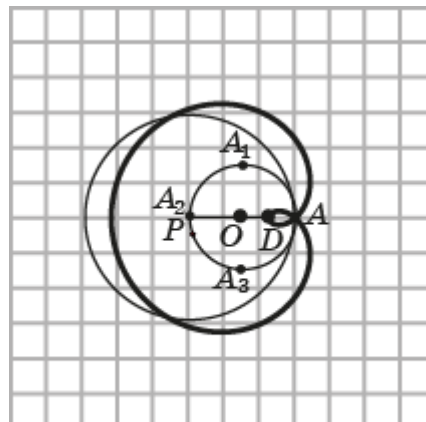


Рис. ОЗ.24

25. Рисунок ОЗ.25. 26. Рисунок ОЗ.26.

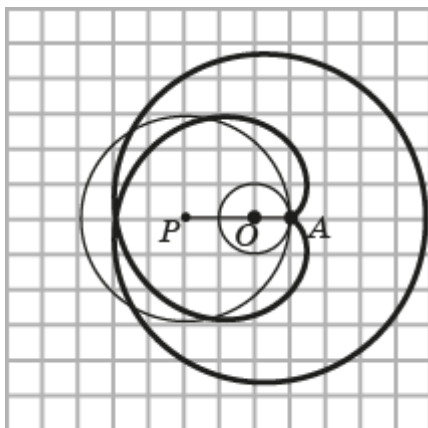


Рис. ОЗ.25

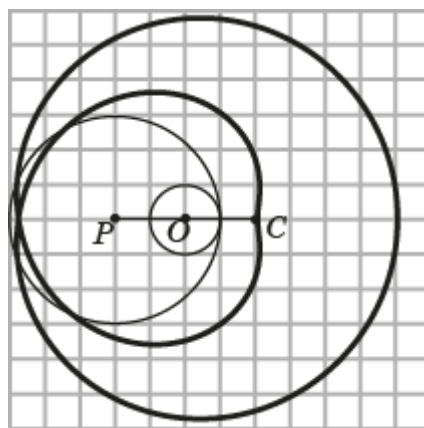


Рис. ОЗ.26

27. Рисунок ОЗ.27. 28. Рисунок ОЗ.28.

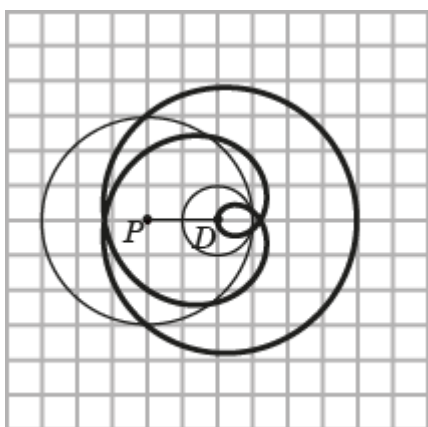


Рис. 3.27

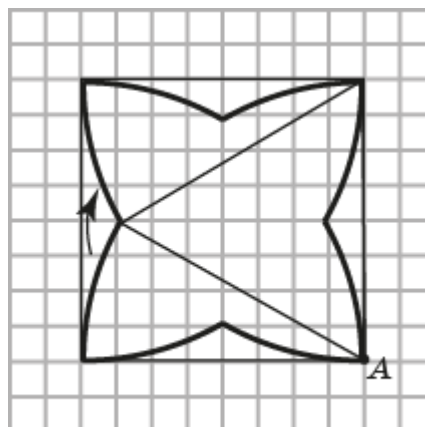


Рис. ОЗ.28

29. Рисунок ОЗ.29. 30. Рисунок ОЗ.30.

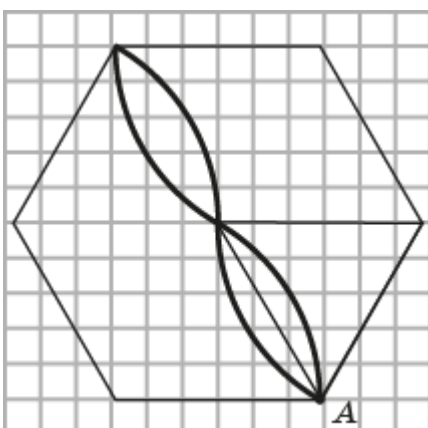


Рис. ОЗ.29

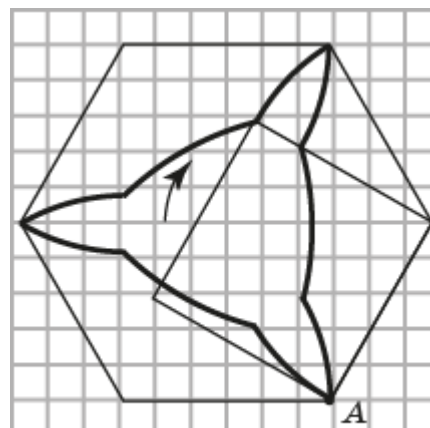


Рис. ОЗ.30

31. Рисунок ОЗ.31. 32. Рисунок ОЗ.32.

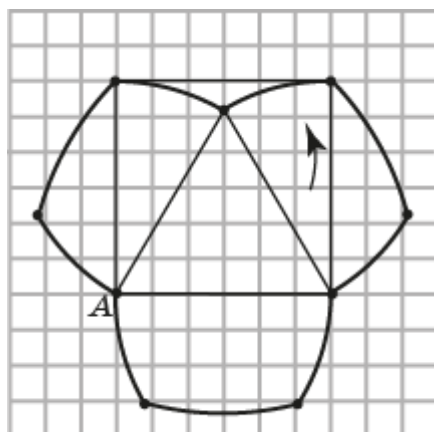


Рис. ОЗ.31

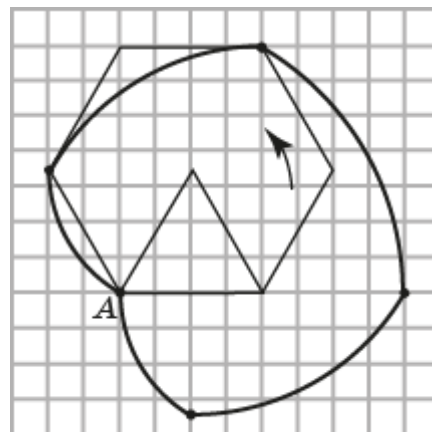


Рис. ОЗ.32

33. Рисунок ОЗ.33

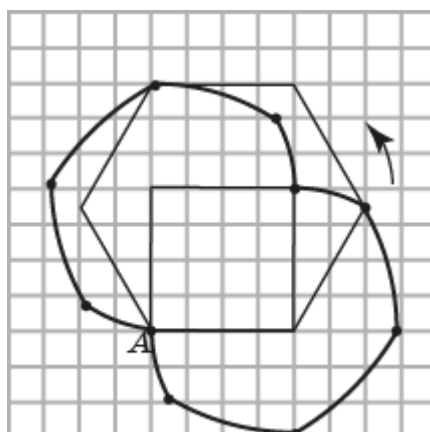


Рис. ОЗ.33

4. Огибающие

1. Парабола (рис. О4.1). 2. Парабола (рис. О4.2).

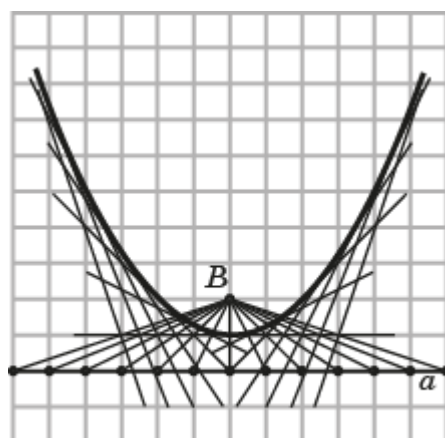


Рис. О4.1

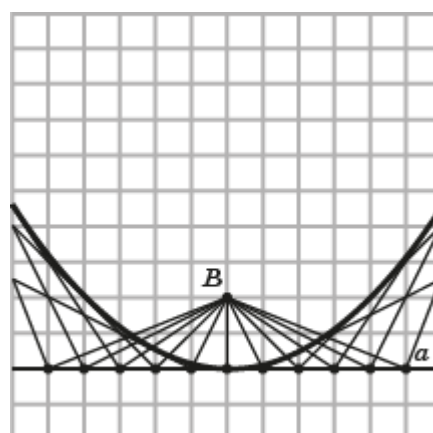


Рис. О4.2

3. Эллипс (рис. О4.3). 4. Эллипс (рис. О4.4).

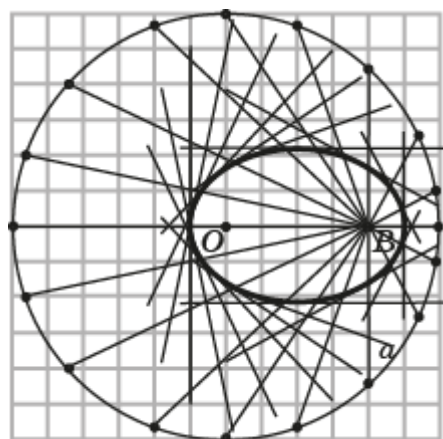


Рис. О4.3

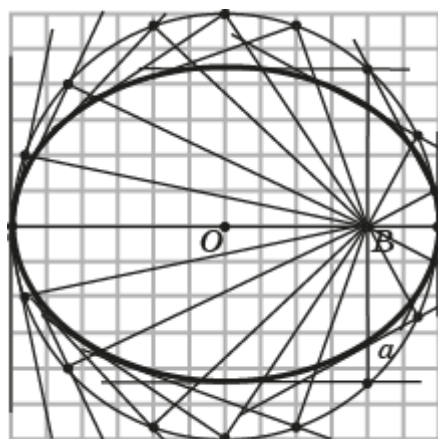


Рис. О4.4

5. Гипербола (рис. О4.5). 6. Гипербола (рис. О4.6).

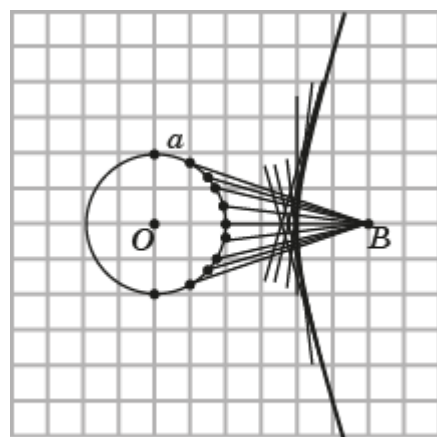


Рис. О4.5

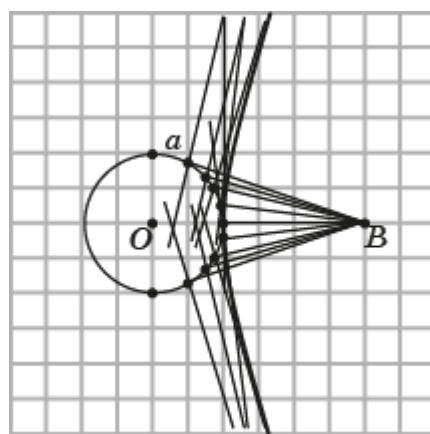


Рис. О4.6

7. Окружность (рис. О4.7). 8. Дуга астроида (рис. О4.8).

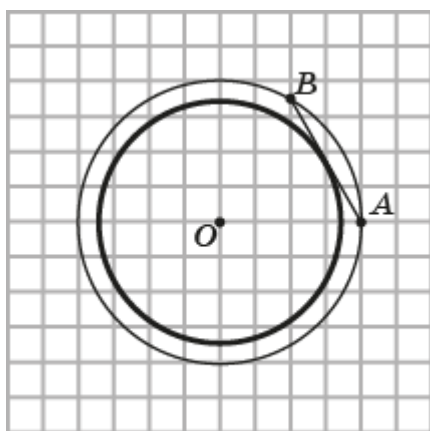


Рис. О4.7

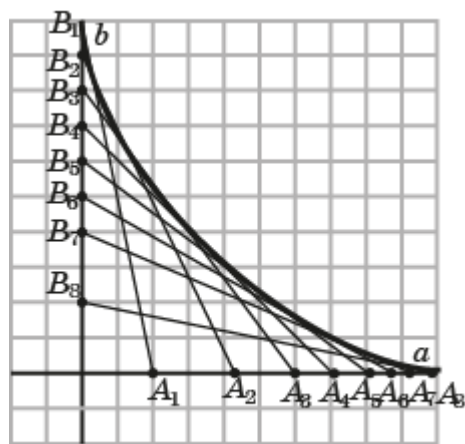


Рис. О4.8

9. Кардиоида (рис. О4.9). 10. Удлиненная кардиоида (рис. О4.10).

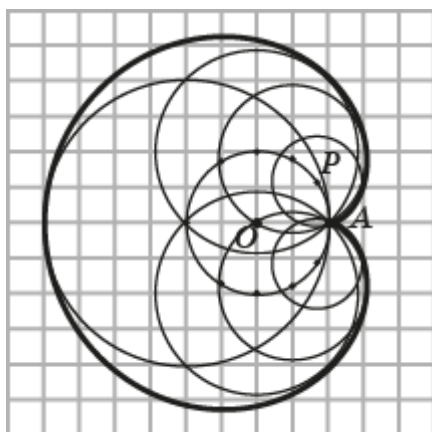


Рис. О4.9

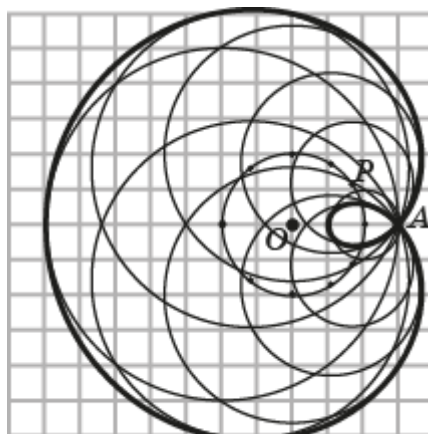


Рис. О4.10

11. Кардиоида (рис. О4.11). 12. Удлиненная кардиоида (рис. О4.12).

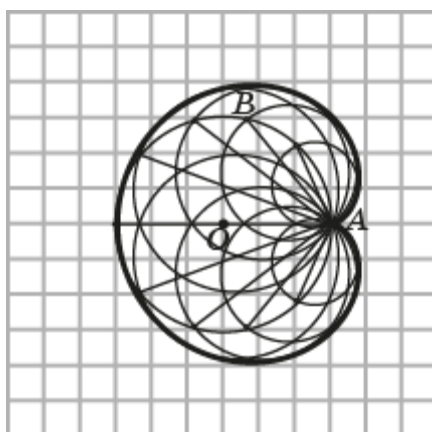


Рис. О4.11

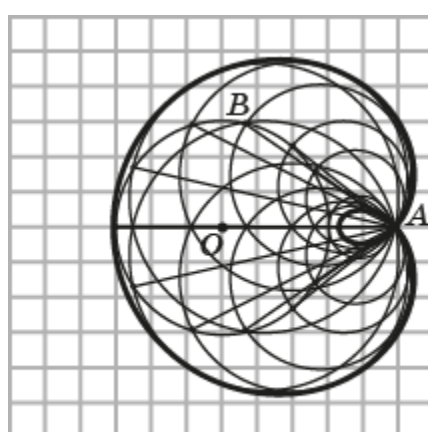


Рис. О4.12

5. Кривые постоянной ширины

1. Рисунок О5.1. 2. Рисунок О5.2.

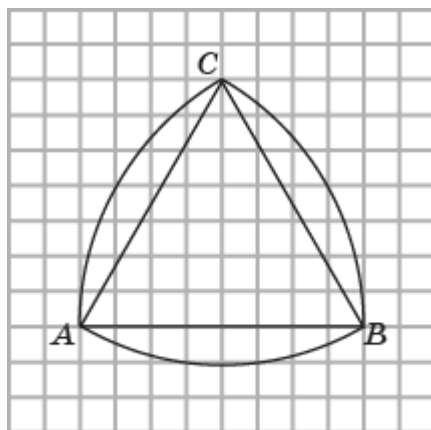


Рис. О5.1

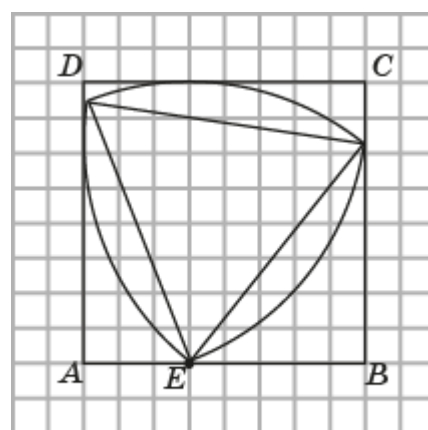


Рис. О5.2

3. Рисунок О5.3. 4. Рисунок О5.4.

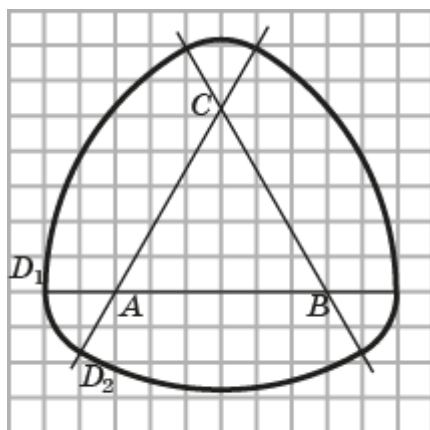


Рис. О5.3

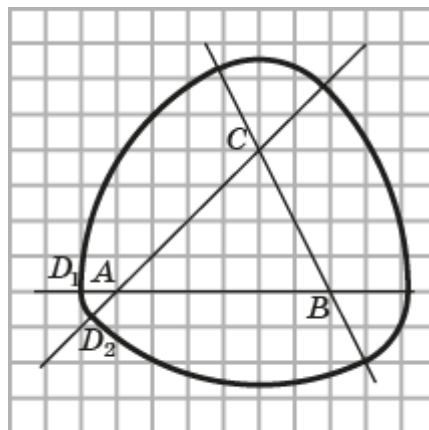


Рис. О5.4

5. Окружность (рис. О5.5). 6. Рисунок О5.6.

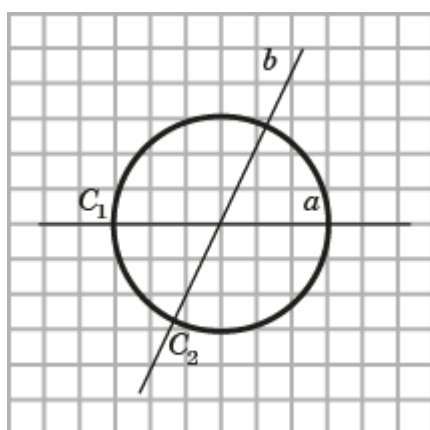


Рис. О5.5

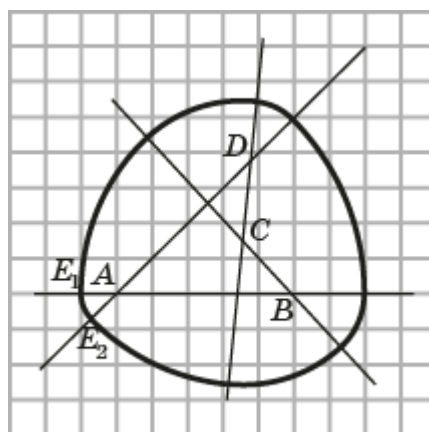


Рис. О5.6

7. Рисунок О5.7. 8. Рисунок О5.8.

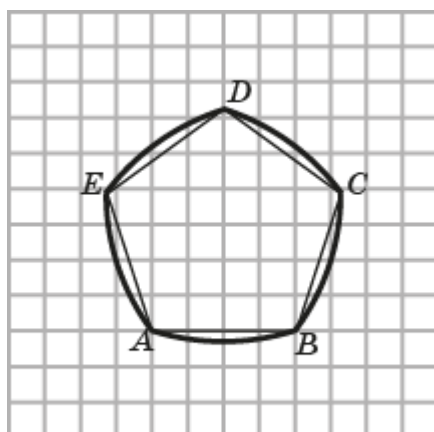


Рис. О5.7

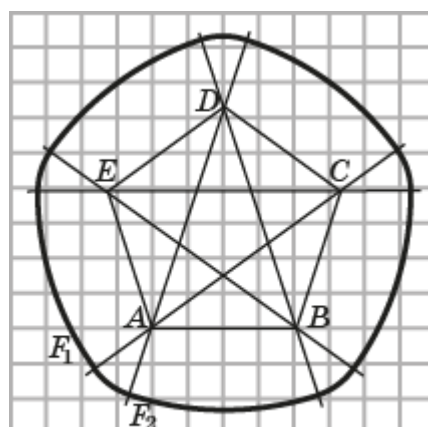


Рис. О5.8

9. Рисунок О5.9.

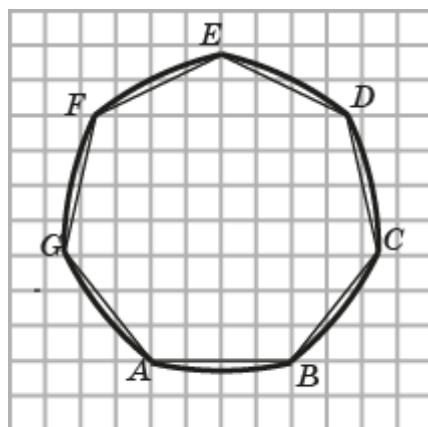


Рис. О5.9

10. Рисунок О5.10.

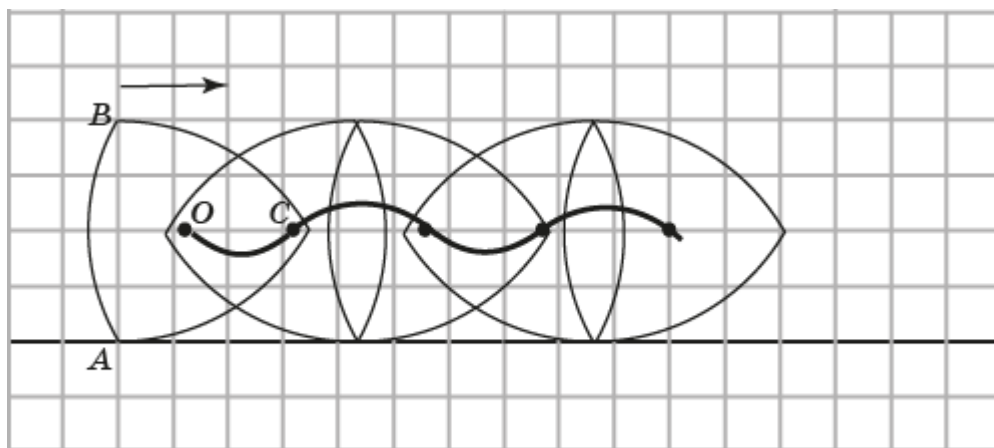


Рис. О5.10

11. Ширина равна 10, периметр равен 10п. 12. Ширина равна 8, периметр равен 8п.

Литература

1. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2000.
2. Маркушевич А. И. Замечательные кривые. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952.
3. Радемахер Г., Теплиц О. Кривые постоянной ширины // Числа и фигуры. Опыты математического мышления / пер. с нем. В. И. Контовта. М.: Физматгиз, 1962. («Библиотека математического кружка», выпуск 10).
4. Савелов А. А. Плоские кривые. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960.
5. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Кривые. Курс по выбору: учебн. пособие для общеобразоват. учреждений. М.: Мнемозина, 2007.
6. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Моя математика. Курс по выбору. Геометрия. 7-9 классы. Учебное пособие. М.: Просвещение, 2025.
7. <http://vasmirnov.ru>,

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. Циклоида	4
2. Эпициклоиды.....	14
3. Гипоциклоиды.....	30
4. Огибающие	47
5. Кривые постоянной ширины	53
Ответы и указания	59
Литература	80