В. А. Смирнов, И. М. Смирнова

Курс по выбору
Моя математика. Геометрия
7-9 классы

Рабочая тетрадь № 3

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Москва
«Просвещение»
2026

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова

Моя математика. Курс по выбору. Геометрия: 7-9 классы. Рабочая тетрадь № 3. Преобразования плоскости.

Тетрадь входит в учебно-методический комплект по математике «Лаборатория А. Г. Мордковича». Она содержит задачи на преобразования плоскости, среди которых: центральная и осевая симметрии; поворот; параллельный перенос; гомотетия и подобие; инверсия и др.

Предлагаемые задачи имеют различный уровень трудности, не требуют знания специальных формул и теорем и направлены на развитие геометрических представлений и конструктивных умений учащихся 7-9 классов.

К каждой задаче прилагается рисунок на клетчатой бумаге. Стороны клеток предполагаются равными единице.

В конце пособия приведены ответы и указания ко всем задачам, а также список дополнительной литературы.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая рабочая тетрадь посвящена преобразованиям плоскости и предназначена для учащихся 7-9 классов, интересующихся математикой, и призвана способствовать повышению эффективности обучения геометрии, подготовке к изучению высшей геометрии и математического анализа в вузе.

Она входит в учебно-методический комплект по математике «Лаборатория А. Г. Мордковича» и служит дополнением к курсу по выбору:

Смирнов В. А., Смирнова И. М. Моя математика. Курс по выбору. Геометрия. 7-9 классы: учебное пособие. М.: Просвещение, 2025.

В ней предлагаются задачи на построение, установление и доказательство свойств фигур, полученных из данных фигур различными преобразованиями плоскости, среди которых;

- центральная симметрия;
- осевая симметрия;
- поворот, симметрия n-го порядка;
- параллельный перенос, движение;
- инверсия.

Предлагаемые задачи имеют различный уровень трудности. Они не требуют знания специальных формул и теорем и направлены на развитие геометрических представлений и конструктивных умений учащихся 7-9 классов.

К каждой задаче прилагается рисунок на клетчатой бумаге, стороны клеток которой предполагаются равными единице.

В конце тетради приведены ответы и указания ко всем задачам, а также список дополнительной литературы.

1. Центральная симметрия

Напомним, что точки A и A' называются ***симметричными*** относительно точки O, если O является серединой отрезка AA'. Точка O считается симметричной сама себе.

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно точки O точка A', называется ***центральной симметрией***. Точка O называется ***центром симметрии***.

Две фигуры F и F' называются ***симметричными*** относительно точки O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры. Точка O называется центром симметрии.

1. Изобразите точки, симметричные данным точкам относительно точки O (рис. 1.1).

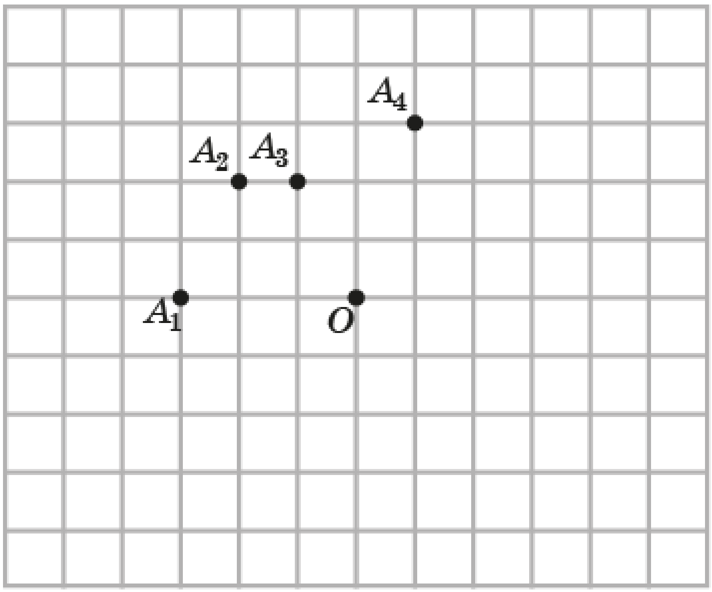

Рис. 1.1

2. Докажите, что центральная симметрия сохраняет расстояние между точками (рис. 1.2).

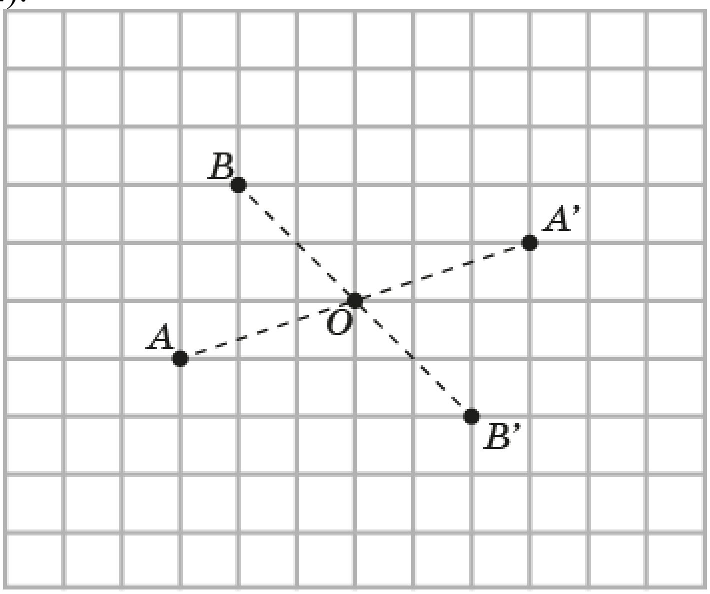

Рис. 1.2

___

___

___

3. Изобразите отрезки, симметричные данным относительно точки O (рис. 1.3).

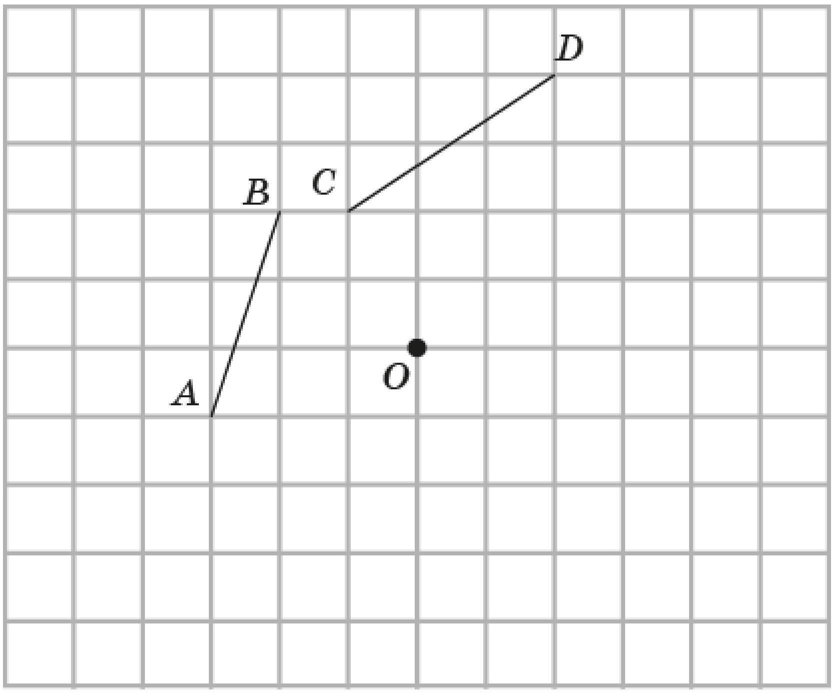

Рис. 1.3

4. Изобразите центр симметрии, при которой отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$ (рис. 1.4).

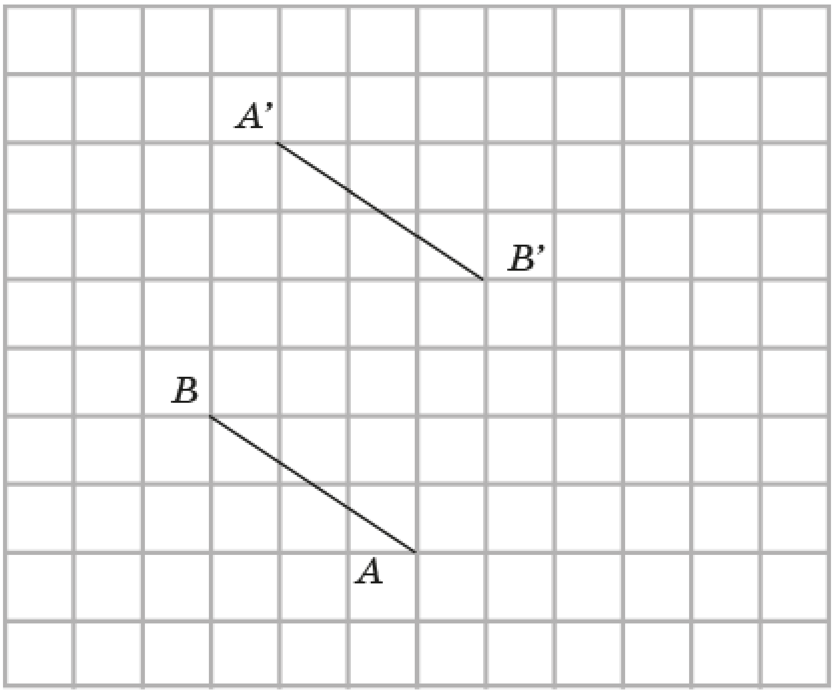

Рис. 1.4

5. Докажите, что центральная симметрия переводит прямую, не проходящую через центр симметрии, в прямую, параллельную данной прямой (рис. 1.5).

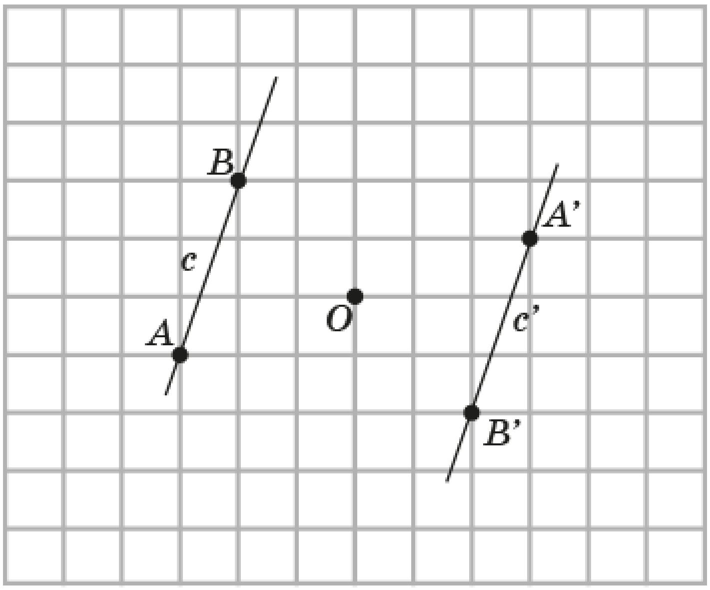

Рис. 1.5

6. Изобразите прямые, симметричные данным относительно точки O (рис. 1.6).

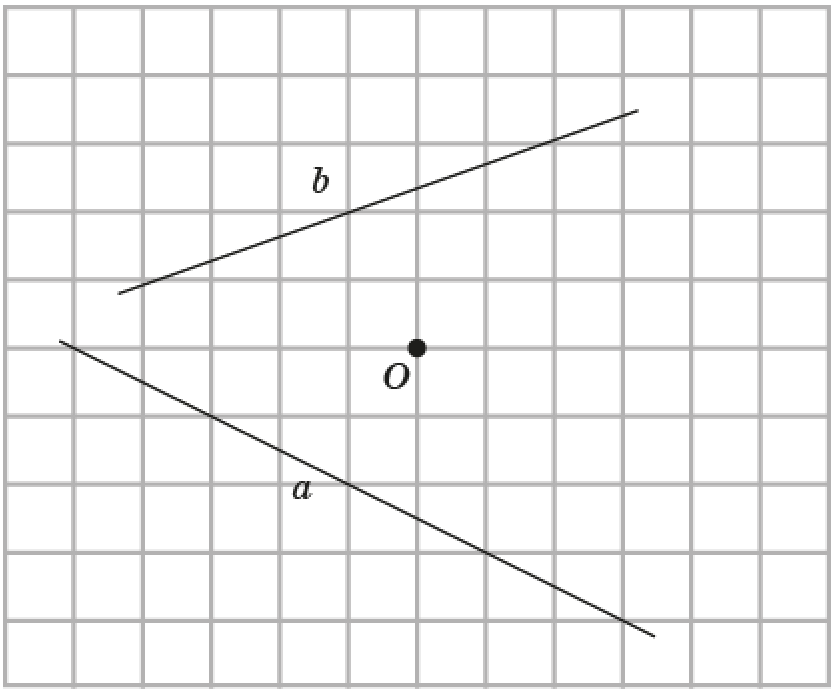

Рис. 1.6

7. Изобразите геометрическое место центров симметрии, при которых прямая *a* переходит в прямую *a'* (рис. 1.7).

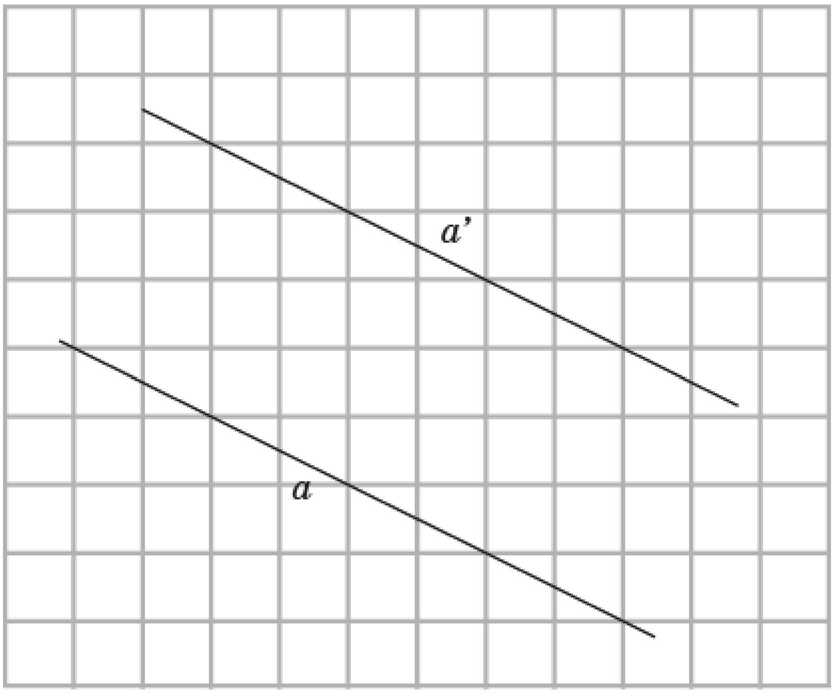

Рис. 1.7

8. Изобразите треугольник, симметричный данному относительно центра *O* (рис. 1.8).

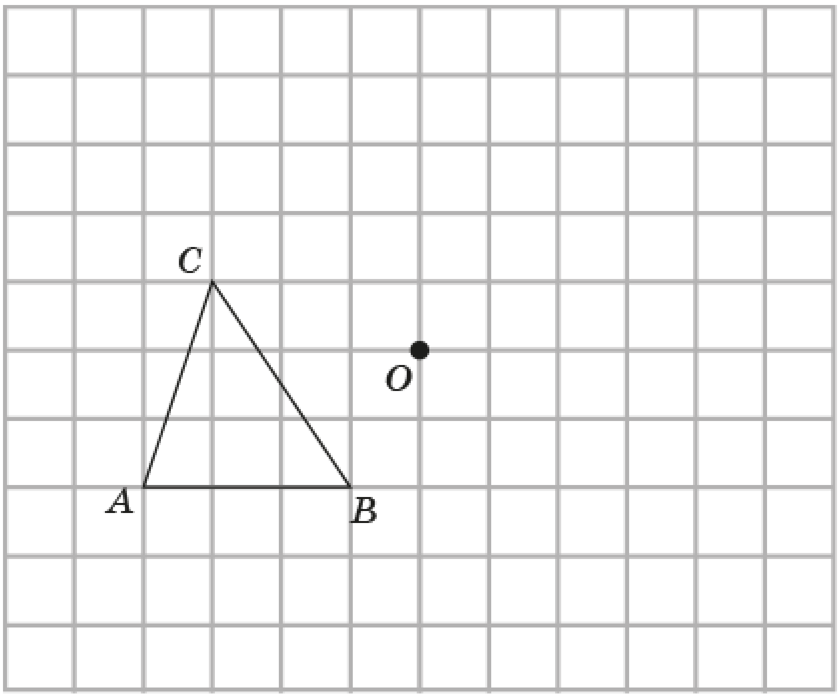

Рис. 1.8

9. Изобразите треугольник, симметричный данному относительно центра O (рис. 1.9).

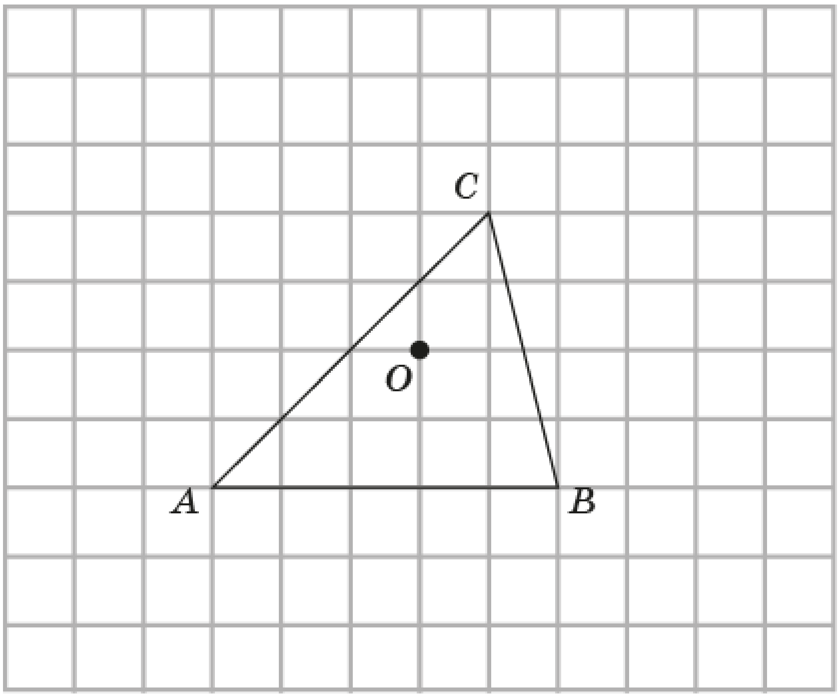

Рис. 1.9

10. Изобразите центр симметрии, при которой один из данных треугольников переходит в другой (рис. 1.10).

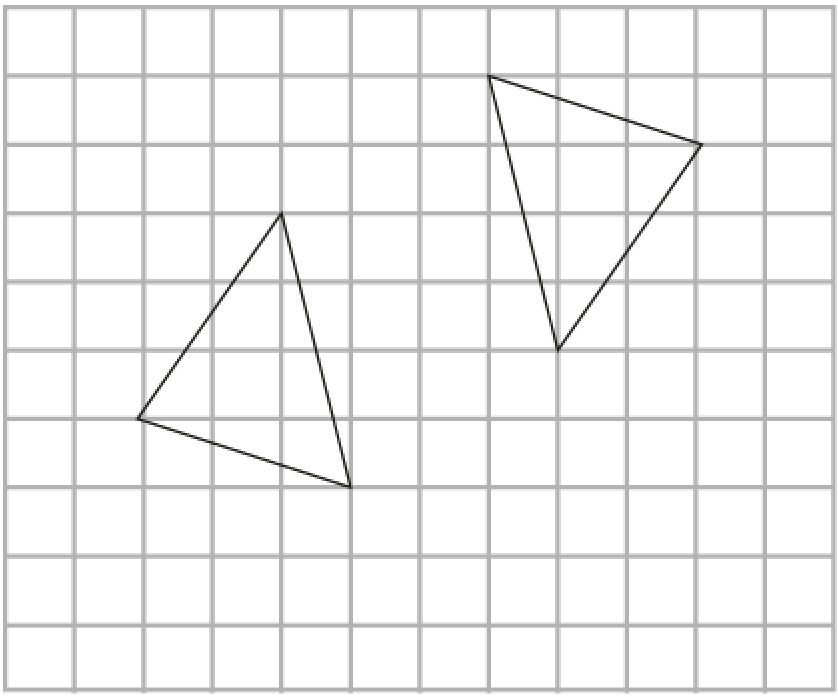

Рис. 1.10

11. Изобразите четырёхугольник, симметричный данному относительно центра O (рис. 1.11).

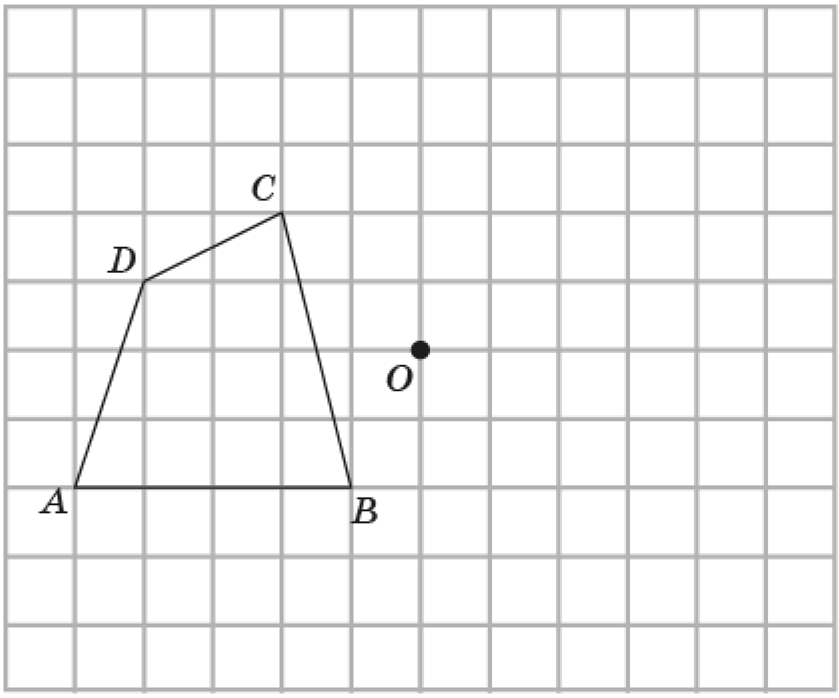

Рис. 1.11

12. Изобразите четырёхугольник, симметричный данному относительно центра O (рис. 1.12).

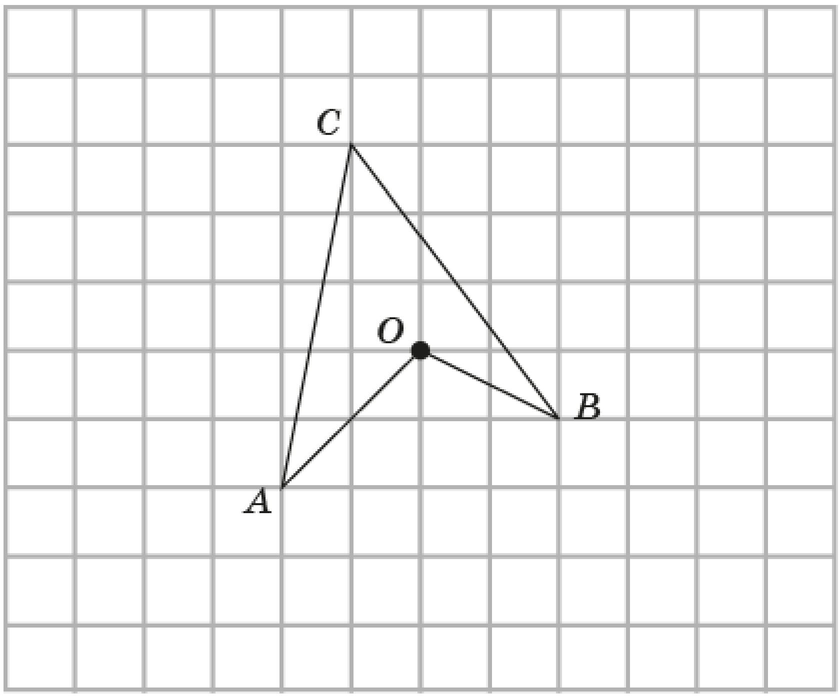

Рис. 1.12

13. Изобразите центр симметрии, при которой один из данных четырёхугольников переходит в другой (рис. 1.13).

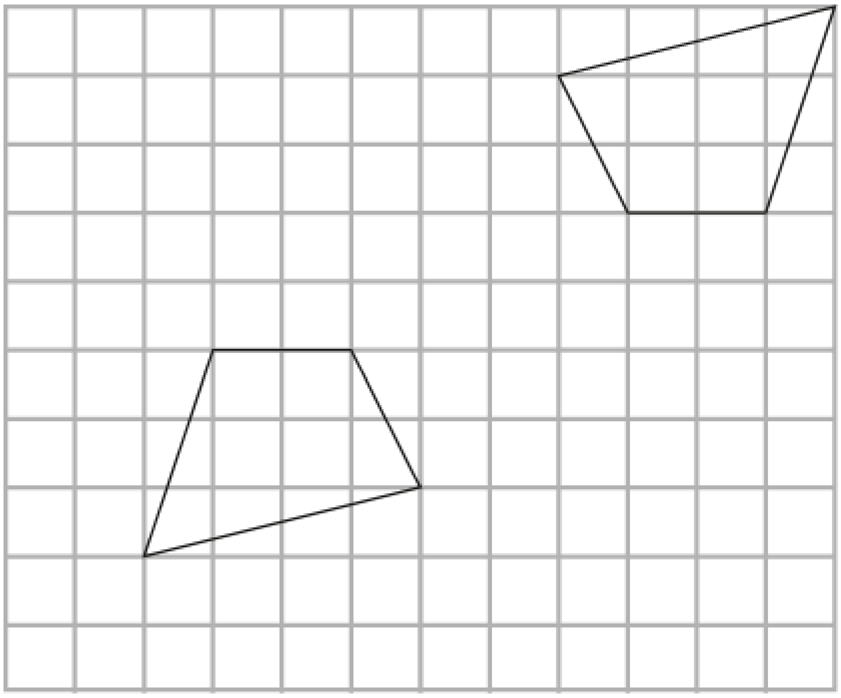

Рис. 1.13

14. Докажите, что четырёхугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом (рис. 1.14).

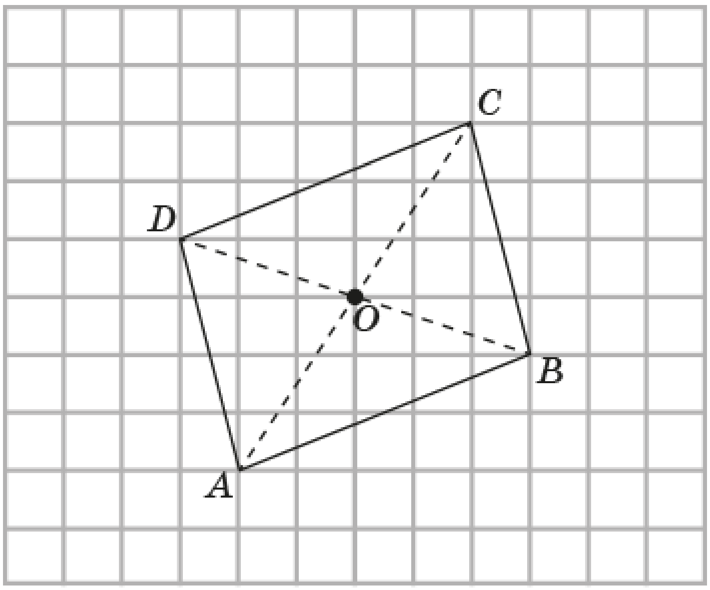

Рис. 1.14

15. Изобразите треугольник симметричный данному правильному треугольнику относительно центра O описанной окружности (рис. 1.15). Какой многоугольник является общей частью исходного треугольника и симметричного? Найдите его стороны, если стороны исходного треугольника равны 1.

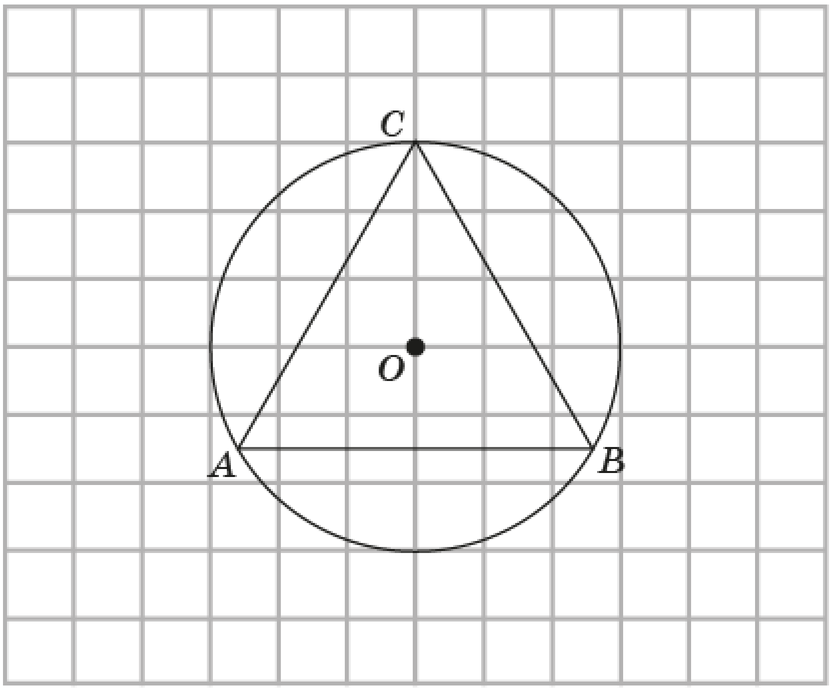

Рис. 1.15

16. Докажите, что если шестиугольник имеет центр симметрии, то его противолежащие стороны равны и параллельны (рис. 1.16).

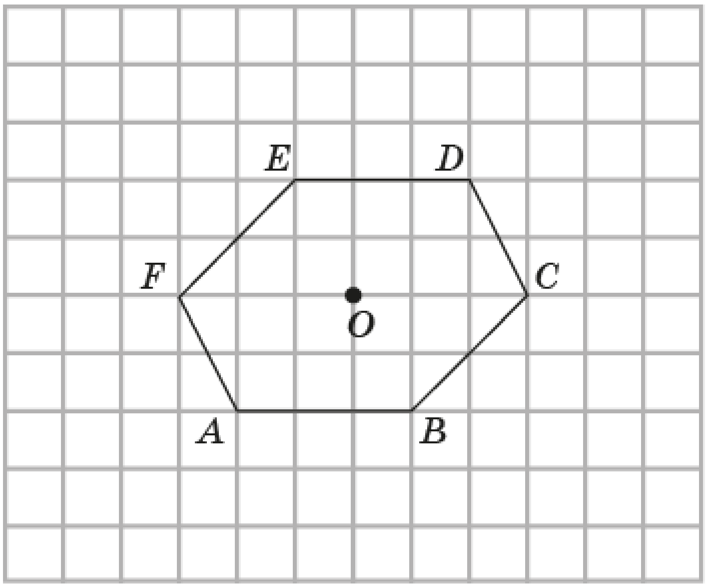

Рис. 1.16

17. Продолжите построение шестиугольника *ABCDEF*, имеющего центр симметрии *O* (рис. 1.17).

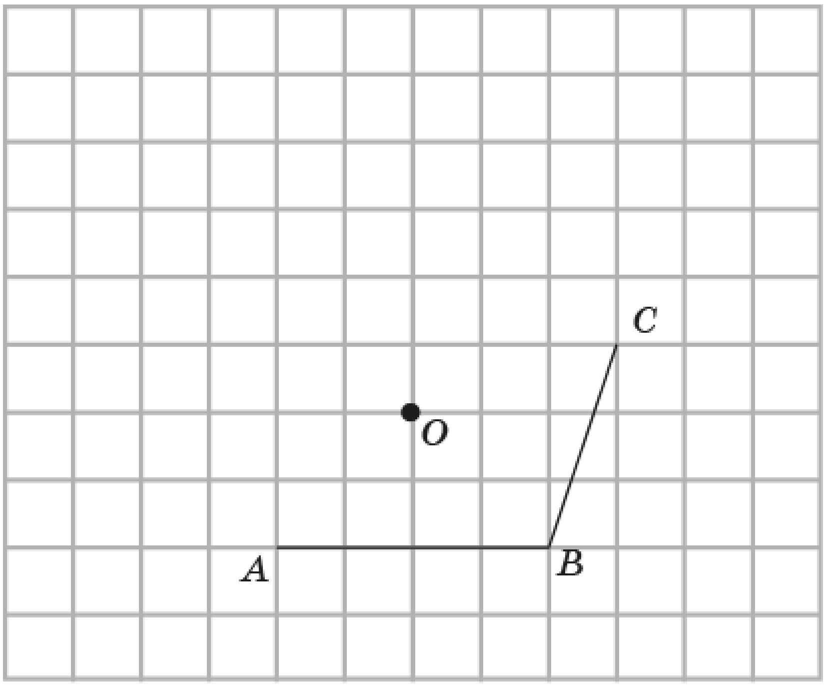

Рис. 1.17

18. Продолжите построение шестиугольника *ABCDEF*, имеющего центр симметрии *O* (рис. 1.18).

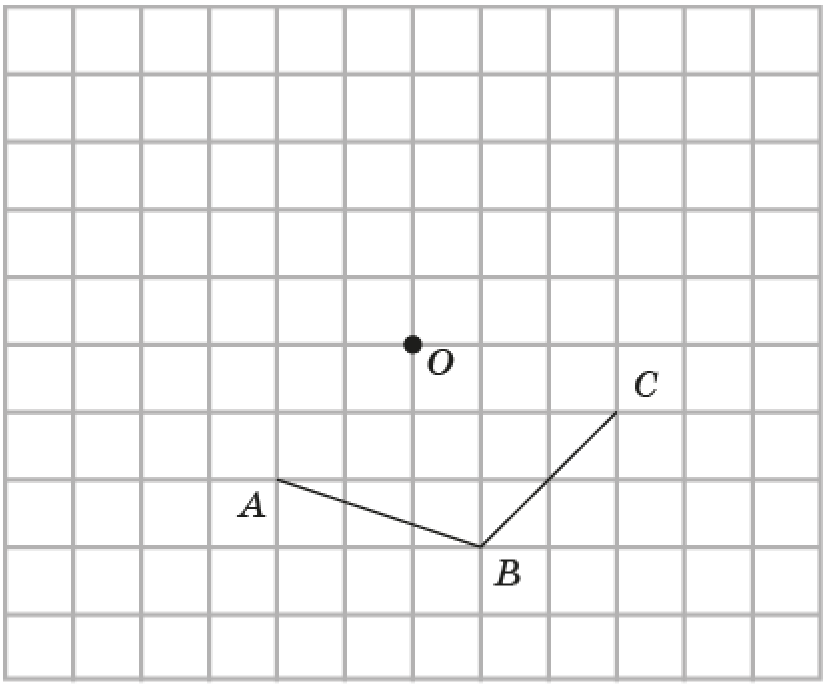

Рис. 1.18

19. Изобразите пятиугольник, симметричный данному правильному пятиугольнику относительно центра O описанной окружности (рис. 1.19). Какой многоугольник является общей частью исходного пятиугольника и симметричного?

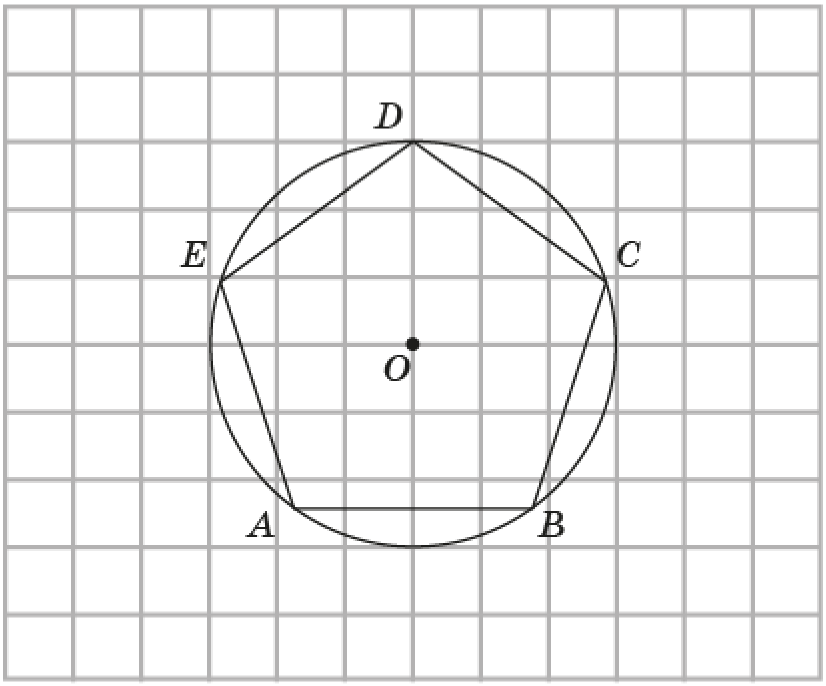

Рис. 1.19

20. Укажите центр симметрии правильного восьмиугольника (рис. 1.21).

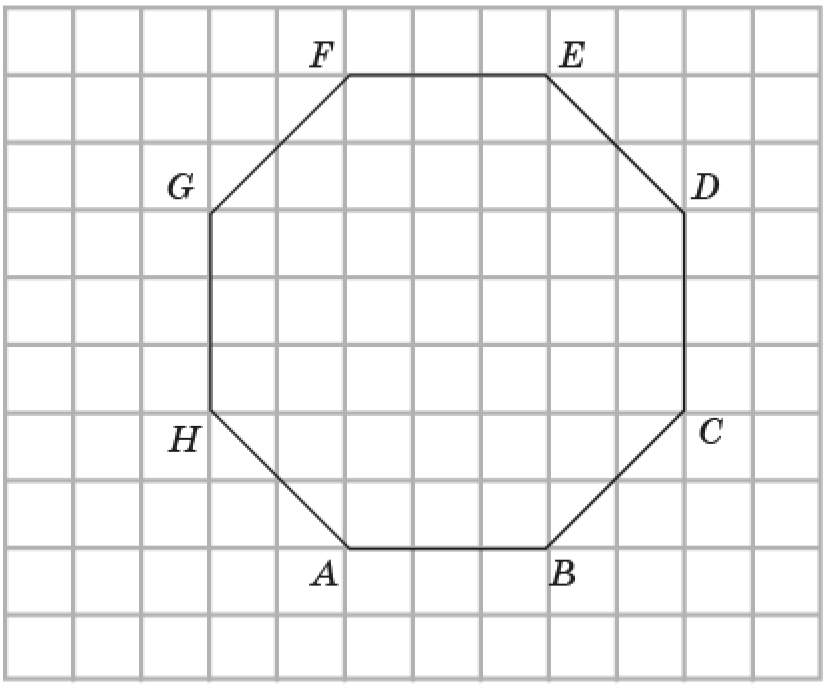

Рис. 1.20

21. Продолжите построение восьмиугольника *ABCDEFGH*, имеющего центр симметрии *O* (рис. 1.21).

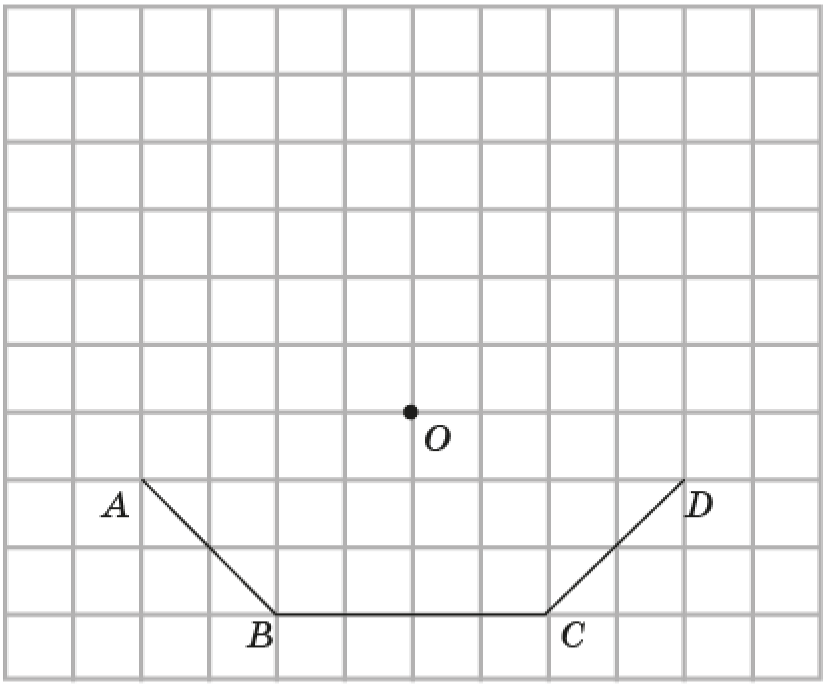

Рис. 1.21

22. Продолжите построение восьмиугольника *ABCDEFGH*, имеющего центр симметрии *O* (рис. 1.22).

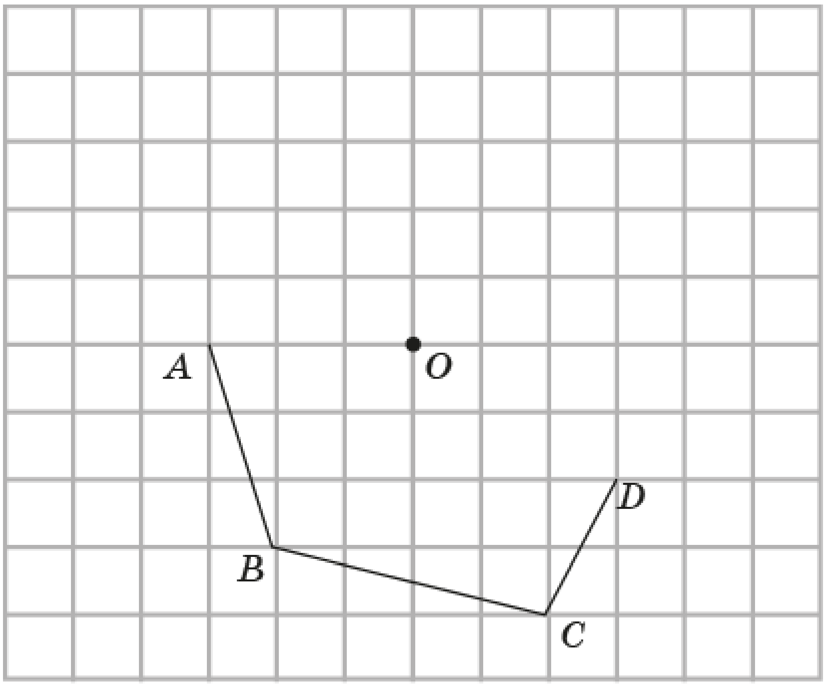

Рис. 1.22

23. Изобразите окружность, симметричную данной относительно центра O (рис. 1.23).

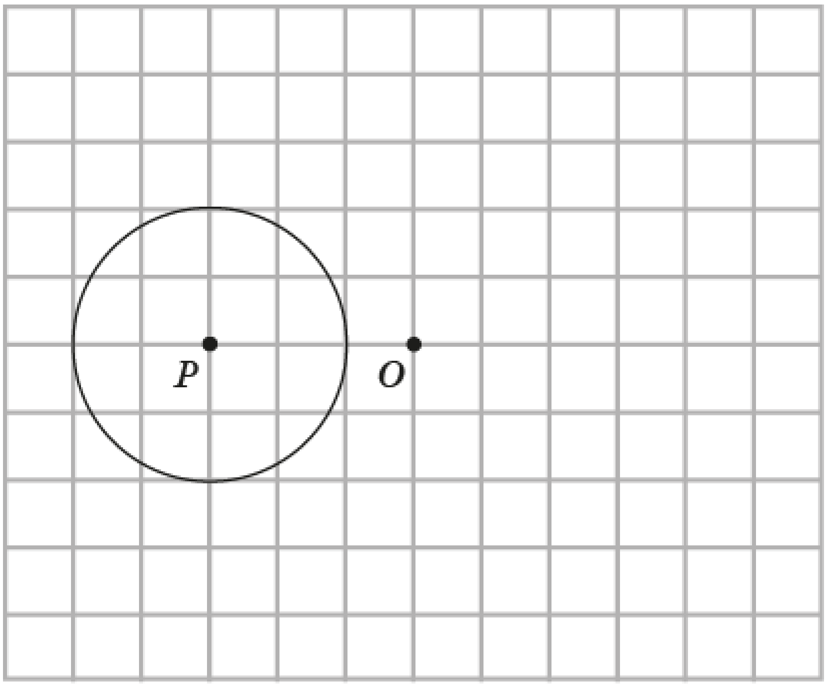

Рис. 1.23

24. Изобразите окружность, симметричную данной относительно центра O (рис. 1.24).

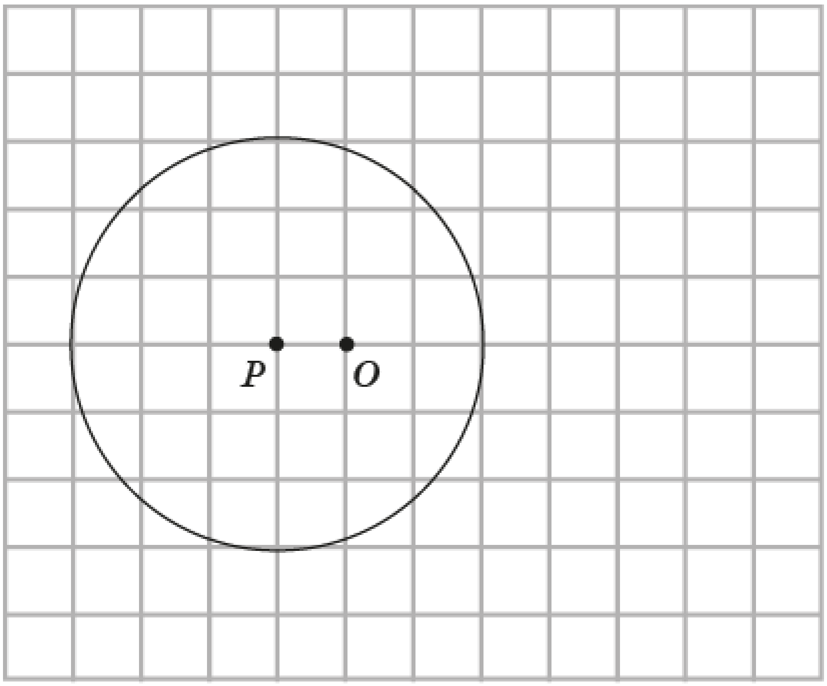

Рис. 1.24

2. Осевая симметрия

Точки A и A' называются ***симметричными*** относительно прямой c, если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой c считается симметричной самой себе.

Осевой симметрией называется преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно прямой c точка A'. Прямая c называется ***осью симметрии***.

1. Изобразите точки, симметричные данным точкам относительно данной оси c (рис. 2.1).

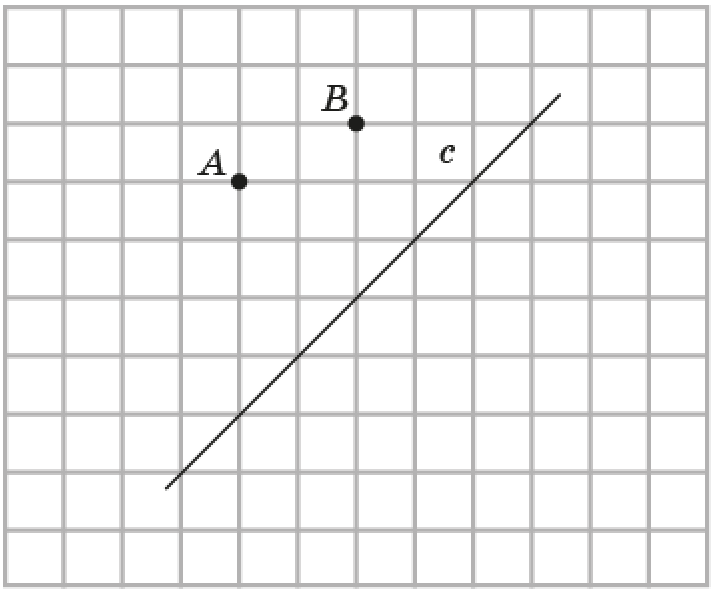

Рис. 2.1

2. Изобразите точки, симметричные данным точкам относительно данной оси c (рис. 2.2).

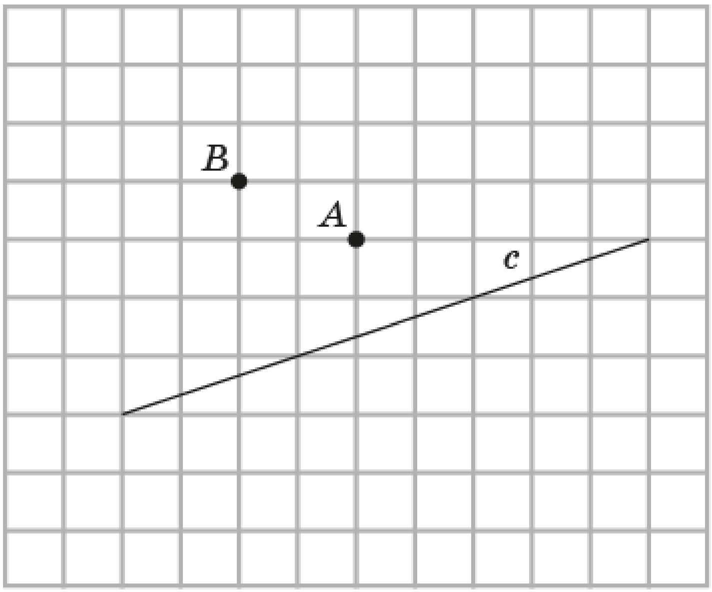

Рис. 2.2

3. Докажите, что осевая симметрия сохраняет расстояние между точками. Рассмотрите случай, когда точки лежат по одну сторону от оси симметрии (рис. 2.3).

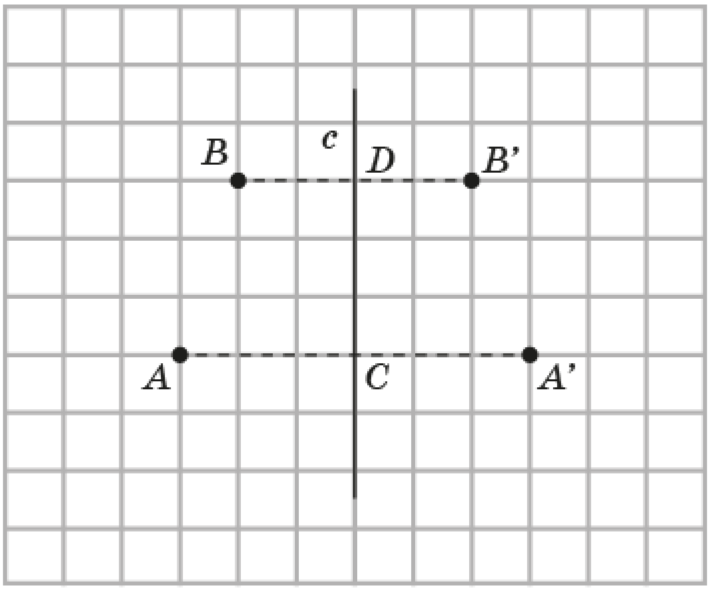

Рис. 2.3

4. Докажите, что осевая симметрия сохраняет расстояния между точками. Рассмотрите случай, когда точки лежат по разные стороны от оси симметрии *c* (рис. 2.4).

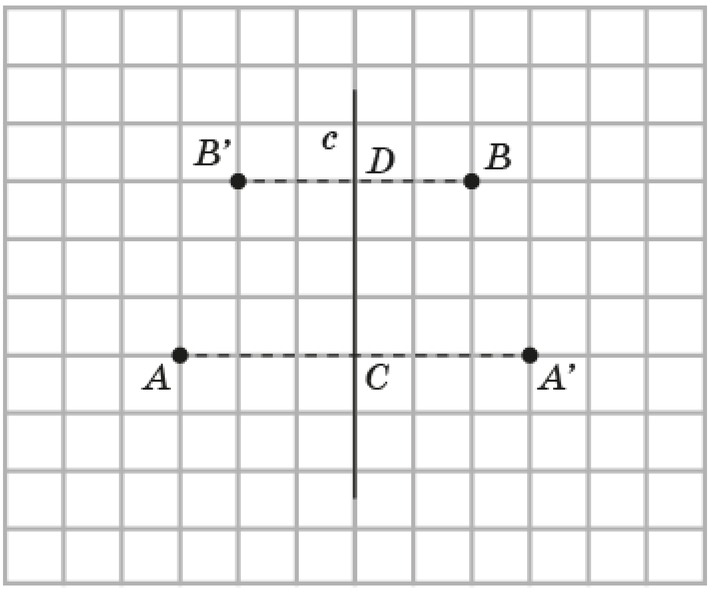

Рис. 2.4

5. Изобразите отрезок, симметричный данному отрезку AB относительно данной оси c (рис. 2.5).

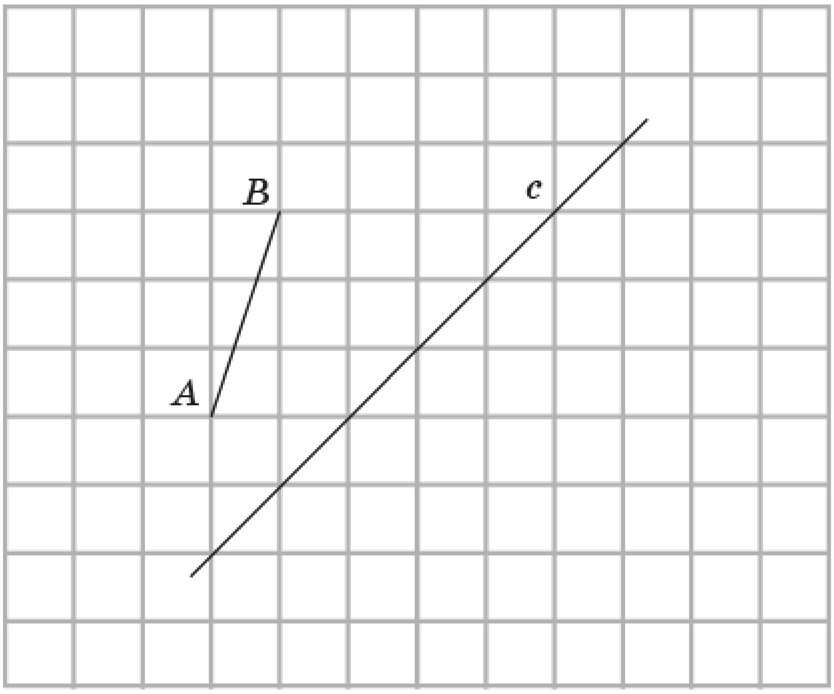

Рис. 2.5

6. Изобразите отрезок, симметричный данному отрезку AB относительно данной оси c (рис. 2.6).

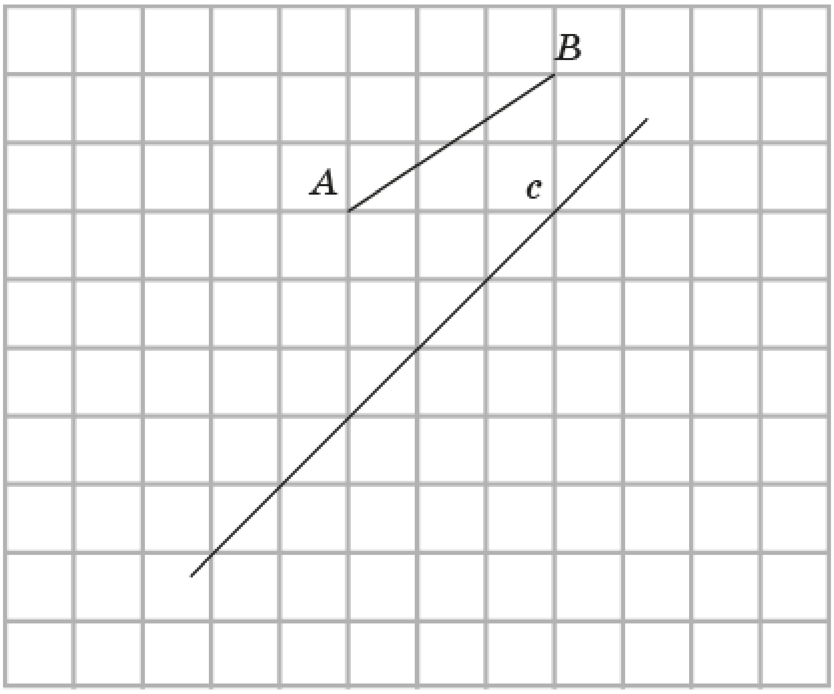

Рис. 2.6

7. Изобразите ось симметрии, при которой отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$ (рис. 2.7).

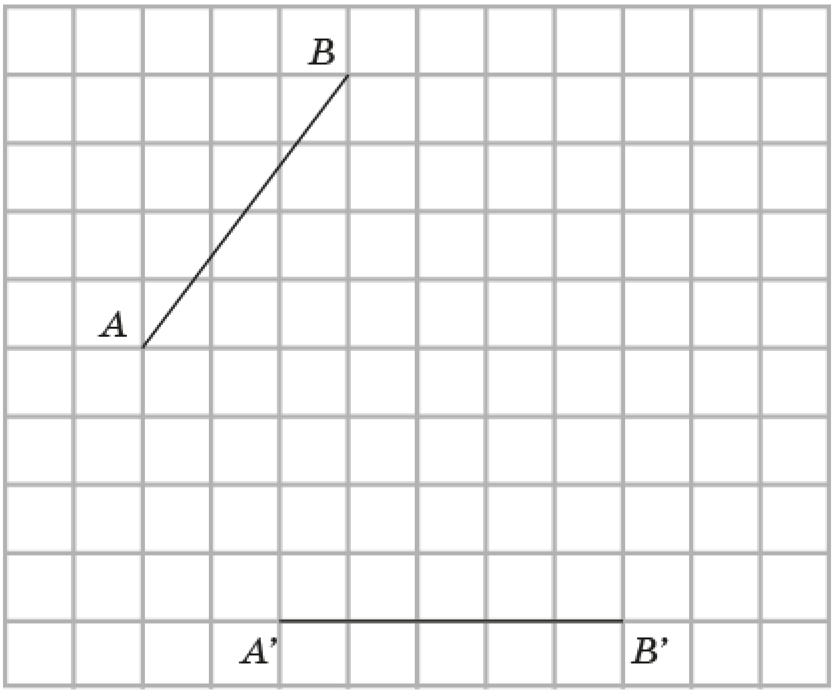

Рис. 2.7

8. Докажите, что осевая симметрия переводит прямую, параллельную оси симметрии c, в прямую a', параллельную данной прямой a (рис. 2.8).

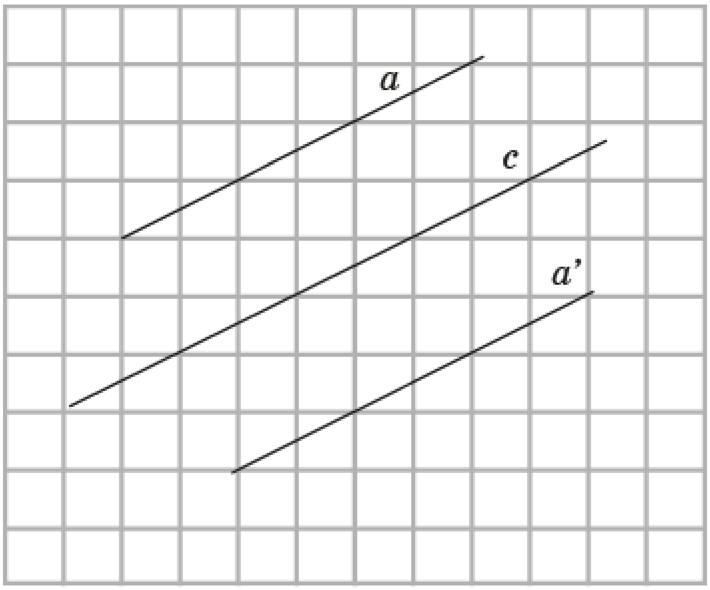

Рис. 2.8

9. Изобразите прямую, симметричную данной прямой *a*, пересекающей ось симметрии *c* (рис. 2.9).

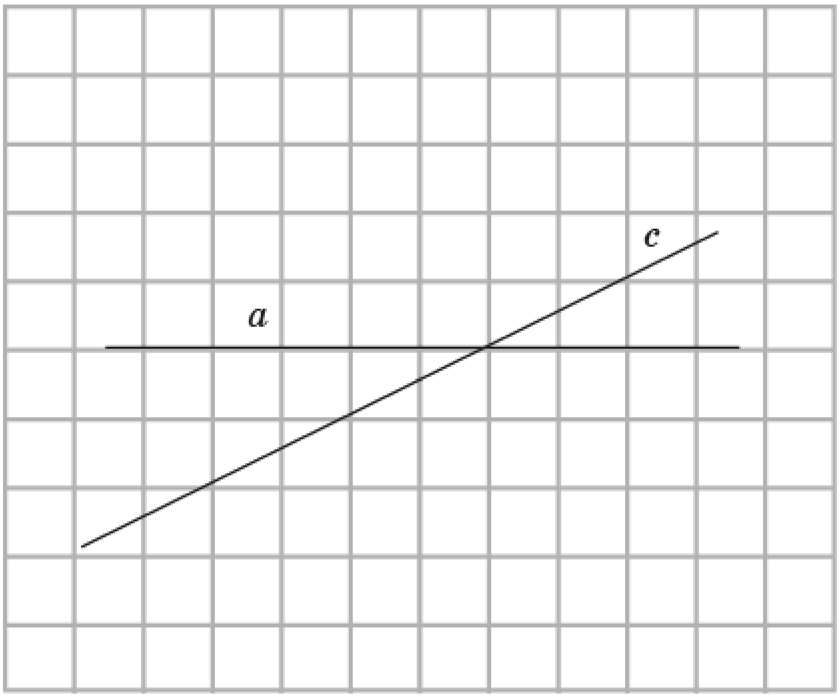

Рис. 2.9

10. Изобразите прямую, симметричную данной прямой *b* относительно данной оси *c* (рис. 2.10).

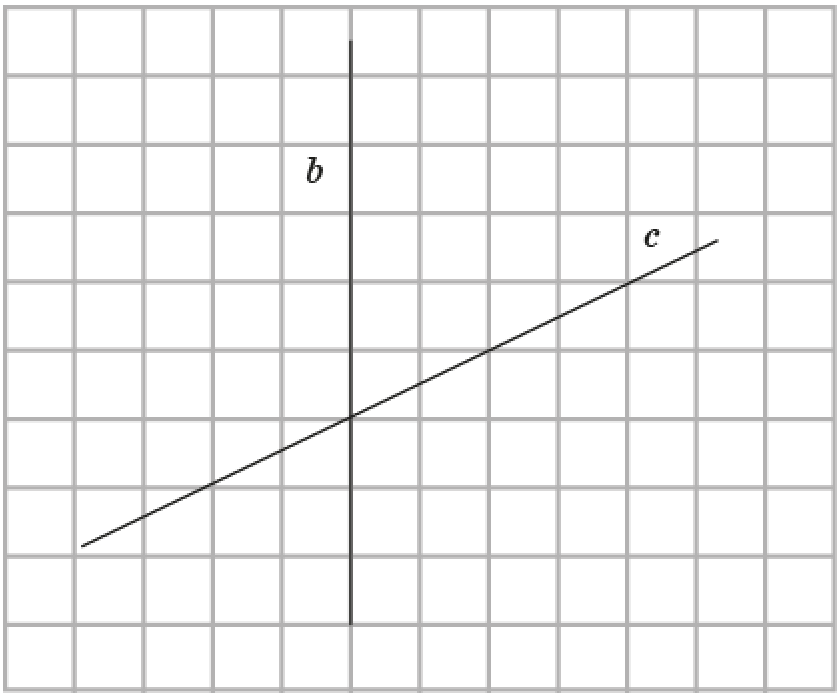

Рис. 2.10

11. Изобразите треугольник, симметричный данному относительно оси *c* (рис. 2.11).

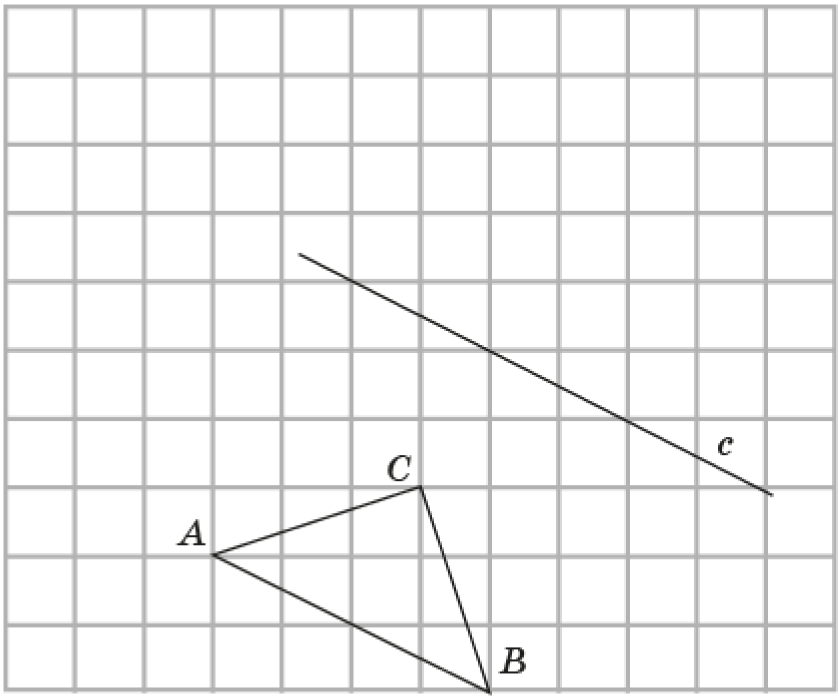

Рис. 2.11

12. Изобразите треугольник, симметричный данному относительно оси *c* (рис. 2.12).

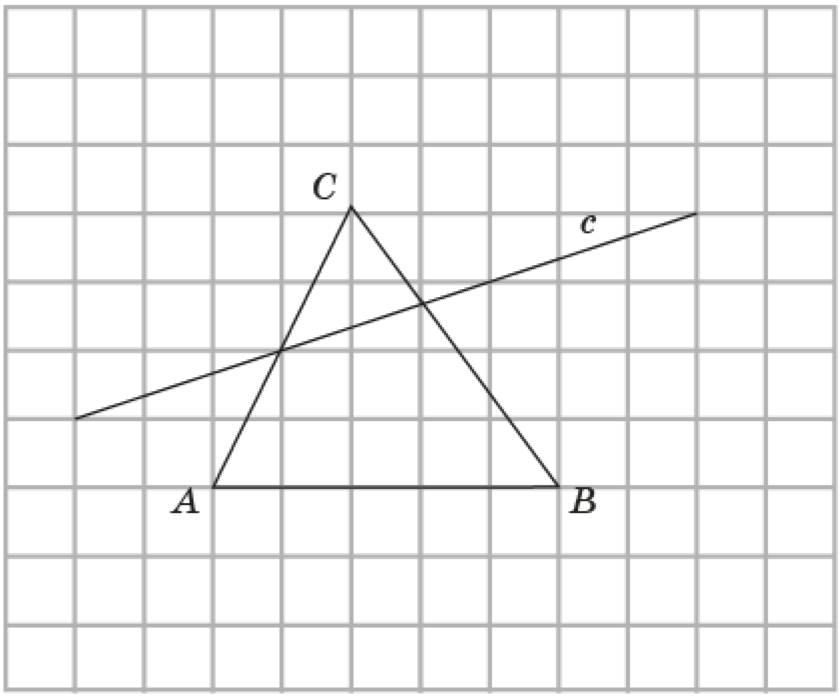

Рис. 2.12

13. Изобразите ось симметрии, при которой один из данных треугольников переходит в другой (рис. 2.13).

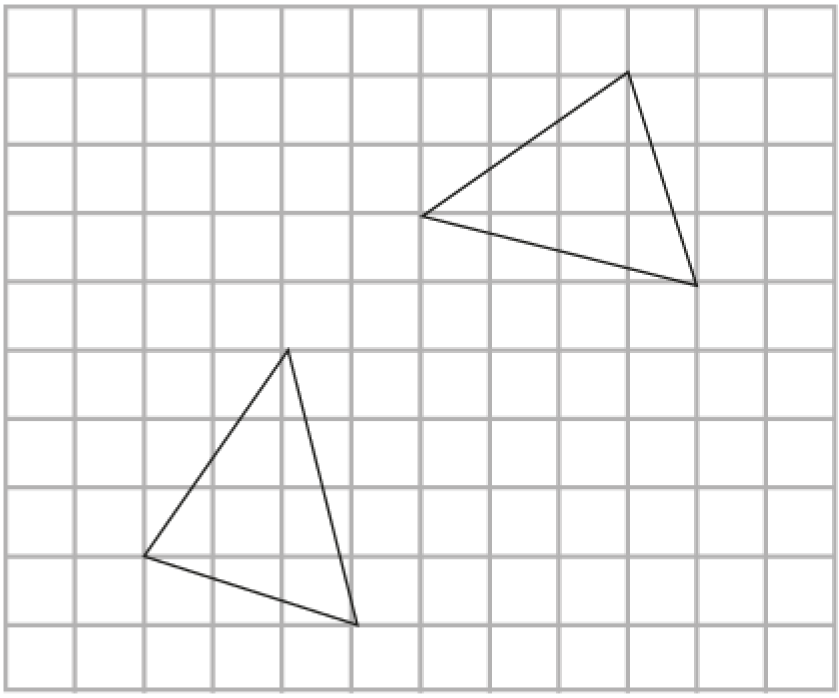

Рис. 2.13

14. Изобразите четырёхугольник, симметричный данному относительно оси *c* (рис. 2.14).

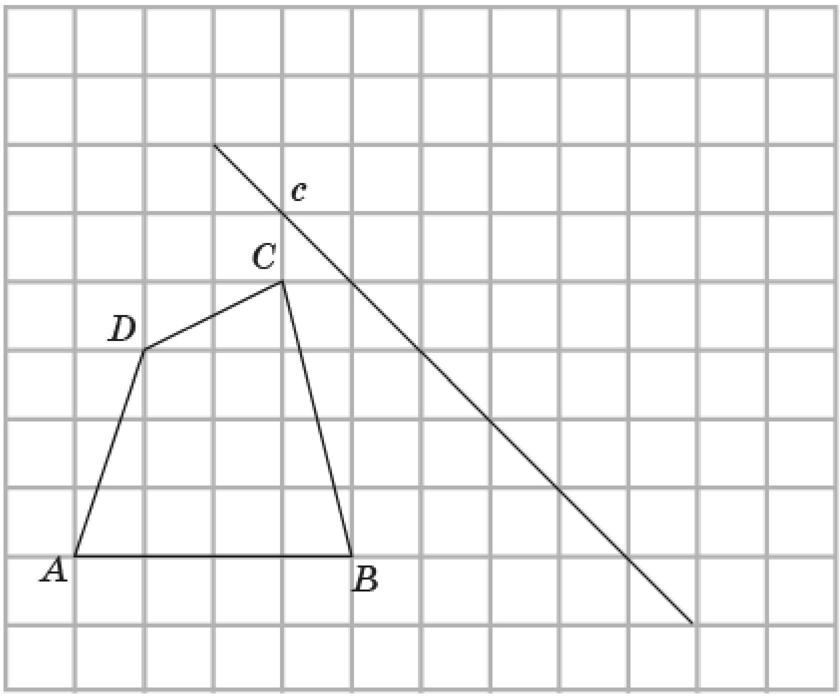

Рис. 2.14

15. Изобразите четырёхугольник, симметричный данному относительно оси c (рис. 2.15).

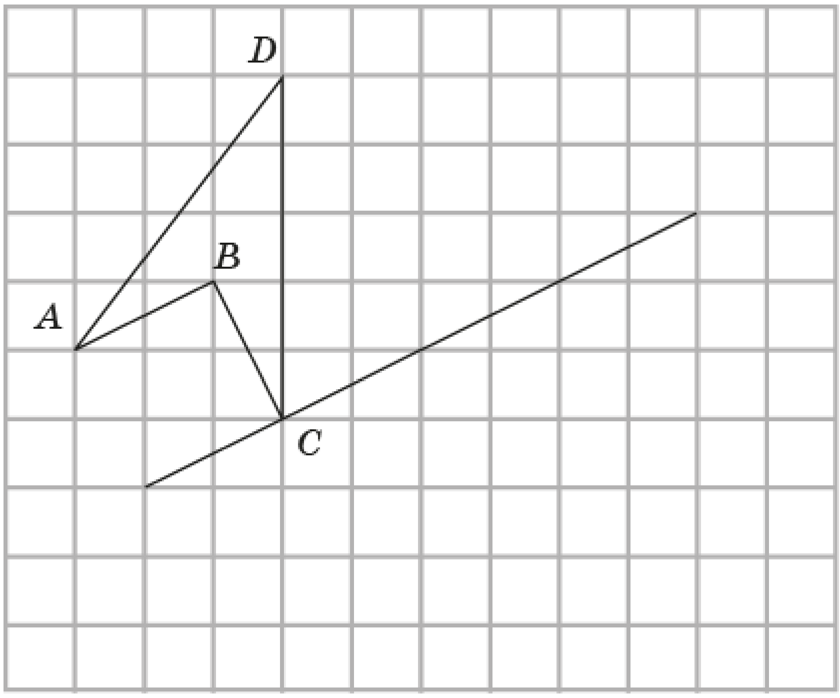

Рис. 2.15

16. Изобразите ось симметрии, при которой один из данных четырёхугольников переходит в другой (рис. 2.16).

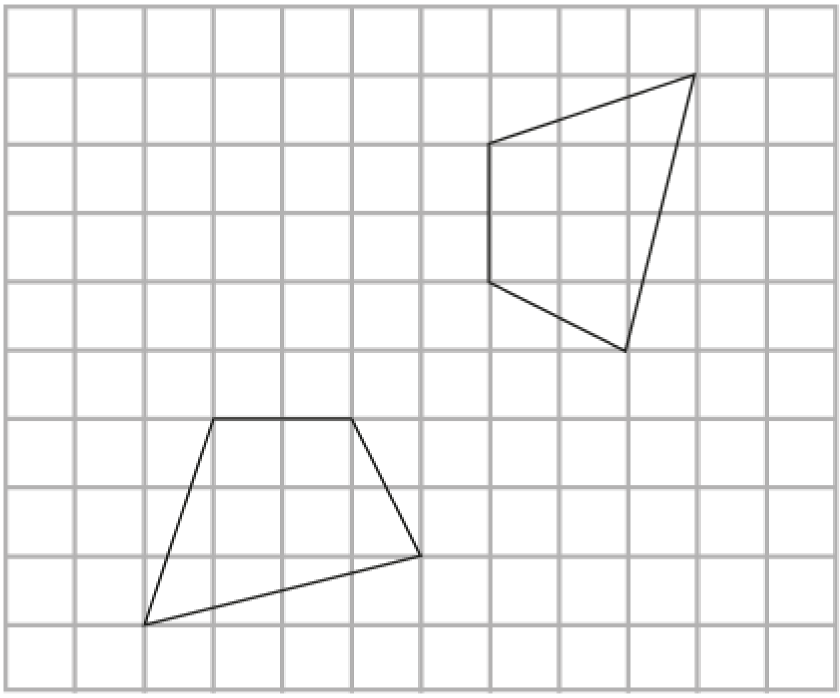

Рис. 2.16

17. Изобразите окружность, симметричную данной относительно оси c (рис. 2.17).

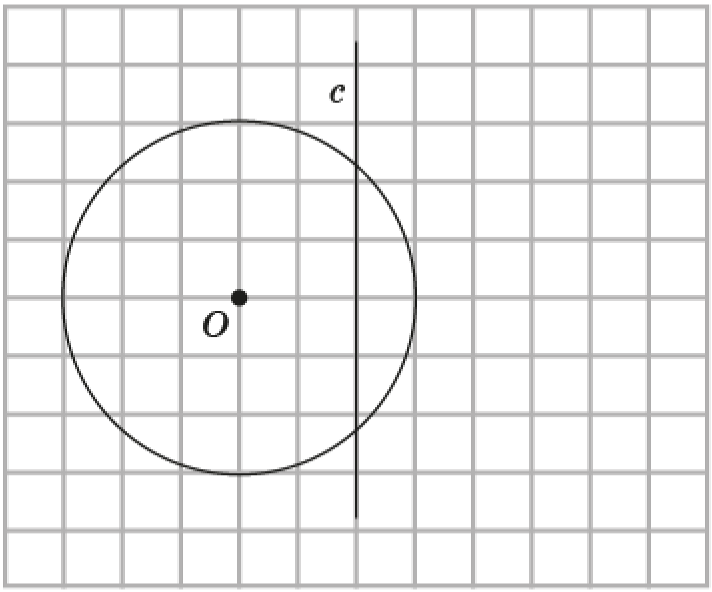

Рис. 2.17

18. Докажите, что композиция (последовательное выполнение) двух осевых симметрий относительно перпендикулярных осей a и b является центральной симметрией (рис. 2.18).

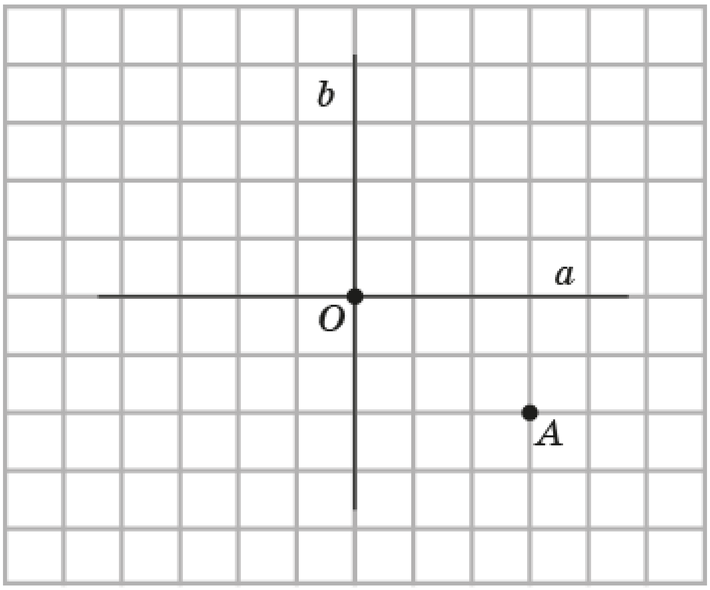

Рис. 2.18

19. Изобразите оси симметрии правильного треугольника (рис. 2.19). Сколько таких осей?

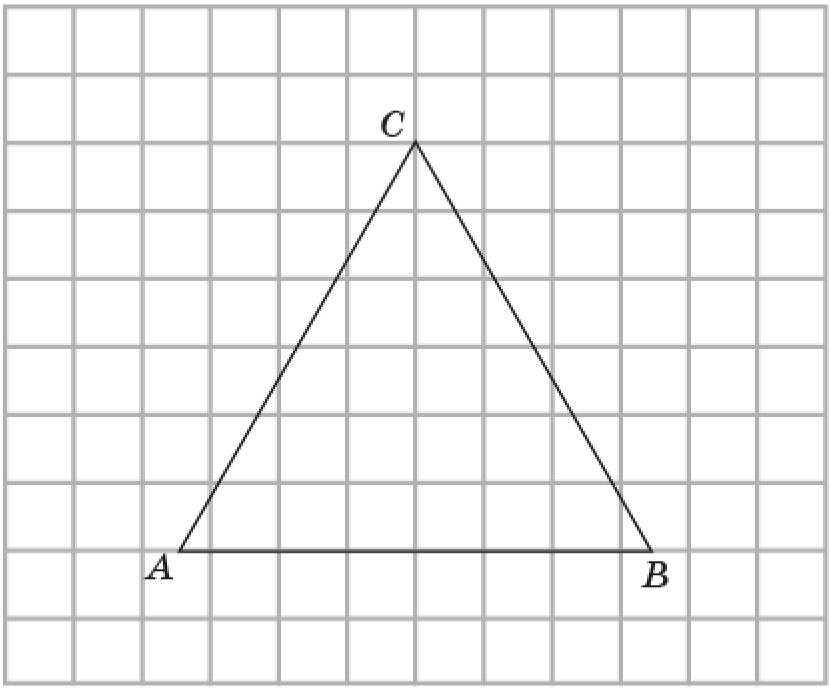

Рис. 2.19

---

20. Изобразите оси симметрии квадрата (рис. 2.20). Сколько таких осей?

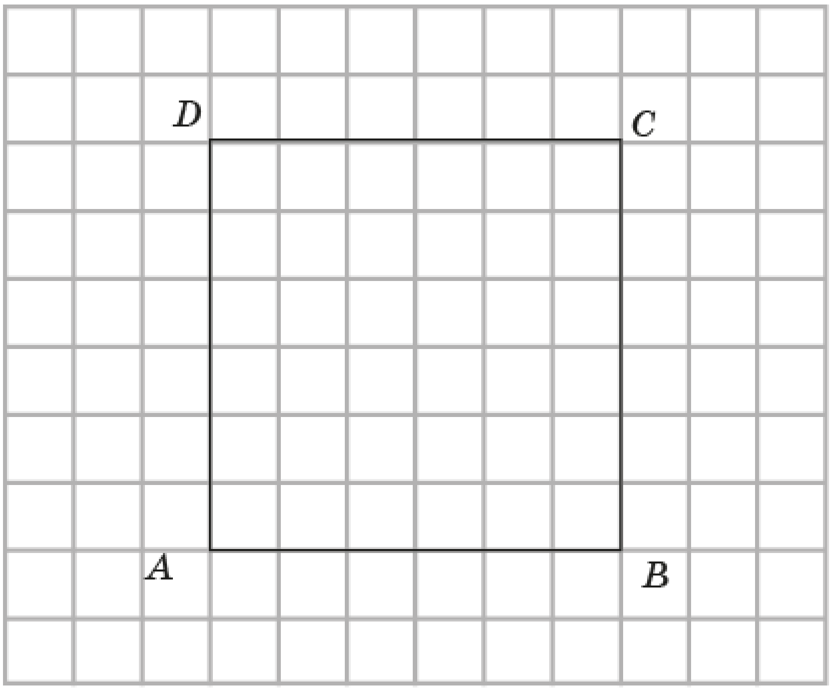

Рис. 2.20

---

21. Изобразите оси симметрии правильного пятиугольника (рис. 2.21). Сколько таких осей?

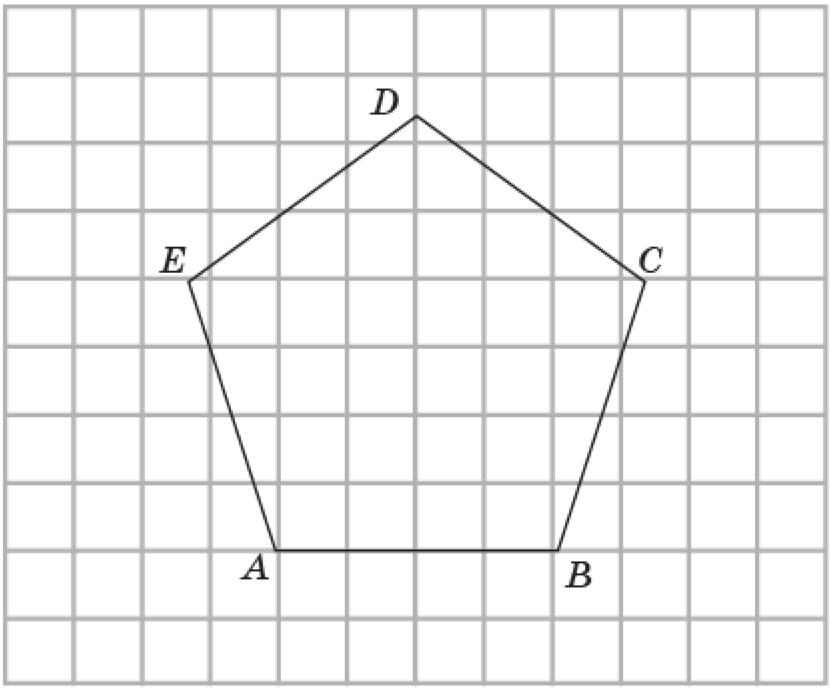

Рис. 2.21

22. Изобразите оси симметрии правильного шестиугольника (рис. 2.22). Сколько таких осей?

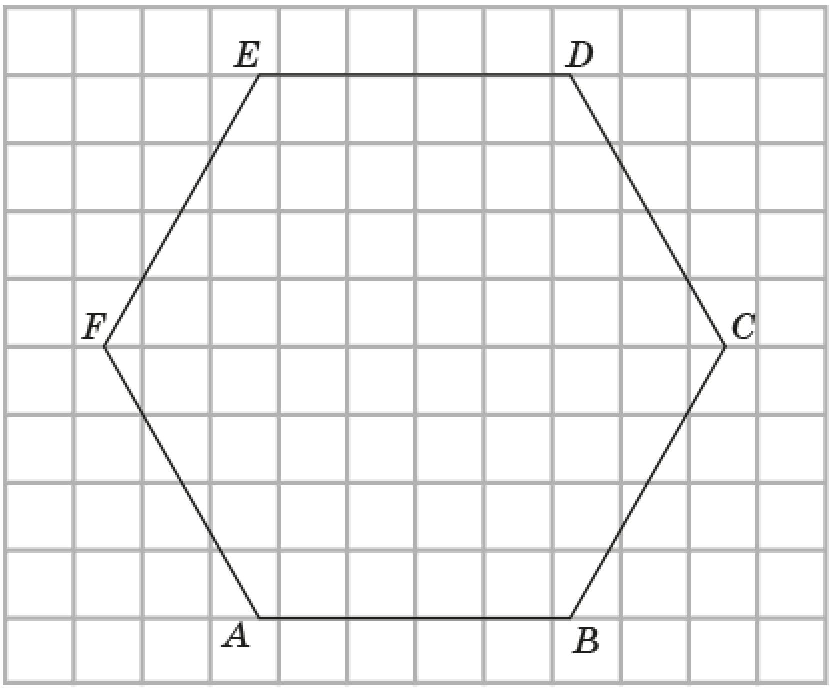

Рис. 2.22

23. Докажите, что если четырёхугольник имеет две перпендикулярные оси симметрии, проходящие через его вершины, то он является ромбом (рис. 2.23).

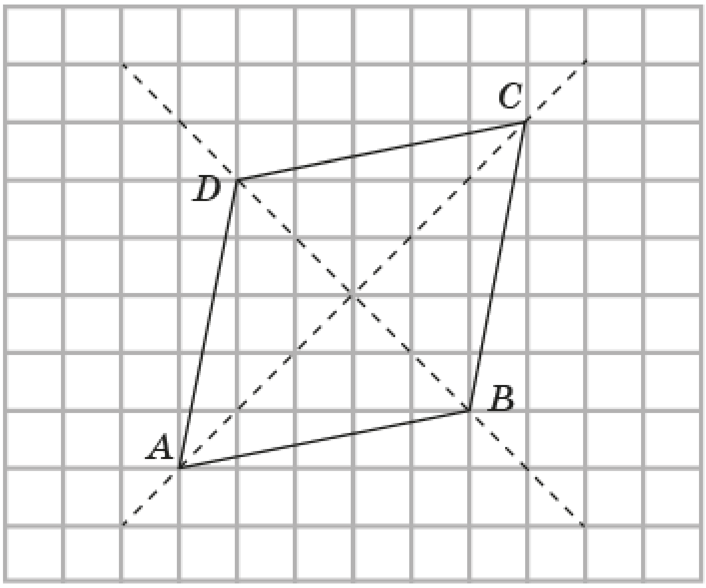

Рис. 2.23

24. Продолжите построение шестиугольника *ABCDEF*, имеющего ось симметрии *c* (рис. 2.24).

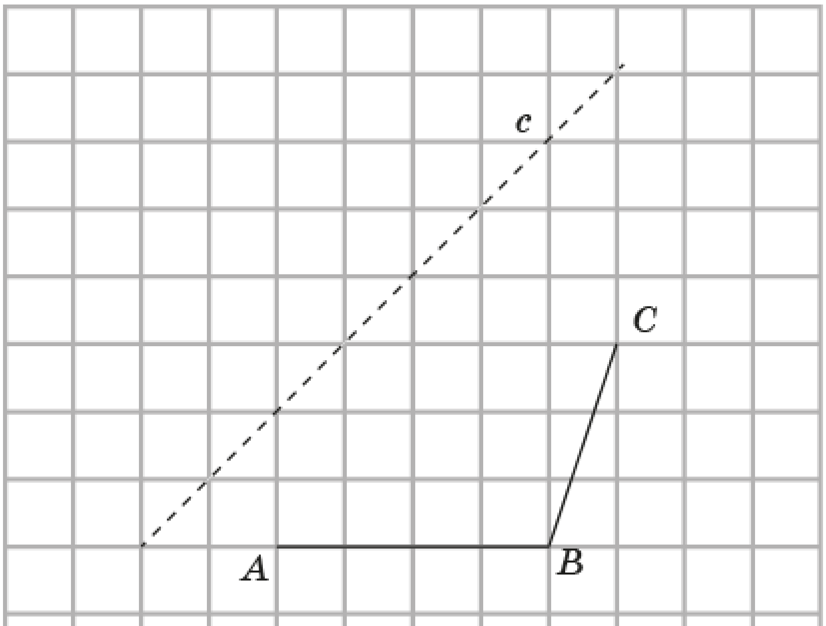

Рис. 2.24

25. Продолжите построение шестиугольника *ABCDEF*, имеющего ось симметрии *c* (рис. 2.25).

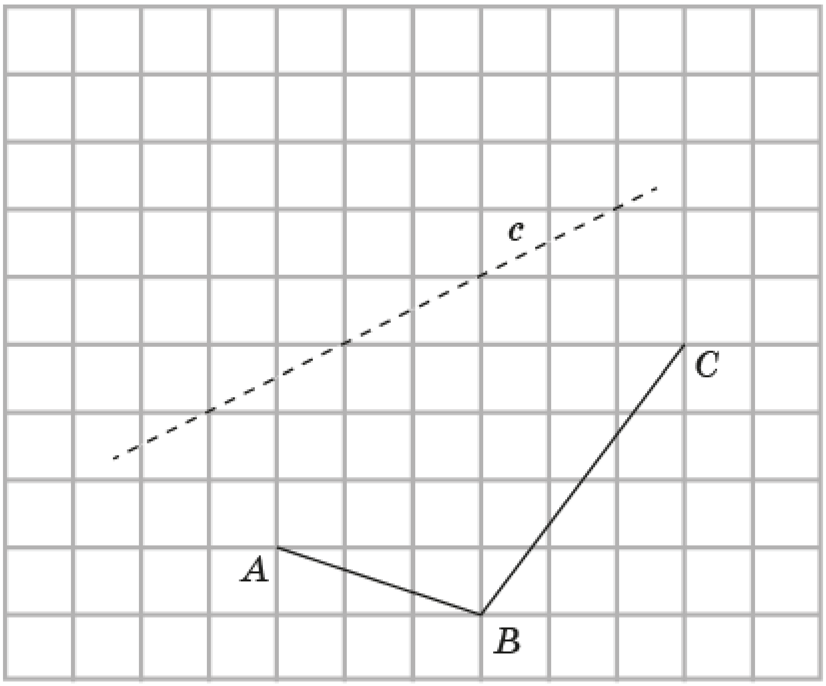

Рис. 2.25

26. Продолжите построение многоугольника, имеющего ось симметрии *c* (рис. 2.26).

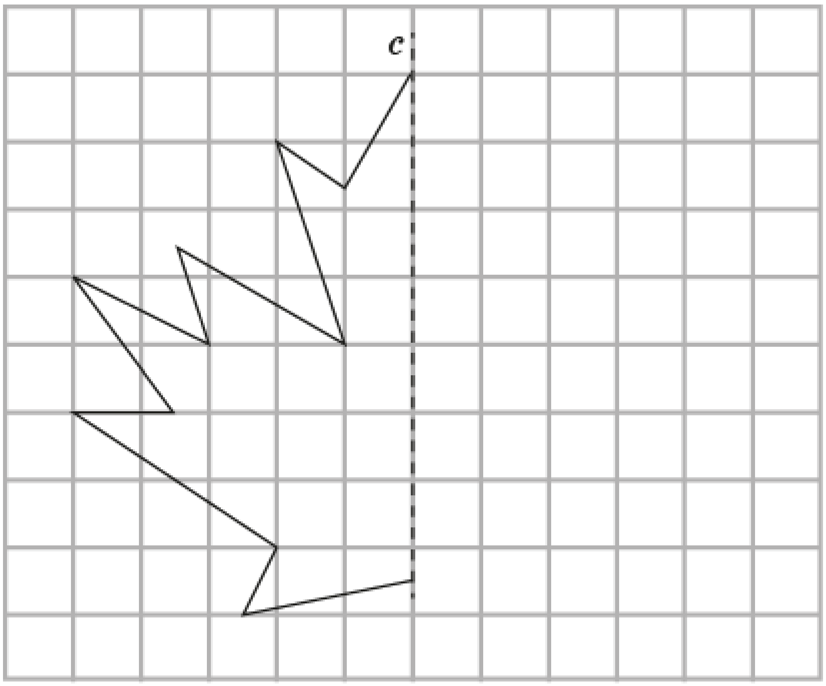

Рис. 2.26

3. Поворот. Симметрия *n*-го порядка

Поворотом вокруг точки O называется такое преобразование плоскости, при котором данная точка O остаётся на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол φ.

Центром симметрии n-го порядка фигуры F называется такая точка O, при повороте вокруг которой фигуры F на угол $\frac{360°}{n}$, фигура F совмещается сама с собой.

1. Изобразите точку, полученную поворотом точки A вокруг точки O на угол 90°: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке.

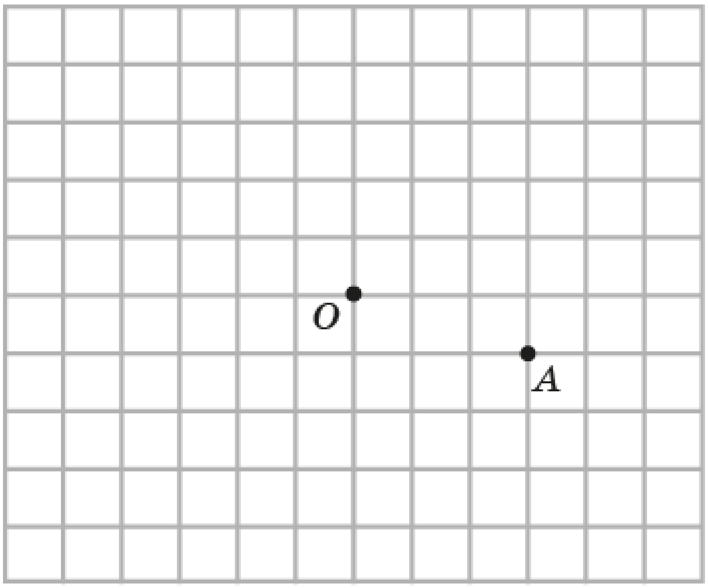

Рис. 3.1

2. Изобразите точку, полученную поворотом точки A вокруг точки O на угол: а) 45°; б) 60° против часовой стрелки; в) 120°; г) 135° по часовой стрелке.

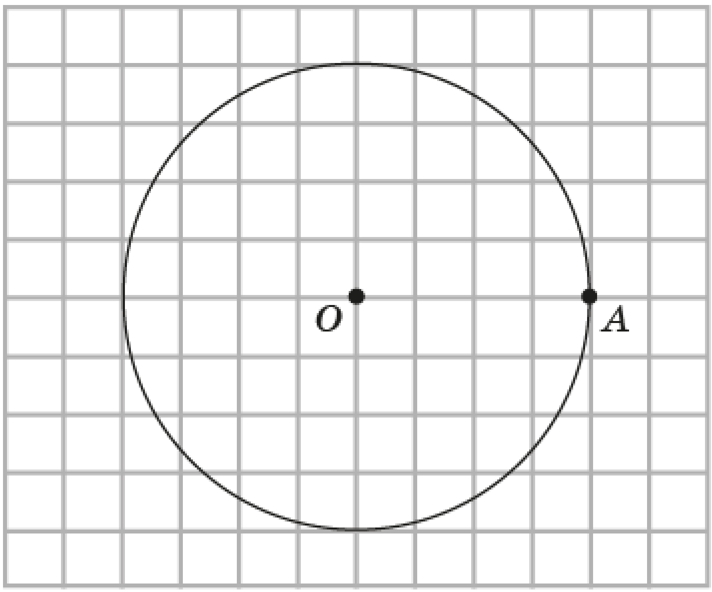

Рис. 3.2

3. Точка B получена поворотом точки A на угол 90° против часовой стрелки (рис. 3.3). Укажите центр поворота.

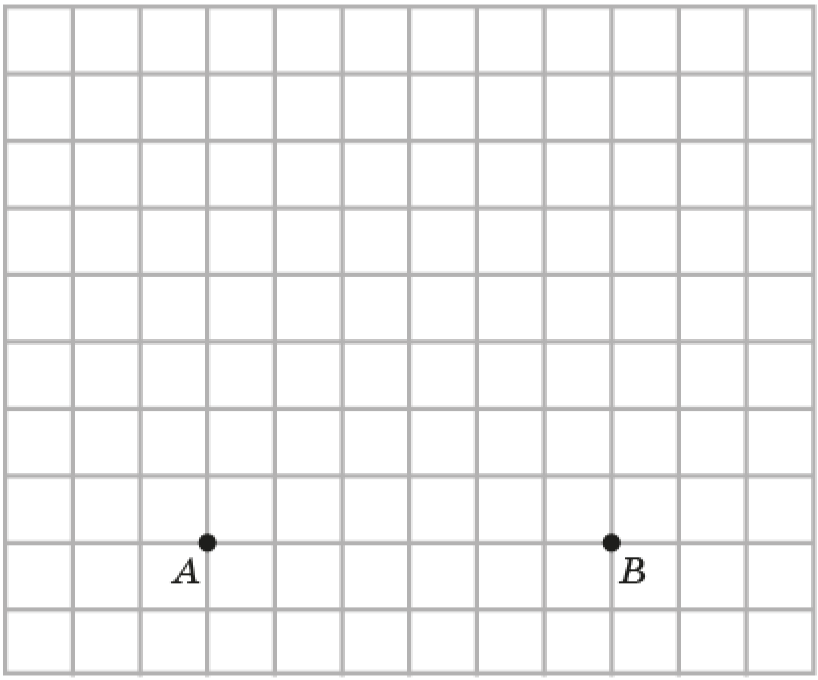

Рис. 3.3

4. Точка B получена поворотом точки A на угол 90° по часовой стрелке (рис. 3.4). Укажите центр поворота.

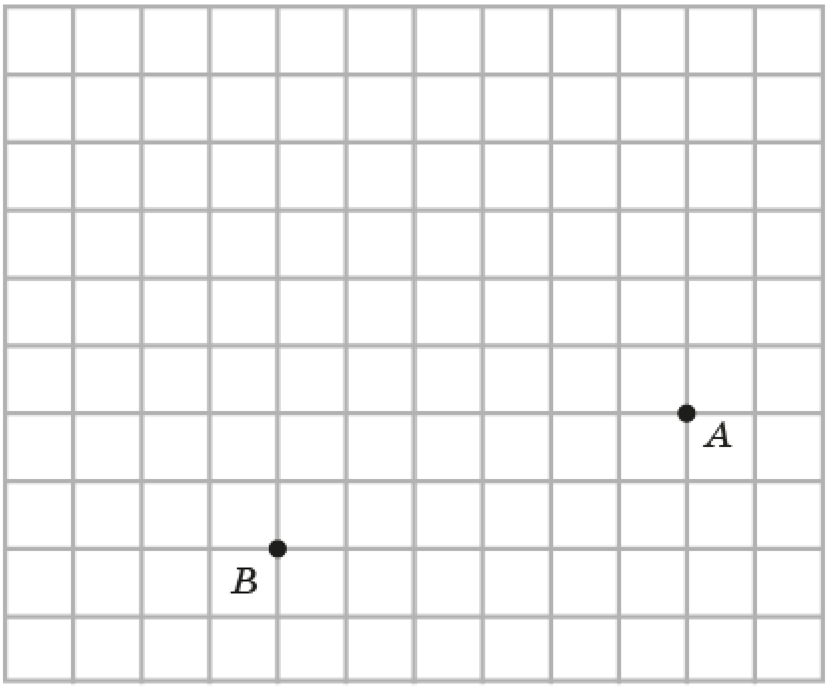

Рис. 3.4

5. Изобразите геометрическое место центров поворотов, при которых точка A переходит в точку B (рис. 3.5).

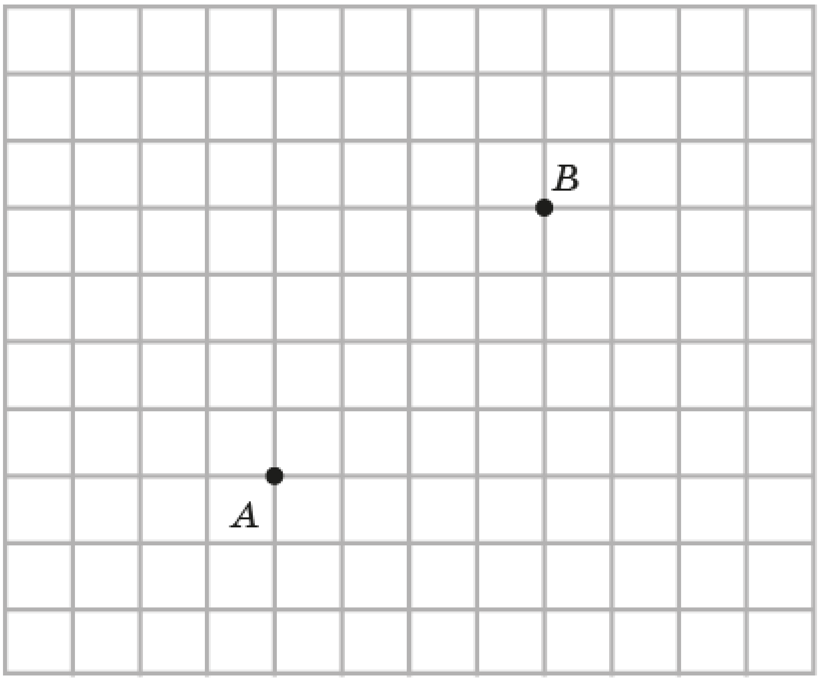

Рис. 3.5

6. Докажите, что поворот сохраняет расстояние между точками (рис. 3.6).

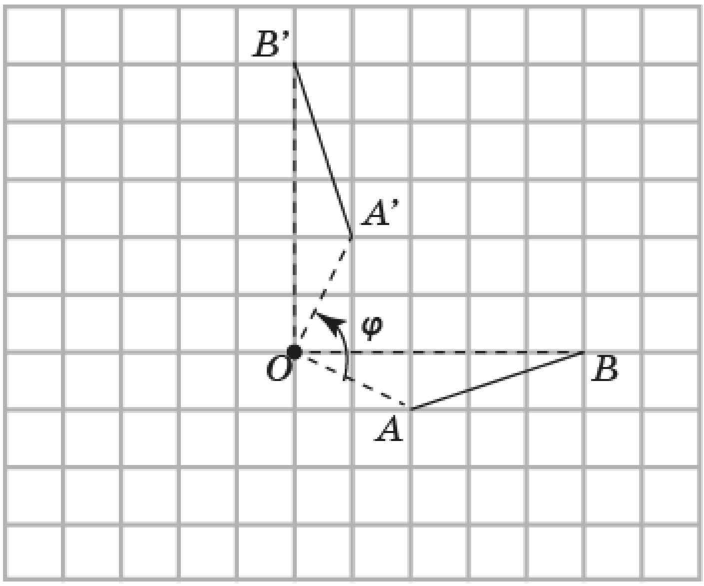

Рис. 3.6

7. Изобразите отрезок, полученный поворотом отрезка AB вокруг точки O на угол 90° по часовой стрелке (рис. 3.7).

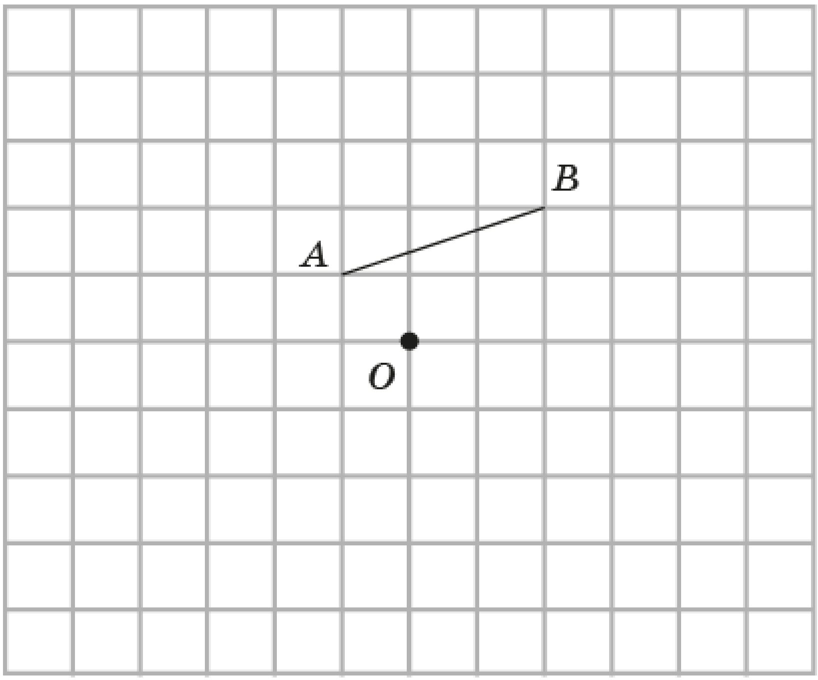

Рис. 3.7

8. Отрезок CD получен поворотом по часовой стрелке отрезка AB (рис. 3.8). Укажите центр поворота и угол поворота.

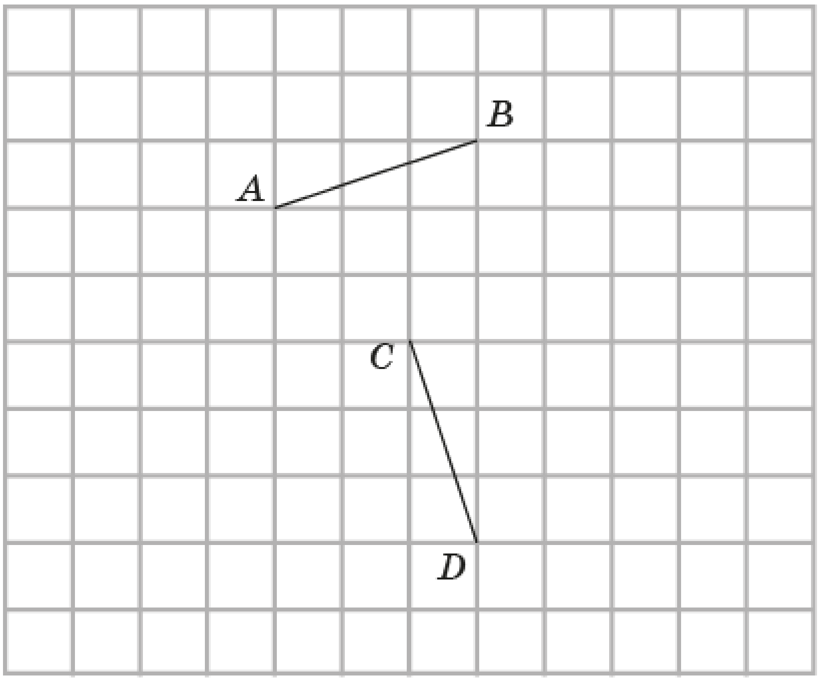

Рис. 3.8

9. Изобразите прямую, полученную поворотом прямой *a* вокруг точки *O* на угол 90° против часовой стрелки (рис. 3.9).

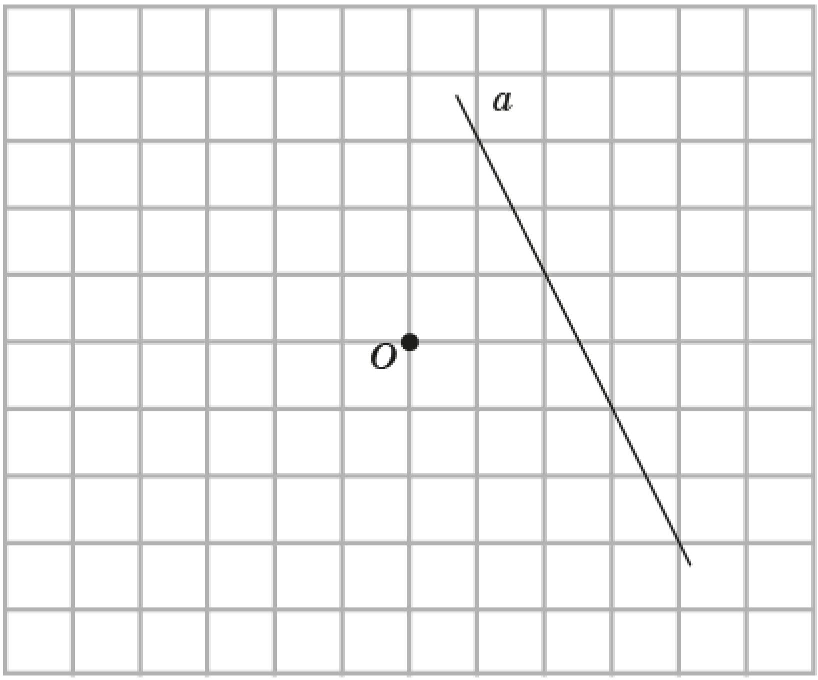

Рис. 3.9

10. Изобразите прямую, полученную поворотом прямой *a* вокруг точки *O* на угол 90° п часовой стрелке (рис. 3.10).

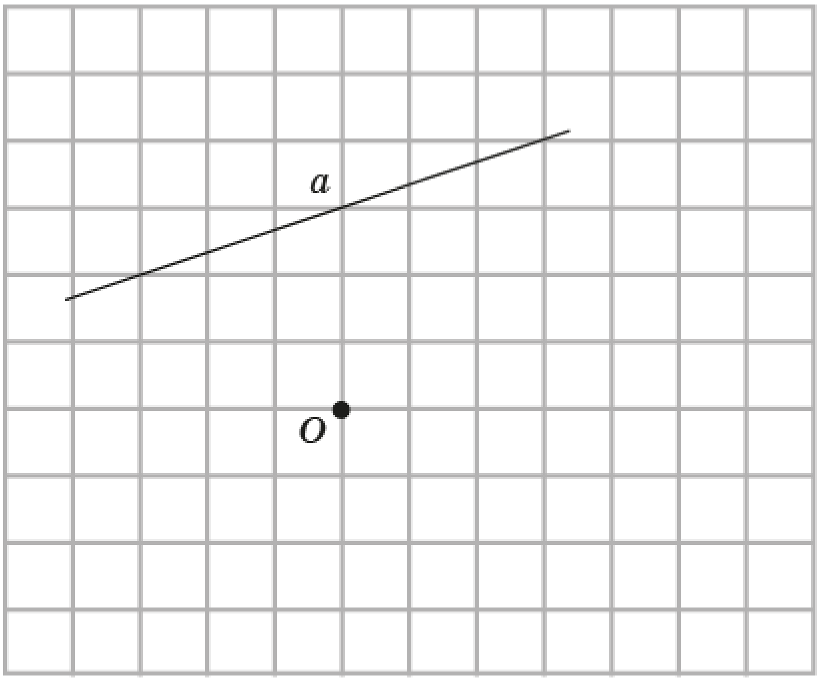

Рис. 3.10

11. Изобразите треугольник, полученный из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на угол 90° против часовой стрелки (рис. 3.11).

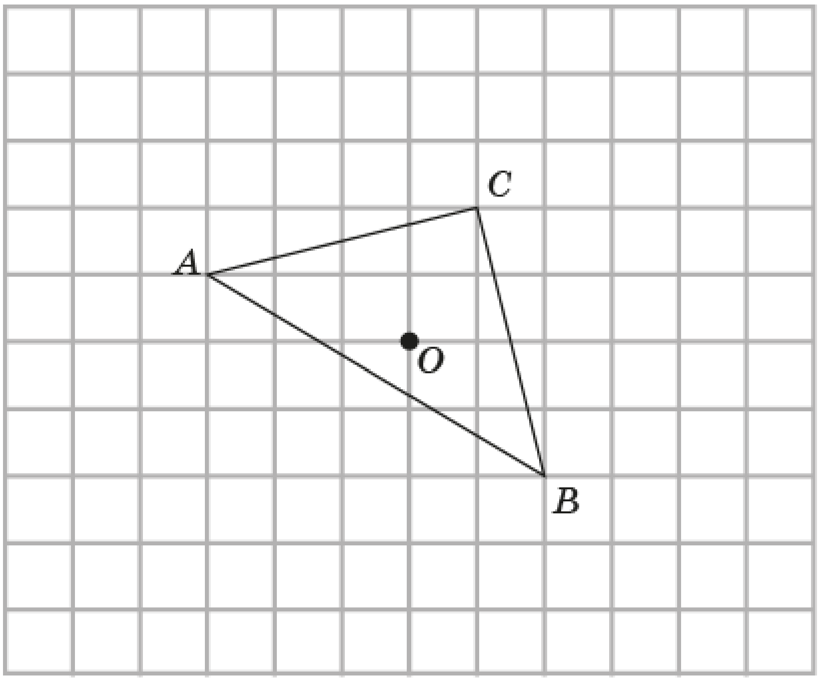

Рис. 3.11

12. Треугольник DEF получен поворотом по часовой стрелке треугольника ABC (рис. 3.12). Укажите центр поворота. Найдите угол поворота.

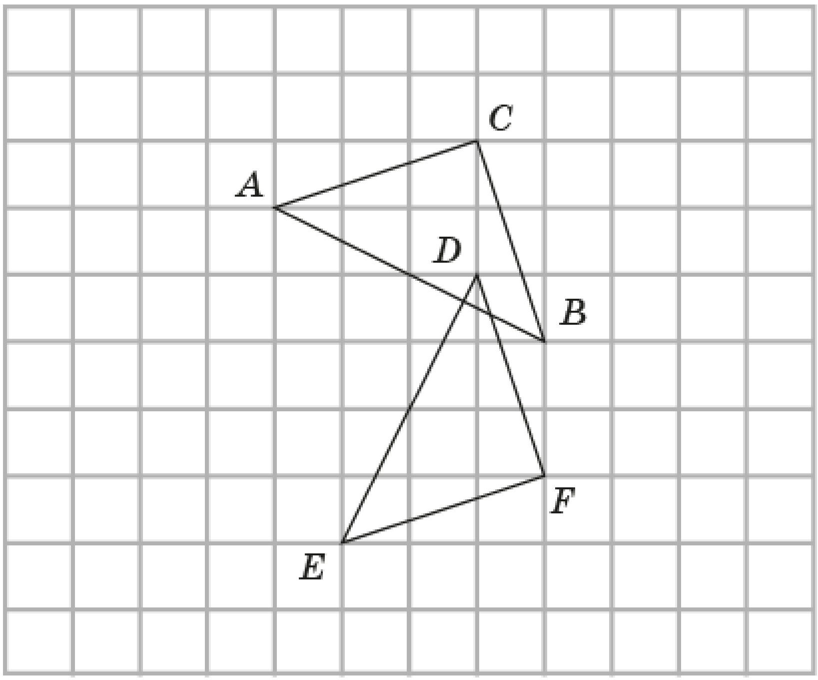

Рис. 3.12

13. Центром симметрии какого порядка для правильного треугольника является центр окружности, описанной около этого треугольника (рис. 3.13)?

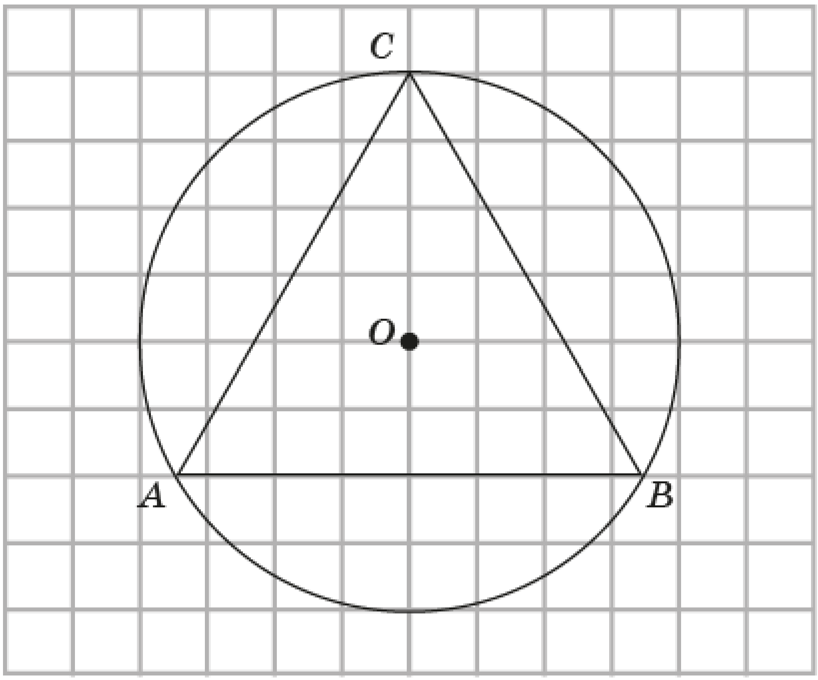

Рис. 3.13

---

14. Центром симметрии какого порядка для квадрата является центр окружности, описанной около этого квадрата (рис. 3.14)?

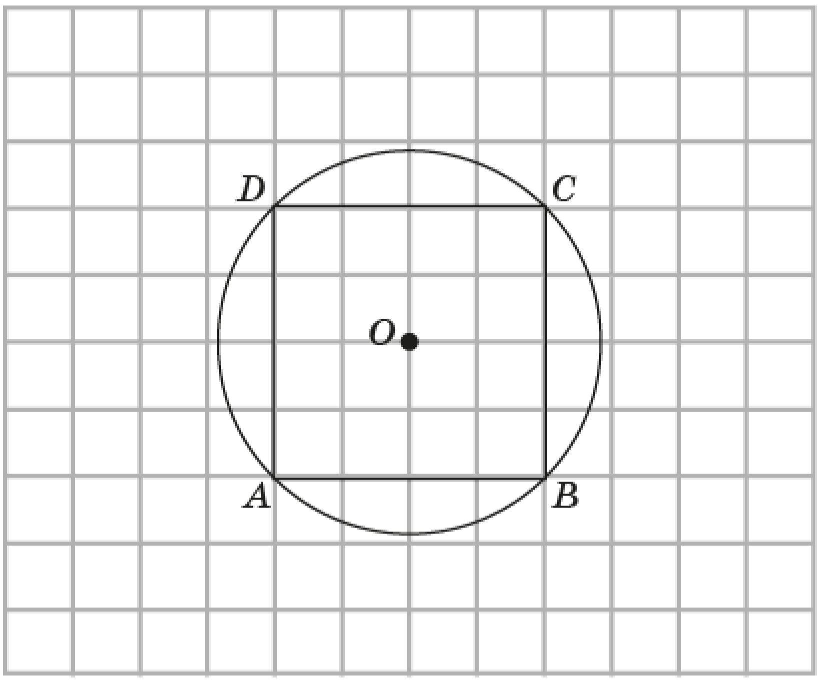

Рис. 3.14

---

15. Центром симметрии какого порядка для правильного пятиугольника является центр окружности, описанной около этого пятиугольника (рис. 3.15)?

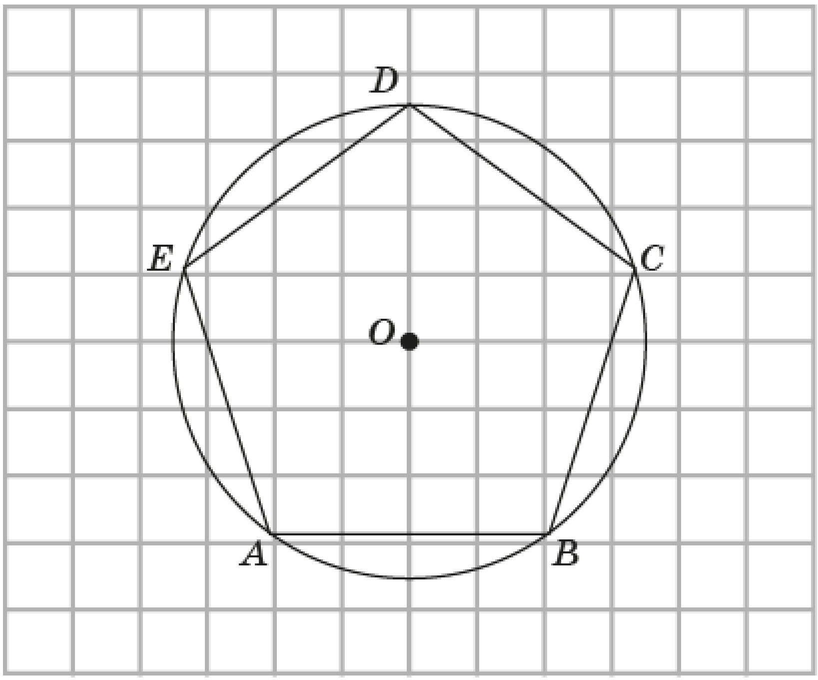

Рис. 3.15

---

16. Центром симметрии какого порядка для правильного шестиугольника является центр окружности, описанной около этого шестиугольника (рис. 3.16)?

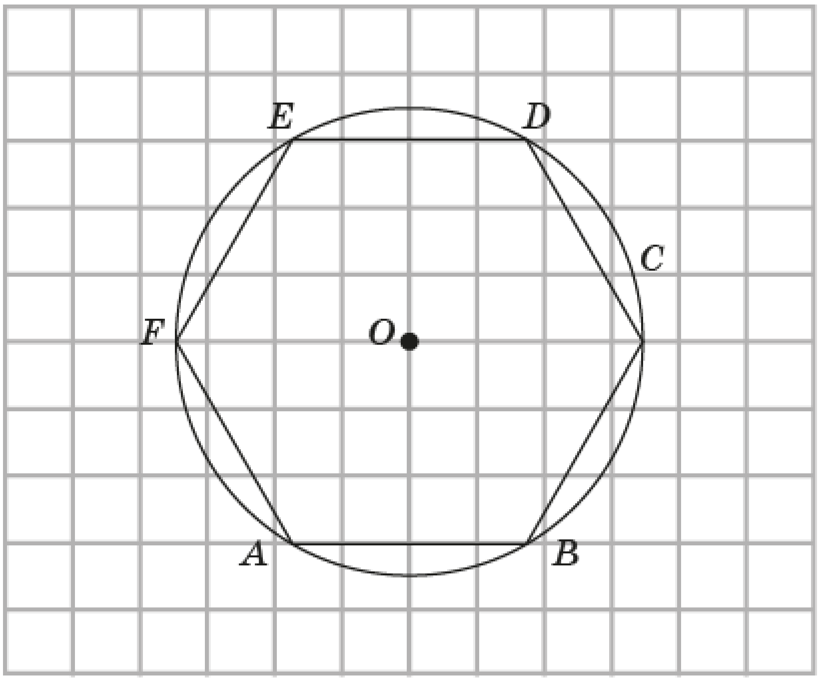

Рис. 3.16

---

17. Поверните правильный треугольник ABC вокруг центра описанной окружности на угол 60° против часовой стрелки (рис. 3.17). Каким многоугольником будет общая часть (пересечение) исходного треугольника и повёрнутого?

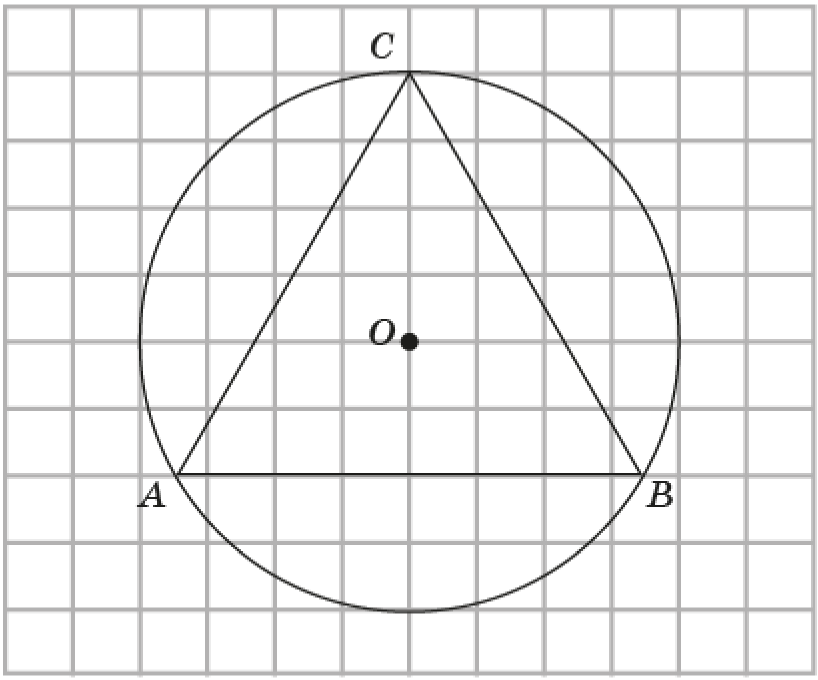

Рис. 3.17

18. Поверните квадрат $ABCD$ вокруг центра описанной окружности на угол 45° по часовой стрелке (рис. 3.18). Каким многоугольником будет общая часть (пересечение) исходного квадрата и повёрнутого?

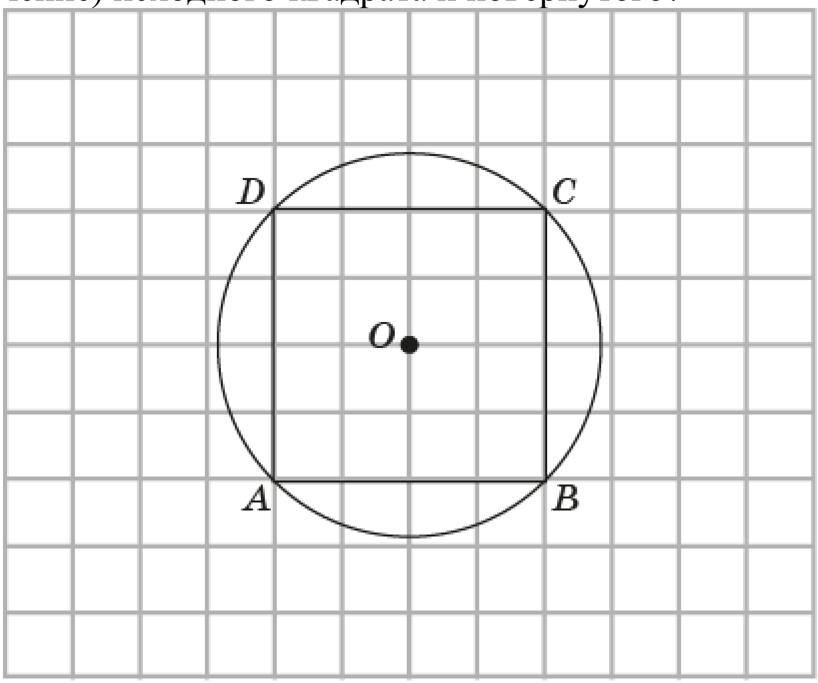

Рис. 3.18

19. Поверните правильный пятиугольник *ABCDE* вокруг центра описанной окружности на угол 36° против часовой стрелки (рис. 3.19). Каким многоугольником будет общая часть (пересечение) исходного пятиугольника и повёрнутого?

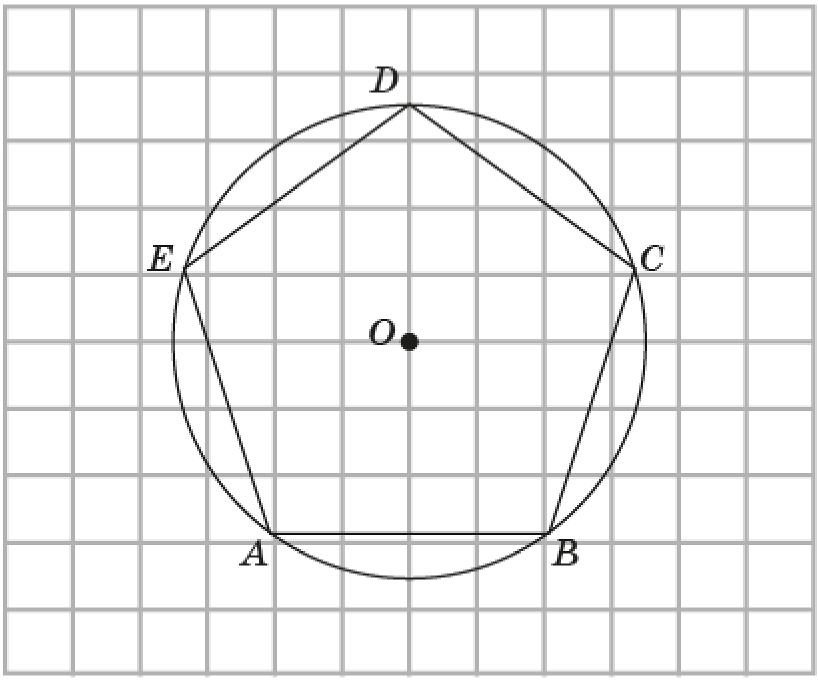

Рис. 3.19

20. Поверните правильный шестиугольник *ABCDEF* вокруг центра описанной окружности на угол 30° по часовой стрелке (рис. 3.20). Каким многоугольником будет общая часть (пересечение) исходного шестиугольника и повёрнутого?

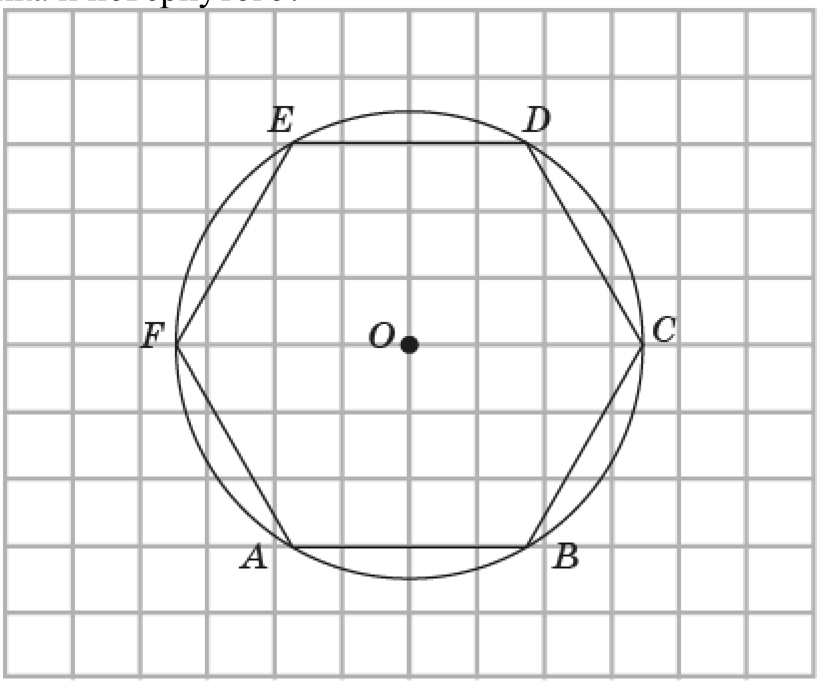

Рис. 3.20

4. Параллельный перенос. Движение

Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется такое преобразование плоскости, при котором точкам A сопоставляются точки A' так, что векторы $\overrightarrow{AA'}$ равны заданному вектору $\vec{a}$.

1. Докажите, что параллельный перенос сохраняет расстояние между точками (рис. 4.1).

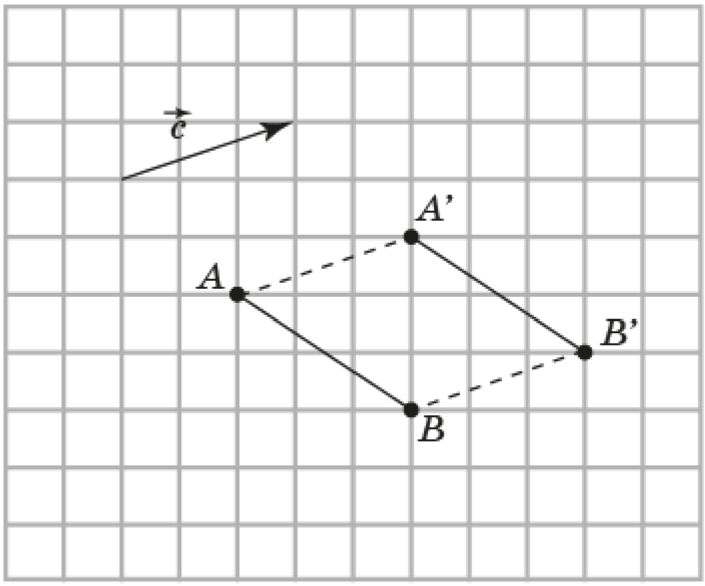

Рис. 4.1

____

____

____

2. Постройте параллельный перенос четырёхугольника $ABCD$ на вектор $\vec{e}$ (рис. 4.2).

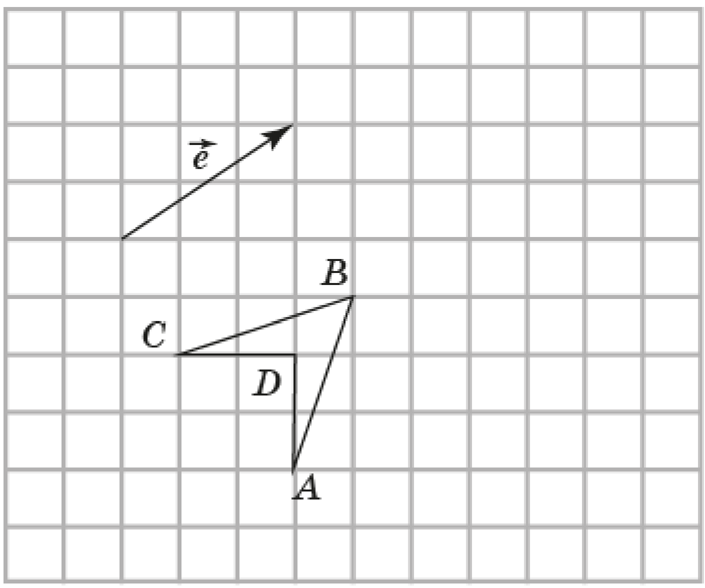

Рис. 4.2

3. Докажите, что параллельным переносом прямой на вектор, направление которого не совпадает с направлением этой прямой, является прямая, параллельная данной (рис. 4.3).

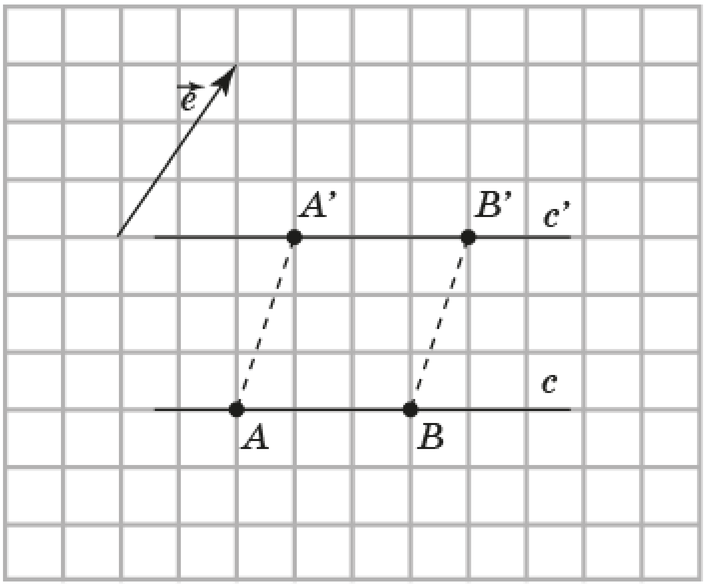

Рис. 4.3

4. Докажите, что композиция (последовательное выполнение) двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом (рис. 4.4). Укажите соответствующий вектор.

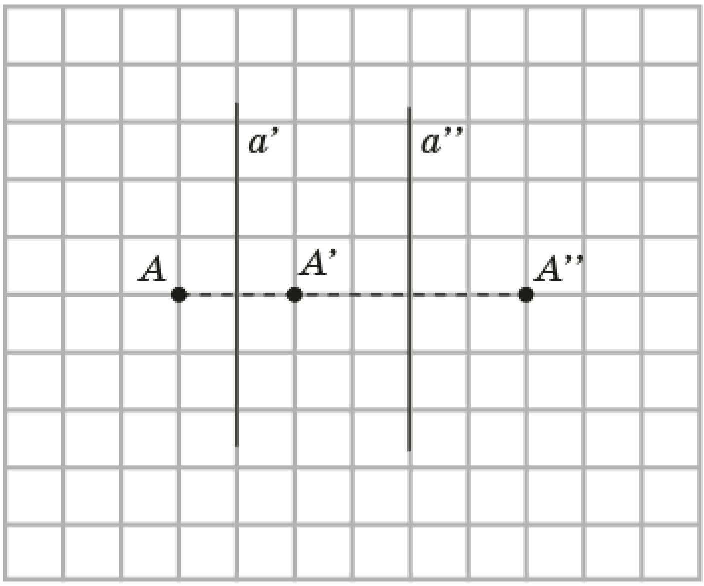

Рис. 4.4

Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками. Примерами движений являются: центральная и осевая симметрии, поворот, параллельный перенос. Примем без доказательства, что любое движение плоскости может быть получено как композиция перечисленных движений.

5. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворотом (рис. 4.5). Укажите угол поворота.

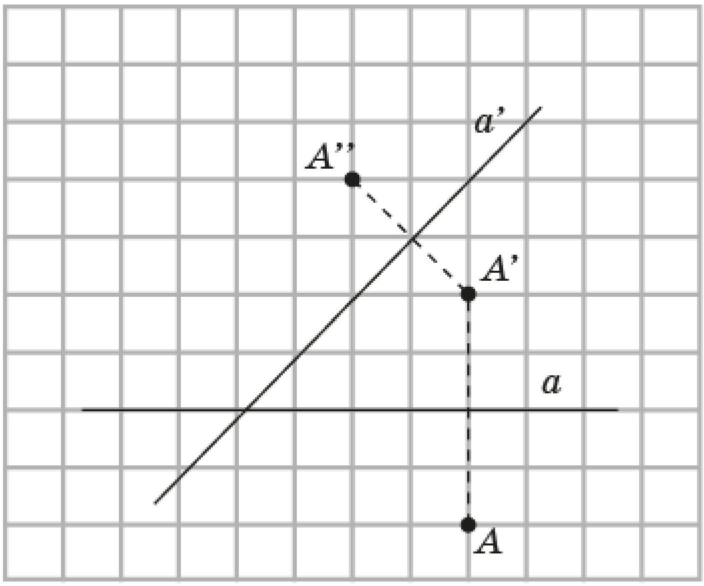

Рис. 4.5

6. Для двух данных прямых (рис. 4.6) укажите какое-нибудь движение, переводящее одну из них в другую.

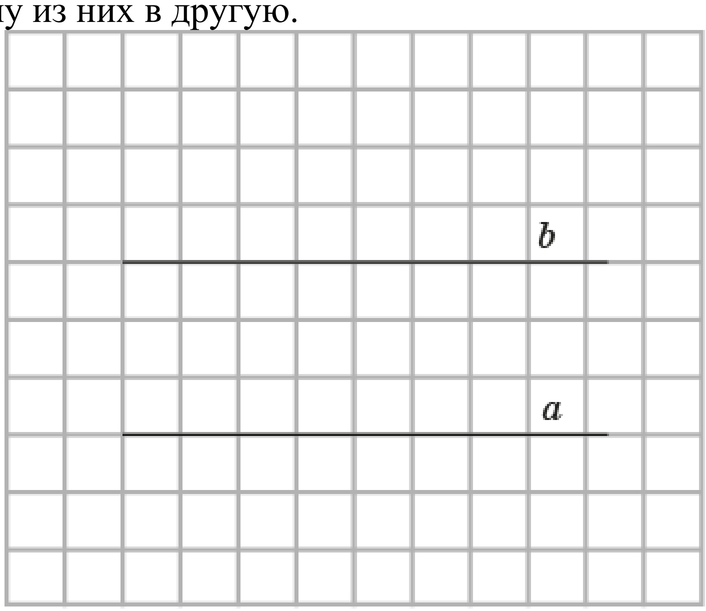

Рис. 4.6

7. Для двух данных прямых (рис. 4.7) укажите какое-нибудь движение, переводящее одну из них в другую.

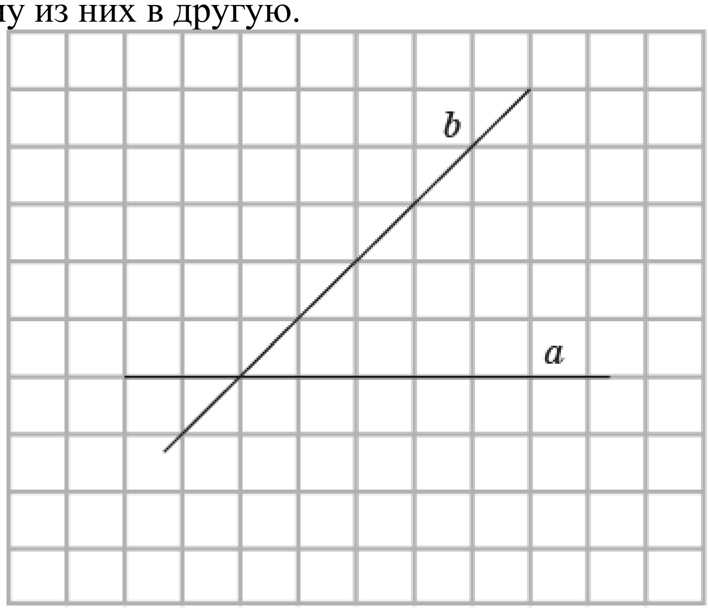

Рис. 4.7

---

8. Для двух данных равных отрезков (рис. 4.8) укажите какое-нибудь движение, переводящее один из них в другой.

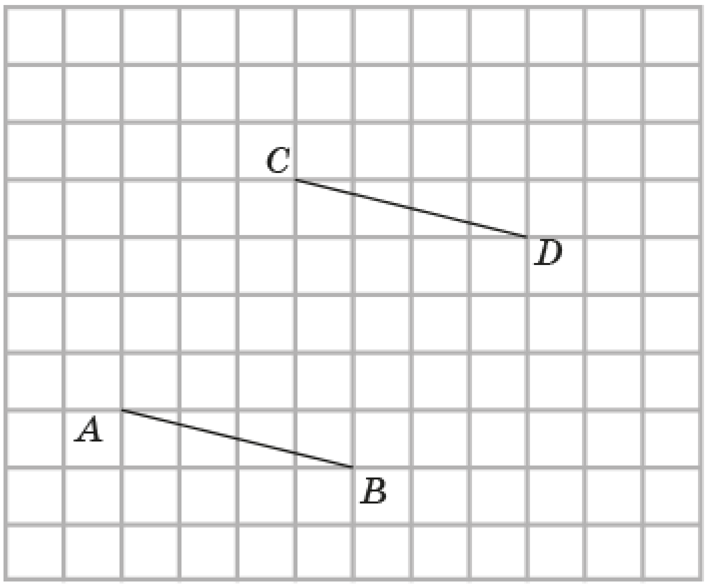

Рис. 4.8

---

9. Для двух данных равных отрезков (рис. 4.9) укажите какое-нибудь движение, переводящее один из них в другой.

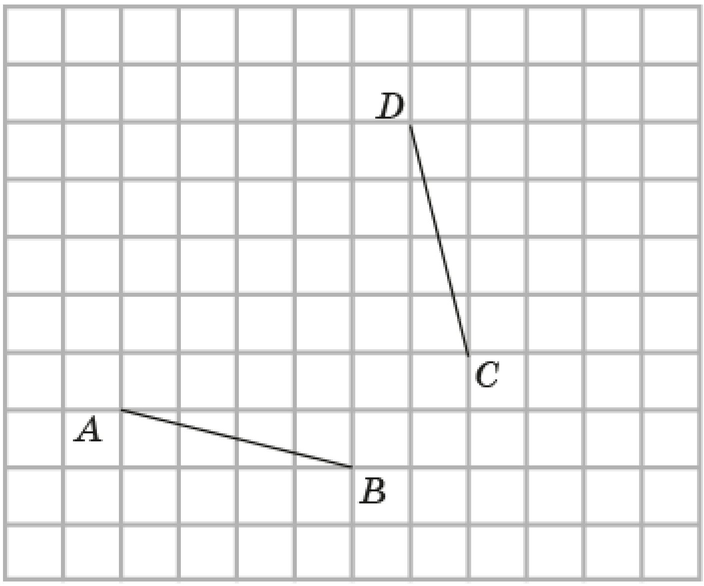

Рис. 4.9

10. Для двух данных равных углов (рис. 4.10) укажите какое-нибудь движение, переводящее один из них в другой.

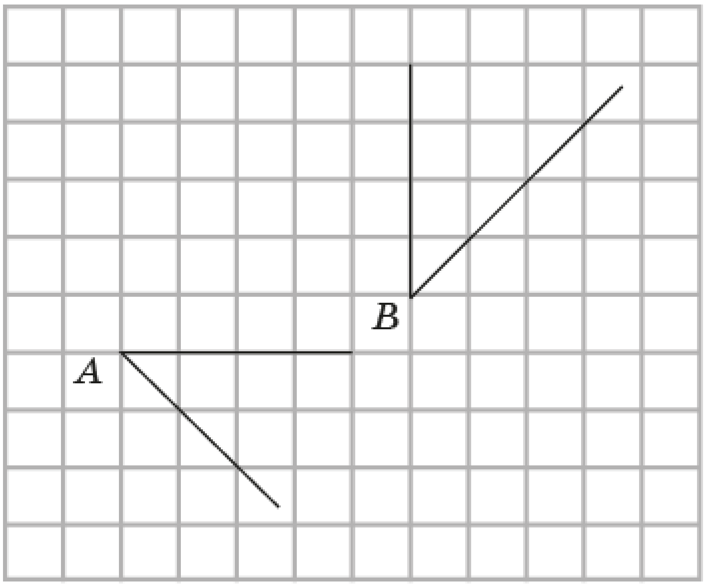

Рис. 4.10

11. Для двух данных равных треугольников (рис. 4.11) укажите какое-нибудь движение, переводящее один из них в другой.

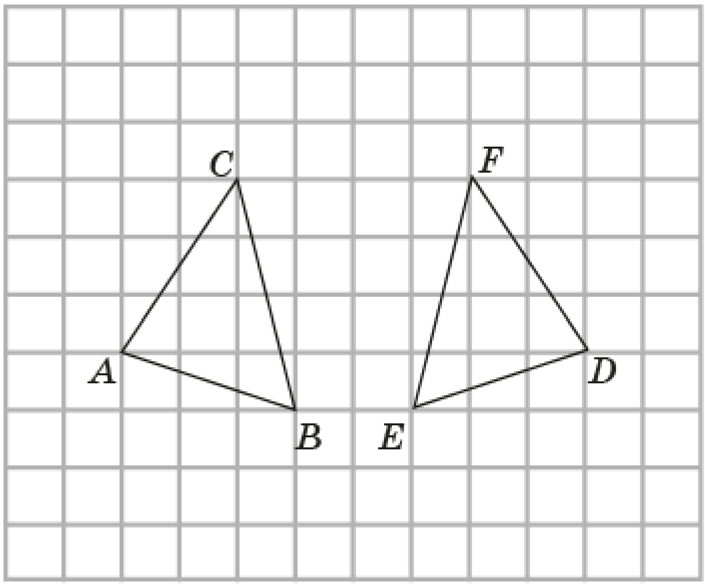

Рис. 4.11

12. Для двух данных равных треугольников (рис. 4.12) укажите какое-нибудь движение, переводящее один из них в другой.

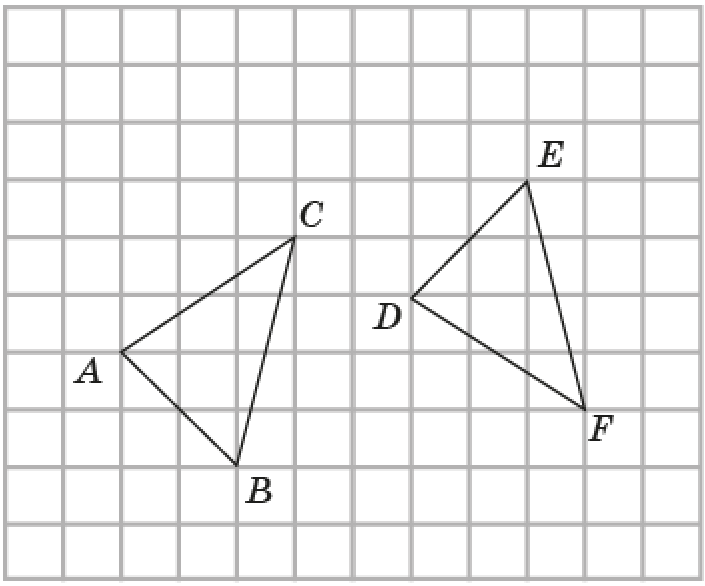

Рис. 4.12

Паркетом из многоугольников, или просто паркетом, будем называть такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

13. Составьте паркет из треугольников, равных данному (рис. 4.13). Раскрасьте их в разные цвета.

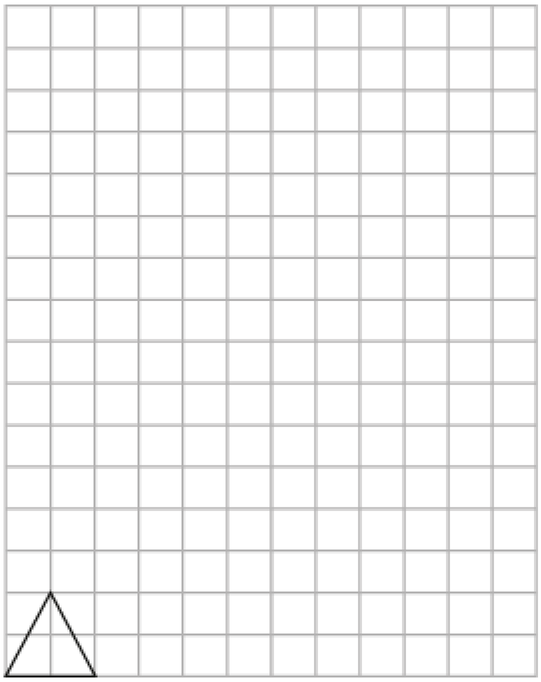

Рис. 4.13

14. Составьте паркет из четырёхугольников, равных данному (рис. 4.14). Раскрасьте их в разные цвета.

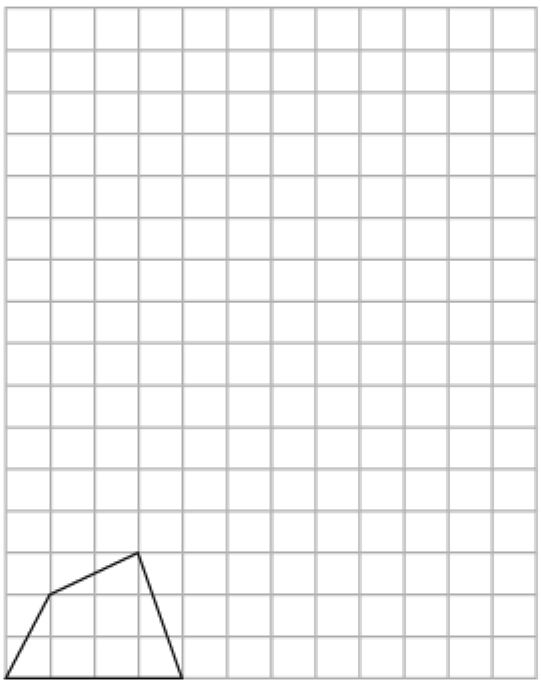

Рис. 4.14

15. Составьте паркет из четырёхугольников, равных данному (рис. 4.15). Раскрасьте их в разные цвета.

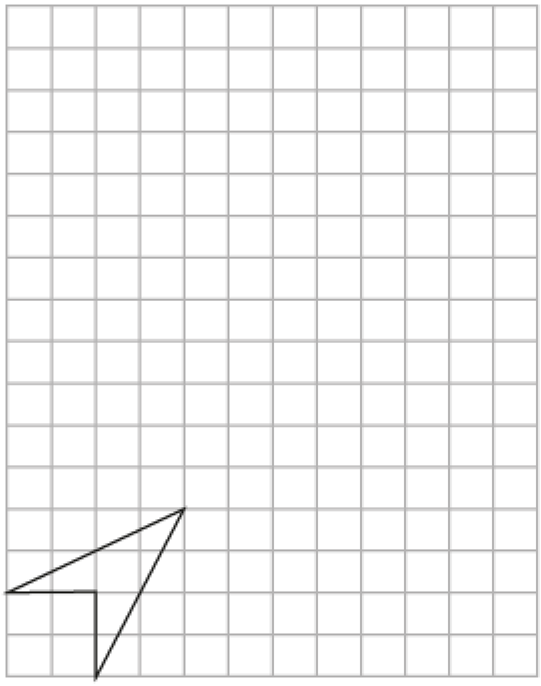

Рис. 4.15

16. Составьте паркет из пятиугольников, равных данному (рис. 4.16). Раскрасьте их в разные цвета.

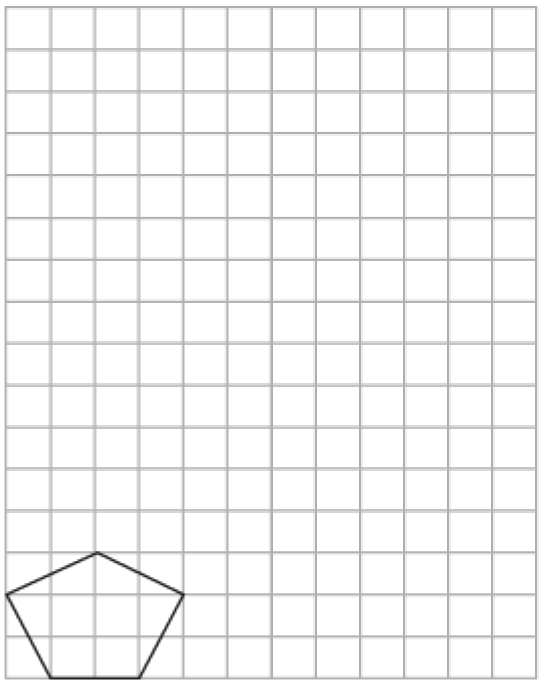

Рис. 4.16

17. Составьте паркет из шестиугольников, равных данному (рис. 4.17). Раскрасьте их в разные цвета.

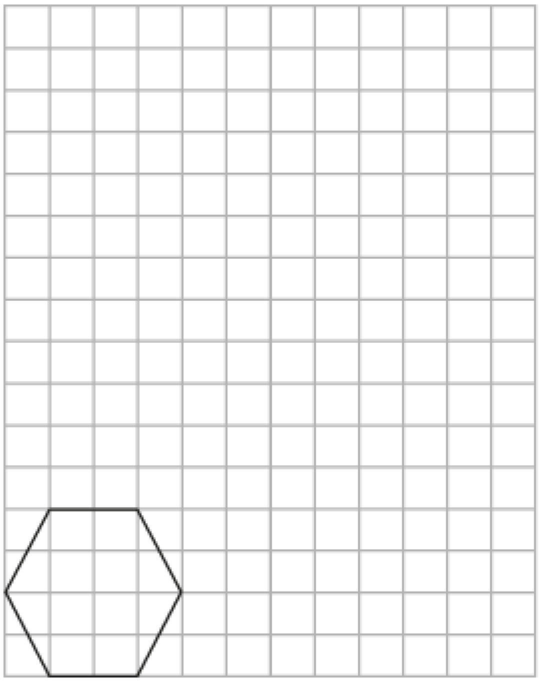

Рис. 4.17

18. Составьте паркет из многоугольников, равных данному (рис. 4.18). Раскрасьте их в разные цвета.

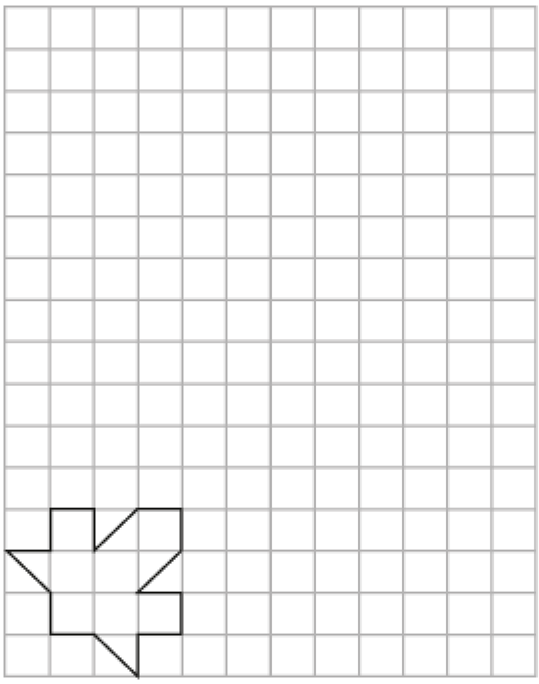

Рис. 4.18

19. Продолжите составление паркета из треугольников и квадратов (рис. 4.19) так, чтобы вокруг каждой вершины они располагались одинаковым образом. Раскрасьте их в разные цвета.

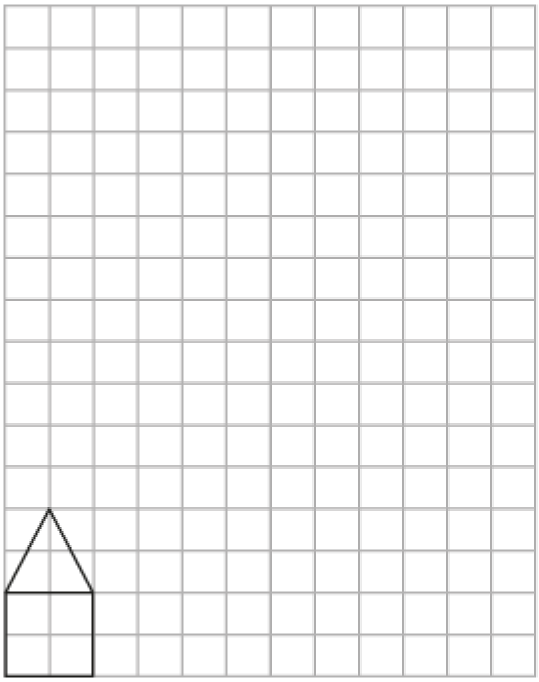

Рис. 4.19

20. Продолжите составление паркета из треугольников и шестиугольников (рис. 4.20) так, чтобы вокруг каждой вершины они располагались одинаковым образом. Раскрасьте их в разные цвета.

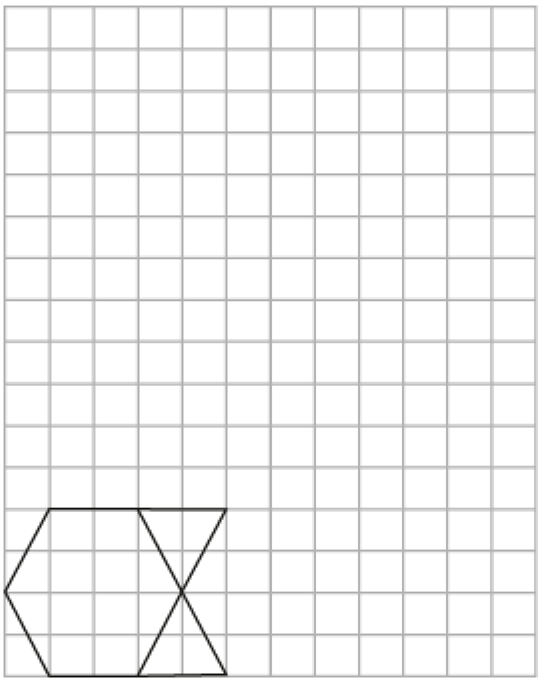

Рис. 4.20

21. Продолжите составление паркета из квадратов и шестиугольников (рис. 4.21) так, чтобы вокруг каждой вершины они располагались одинаковым образом. Раскрасьте их в разные цвета.

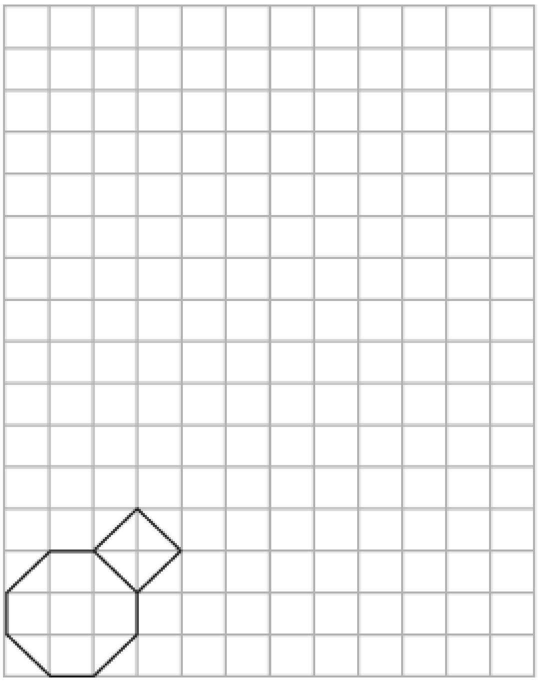

Рис. 4.21

22. Продолжите составление паркета из треугольников и шестиугольников (рис. 4.22) так, чтобы вокруг каждой вершины они располагались одинаковым образом. Раскрасьте их в разные цвета.

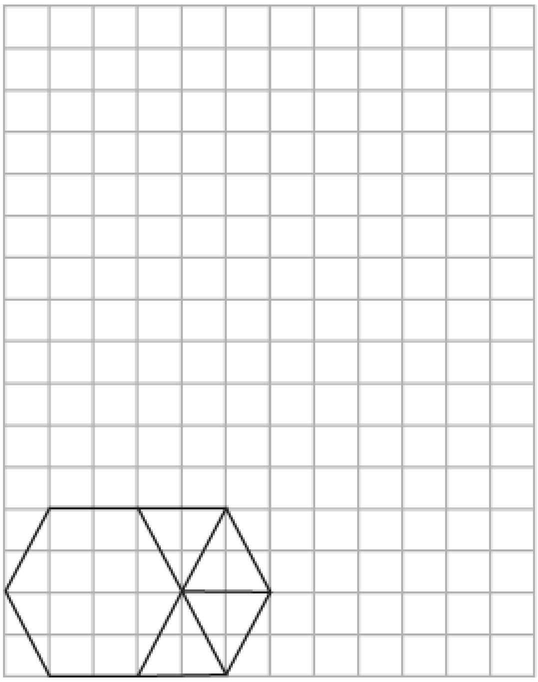

Рис. 4.22

23. Продолжите составление паркета из треугольников и квадратов (рис. 4.23) так, чтобы вокруг каждой вершины они располагались одинаковым образом. Раскрасьте их в разные цвета.

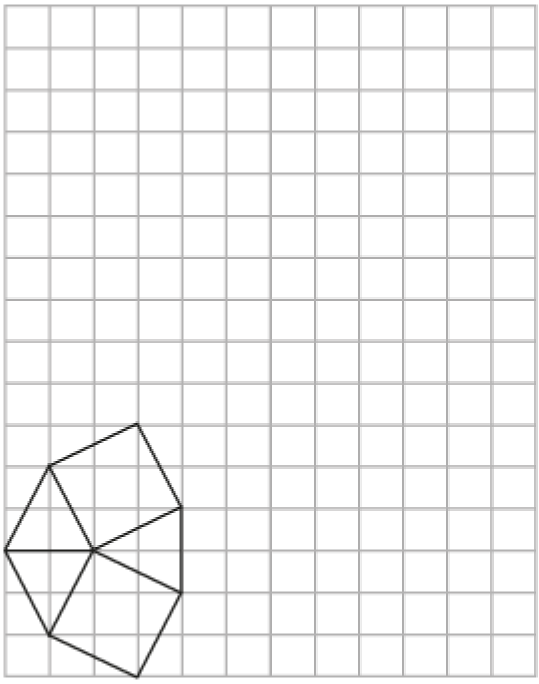

Рис. 4.23

24. Продолжите составление паркета из треугольников, квадратов и шестиугольников (рис. 4.24) так, чтобы вокруг каждой вершины они располагались одинаковым образом. Раскрасьте их в разные цвета.

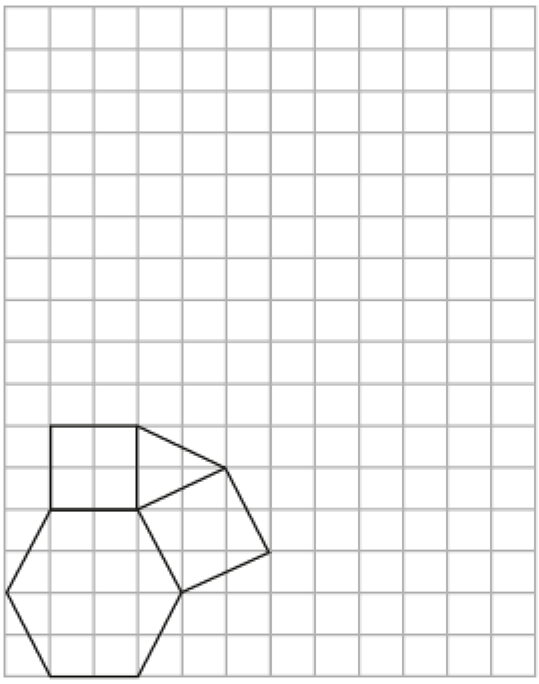

Рис. 4.24

25. Продолжите составление паркета из треугольников и двенадцатиугольников (рис. 4.25) так, чтобы вокруг каждой вершины они располагались одинаковым образом. Раскрасьте их в разные цвета.

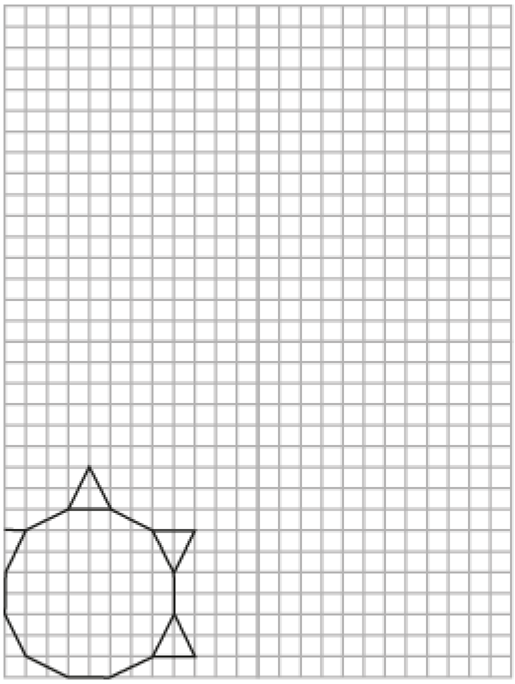

Рис. 4.25

26. Продолжите составление паркета из двенадцатиугольников, шестиугольников и квадратов (рис. 4.26) так, чтобы вокруг каждой вершины они располагались одинаковым образом. Раскрасьте их в разные цвета.

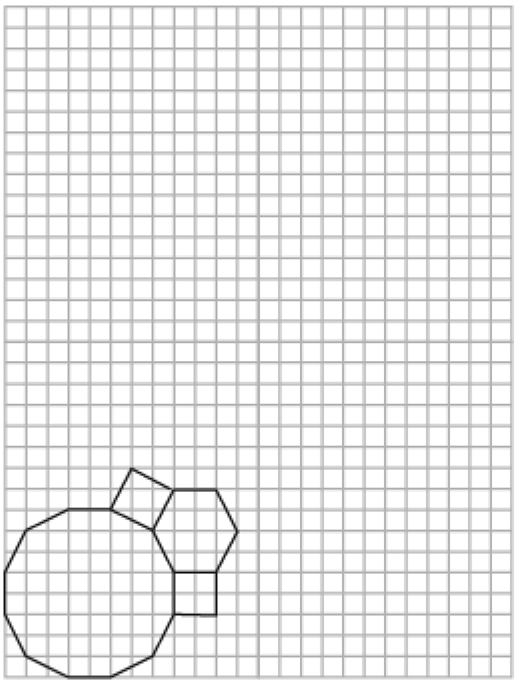

Рис. 4.26

5. Инверсия

Инверсией с центром O и радиусом R называется преобразование плоскости, при котором каждой точке A плоскости, отличной от точки O, сопоставляется точка A', принадлежащая лучу OA, для которой выполняется равенство $OA \cdot OA' = R^2$.

1. Докажите, что точки A и A', указанные на рисунке 5.1, получаются друг из друга инверсией с центром O.

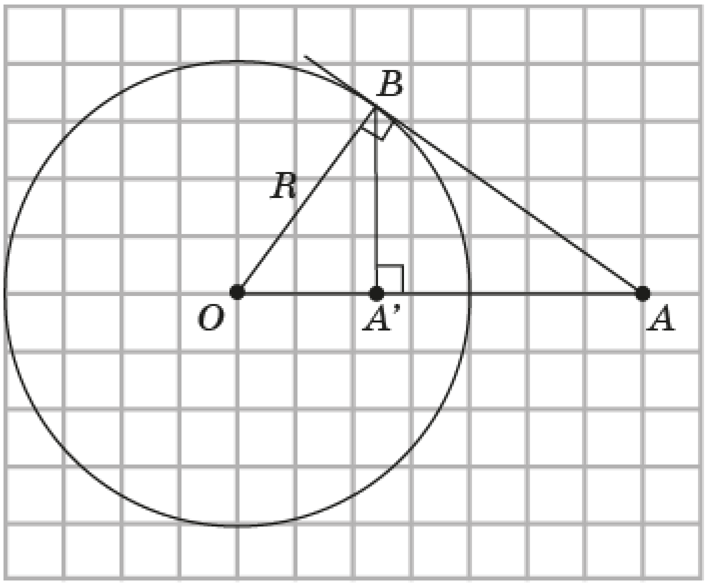

Рис. 5.1

____

____

____

2. Постройте инверсию точки A (рис. 5.2).

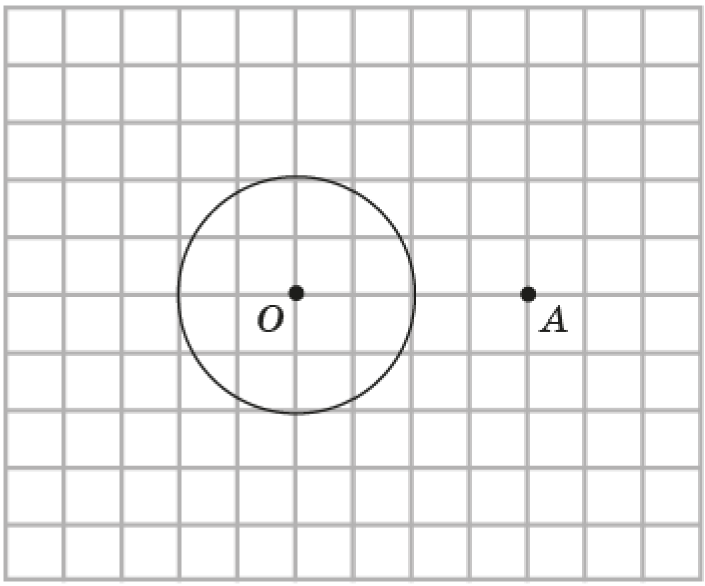

Рис. 5.2

3. Постройте инверсию точки A (рис. 5.3).

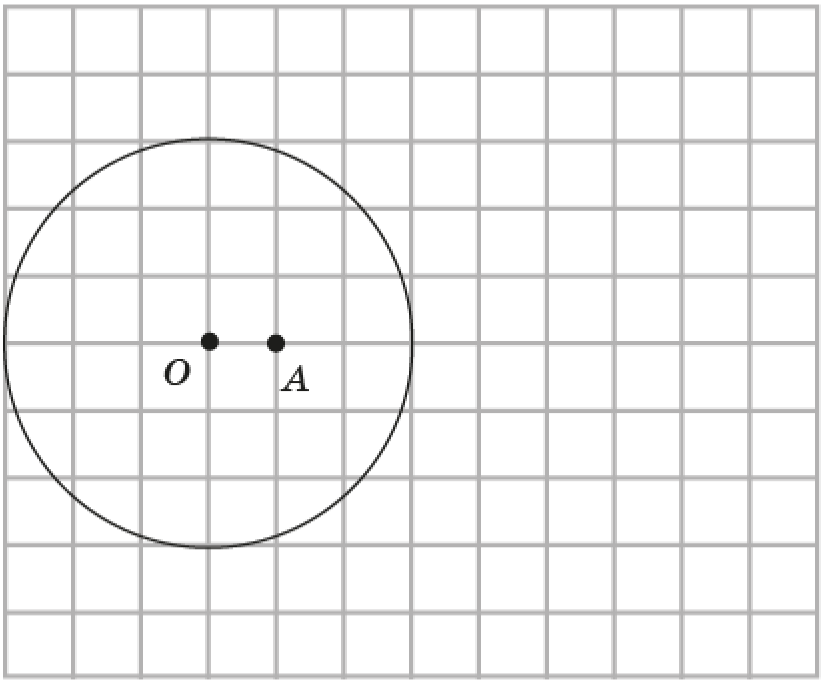

Рис. 5.3

4. Постройте инверсию точки A (рис. 5.4).

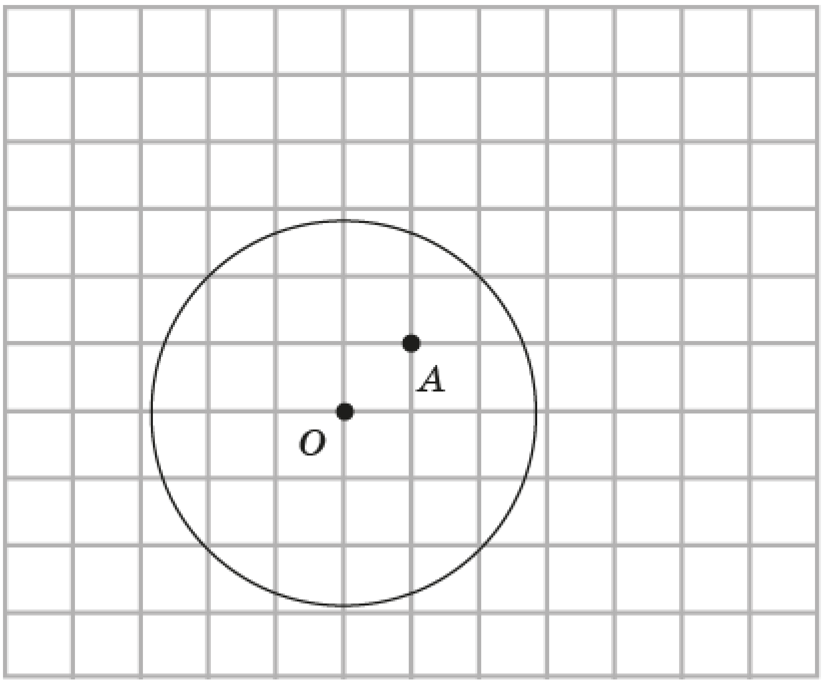

Рис. 5.4

Свойство 1. Инверсия переводит прямые, не проходящие через центр O, в окружности, проходящие через центр O, без самого этого центра, и наоборот.

5. Постройте инверсию прямой a (рис. 5.5).

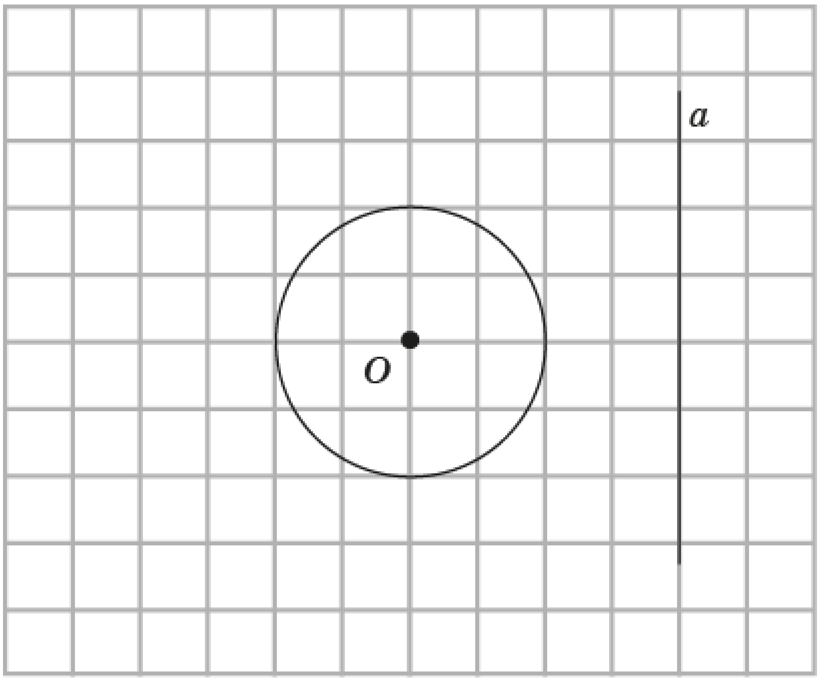

Рис. 5.5

6. Постройте инверсию прямой a (рис. 5.6).

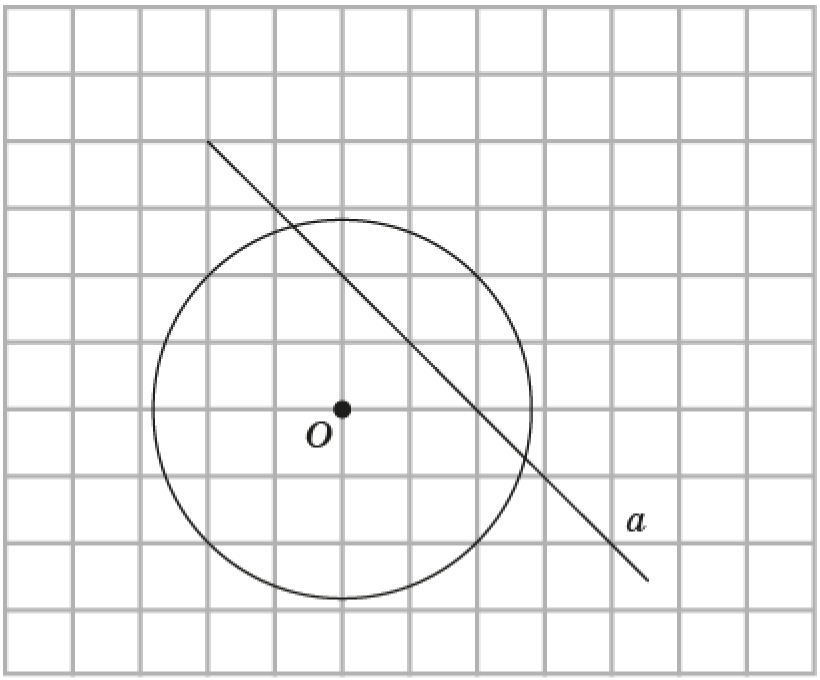

Рис. 5.6

7. Постройте инверсию окружности b (рис. 5.7).

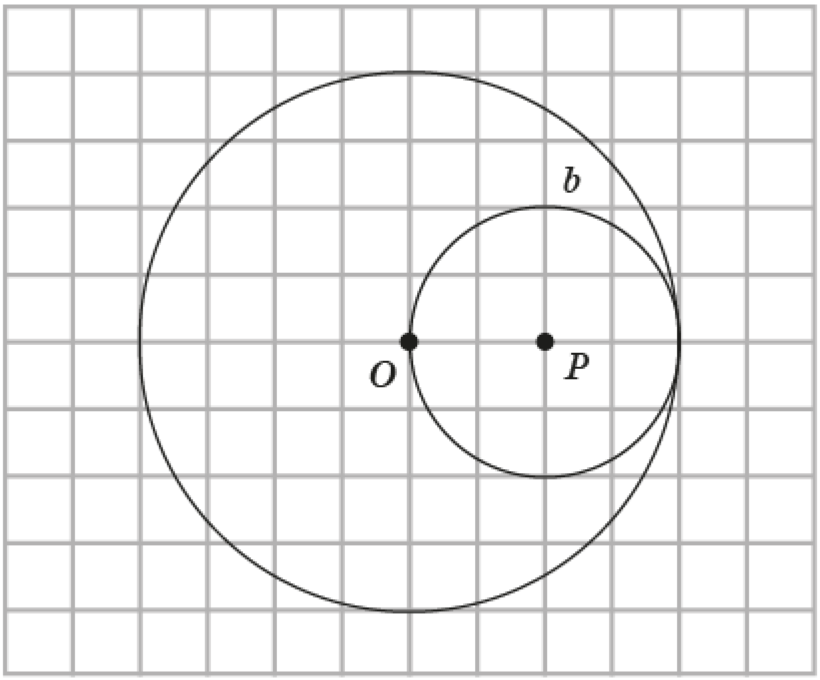

Рис. 5.7

8. Постройте инверсию окружности b (рис. 5.8).

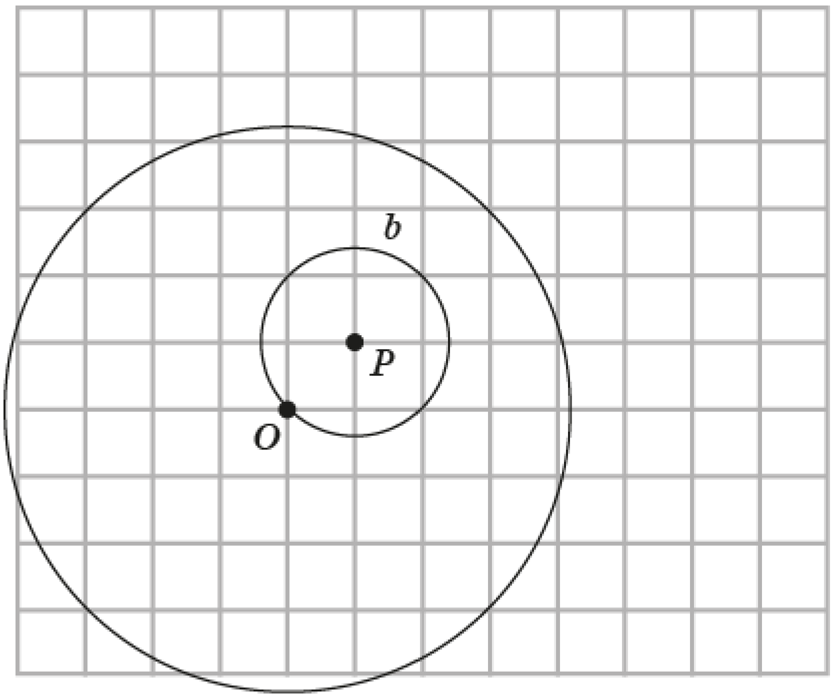

Рис. 5.8

9. Постройте инверсию окружности b (рис. 5.9).

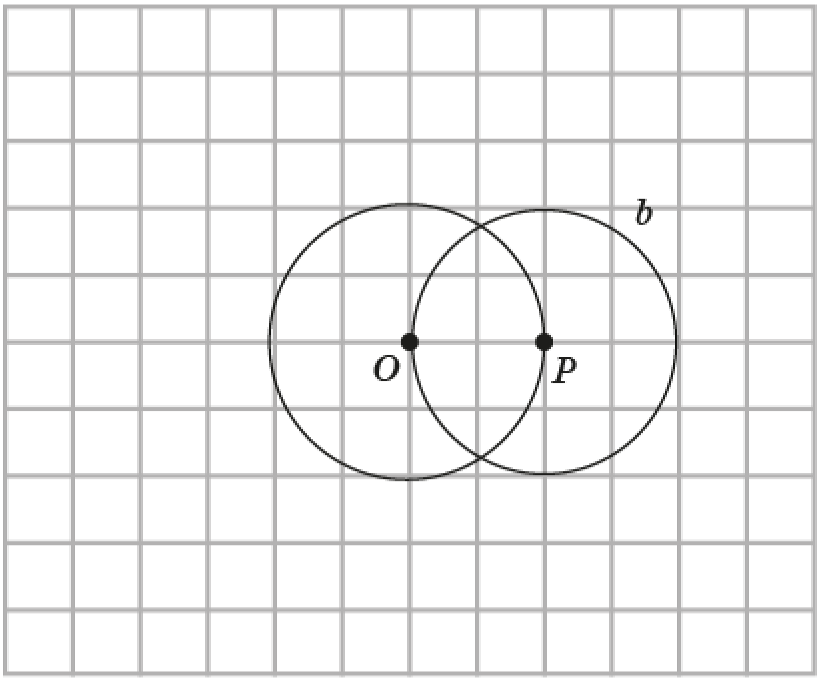

Рис. 5.9

Свойство 2. Инверсия переводит окружности, не проходящие через центр O, в окружности, не проходящие через этот центр.

10. Постройте инверсию окружности b (рис. 5.10).

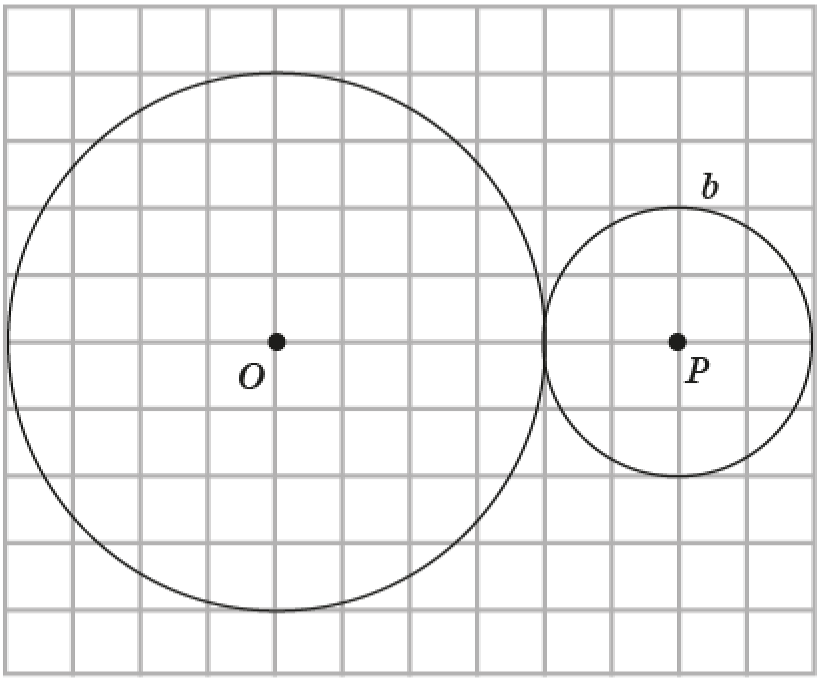

Рис. 5.10

11. Постройте инверсию окружности b (рис. 5.11).

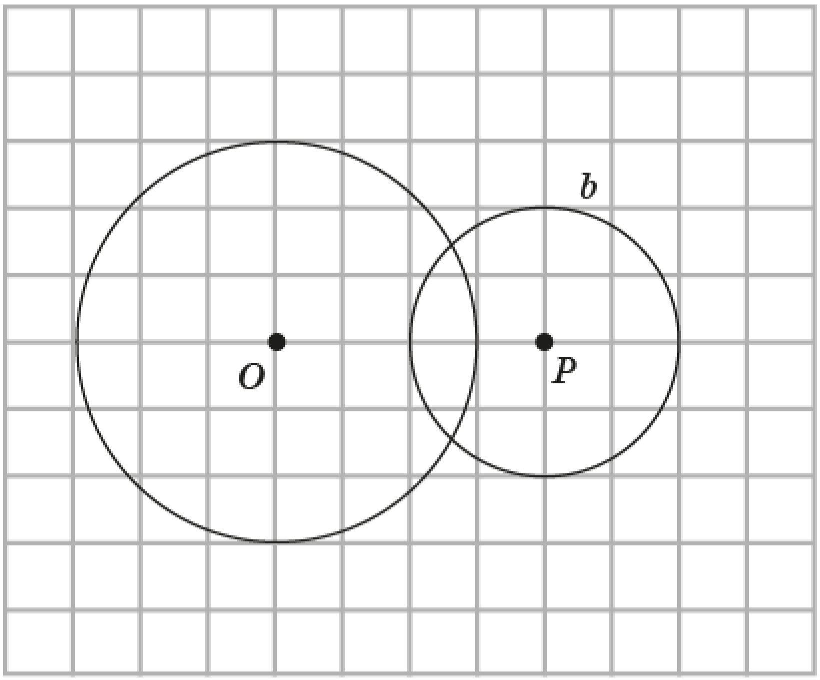

Рис. 5.11

12. Постройте инверсию окружности b (рис. 5.12).

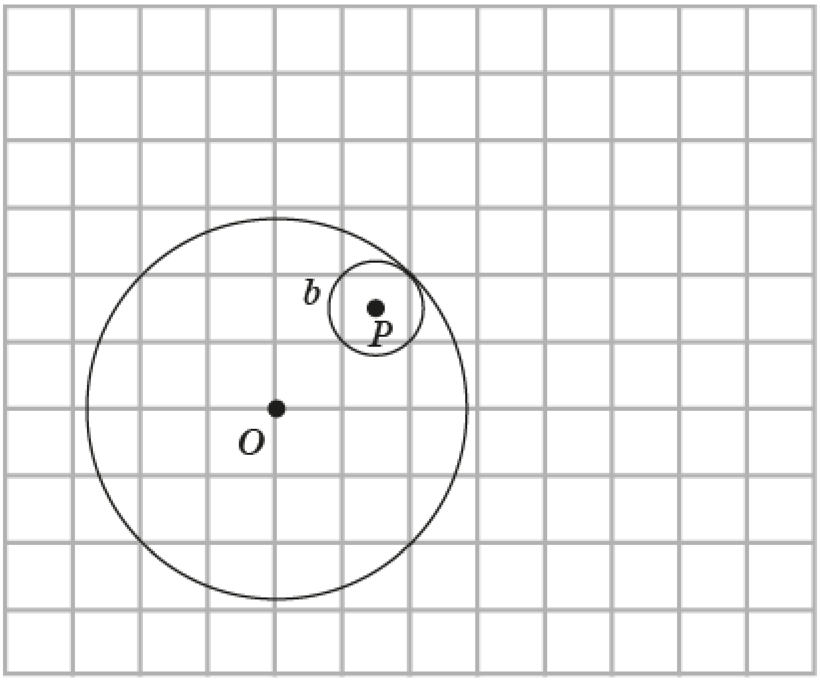

Рис. 5.12

Моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского является внутренность круга. Прямыми в этой модели являются прямые, проходящие через центр круга, а также дуги окружностей, расположенных внутри круга и перпендикулярные окружности этого круга.

13. Докажите, что окружность, перпендикулярная окружности инверсии, при инверсии переходит сама в себя. (рис. 5.13). Воспользуйтесь свойством отрезков секущих.

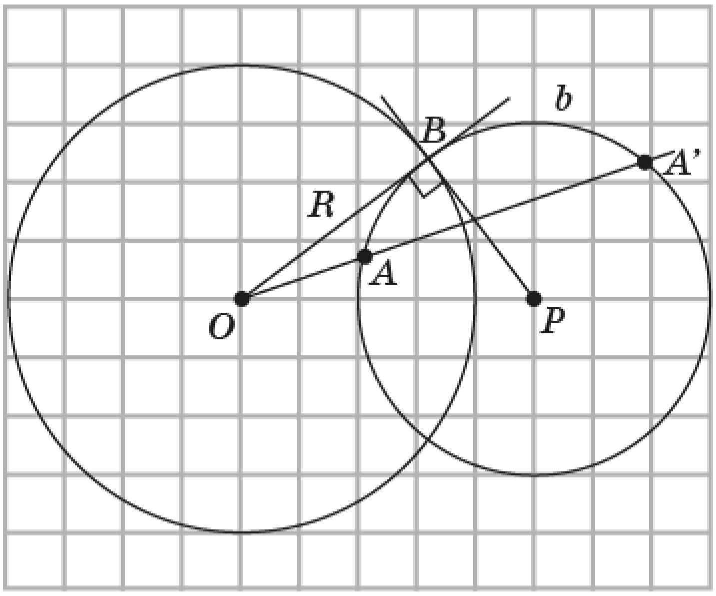

Рис. 5.13

14. На модели Пуанкаре плоскости Лобачевского постройте прямую, проходящую через две данные точки (рис. 5.14).

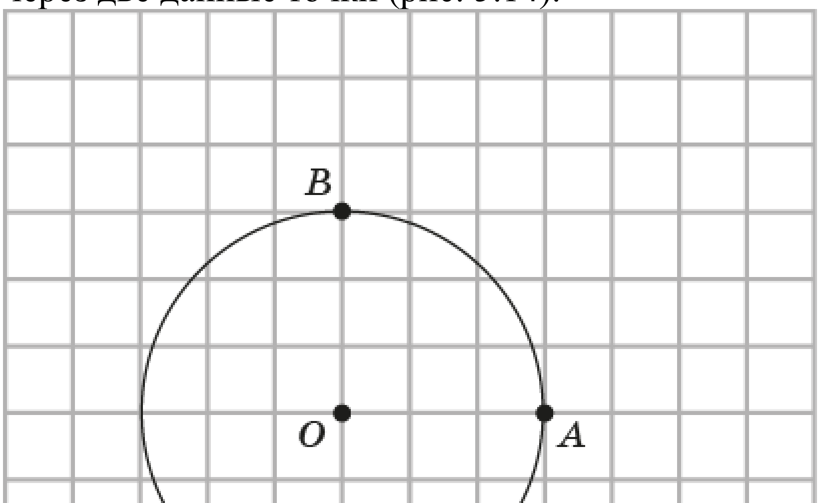

Рис. 5.14

15. На модели Пуанкаре плоскости Лобачевского постройте прямую, проходящую через две данные точки (рис. 5.15).

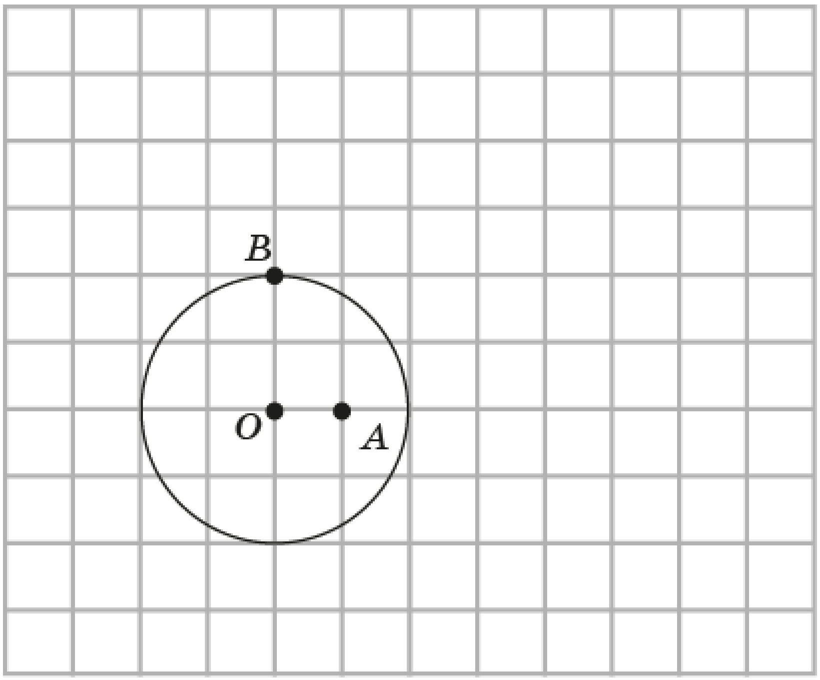

Рис. 5.15

16. На модели Пуанкаре плоскости Лобачевского постройте прямую, проходящую через две данные точки (рис. 5.16).

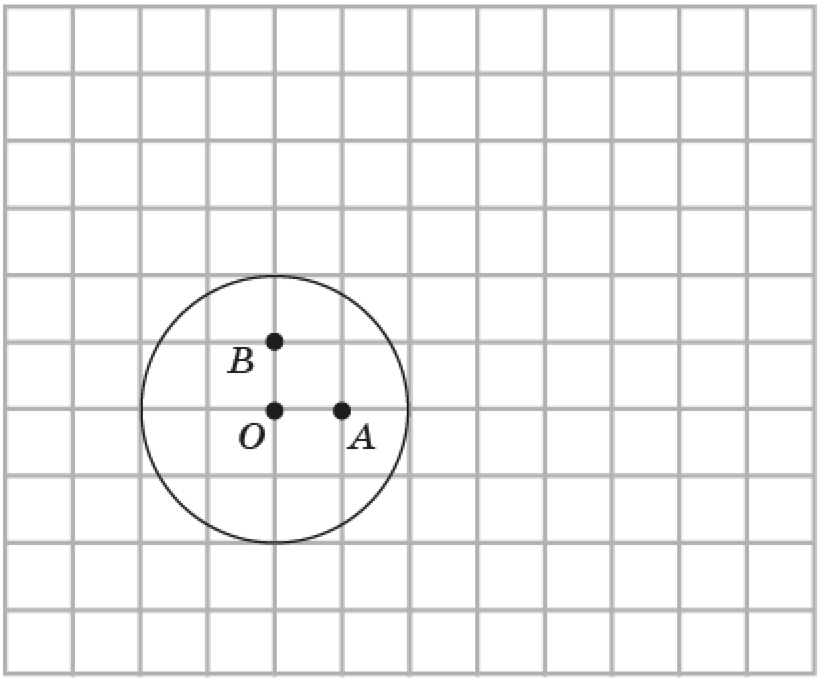

Рис. 5.16

17. На модели Пуанкаре плоскости Лобачевского постройте прямую b, перпендикулярную данной прямой a, проходящую через данную точку A этой прямой (рис. 5.17).

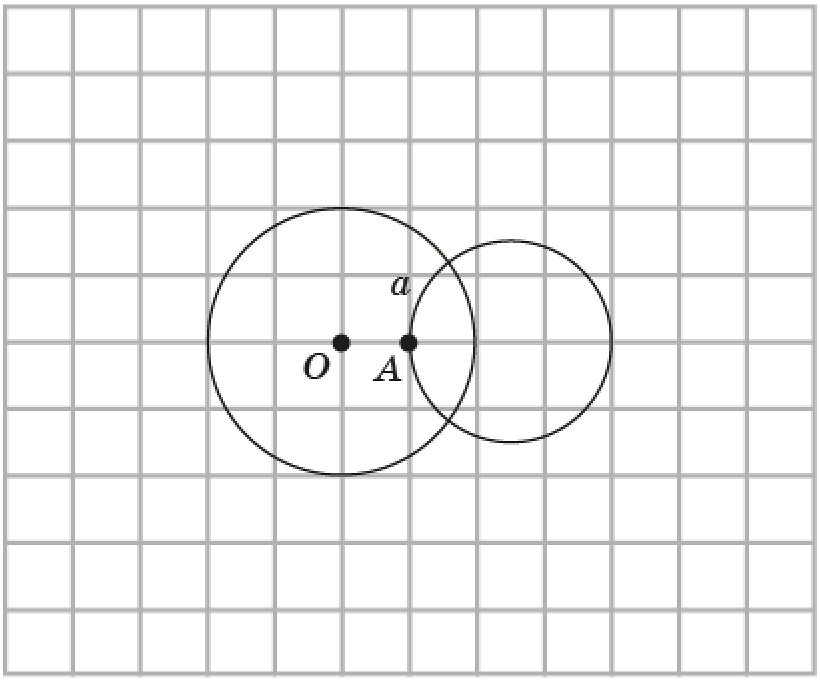

Рис. 5.17

18. На модели Пуанкаре плоскости Лобачевского постройте прямую b, перпендикулярную данной прямой a, проходящую через данную точку A, не принадлежащую этой прямой (рис. 5.18).

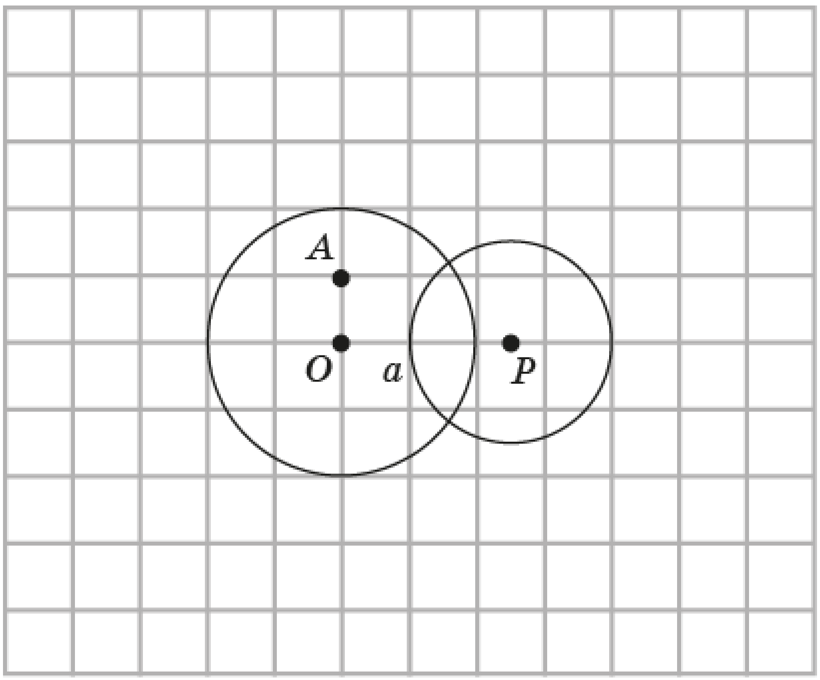

Рис. 5.18

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Центральная симметрия

1. Рисунок О1.1. **2.** Треугольники *OAB* и *OA'B'* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, *AB* = *A'B'* (рис. О1.2).

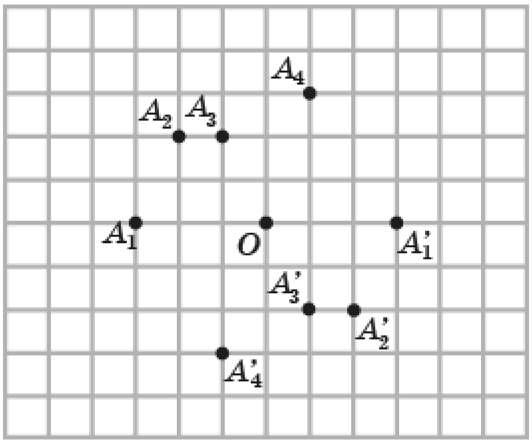

Рис. О1.1

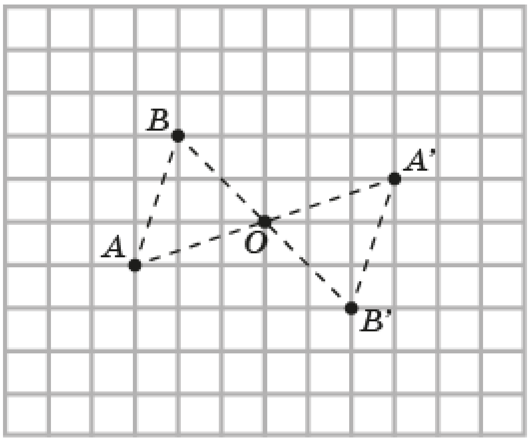

Рис. О1.2

3. Рисунок О1.3. **4.** Рисунок О1.4.

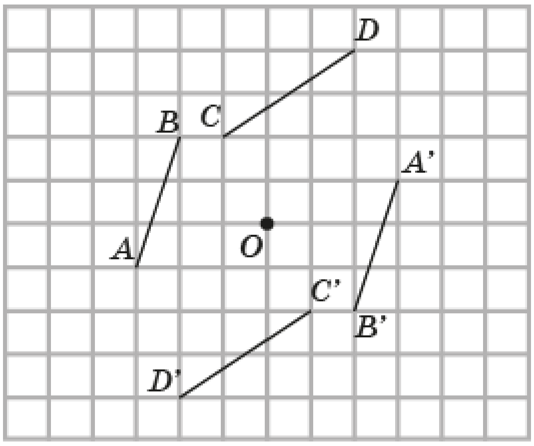

Рис. О1.3

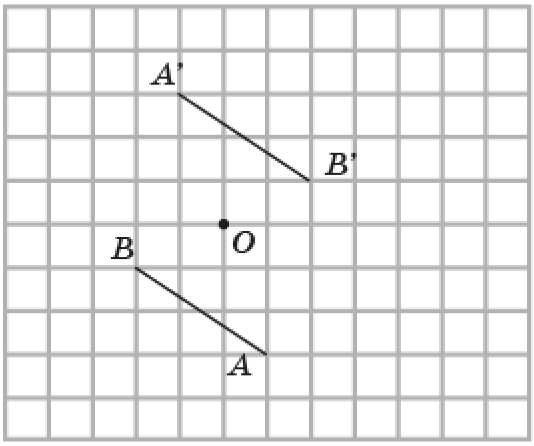

Рис. О1.4

5. Из равенства треугольников *OAB* и *OA'B'* следует равенство углов *OAB* и *OA'B'*, которые являются внутренними накрест лежащими. Значит, прямые *a* и *a'* параллельны (рис. О1.5). **6.** Рисунок О1.6.

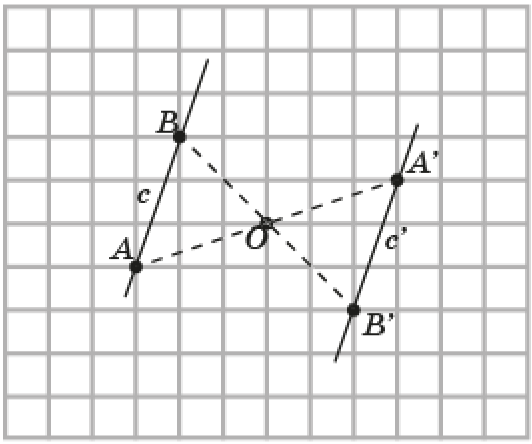

Рис. О1.5

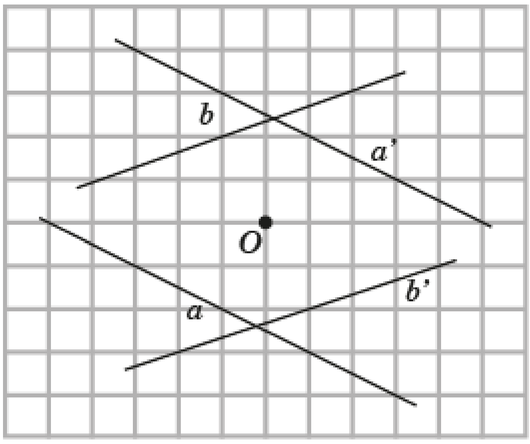

Рис. О1.6

7. Прямая *c* (рис. O1.7). **8.** Рисунок O1.8.

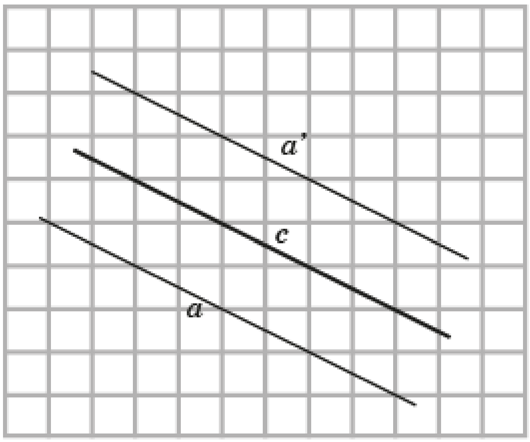

Рис. O1.7

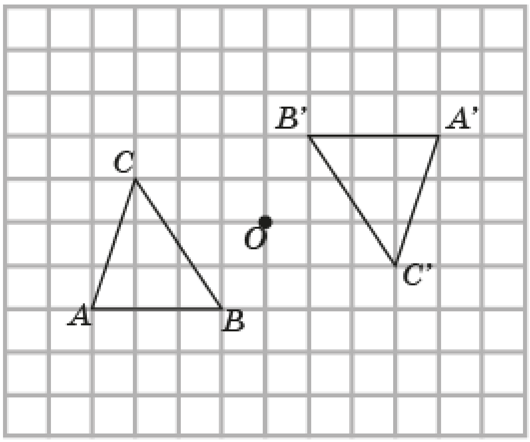

Рис. O1.8

9. Рисунок O1.9. **10.** Рисунок O1.10.

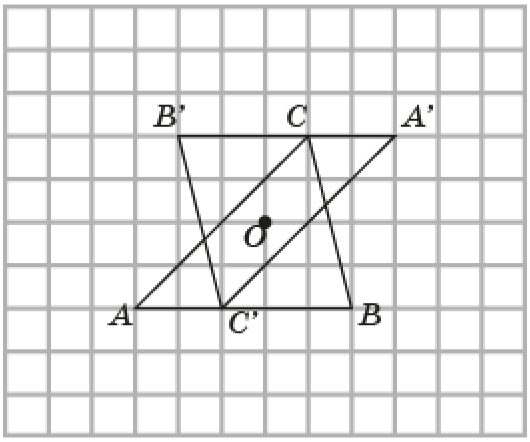

Рис. O1.9

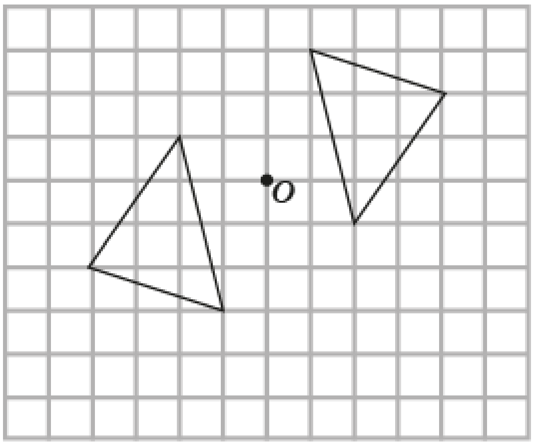

Рис. O1.10

11. Рисунок O1.11. **12.** Рисунок O1.12.

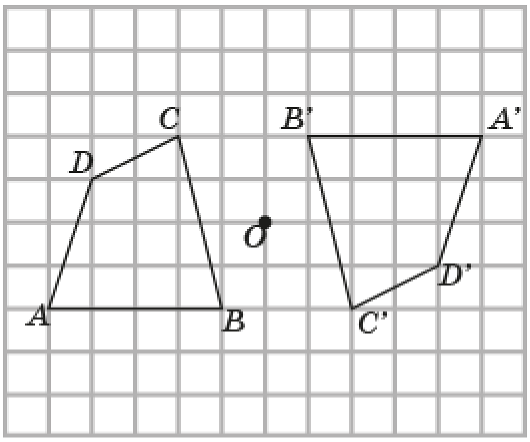

Рис. O1.11

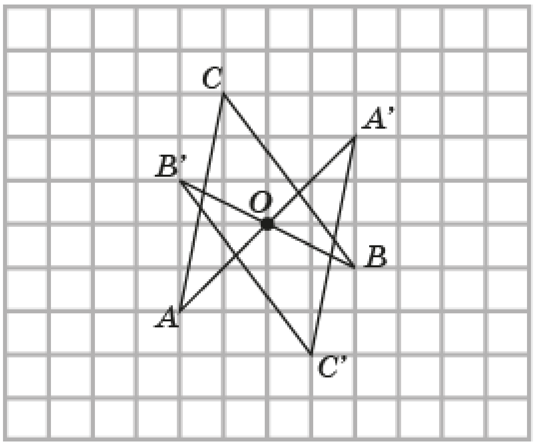

Рис. O1.12

13. Рисунок О1.13. **14.** Противолежащие стороны четырёхугольника *ABCD* равны. Следовательно, он является параллелограммом.

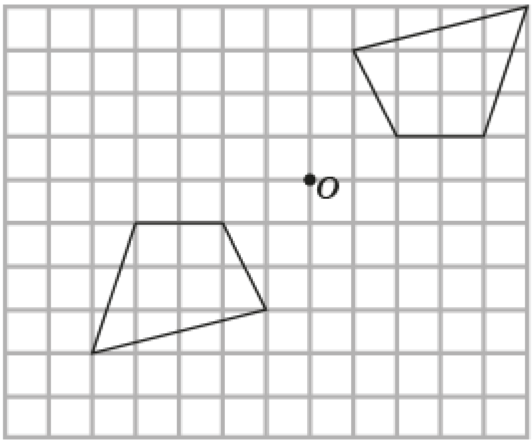

Рис. О1.13

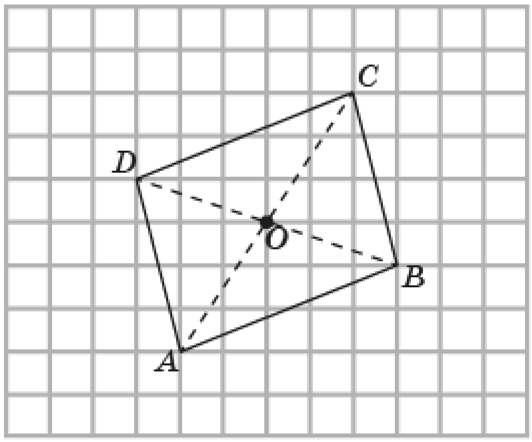

Рис. О1.14

15. Общей частью является правильный шестиугольник со стороной $\frac{1}{3}$. **16.** Противолежащие стороны шестиугольника получаются друг из друга центральной симметрией. Следовательно, они равны и параллельны (рис. О1.16).

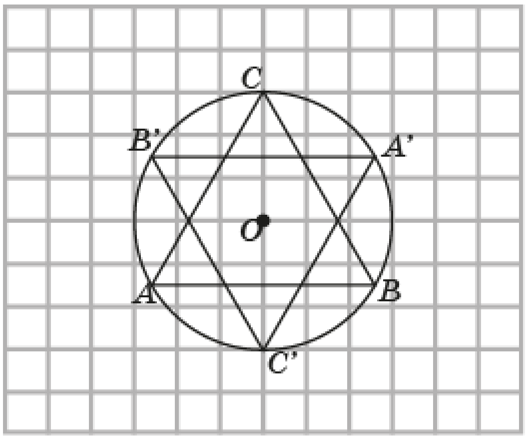

Рис. О1.15

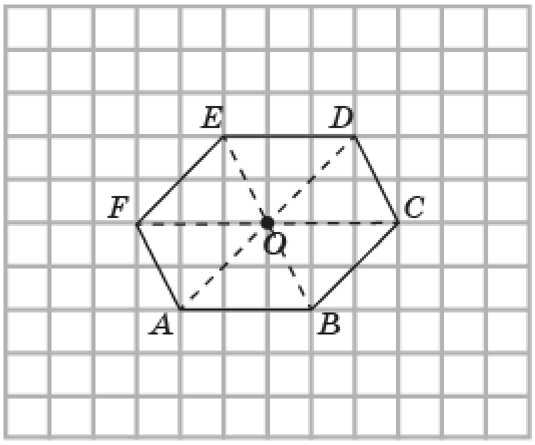

Рис. О1.16

17. Рисунок О1.17. **18.** Рисунок О1.18.

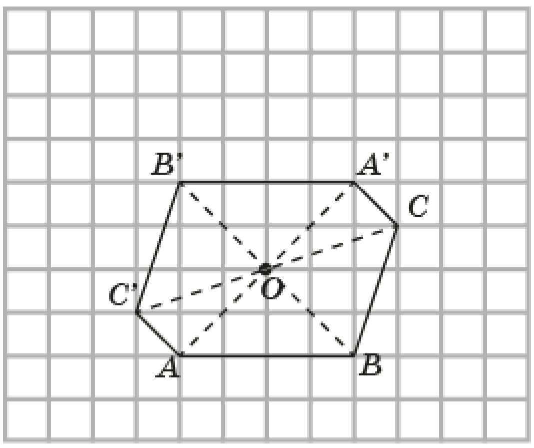

Рис. О1.17

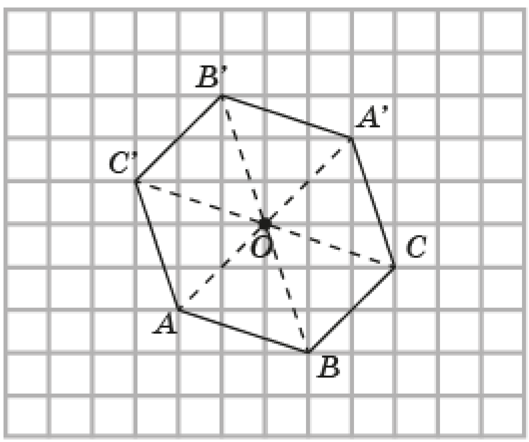

Рис. О1.18

19. Общей частью является правильный десятиугольник (рис. О1.19). **20.** Рисунок О1.20.

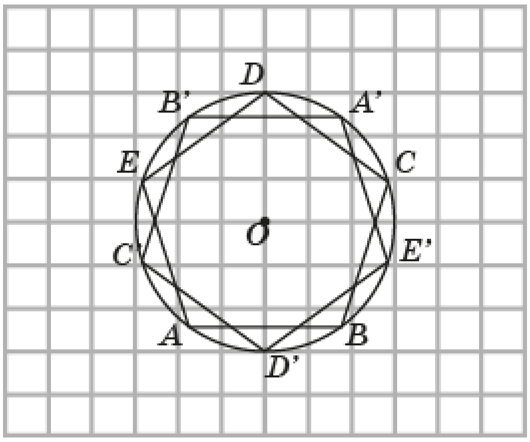

Рис. О1.19

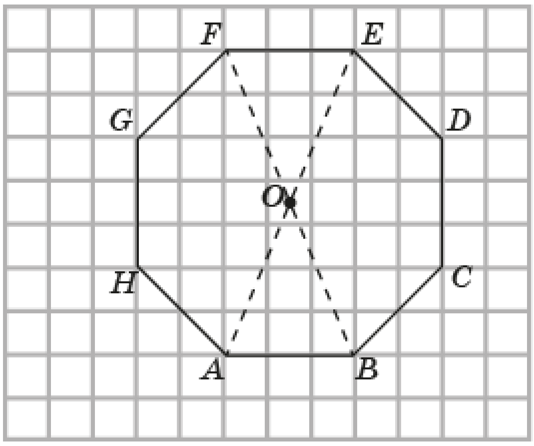

Рис. О1.20

21. Рисунок О1.21. **22.** Рисунок О1.22.

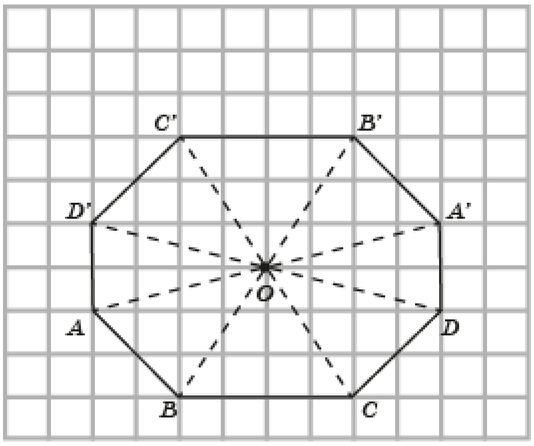

Рис. О1.21

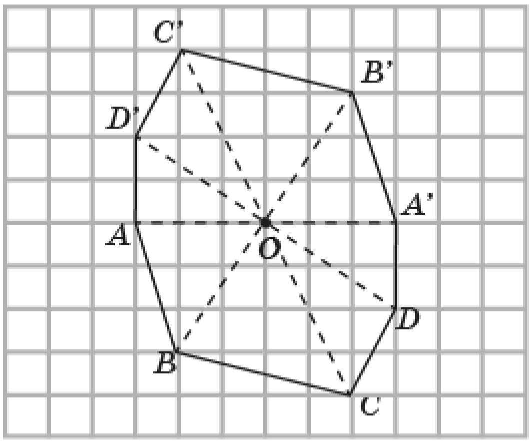

Рис. О1.22

23. Рисунок О1.23. **24.** Рисунок О1.24.

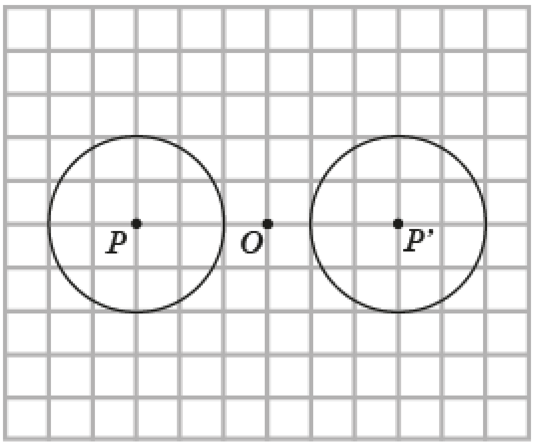

Рис. О1.23

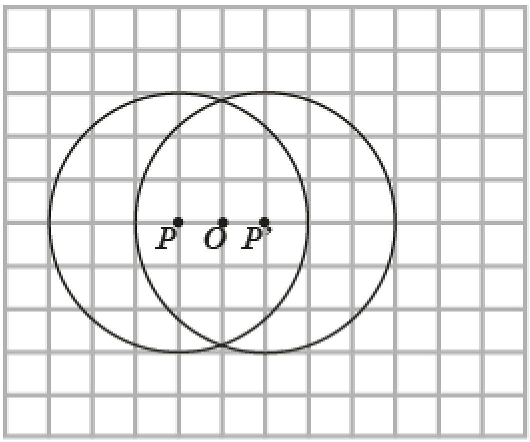

Рис. О1.24

2. Осевая симметрия

1. Рисунок О2.1. **2.** Рисунок О2.2.

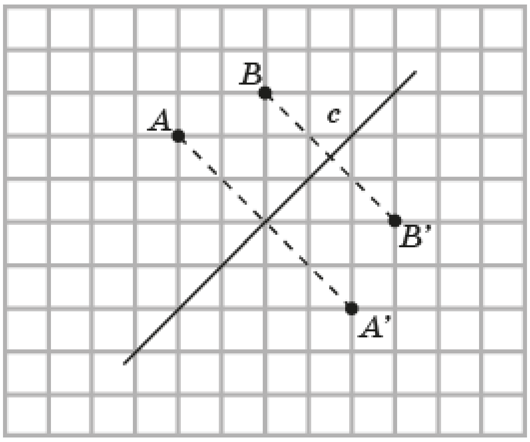

Рис. О2.1

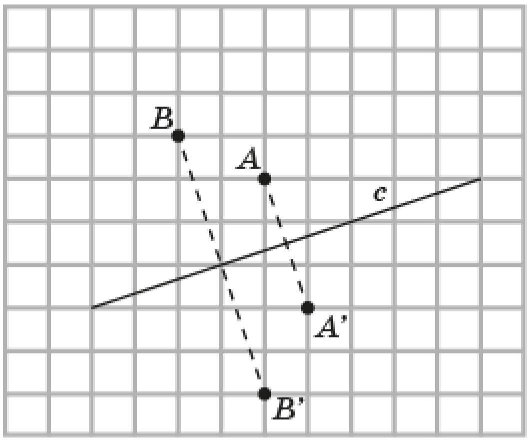

Рис. О2.2

3. Треугольники ADC и $A'DC$ равны по двум катетам. Следовательно, $\angle ADC = \angle A'DC$ и $AD = A'D$. Треугольники ABD и $A'B'D$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AB = A'B'$ (рис. О2.3).

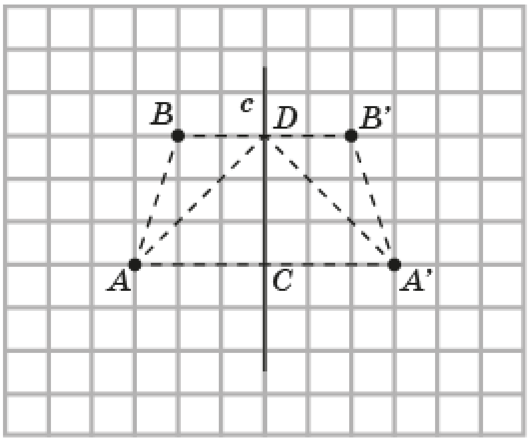

Рис. О2.3

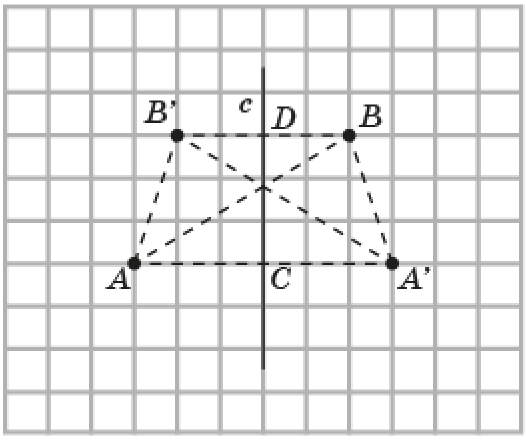

Рис. О2.4

4. По доказанному в предыдущей задаче, $AB' = A'B$ и $\angle AB'D = \angle A'BD$. Следовательно, треугольники $AB'B$ и $A'BB'$ равны по трём сторонам. Значит $AB = A'B'$ (рис. О2.4). **5.** Рисунок О2.5. **6.** Рисунок О2.6.

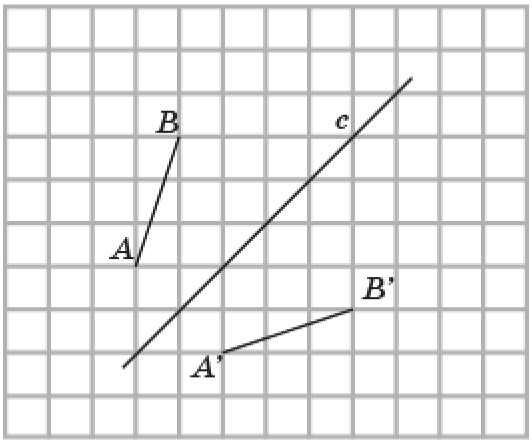

Рис. О2.5

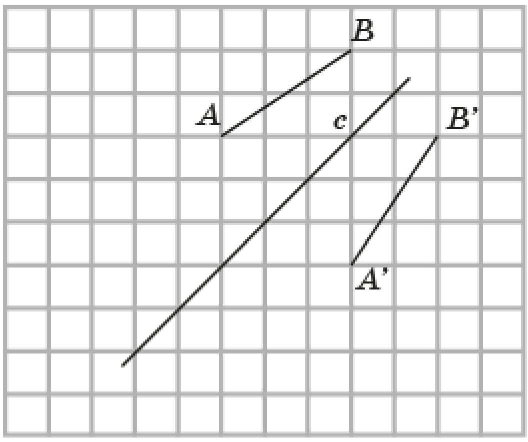

Рис. О2.6

7. Рисунок О2.7. **8.** В четырёхугольнике *ABB'A'* противолежащие стороны равны. Следовательно, он является параллелограммом. Значит, прямые *a* и *a'* параллельны (рис. О2.8).

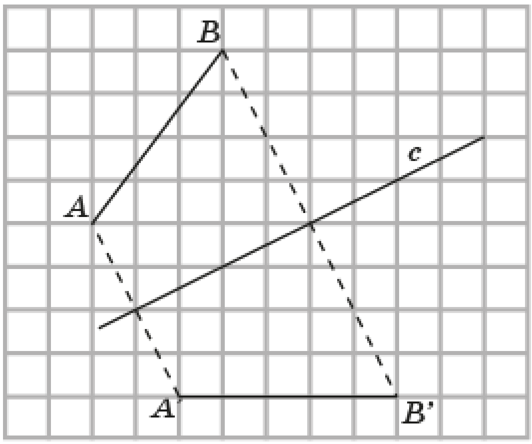

Рис. О2.7

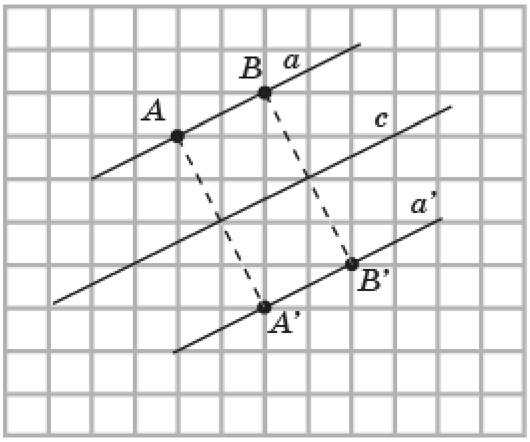

Рис. О2.8

9. Рисунок О2.9. **10.** Рисунок О2.10.

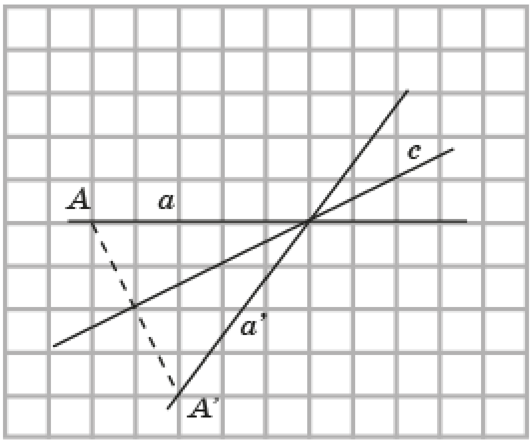

Рис. О2.9

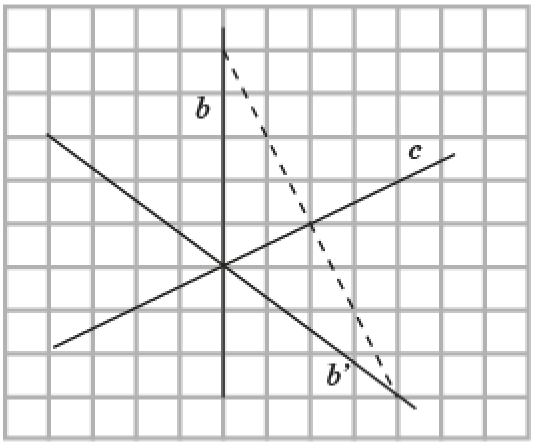

Рис. О2.10

11. Рисунок О2.11. **12.** Рисунок О2.12.

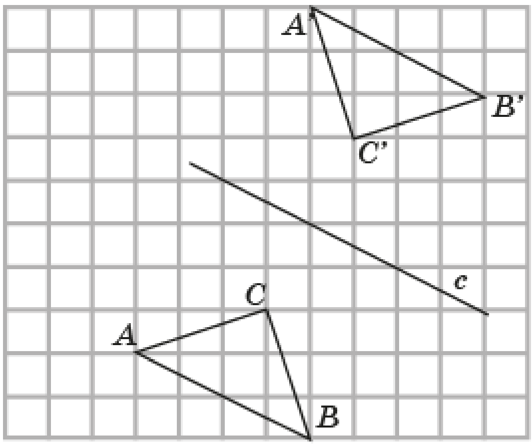

Рис. О2.11

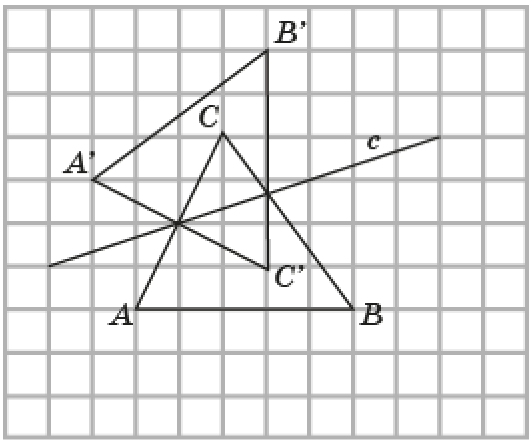

Рис. О2.12

13. Рисунок O2.13. **14.** Рисунок O2.14.

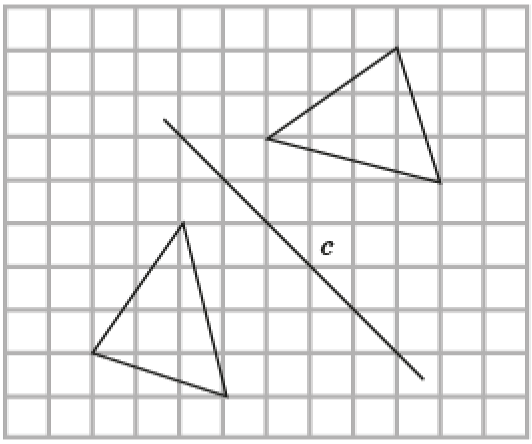

Рис. O2.13

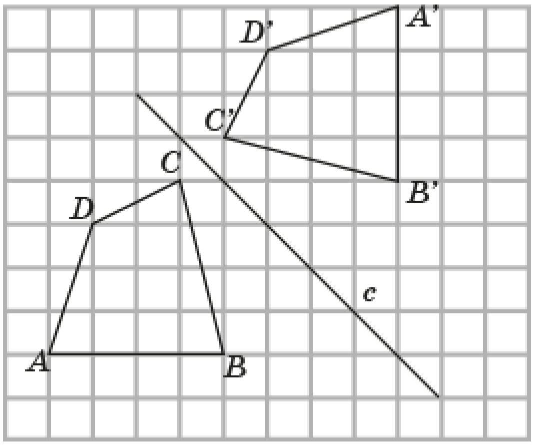

Рис. O2.14

15. Рисунок O2.15. **16.** Рисунок O2.16.

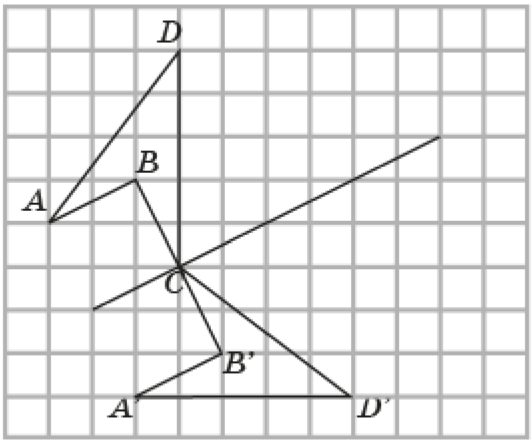

Рис. O2.15

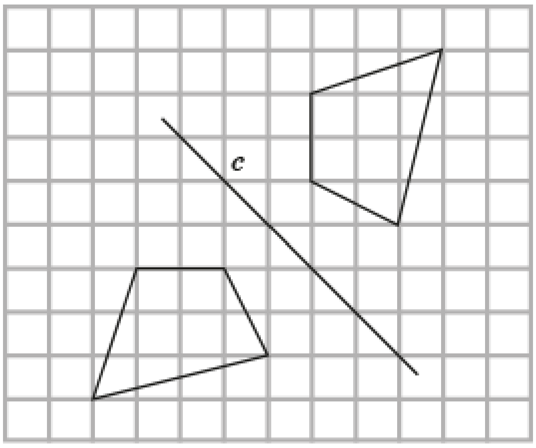

Рис. O2.16

17. Рисунок O2.17. **18.** $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, точки $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$. Значит, точки *A*, *O*, *A''* принадлежат одной прямой. *AO = A'O = A''O*. Следовательно, точки *A* и *A''* симметричны относительно точки *O*.

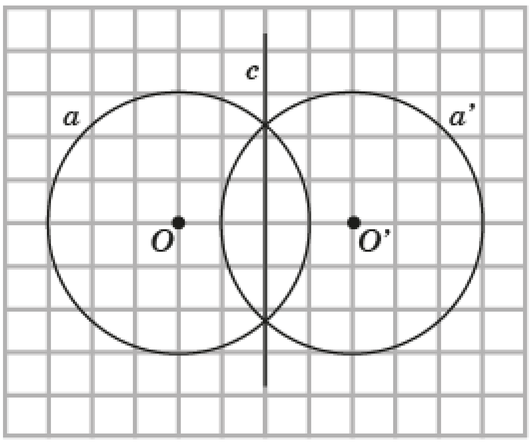

Рис. O2.17

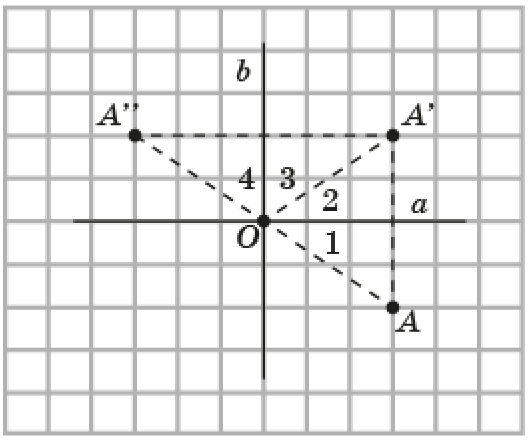

Рис. O2.18

19. Три (рис. О2.19). **20.** Четыре (рис. О2.20).

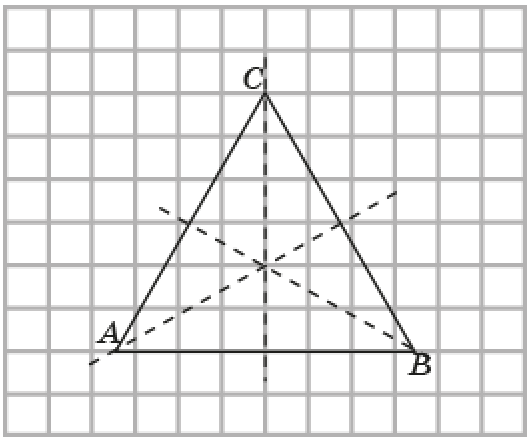

Рис. О2.19

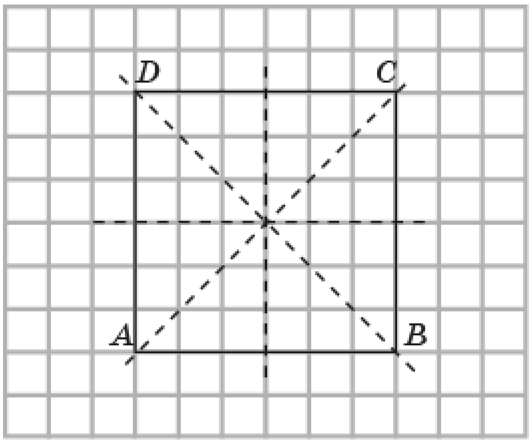

Рис. О2.20

21. Пять (рис. О2.21). **22.** Шесть (рис. О2.22).

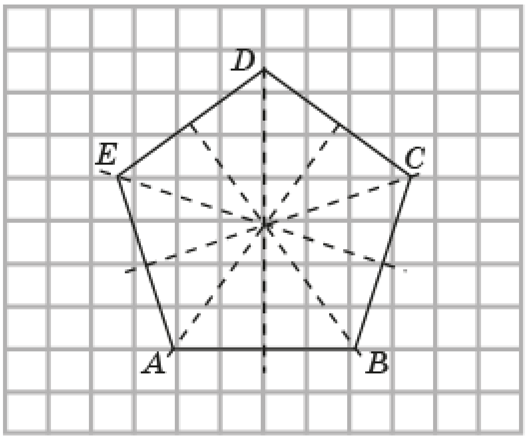

Рис. О2.21

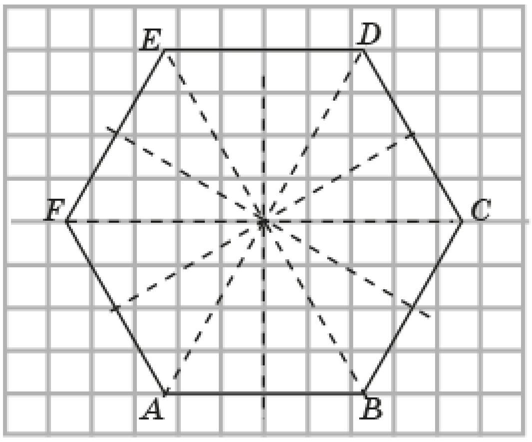

Рис. О2.22

23. Из наличия осевых симметрий четырёхугольника следует равенство его сторон (рис. О2.23). Следовательно, данный четырёхугольник – ромб. **24.** Рисунок О2.24.

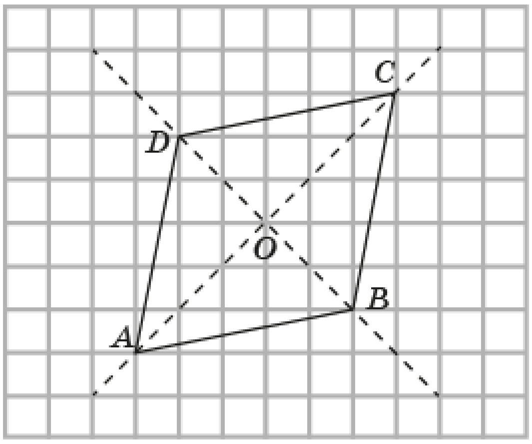

Рис. О2.23

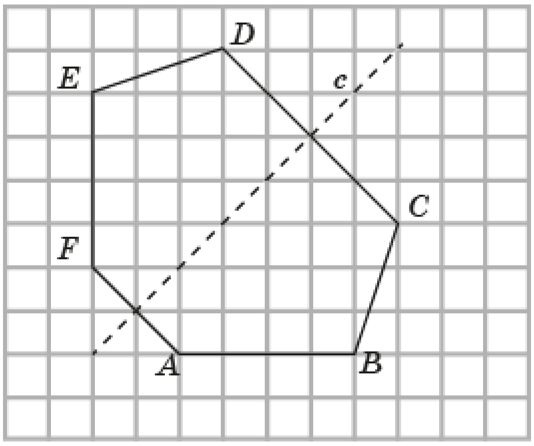

Рис. О2.24

25. Рисунок О2.25. **26.** Рисунок О2.26.

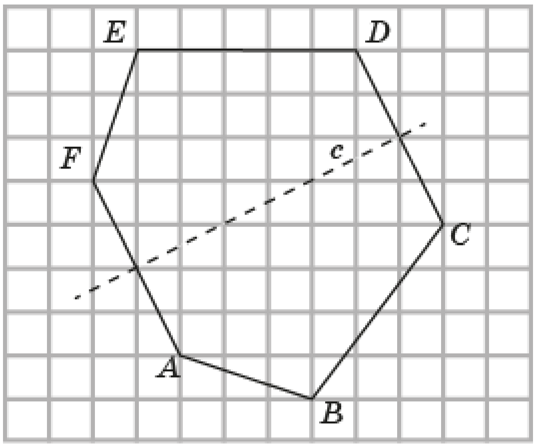

Рис. О2.25

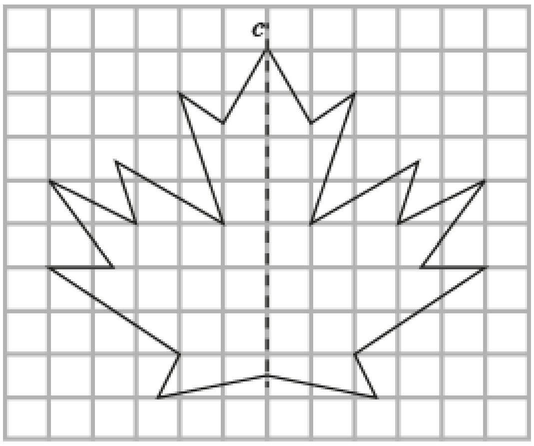

Рис. О2.26

3. Поворот. Симметрия *n*-го порядка

1. Рисунок О3.1. **2.** Рисунок О3.2.

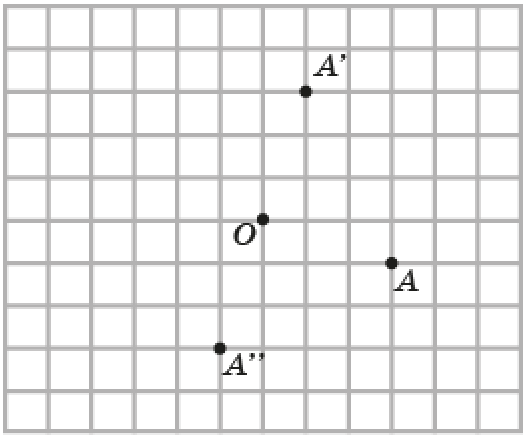

Рис. О3.1

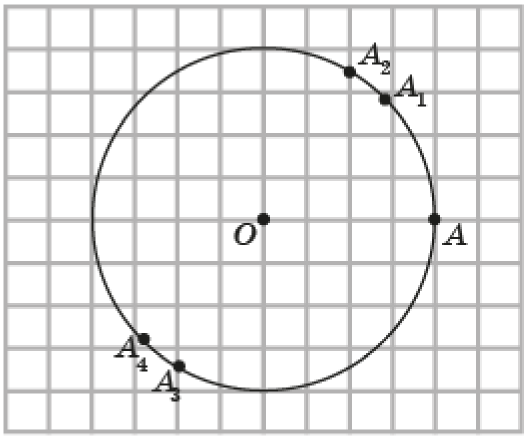

Рис. О3.2

3. Рисунок О3.3. **4.** Рисунок О3.4.

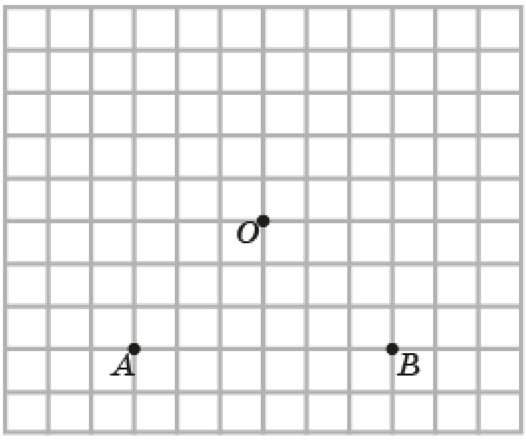

Рис. О3.3

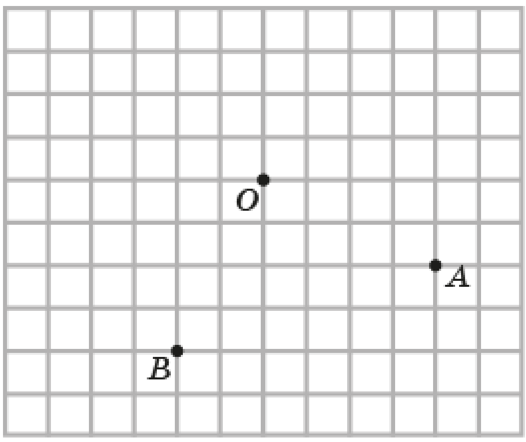

Рис. О3.4

5. Прямая *c* (рис. О3.5). **6,** Треугольники *OAB* и *OA'B'* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, *AB = A'B'* (рис. О3.6).

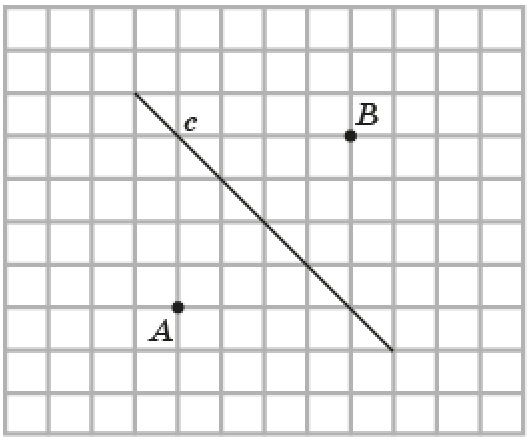

Рис. О3.5

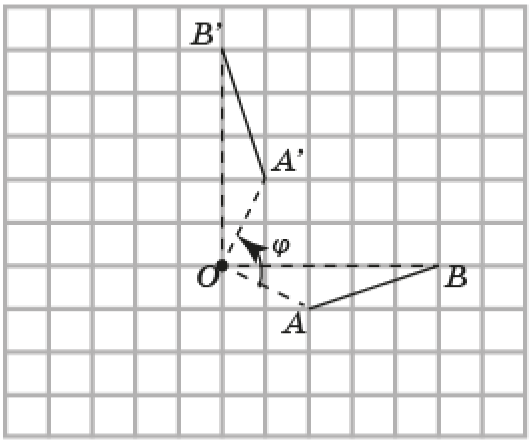

Рис. О3.6

7. Рисунок О3.7. **8.** 90º (рис. О3.8).

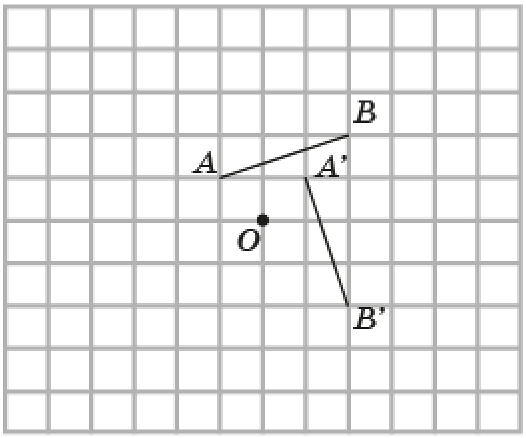

Рис. О3.7

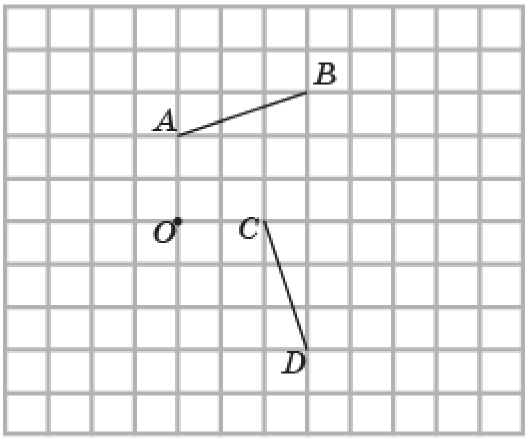

Рис. О3.8

9. Рисунок О3.9. **10.** Рисунок О3.10.

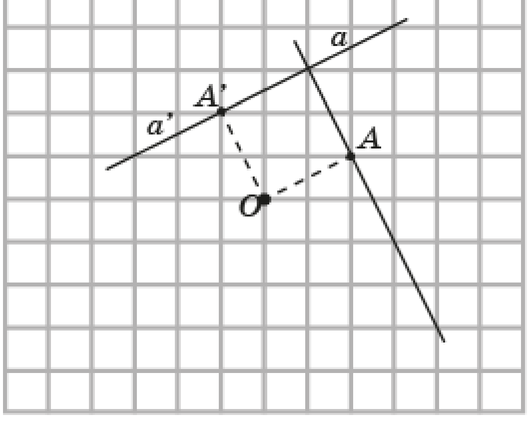

Рис. О3.9

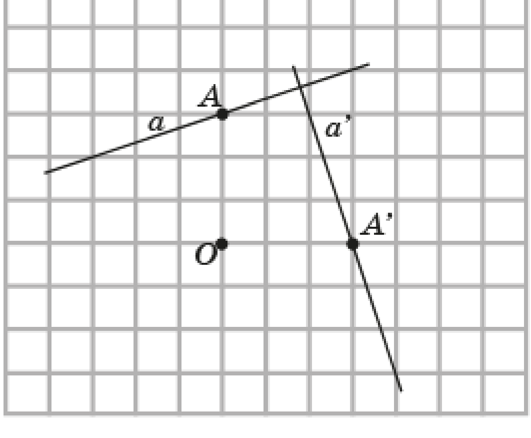

Рис. О3.10

11. Рисунок О3.11. **12.** 90° (рис. О3.12).

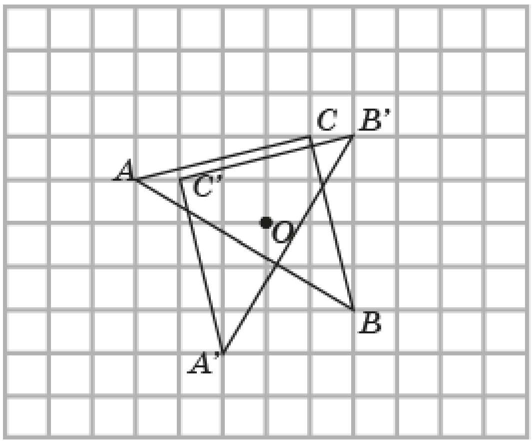

Рис. О3.11

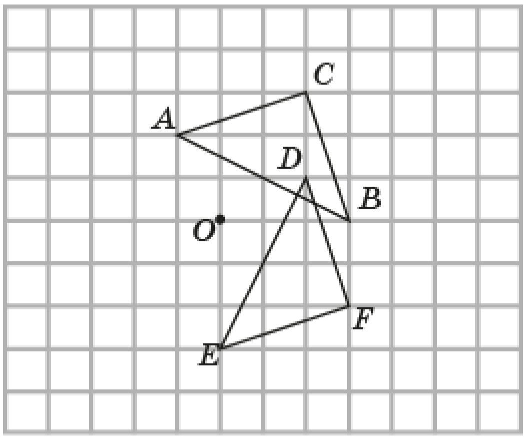

Рис. О3.12

13. Третьего (рис. О3.13). **14.** Четвёртого (рис. О3.14).

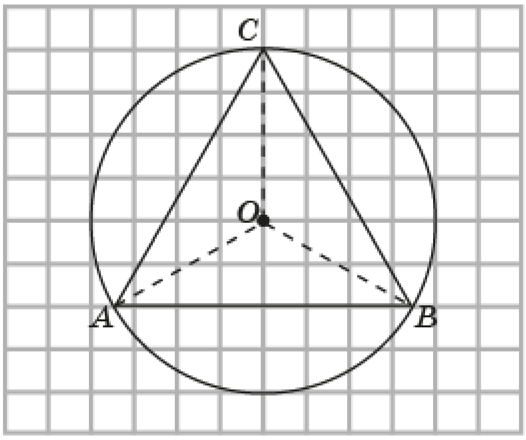

Рис. О3.13

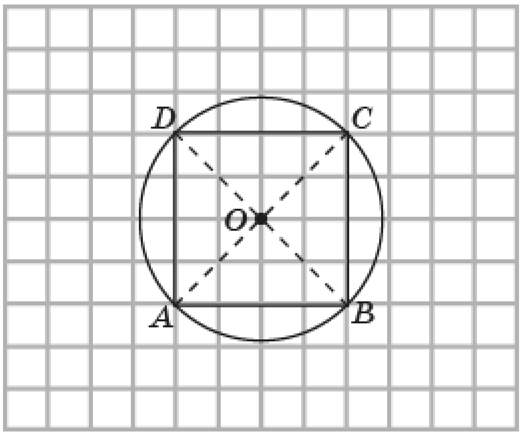

Рис. О3.14

15. Пятого (рис. О3.15). **16.** Шестого (рис. О3.16).

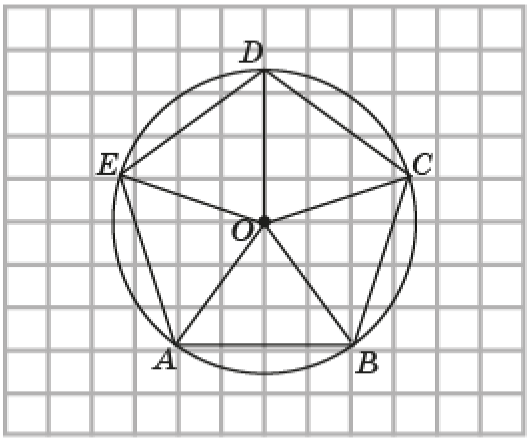

Рис. О3.15

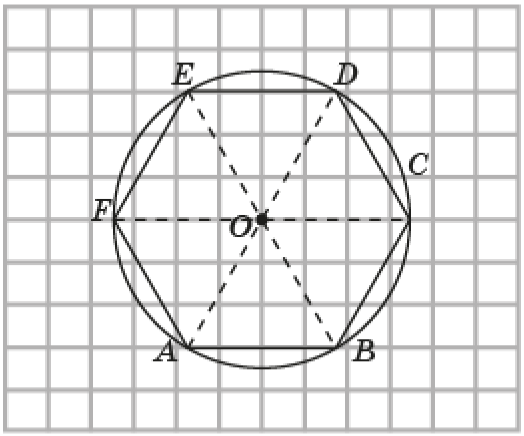

Рис. 3.16

17. Правильным шестиугольником (рис. O3.17). **18.** Правильным восьмиугольником (рис. O3.18).

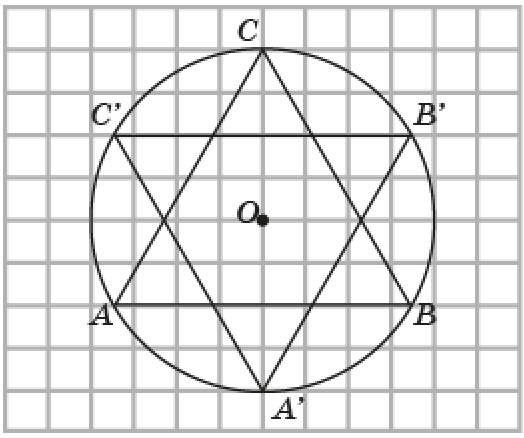

Рис. O3.17

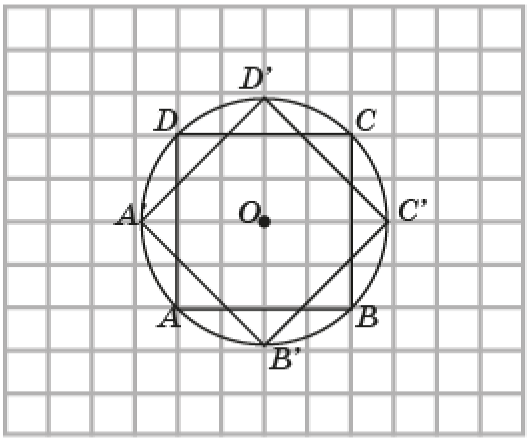

Рис. O3.18

19. Правильным десятиугольником (рис. O3.19). **20.** Правильным двенадцатиугольником (рис. O3.20).

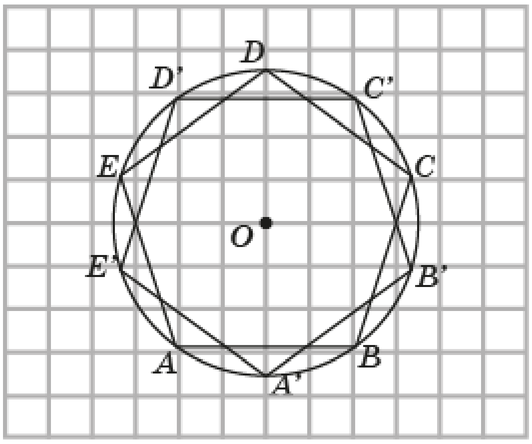

Рис. O3.19

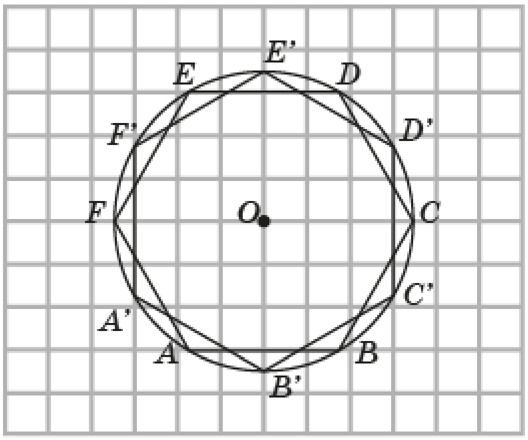

Рис. O3.20

4. Параллельный перенос. Движение

1. Стороны *AA'* и *BB'* четырёхугольника *AA'B'B* равны и параллельны. Следовательно, этот четырёхугольник – параллелограмм. Значит, *AB* = *A'B'* (рис. O4.1). **2.** Рисунок O4.2.

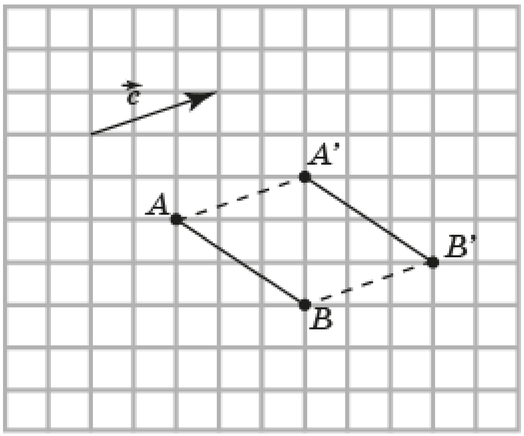

Рис. O4.1

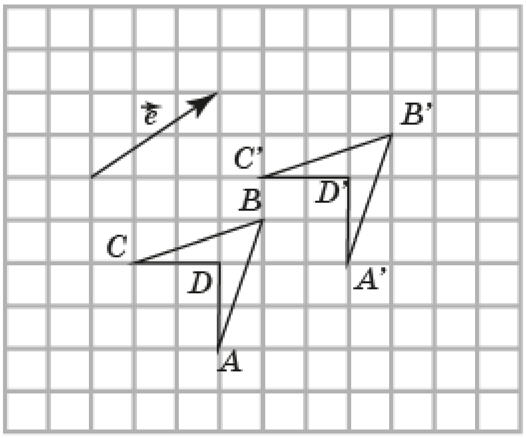

Рис. O4.2

3. Четырёхугольник *ABB'A'* – параллелограмм. Следовательно, прямая *c'* параллельна прямой *c* (рис. 4.3). **4.** $\overrightarrow{AA''} = \vec{e}$ (рис. О4.4).

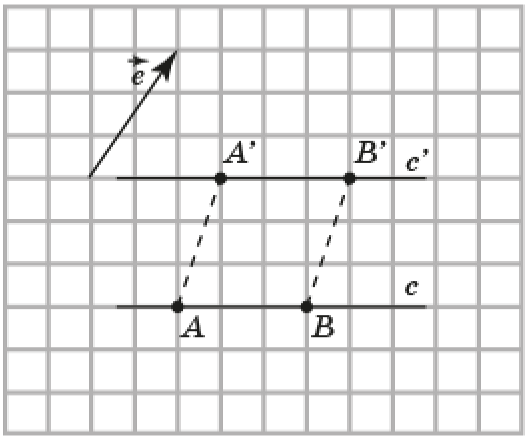

Рис. О4.3

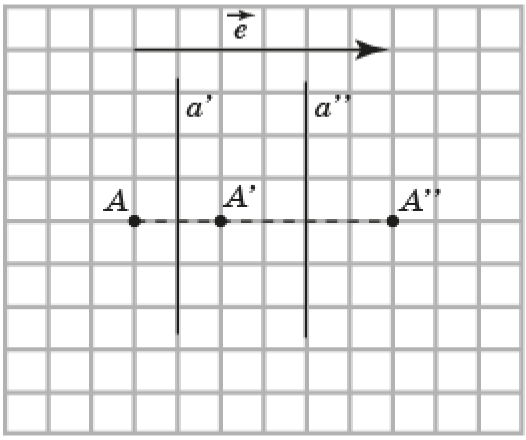

Рис. О4.4

5. $\angle AOA'' = 2\angle aOa'$ (рис. О4.5). **6.** Параллельный перенос (рис. О4.6).

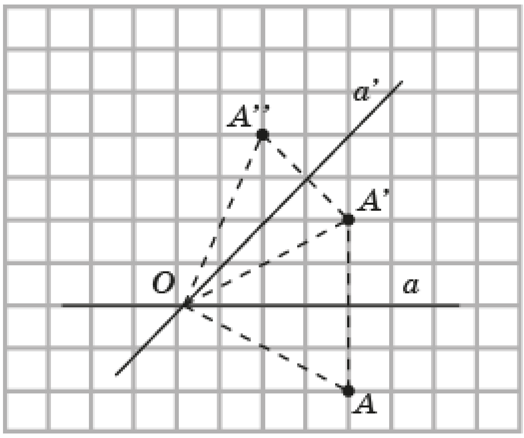

Рис. О4.5

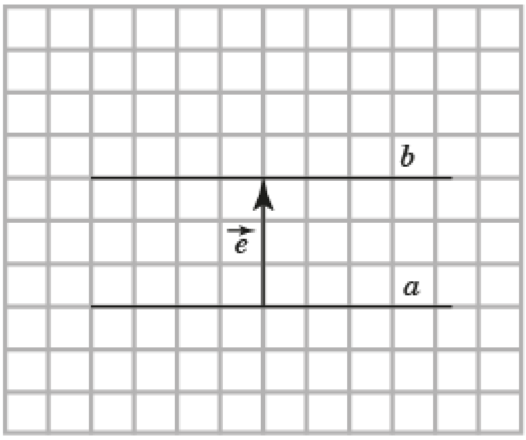

Рис. О4.6

7. Поворот вокруг точки *O* (рис. О4.7). **8.** Параллельный перенос (рис. О4.8).

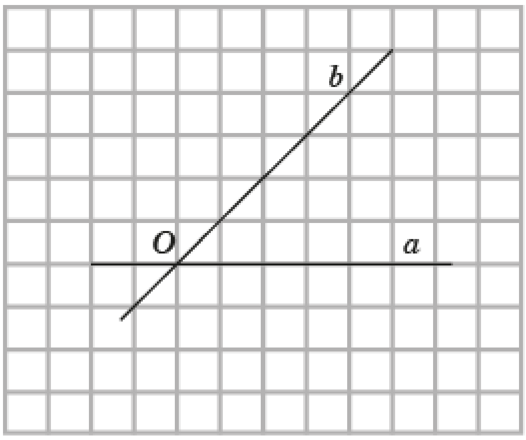

Рис. О4.7

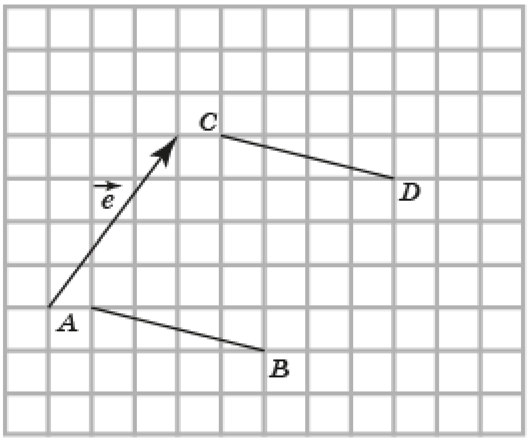

Рис. О4.8

9. Осевая симметрия (рис. О4.9). **10.** Композиция параллельного переноса и поворота (рис. О4.10).

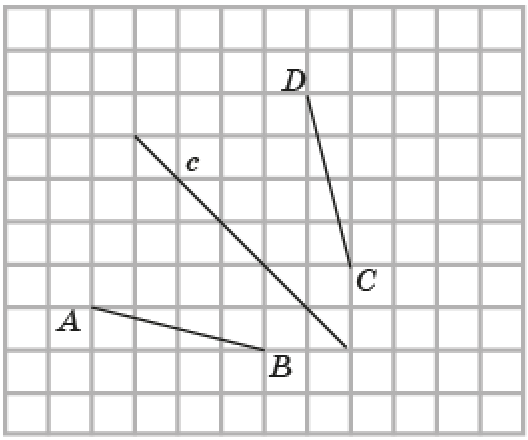

Рис. О4.9

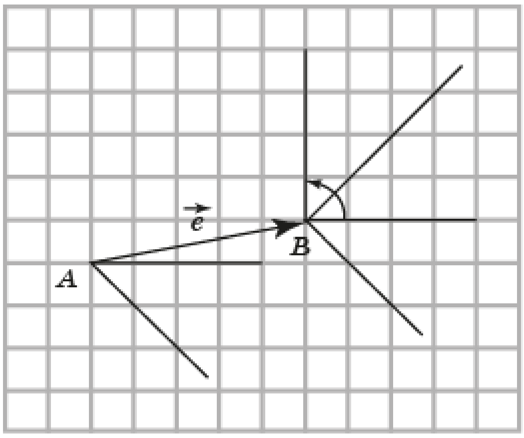

Рис. О4.10

11. Осевая симметрия (рис. О4.11). **12.** Композиция параллельного переноса, поворота и осевой симметрии (рис. 4.12).

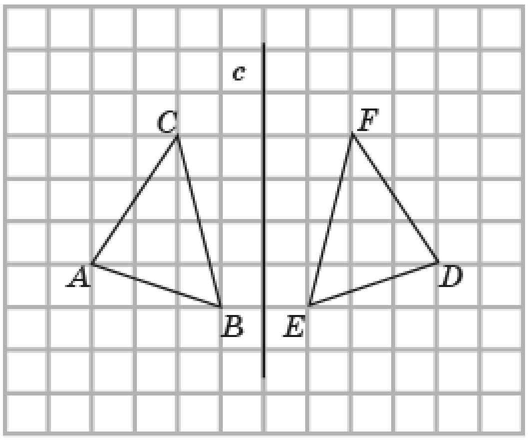

Рис. О4.11

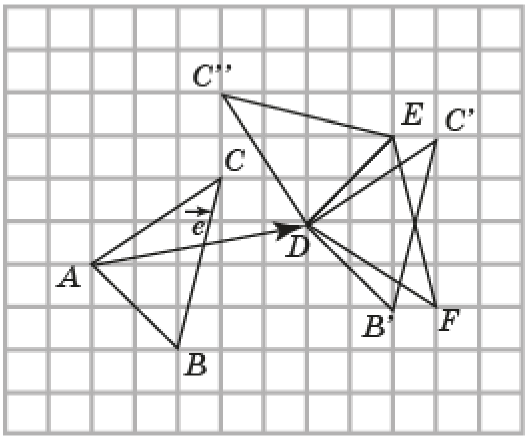

Рис. О4.12

13. Рисунок О4.13. **14.** Рисунок О4.14.

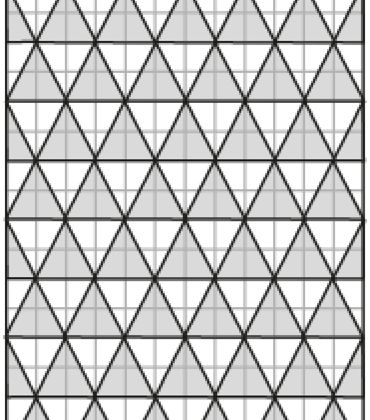

Рис. О4.13

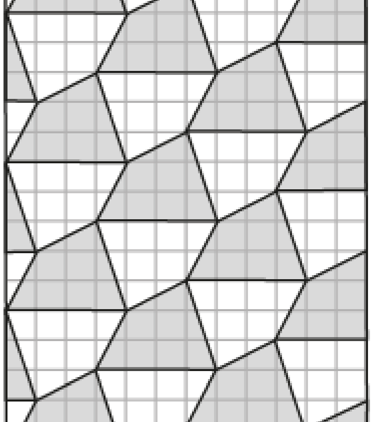

Рис. О4.14

15. Рисунок О4.15. **16.** Рисунок О4.16.

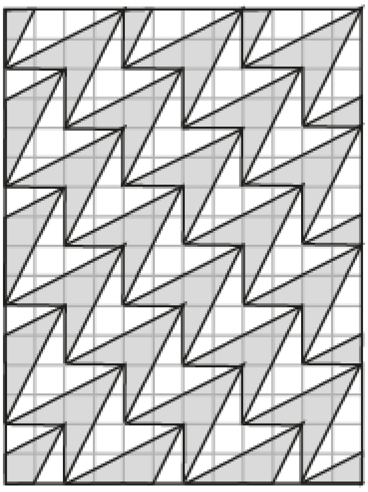

Рис. О4.15

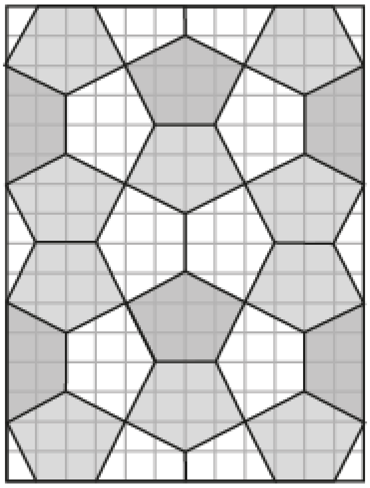

Рис. О4.16

17. Рисунок О4.17. **18.** Рисунок О4.18.

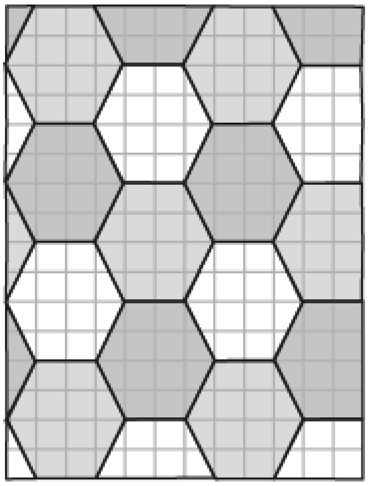

Рис. О4.17

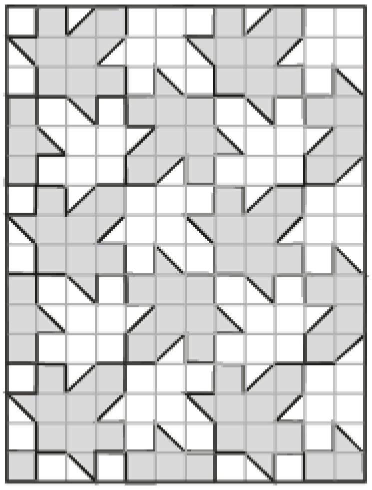

Рис. О4.18

19. Рисунок О4.19. **20.** Рисунок О4.20.

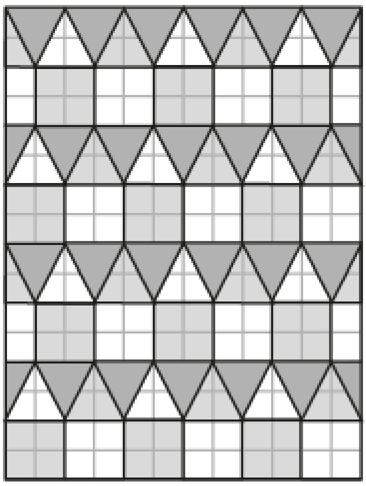

Рис. О4.19

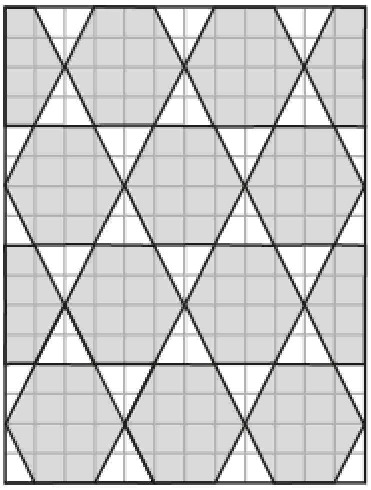

Рис. О4.20

21. Рисунок О4.21. **22.** Рисунок О4.22.

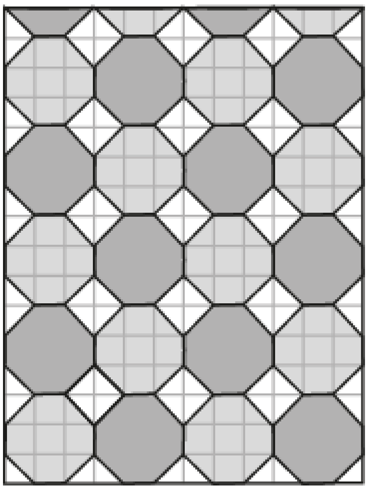

Рис. О4.21

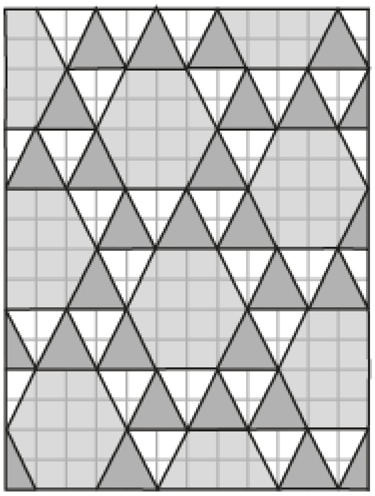

Рис. О4.22

23. Рисунок О4.23. **24.** Рисунок О4.24.

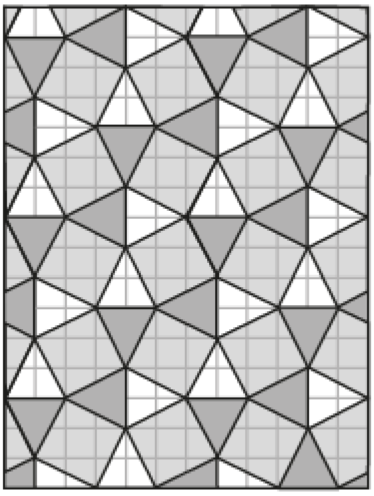

Рис. О4.23

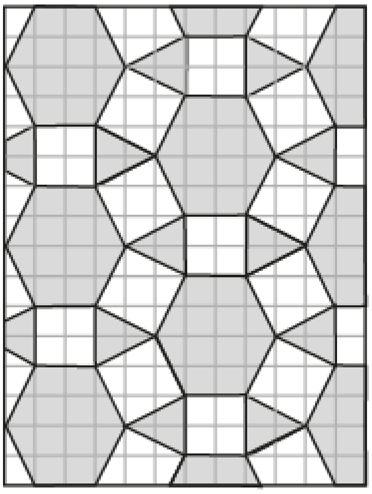

Рис. О4.24

25. Рисунок О4.25. **26.** Рисунок О4.26.

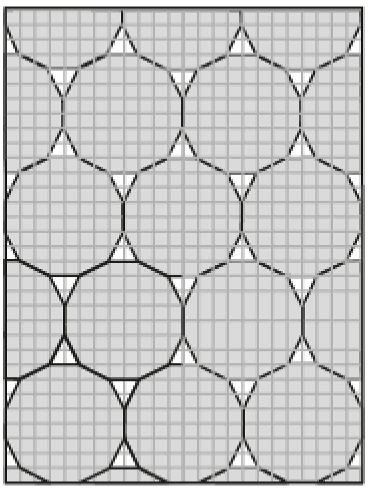

Рис. О4.25

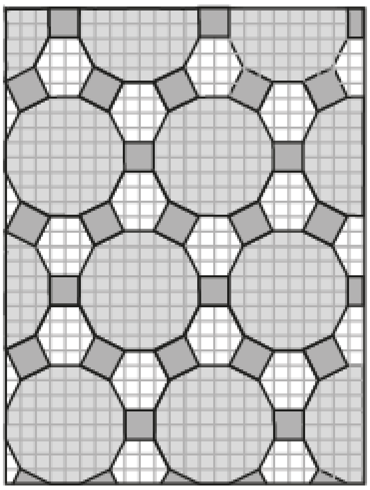

Рис. О4.26

5. Инверсия

1. Из подобия треугольников OAB и OBA' следует равенство $OA \cdot OA' = OB^2 = R^2$ (рис. O5.1). **2.** Рисунок O5.2.

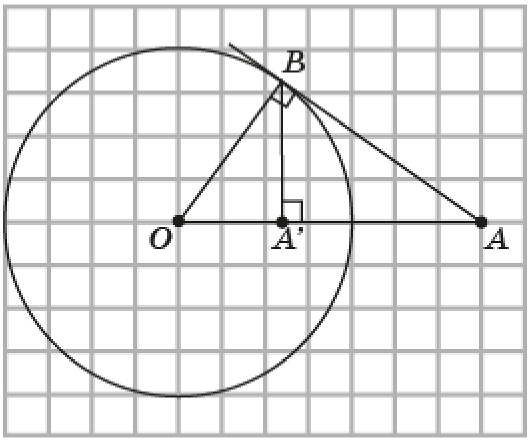

Рис. O5.1

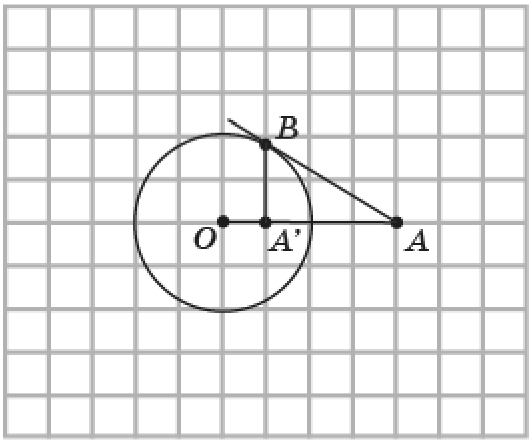

Рис. O5.2

3. Рисунок O5.3. **4.** Рисунок O5.4

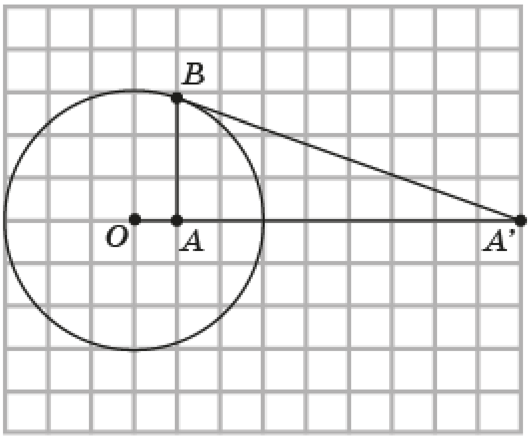

Рис. O5.3

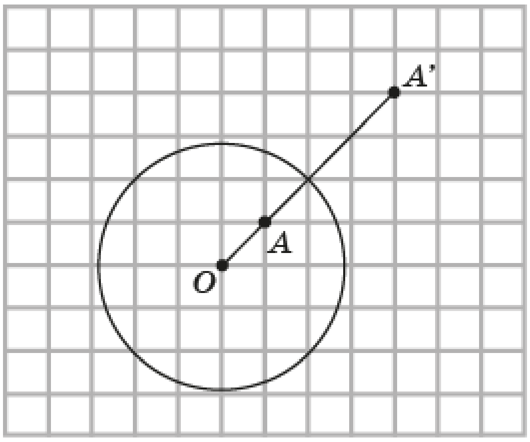

Рис. O5.4

5. Рисунок O5.5. **6.** Рисунок O5.6.

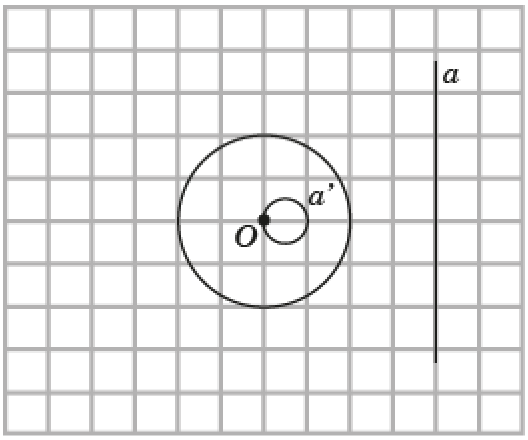

Рис. O5.5

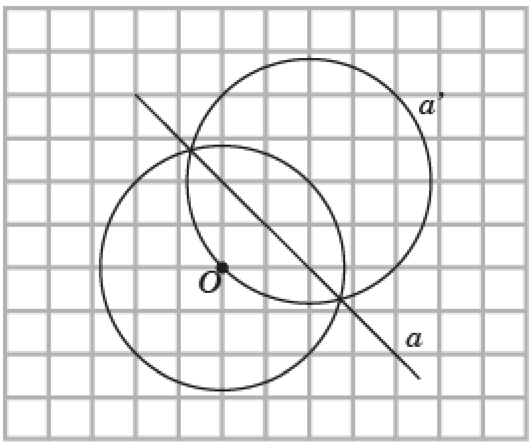

Рис. O5.6

7. Рисунок О5.7. **8.** Рисунок О5.8.

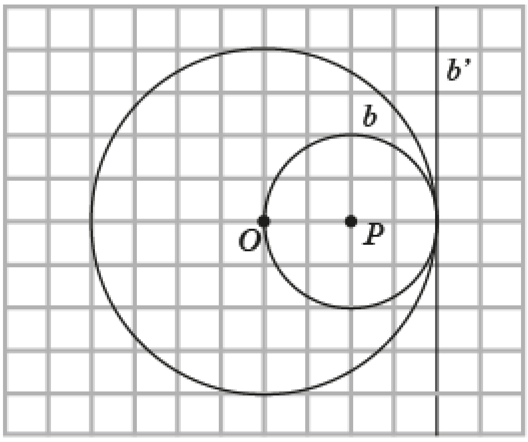

Рис. О5.7

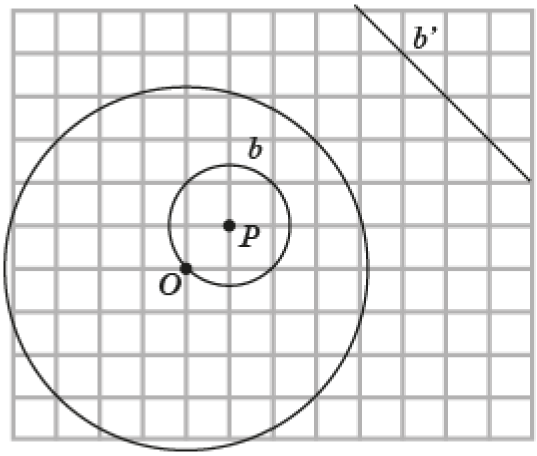

Рис. О5.8

9. Рисунок О5.9. **10.** Рисунок О5.10.

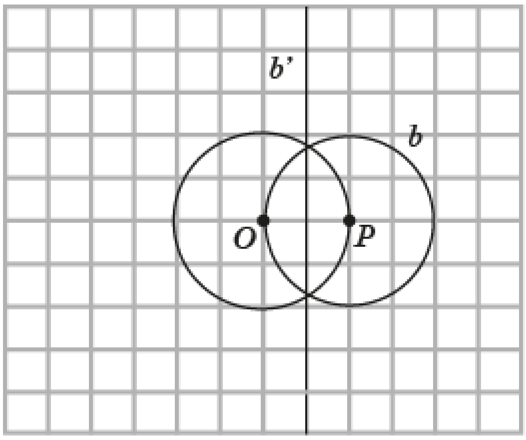

Рис. О5.9

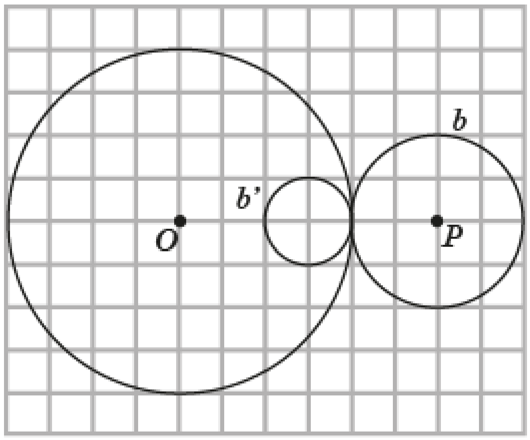

Рис. 5.10

11. Рисунок О5.11. **12.** Рисунок О5.12.

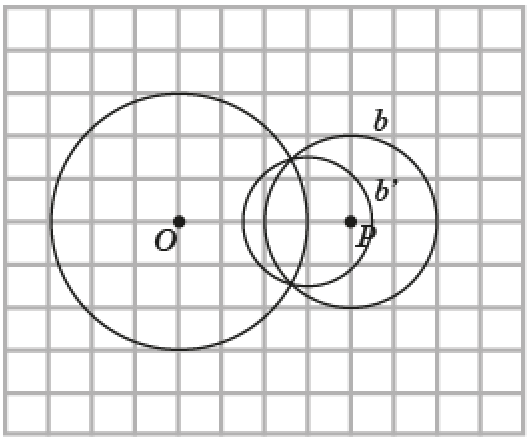

Рис. О5.11

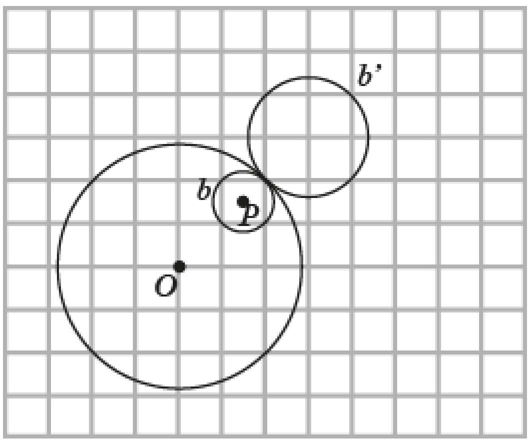

Рис. О5.12

13. Отрезок OB касательной равен радиусу R окружности с центром O (рис. О5.13). Из теоремы об отрезках секущей следует равенство $OA \cdot OA' = R^2$. Следовательно, при инверсии точки A окружности переходят в точки A' этой окружности. **14.** Искомая прямая c показана на рисунке О5.14.

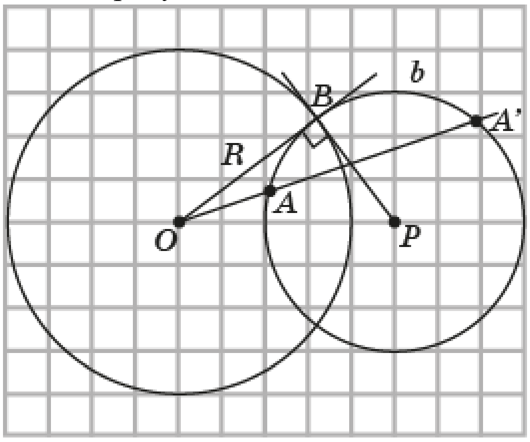

Рис. О5.13

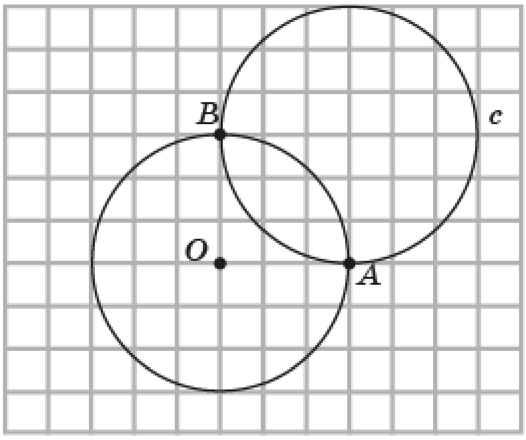

Рис. О5.14

15. Рисунок О5.15. **16.** Рисунок О5.16.

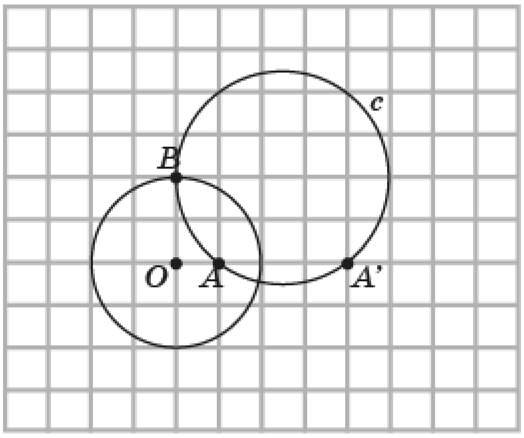

Рис. О5.15

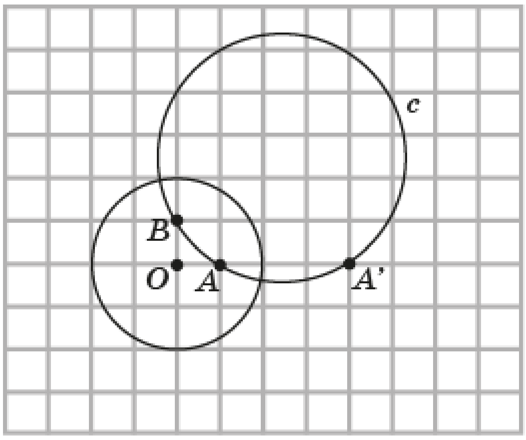

Рис. О5.16

. **17.** Рисунок О5.17. **18.** Рисунок О5.18.

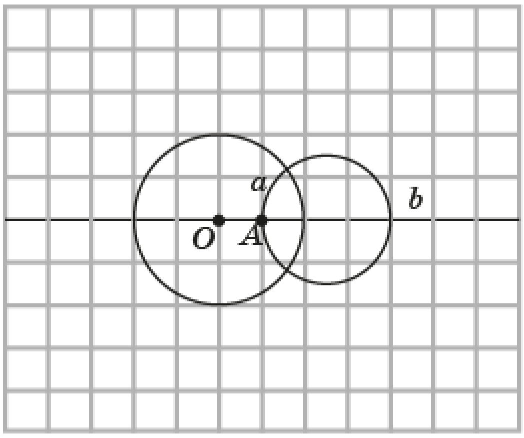

Рис. О5.17

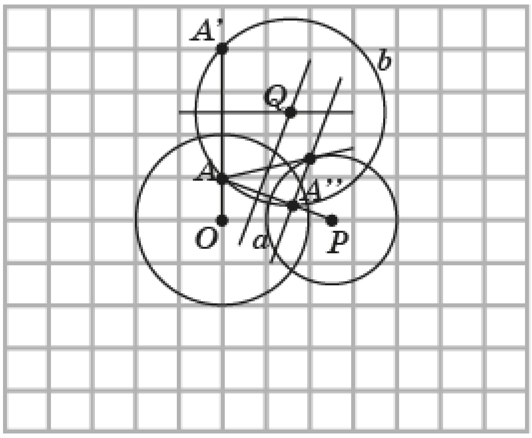

Рис. О5.18

Литература

1. Гильде В. Зеркальный мир. М.: Мир, 1982.

2. Тарасов Л. В. Этот удивительно симметричный мир. М.: Просвещение, 1982.

3. Шафрановский И. И. Симметрия в природе. 2-е изд. Л.: Недра, 1985.

4. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М.: Наука, 1972.

5. Яглом И. М. Геометрические преобразования, т. 1, 2. М.: Гос. изд. техн.-теор. литературы, 1955.

6. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Моя математика. Курс по выбору. Геометрия. 7-9 классы: учебное пособие. М.: Просвещение, 2025.

7. http://vasmirnov.ru

СОДЕРЖАНИЕ